O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

SAMARQAND IQTISODIYOT VA SERVIS INSTITUTI

X.Q.QARSHIBOYEV, I.E.SHODMONOV,
I.A.SHUKUROV

AMALIY MATEMATIKA 1

O‘QUV QO‘LLANMA

60310100-Iqtisodiyot (tarmoqlar va sohalar bo‘yicha)
ta’lim yo‘nalishi talabalari uchun

SAMARQAND - 2023

UO‘K: 51(075.8)
Q 22
KBK: 22.11ya73

X.Q.Qarshiboyev, I.E.Shodmonov, I.A.Shukurov

Amaliy matematika 1 [Matn]: **o‘quv qo‘llanma** / Samarqand iqtisodiyot va servis instituti – Samarqand.: “FAN BULOG‘I” nashriyoti, 2023 - 276 bet.

Mazkur o‘quv qo‘llanma Samarqand iqtisodiyot va servis instituti O‘quv-uslubiy Kengashi tomonidan tasdiqlangan “Amaliy matematika 1” fani amaldagi fan dasturiga mos bo‘lib, 60310100-Iqtisodiyot (tarmoqlar va sohalar bo‘yicha) ta’lim yo‘nalishi bo‘yicha bilim oladigan talabalar uchun muljallangan bo‘lib, undan boshqa ta’lim yo‘nalishdagi bakalavriatlar ham foydalanishlari mumkin.

Mazkur o‘quv qo‘llanmada chiziqli algebra va analitik geometriya, matematik analizga kirish, qatorlar nazariyasi, differensial tenglamalar nazariyasi bo‘limlari keltirilgan. O‘quv qo‘llanmada oldin fanning nazariy qismlari qisqacha ayrim boblarda esa kengroq berilgan bo‘lib, qulay usullarni qo‘llab misol va masalalar yechilgan. Misol va masalalar yechilgandan so‘ng, tahlil qilingan.

Taqrizchilar:

G.A.Xasanov – SamDU “Matematik analiz” kafedrasi mudiri f-m.f.n.
F.E.Jomonqulova - SamISI “Axborot texnologiyalari” kafedrasi dotsenti, t.f.n.

O‘quv qo‘llanma Samarqand iqtisodiyot va servis instituti Kengashining 2023 – yil 10 - noyabragi 4 - sonli qaroriga muvofiq o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan.

ISBN: 978-9910-753-45-9

© X.Q.Qarshiboyev, I.E.Shodmonov, I.A.Shukurov, SamISI. 2023 y.
© “Fan bulog‘i” nashriyoti, 2023 y.

KIRISH

“Amaliy matematika 1” fani o‘z rivojlanishi tarixida an’anaviy fanlardan tashqari iqtisodiyot sohasidagi fanlarga ham jadal kirib kelib, rivojlanib bormoqda. “Amaliy matematika 1” fanining iqtisodiy sohalardagi amaliy tadbiqlarini bugungi kunda juda ko‘p uchratamiz. Ushbu fan insoniyat taraqqiyotida vujudga kelgan va uning rivojlanishida katta ahamiyatga ega bo‘lgan fanlarning yetakchilaridan desak xato qilmagan bo‘lamiz.

“Amaliy matematika 1” fanini o‘rganishning bevosita amaliy tatbiqlaridan tashqari yosh mutaxassislarni har taraflama rivojlangan komil inson qilib tarbiyalashda uning alohida o‘ringa egaligini ta’kidlamasdan bo‘lmaydi. Tahliliy mulohaza, mantiqiy mushohada, fazoviy tasavvur, abstrakt tafakkur inson faoliyatining barcha sohasi uchun zarur qobiliyatki, bular matematika fanlarini o‘rganish jarayonida shakllanib, rivoj topadi.

Hozirgi jadal rivojlanayotgan davr iqtisodiyotida matematika usullari juda keng qo‘llanilmoqda. Shu sababli, yetuk iqtisodchilarni tayyorlashda matematik usullardan foydlanishni o‘qitish bo‘lajak iqtisodchilarni o‘z faoliyatida uchraydigan iqtisodiy masalalarni hal qilishda to‘g‘ri va asosli qarorlar qabul qilishlarida muhim ahamiyatga egadir. Amaliy va nazariy iqtisodiyot masalalari turli-tuman bo‘lib, bunda statisik ma’lumotlarni tahlil qilish usullari, iqtisodiy jarayonning rivojlanish holatini baholash va prognoz qilish masalalari dolzarb hisoblanadi.

Jamiyatdagi iqtisodiy jarayonlarning noaniqlik va tavakkalchilik bilan bog‘liqligi hamda stoxastik harakterdaligi bu jarayonlarni tadqiq etishda ehtimollar nazariyasi va matematik statistika usullarini qo‘llashni taqazo etadi. Iqtisodiy jarayonlarni modellashtirish bilan birga bu jarayonlarning yechimini optimallashtirish ham muhimdir. Bu esa o‘z navbatida matematik usullarini qo‘llashni talab etadi.

“Amaliy matematika 1” fani iqtisodiy ta’limda asosiy tayanch fan hisoblanib, uning usullari ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, iqtisodiy matematik modellar va usullar, ekonometrika, iqtisodiy tahlil,

informatika, makro va mikro iqtisodiyot, moliyaning miqdoriy metodlari, logistika va boshqa fanlarning asosiy bilimlarini egallashda asosiy qurol sifatida ishlatiladi.

Ushbu o‘quv qo‘llanma matematikaning chiziqli algebra asoslari va ularning tadbiqlari, analitik geometriya va ularning tadbiqlari, matematik analiz asoslari va uning tadbiqlari va differensial tenglamalar bo‘limlarini o‘z ichiga oladi.

I BOB. CHIZIQLI ALGEBRA ASOSLARI VA ULARNING TADBIQLARI

1.1-§. Matritsalar va ular ustida amallar

Matritsaviy algebra-matritsa ta'rifi va unga asoslangan matematikaning bo'limi bo'lib, iqtisodchilar uchun juda muhim ahamiyatga ega. Bunga shunday izoh berish mumkinki, aksariyat iqtisodiy ob'ektlar va jarayonlarning matematik modellari juda sodda, muhimi kompakt matritsa ko'rinishida yoziladi.

1-ta'rif. m ta satrli va n ta ustunli to'g'ri burchakli $m \cdot n$ ta elementdan tuzilgan jadval

$$\underset{mxn}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2j} \ \ldots \ a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mj} \ldots . a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ *o'lchamli matritsa* deyiladi. Matritsalar lotin alfavitining bosh harflari bilan belgilanadi, masalan, $A, B, C, \ldots$ kabi. A matritsani qisqacha $A = (a_{ij});\ i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan,

$$\underset{2\times 3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matritsalar ( ) qavsdan tashqari quyidagi belgilar bilan ham belgilanadi: $\| \ \|, [\ ]$.

Matritsa yordamida ba'zi iqtisodiy bog'lanishlarni yozish qulay. Masalan, alohida iqtisodiy tarmoqlarga xom ashyolarni taqsimlash jadvali:

Resurslar	Iqtisod tarmoqlari	
	sanoat	qishloq xo'jaligi
Elektroenergiya	5,3	4,1
Mehnat resurslari	2,8	2,1
Suv resurslari	4,8	5,1

tarmoqlar bo‘yicha resurslarni taqsimlash matritsa ko‘rinishda ixcham yozilishi mumkin:

$$\underset{3\times 2}{A}=\begin{pmatrix}5{,}3 & 4{,}1\\ 2{,}8 & 2{,}1\\ 4{,}8 & 5{,}1\end{pmatrix}.$$

Bu yozuvda, matritsaning $a_{11}=5{,}3$ element sanoatning elektroenergiya ist’emolini, $a_{22}=2{,}1$-esa qishloq xo‘jaligini ist’emol mehnat resurslarini ko‘rsatadi.

Matritsalarda satrlar soni ustunlar soniga teng bo‘lsa, bunday matritsalar *kvadrat matritsa* deb ataladi.

Har bir n tartibli kvadrat matritsauchun uning elementlaridan tuzilgan determinantni hisoblash mumkin, bu determinantga A matritsaning *determinanti* deyiladi va $\det A$ yoki $|A|$ kabi belgilanadi. $\det A=0$ bo‘lsa, A matritsaga *maxsus matritsa*, $\det A\neq 0$ bo‘lsa, *maxsusmas matritsa* deyiladi. Kvadrat matritsaning $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ elementlar joylashgan diagonali *bosh diagonal*, $a_{1n},a_{2n-1},\ldots,a_{n1}$ elementlari joylashgan diagonali *yordamchi diagonal* deyiladi. Bosh diagonaldagi elementlar 0 dan farqli boshqa barcha elementlari 0 ga teng kvadrat matritsa *diagonal matritsa* deyiladi. Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

matritsa uchinchi tartibli diagonal matritsadir.

Agar $n-$chi tartibli diagonal matritsaning barcha diagonal elementlari 1 ga teng bo‘lsa, u holda bunday matritsaga $n-$chi tartibli *birlik matritsa* deyiladi va u E harfi orqali belgilanadi.

Masalan, $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$- uchinchi tartibli *birlik matritsa*.

Faqat bitta satrdan iborat $(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})$ matritsaga satr matritsa deyiladi. Faqat bitta ustunga ega

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$$

matritsaga ustun matritsa deb ataladi.

No‘l yoki ixtiyoriy o‘lchovli matritsa deyiladi, agarda uning barcha elementlari 0 ga teng bo‘lsa:

$$\underset{m\times n}{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

A matritsaga quyidagi matritsani mos qo‘yish mumkin:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} a_{21} \cdots a_{m1} \\ a_{12} a_{22} \cdots a_{m2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} a_{2n} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bu matritsaning har bir satri A matritsaning unga mos ustunidan iborat. A^T matritsani A matritsaga nisbatan transponirlangan deyiladi.

$A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ $(i = \overline{1m},\ j = \overline{1n})$ matritsalarning mos elementlari $a_{ij} = b_{ij}$ teng bo‘lsa, bunday matritsalar teng deyiladi.

Matritsalar ustida amallar. *A matritsaning λ songa ko‘paytirish deb,* shunday $B = \lambda A$ matritsaga aytiladiki, uning elementlari $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, barcha $i = 1,2,..,m;\ j = 1,2,...,n$ lar uchun topiladi.

Masalan, agar $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ bo‘lsa, u holda $5A = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 0 \\ 20 & -15 & 5 \\ 10 & 40 & 30 \end{pmatrix}$

Xususiy holda, *A matritsaning 0 soniga ko‘paytmasi* nol matritsa **0** hosil bo‘ladi, y’ni $0 \cdot A = 0$.

Bir xil $m \times n$ o‘lchamli ikkita $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ *matritsalarning yig’indisi* deb, shunday $C = A + B$ matritsaga aytiladiki, uning elementlari $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n$ lar uchun aniqlanadi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 0\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix},\ C=A+B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 5 & 9 & 11\end{pmatrix}.$$

Ikkita bir xil o‘lchamli matritsalarning ayirmasi quyidagi amal orqali oshiriladi: $A-B=A+(-1)\cdot B$.

$A=(a_{ij})$ *matritsani* $B=(b_{ij})$ *matritsaga ko‘paytirsh* mumkinki, qachonki birinchi matritsaning ustunlar soni ikkinchi matritsaning satrlar soniga teng bo‘lsa. U holda $\underset{m\times k}{A}\cdot\underset{k\times n}{B}$ matritsalar ko‘paytmasi shunday $\underset{m\times n}{C}$ matritsaga uning c_{ij} elementi A matritsa i-satri elementlarini B matritsa j-ustunining mos elementlariga ko‘paytmalari yig’indisiga teng, ya’ni:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj},\ i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n.$$

1-misol. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 4\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ matritsalar berilgan. $A\cdot B$ ko‘paytma matritsani toping.

***Yechish*.** Ko‘paytma matritsaning o‘lchamini topamiz $\underset{2\times3}{A}\cdot\underset{3\times3}{B}=\underset{2\times3}{C}$. Birinchi matritsaning ustunlar soni, ikkinchi matritsaning satrlar soniga teng, shuning uchun bu matritsalarni ko‘paytirish mumkin:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 4\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1(-1)+0\cdot5+2(-2) & 1\cdot0+0\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot4+2\cdot1\\ 3(-1)+1\cdot5+0(-2) & 3\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 3\cdot1+1\cdot4+0\cdot1\end{pmatrix}$$

Shunday qilib, $C=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 7\end{pmatrix}$ matritsani hosil qilamiz.

Matritsalar ustida quyidagi amallar o‘rinli:

1). $A+B=B+A$

2). $(A+B)+C=A+(B+C)$

3). $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$

4). $A(B+C)=AB+AC$

5). $(A+B)C=AC+BC.$

6). $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B).$

7). $A(BC)=(AB)C.$

Butun musbat darajali A^m $(m>1)$ *kvadrat matritsa deb,* A matritsani o‘zini-o‘ziga m marta ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan matritsaga aytiladi, y’ni

$$A^m \equiv \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m\ марта}.$$

Ta’rifga ko‘ra, $A^0 = E,\ A^1 = A.$ Osonlik bilan ko‘rsatish mumkinki, $A^m \cdot A^k = A^{m+k},\ (A^m) = A^{mk}.$

2-misol. A^2 ni toping, bunda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Yechish. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.

Tayanch ibora va tushunchalar

Matritsa, matritsaning o‘lchami, matritsaning determinanti, maxsus matritsa, maxsusmas matritsa, bosh diagonal, diagonal matritsa, birlik matritsa, transponirlangan matritsa, teng matritsalar, matritsalarning yig’indisi, matritsani songa ko‘paytirish, matritsalar ko‘paytmasi.

Takrorlash uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning o‘lchovi nima va u qanday yoziladi?
3. Kvadrat matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
4. Matritsaning determinanti nima?
5. Maxsus va maxsusmas Matritsalar qanday Matritsalar?
6. Diagonal matritsa deb nimaga aytiladi?
7. Birlik matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
8. Transponirlangan matritsa deb nimaga aytiladi?
9. Qanday matritsalar teng bo‘ladi?
10. Matritsalar yig’indisi nima?
11. Matritsani songa ko‘paytirish qanday bo‘ladi?
12. Qanday Matritsalarni ko‘paytirish mumkin?
13. Matritsalar qanday ko‘paytiriladi?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. AB va BA matritsalarning ko‘paytmasini toping

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -3\\ 5 & 2\end{pmatrix}\ .$$

2. $D=(AB)^T-C^2$ matritsani toping

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}.$$

3. Ushbu

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & 7 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 5 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

matritsalarni ko‘paytiring.

4. Matritsalarni yig’indisini toping

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

5. ABC matritsalarni ko‘paytmasini toping.

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$$

1.2-§. Determinantlar nazariyasi

Ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}\ \ x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}\qquad(1)$$

$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ bo‘lsa, (1) tenglamalar sistemasi yagona

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad (2)$$

yechimga ega bo‘ladi. (2) formuladagi sur’at va mahrajdagi ifodalar 2-tartibli determinant (aniqlovchi)lar deyiladi. 2-tartibli determinantni

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

bilan belgilanadi. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ larga determinantning elementlari deyiladi. Shunday qilib, (2) formulalarni determinantlar yordamida

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad (3)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

$$\Delta=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{21}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

ifodaga *3- tartibli determinant deyiladi* va

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

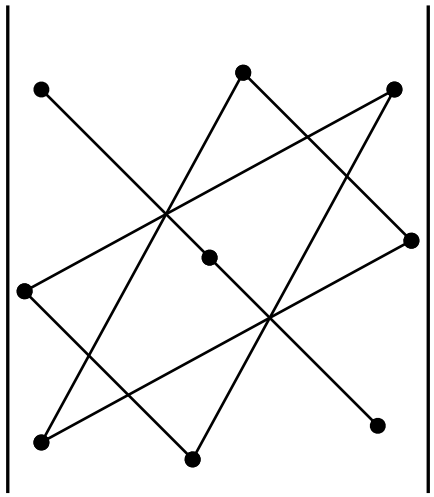
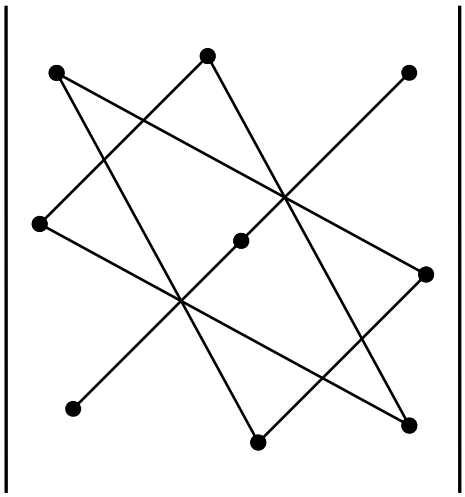
bilan belgilanadi.

a_{11}, a_{22}, a_{33} elementlar *bosh diagonalni*, a_{13}, a_{22}, a_{31} *yordamchi diagonalni* ifodalaydi. (4) tenglikda 2- tartibli determinantlarni kattaliklari bilan almashtirsak

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (5)$$

bo‘ladi. (5) formulani esda saqlash *uchun uchburchak qoidasidan* foydalanish mumkin. Elementlarni nuqtalar bilan belgilasak, ushbu sxema hosil bo‘ladi :

	
+	–

(+) ishora bilan, (-) ishora bilan olinadi.

Minor va algebraik to‘ldiruvchilar.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}$ determinantda i - satrni va j - ustunni o‘chirishdan 2-tartibli

determinant hosil bo‘ladi, bunga a_{ij} elementga mos *minor* deyiladi va M_{ij} bilan belgilanadi. Masalan,

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix}, M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix}$$

va boshqalar.

a_{ij} *elementning algebraik to‘ldiruvchisi* deb unga mos minorning musbat yoki manfiy ishora bilan olingan kattaligiga aytiladi,bunda $i + j$ juft bo‘lsa, musbat ishora bilan, $i + j$ toq bo‘lsa manfiy ishora olinadi. a_{ij} elementning algebraik to‘ldiruvchisini A_{ij} bilan belgilanadi. Demak,

$$A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} a_{13} \\ a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{13} \\ a_{31} a_{33} \end{vmatrix}$$

bo‘ladi va boshqalar.

Determinantlarning xossalari:

1. Determinantning barcha satridagi elementlarini mos ustun elementlari bilan almashtirilsa uning qiymati o‘zgarmaydi, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} a_{21} a_{31} \\ a_{12} a_{22} a_{32} \\ a_{13} a_{23} a_{33} \end{vmatrix}.$$

1-misol. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 40 - 0 - 0 + 5 = 51$

bo‘lib, bu determinantda barcha satrlarini mos ustunlar bilan almashtirsak,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -5 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 40 - 0 - 0 + 5 = 51$$

bo‘ladi.

2-misol. Ikkita satr (ustun)ni o‘zaro almashtirilsa determinant qiymatining ishorasi teskarisiga o‘zgaradi;

Masalan, $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 120 - 2 + 0 - 0 - 10 - 8 = 100$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 10 + 8 + 0 + 2 - 120 - 0 = -100$$

bo‘lib, bu 2-xossaning o‘rinli ekanligini ko‘rsatadi.

3-misol. Ikkita satri yoki ustuni bir xil bo‘lgan determinantning qiymati no‘lga teng.

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 56 + 0 - 0 - 0 + 56 = 0$$

bo‘ladi, bu esa 3-xossaning to‘g’riligini ko‘rsatadi.

4-misol. Biror satr (yoki ustun) elementlarining umumiy ko‘paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarishga mumkin.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5-misol. Determinantning biror ustun (satr) elementlariga boshqa ustunning (satrining) bir xil songa ko‘paytirilgan mos elementlarini qo‘shishdan determinantning qiymati o‘zgarmaydi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3 – tartibli determinantni *diagonallar usuli* deb ataluvchi ushbu usul bilan ham hisoblash mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11}\ a_{12} \\ a_{21}\ a_{22} \\ a_{31}\ a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} .$$

1-misoldagi determinantni diagonal usulidan foydalanib hisoblasak,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{matrix} = 24 - 6 + 0 + 0 + 0 + 4 = 22$$

bo‘ladi.

***n*- tartibli determinantlar haqida.** Ko‘pgina masalalarni yechishda 2 va 3-tartibli determinantlardan tashqari yanada yuqori tartibli determinantlar ham uchraydi. Masalan, 4-tartibli determinant ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Umumiy holda n-tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bunda $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n}$ mos ravishda $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ elementlarning algebraik to‘ldiruvchilaridir. Ma’lumki, algebraik to‘ldiruvchilar $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n}$ ning tartiblari $(n-1)$ bo‘ladi. Determinantlarning hamma xossalari n-tartibli determinant uchun ham o‘rinlidir.

Yuqori tartibli determinantlarni hisoblashda determinantlarning 6-xossasidan foydalanib, uning tartibini pasaytirish bilan 3 yoki 2-tartibli determinantlarga keltirib hisoblanadi. Masalan, 4-tartibli determinantni 1-satr elemenlari bo‘yicha yoysak ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Bundan yuqori tartibli determinantlarning ham kattaligi yuqoridagiga o‘xshash hisoblanadi. Masalan, 6-tartibli determinantning kattaligini hisoblash kerak bo‘lsa, uni biror satri yoki ustuni elementlari bo‘yicha yoyib 5-tartibli determinantlarga, keyin o‘z navbatida 5-tartibli determinanatlarni ham biror satri yoki ustuni elementlari bo‘yicha yoyib, 4-tartibli determinantlarga keltiriladi va hokazo.

Determinantlarning yuqorida ko‘rsatilgan xossalari hamma tartibli determinantlar uchun ham to‘g’ri. Endi yuqori tartibli determinantlarni hisoblashga misol qaraymiz. Ushbu determinantning kattaligini hisoblang.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Yechish. Berilgan determinantni 1-satr elementlari bo‘yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2\left[3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right] + 3\cdot\left[(-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right] =$$

$$= 2(-9+4+16)+3(2+6-16) = 22-24 = -2.$$

Determinantlarni hisoblashda uning biror satri yoki ustunlarida no‘llar ko‘proq bo‘lsa, o‘sha satr yoki ustun elementlari bo‘yicha yoyib

hisoblash ancha qulaylik keltiradi, masalan, yuqoridagi misolda 1-satr elementlari bo‘yicha yoyganimiz uchun, ya’ni unda 2 ta no‘l element bo‘lgani uchun 2 ta 3- tartibli determinantlarni hisoblab chiqishga hojat qolmadi. Bunday satr yoki ustunlar bo‘lmasa determinantlarning 8-xossasidan foydalanib, uni bunday satrga yoki ustunga ega bo‘ladigan qilib o‘zgartirish mumkin, misol uchun ushbu

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblaylik. Buning uchun 1-ustun elementlarini oldin 2 ga keyin mos ravishda 5 ga, -4 ga ko‘paytirib, 2,3 va 4- ustunlarning mos elementlariga qo‘shamiz, bu holda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \\ 3 & 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix}$$

bo‘lib, keyingi 3-tartibli determinantni 2-satr elementlari bo‘yicha yoysak:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 7 & 13 & -11 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-33 + 21) = 7 \cdot (-12) = -84$$

bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Algebra, algoritm, 2,3 va n-tartibli determinantlar, bosh diagonal, yordamchi diagonal, minor, algebraik to‘ldiruvchi, uchburchaklar qoidasi, diagonal qoidasi, determinantlarning xossalari, determinantni biror satri (ustuni) elementlari bo‘yicha yoyish.

Takrorlash uchun savollar

1. Algebra va algoritm iborasi nima bilan bog’liq?
2. 2-tartibli determinant qanday belgilanadi va u nimaga teng?
3. 3-tartibli determinant qanday belgilanadi va u qanday hisoblanadi?

4. Determinantlarning xossalari nimalardan iborat.

5. 4-tartibli determinantlarning kattaligi qanday hisoblanadi?

6. 5,6,…,n-tartibli determinantlar qanday belgilanadi va hisoblanadi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi determinantlar birinchi ustun elementlari bo‘yicha yoyib hisoblansin:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$; **3)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}$.

2. Quyidagi determinantlar nollar eng ko‘p bo‘lgan satr elementlari bo‘yicha yoyib hisoblansin:

1) $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}$ **3)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

3. Quyidagi determinantlar hisoblansin:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$; **3)** $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}$; **5)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix}$; **6)** $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Ushbu determinantlarni tartibini pasaytirish usulidan foydalanib hisoblang:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -4 & -2 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -7 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; **4)** $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

determinantlarning kattaligini hisoblang.

5. Ushbu

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

determinantlarni birinchi satr elementlari bo‘yicha yoyib hisoblang.

1.3-§. Teskari matritsa va matritsa rangi

Teskari matritsava uni topish. A kvadrat matritsa uchun $AB = BA = E$ birlik matritsabo‘lsa, B kvadrat matritsa A matritsaga *teskari matritsa* deyiladi. Odatda, A matritsaga teskari matritsa A^{-1} bilan belgilanadi.

Teorema. A kvadrat matritsa teskari matritsaga ega bo‘lishi uchun A matritsaning determinanti 0 dan farqli bo‘lishi zarur va yetarlidir. A kvadrat matritsa uchun $\det A \neq 0$ bo‘lsa , unga teskari bo‘lgan yagona matritsa A^{-1} mavjud.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ - - - - - - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari A^{-1} matritsa

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ - - - - - - - - \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

formula bilan topiladi. Bunda A_{ij} mos ravishda a_{ij} elementlarning algebraik to‘ldiruvchilari va $\Delta = \det A$.

Teskari matritsani topishga misol qaraymiz.

1-misol. Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsani toping.

Yechish. Oldin A matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Yuqoridagi teoremaga asosan teskari matritsa mavjud, chunki $\Delta = -4 \neq 0$ ya'ni, berilgan matritsa maxsusmas matritsadir. A^{-1} ni topish uchun A matritsa hamma elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Teskari matritsani tuzamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

formulaga asosan

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & 9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$ tenglikning bajarilishini tekshirish mumkin.

Matritsaning rangi va uni hisoblash. A $m \times n$ o'lchovli matritsada k satr va k ta ustunini ajratamiz, bunda, k, m va n sonlardan kichik yoki ularning kichigiga teng bo'lishi mumkin. Ajratilgan satr va ustunlarning kesishuvida hosil bo'lgan k-tartibli determinantga A *matritsaning* k*-tartibli minori deyiladi*.

Ta'rif. A matritsaning 0 dan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga A *matritsaning rangi* deyiladi. A matritsaning rangi $rangA$ yoki $r(A)$ bilan belgilanadi.

Matritsarangini bevosita hisoblashda ko‘p sondagi determinantlarni hisoblashga to‘g’ri keladi. Quyidagi amallardan foydalanib matritsarangini hisoblash qulayroq. Matritsada: 1)faqat 0 lardan iborat satri (ustuni)ni o‘chirishdan; 2) ikkita satr (ustun)ning o‘rinlarini almashtirishdan; 3) biror satr (ustun)ning elementlarini biror $\lambda \neq 0$ songa ko‘paytirib, boshqa satr (ustun) mos elementlariga qo‘shish; 4) matritsani transponirlashdan, uning rangi o‘zgarmaydi. Bu amallarga odatda *elementar almashtirishlar* deyiladi.

2-misol. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

matritsaning rangini hisoblang.

Yechish. A matritsaning rangini hisoblash uchun elementar almashtirishlardan foydalanamiz. Birinchi satr elementlarini (–2) ga ko‘paytirib, uchinchi satr elementlariga qo‘shib quyidagi matritsani hosil qilamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7 \neq 0$$

bo‘lib, uchinchi tartibli minorlar 0 ga teng. Shunday qilib, berilgan matritsaning rangi 2 ga teng.

Iqtisodiy masalalarni matritsaviy usulda yechish

Matritsali usullardan xalq xo‘jaligi tarmoqlari, respublika iqtisodiyoti va xalq xo‘jaligini modellashtirishda ham foydalanish mumkin. Ushbu turdagi matritsalar kirish balansi deb ataladi va rejalashtirish hamda statistikada keng qo‘llaniladi. Tadqiqotni olib borishda biz eksperimental tajriba, statistik tahlil, zamonaviy iqtisod va matematik metodlaridan foydalandik.

Bundan shuni xulosa qilishimiz mumkinki, iqtisodiy faoliyatda tahlil qilishda ko‘proq qo‘llaniladi. Matritsalar usul murakkab va ko‘p

o‘lchovli iqtisodiy hodisalarni tahlil qilish maqsadida qo‘llaniladi. Ko‘pincha, ushbu usullar tashkilotlar va ularning tarkibiy qismlari faoliyatini qiyosiy baholash zarur bo‘lganda qo‘llaniladi. Shu jumladan, iqtisod fanida matritsa usuli iqtisodiy ob’ektlarning o‘zaro bog‘liqligini aks ettiruvchi model elementlarining qiymatini belgilovchi matritsa nazariyasi qoidalaridan foydalanishga asoslangan ob’ektlarning xossalarini ilmiy tadqiq qilish usuli hisoblanadi. U asosiy o‘rganish ob’ekti ishlab chiqarish-xo‘jalik faoliyatining chiqimlari va natijalari o‘rtasidagi muvozanat munosabatlari, xarajatlar va mahsulot standartlari bo‘lgan hollarda qo'llaniladi. Iqtisodiyot masalalarda matritsaning eng oddiy qo‘llanilishi misolini ko‘rib chiqamiz.

Tahlil va natijalar

Resurslar	Ko‘mir sanoati	Sog‘liqni saqlash
Elektr energiya	10.8	6,2
Mehnat resurslari	8	3,7
Suv resurslari	4	1,4

Taklif etilayotgan ma’lumotlarning soddalashtirilgan ko‘rinishdagi, qayd etilishi jadvali quyidagicha:

$$A = \begin{pmatrix} 10{,}8 & 6{,}2 \\ 8 & 3{,}7 \\ 4 & 1{,}4 \end{pmatrix}$$

Matritsa usulida amalga oshirilgan iqtisodiy masalalarni hal qilish har qanday ishlab chiqarishda iqtisodiy profilning asosiy muammolarini hal qilish imkonini beradi.

Korxona uch turdagi mahsulot (M1, M2, M3) ishlab chiqarsin, ikki turdagi xom ashyo (X1, X2) va iste’mol stavkalarini ishlatsin:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = (50\ 60\ 150).$$

Har bir turdagi xom ashyo birligining tannarxi (pul birligi) ustun matritsasi bilan ifodalanadi: $B = \begin{pmatrix} 50 \\ 45 \end{pmatrix}$

Ushbu masalani analitik yechamiz va biz quyidagi natijalarni olamiz: - 1-xom ashyoning xarajatlari $X1 = 7 \cdot 50 + 4 \cdot 60 + 8 \cdot 150 = 1790$ (birlik); - 2-xom ashyoning xarajatlari $X2 = 5 \cdot 50 + 3 \cdot 60 + 1 \cdot 150 = 580$ (birlik); shuning uchun X xom ashyo xarajatlarining matritsa qatorini mahsulot sifatida yozish mumkin:

$$X = CA$$

bu yerda X – xom ashyo xarajatlari; C - buyurtma; A - ishlab chiqarish matritsasi.

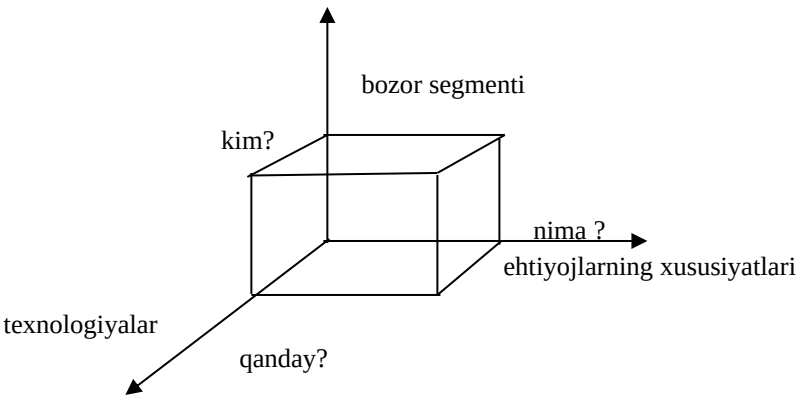
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} (50\ 60\ 150) = (1750\ 580).$$

Xom ashyoning umumiy qiymatini $Q = 1790 \cdot 50 + 580 \cdot 45 = 115600$ (pul birlik) matritsa shaklida yozilishi mumkin:

$$Q = XB = (CA)B = (115600)$$

bu erda Q - umumiy xarajat; B – xom ashyo birligining tannarxi.

Iqtisodiyotda matritsalardan foydalanish Abel matritsasi amalga oshirilmaydi, chunki u ko‘rib chiqilayotgan sohaga energiya effekti va marketing texnologiyalarida raqobatbardoshlik mezonlarini tanlashga imkon beradi.



Masalan, birinchi omborda tovarlarning qabul qilinishi quydagi matritsa bilan ifodalanadi

$$A_1 = \begin{pmatrix} 16 & 20 & 100 \\ 30 & 19 & 50 \\ 26 & 34 & 82 \end{pmatrix}$$

va ikkinchi omborga tovarlarni qabul qilish quydagi matritsa bilan ifodalanadi

$$A_2 = \begin{pmatrix} 110 & 32 & 49 \\ 28 & 25 & 75 \\ 37 & 16 & 86 \end{pmatrix}$$

Tovarlarni omborlarga umumiy yetkazib berishni toping; agar shartnomaga ko‘ra, omborlarga yillik yetkazib berish va tovarlarning bir xil vaqtlarda har oyda etkazib berish amalga oshirilsin.

Yechim:

Dastlab umumiy etkazib berishni topaylik

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 16 & 20 & 100 \\ 30 & 19 & 50 \\ 26 & 34 & 82 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 110 & 32 & 49 \\ 28 & 25 & 75 \\ 37 & 16 & 86 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126 & 52 & 149 \\ 58 & 44 & 125 \\ 63 & 50 & 168 \end{pmatrix}$$

Endi yillik zaxirani topaylik

$$12(A_1 + A_2) = 12\begin{pmatrix} 126 & 52 & 149 \\ 58 & 44 & 125 \\ 63 & 50 & 168 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1512 & 624 & 1788 \\ 696 & 528 & 1500 \\ 756 & 600 & 2016 \end{pmatrix}$$

Javob: $\begin{pmatrix} 126 & 52 & 149 \\ 58 & 44 & 125 \\ 63 & 50 & 168 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1512 & 624 & 1788 \\ 696 & 528 & 1500 \\ 756 & 600 & 2016 \end{pmatrix}$.

Iqtisodiy masalalarni yechishda matritsalar usulidan foydalanish fanda ham amaliyotda ham qulayligi muhim ahamiyat kasb etadi.

Ma’lumki, S matritsaning har bir s_{ij} elementi $i-$ chi tarmoqli yalpi mahsulotini ishlab chiqarishi bo‘lib, $j-$chi tarmoqli $y_j = 1$ $(j = 1,2,...,n)$ oxirgi mahsulotini ishlab chiqarishini ta’minlaydi.

Masalaning iktisodiy mazmunidan kelib chiqqan xolda x_i manfiy bo‘lmasligi, manfiy bo‘lmagan ko‘rsatkichlarda $y_i \geq 0$ u $a_{ij} \geq 0$, bu yerda $(i, j = 1,2,...,n)$.

$A \geq 0$ matritsasi unumdorlik deb ataladi, agar ixtiyoriy $Y \geq 0$ vektori uchun (6) tenglamaning $X \geq 0$ yechimi mavjud bo‘lsa. Bu holatda Leontev modeli ham unumdorlik deb ataladi.

Jadvalda hisobot davridagi balans bajarilishi keltirilgan pul birligida

Tarmoq		Iste’mol		Oxirgi mahsulot	Yalpi mahsulot
		energetika	mashinasozlik		
Ishlab chiqarish	Energetika	7	21	72	100
	Mashinasozlik	12	15	123	150

Har bir tarmoq bo‘yicha zarur bo‘lgan yalpi mahsulot hajmini hisoblang, agar energetika tarmog‘idagi oxirgi mahsulot mikdori ikki barobar oshsa, mashinasozlikda esa avvalgi bosqichda saqlansa.

Quyidagilarga egamiz

$$x_1 = 100,\ x_2 = 150,\ x_{11} = 7, x_{12} = 21, x_{22} = 15; y_1 = 72, y_2 = 123.$$

(2) formula ko‘ra to‘g‘ri sarf-harajatlar qilinadigan koeffitsiyentlarni topamiz:

$a_{11} = 0{,}07, a_{12} = 0{,}14, a_{21} = 0{,}12,\ a_{22} = 0{,}10$ ya’ni to‘g‘ri sarf- harajatlar matritsasi $A = \begin{pmatrix} 0{,}17 & 0{,}14 \\ 0{,}12 & 0{,}10 \end{pmatrix}$ manfiy bo‘lmagan elementga ega va unumdorlik kriteriyasini qanoatlatiradi:

$$\max\{0{,}17 + 0{,}12;\ 0{,}14 + 0{,}10\} = \max\{0{,}19; 0{,}24\} = 0{,}24 < 1.$$

Shuning uchun ixtiyoriy Y oxirgi mahsulot vektori uchun zarur bo‘lgan yalpi mahsulot hajmini X ni (7) formuladan topamiz:

$$X = (E - A)^{-1} Y$$

To‘la harajatlar matritsasini aniqlaymiz $S=(E-A)^{-1}$: $E-A=\begin{pmatrix}0{,}93 & -0{,}24\\ -0{,}12 & 0{,}90\end{pmatrix}$. Shunday qilib $|E-A|=0{,}8202\neq 0$. S ni topamiz.

$$S=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0{,}8202}\begin{pmatrix}0{,}90 & 0{,}14\\ 0{,}12 & 0{,}93\end{pmatrix}$$

Shart bo‘yicha oxirgi mahsulot vektori $Y=\begin{pmatrix}144\\ 123\end{pmatrix}$. U holda (4) formulaga ko‘ra yalpi mahsulot vektorini topamiz:

$$X=\frac{1}{0{,}8202}\begin{pmatrix}0{,}90 & 0{,}14\\ 0{,}12 & 0{,}93\end{pmatrix}\begin{pmatrix}144\\ 123\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}179{,}0\\ 160{,}5\end{pmatrix},$$

ya’ni, yalpi mahsulotni energetika tarmog‘ida 179,0 kelishilgan birlikka, mashinasozlikda esa – 160,5 kelishilgan birlikka ko‘paytirish zarur.

Tayanch ibora va tushunchalar

Matritsa, matritsaning o‘lchami, matritsaning determinanti, maxsus matritsa, maxsusmas matritsa, bosh diagonal, diagonal matritsa, birlik matritsa, transponirlangan matritsa, teng matritsalar, matritsalarning yig’indisi, matritsani songa ko‘paytirish, matritsalar ko‘paytmasi, matritsaning κ-tartibli minori, matritsaning rangi, elementar almashtirishlar, teskari matritsa.

Takrorlash uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Teskari matritsa qanday topiladi?
3. Matritsani songa ko‘paytirish qanday bo‘ladi?
3. Matritsaning rangi nima?
4. Elementar almashtirishlar deb qanday amallarga aytiladi?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Ushbu matritsaga teskari matritsani toping.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 7 & -5\end{pmatrix};$$

2. Ushbu matritsaga teskari matritsani toping.

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

3. λ ning qanday qiymatida A matritsaga teskari matritsa mavjud

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

4. Matritsa rangini toping:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$. 2 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

1.4-§. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari

Bizga n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Agar chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlarga ega bo'lsa, sistema birgalikda deyiladi.

(1) sistemaning birgalikda bo'lish-bo'lmasligi shartini aniqlaymiz. Agar birgalikda bo'lgan sistema bitta yechimga ega bo'lsa, u aniq sistema, bittadan ortiq yechimga ega bo'lsa, aniqmas sistema deb ataladi. (1) sistema koeffitsiyentlaridan ushbu A matritsani

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Berilgan sistema noma'lumlari koeffisiyentlaridan A matrisani hamda bu matrisaga ozod hadlardan tuzilgan ustunni birlashtirib, ikkinchi V matrisani tuzamiz, ya'ni bular ushbu ko'rinishshda bo'ladi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ --------- \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ va } B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} & b_2 \\ ------------ \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

A matrisaga (1) sistemaning matrisasi, B matrisaga sistemaning kengaytirilgan matrisasi deyiladi. Quyidagi teorema o'rinli.

1-teorema. (Kroneker-Kapelli teoremasi). Chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda bo'lishi uchun sistema matrisasi A ning rangi sistema kengaytirilgan B matrisasining rangiga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zarurligi. (1) sistema birgalikda bo'lsin. $k_1,k_2,\ldots,k_s$ uning yechimlaridan biri bo'lsin. Bu sonlarni sistemadagi noma'lumlar o'rniga qo'yib, s ta ayniyat hosil qilamiz. Bu ayniyatlar B matrisaning oxirgi ustuni qolgan barcha ustunlarining mos ravishda koeffisiyetlar bilan ko'paytmasidan olingan yig'indisi ekanligini ko'rsatadi. B matrisaning har qanday boshqa ustuni A matrisaga ham kiradi va shuning uchun u matrisaning barcha ustunlari orqali chiziqli ifodalanadi. Aksincha, A matrisaning har qanday ustuni B matrisani ham ustuni bo'ladi, ya'ni bu matrisaning ustunlari orqali chiziqli ifodalanadi. Bundan A va B matrisalarning ustunlari sistemasi o'zaro ekvivalent ekanligi kelib chiqadi, shuning uchun bu matrisalarning rangi bir xil bo'ladi, ya'ni $r(A)=r(B)$ kelib chiqadi.

Yetarliligi. A va B matrisalar bir xil rangga ega bo'lsin. Bundan A matrisa ustunlarining istalgan maksimal chiziqli erkli sistemasi B matrisada ham maksimal chiziqli erkli sistema bo'lib qolishligi kelib chiqadi. Shunda qilib A matrisa ustunlari sistemasi orqali B matrisaning oxirgi ustuni chiziqli ifodalanadi. Demak, shunday $k_1,k_2,\ldots,k_s$ sonlar majmui mavjud bo'ladiki, A matrisaning bu sonlar bilan ko'paytirishdan olingan ustunlari yig'indisi ozod hadlardan iborat

ustunga teng, ya'ni $k_1, k_2, \ldots, k_s$ sonlar (1) sistemaning yechimi bo'ladi, shunday qilib, A va B matrisalar ranglarining bir xilda bo'lishidan (1) sistemaning birgalikda bo'lishi kelib chiqadi. Teorema to'liq isbotlandi.

Kroneker-Kapelli teoremasi yechim mavjud ekanligini tasdiqlaydi, lekin bu sistemaning barcha yechimlarini amalda topish uchun usulni bermaydi. Endi, ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning quyidagi qoidasini keltiramiz.

A matrisaning rangi B matrisaning rangiga teng bo'lib, $r(A) = r(B) = k$ bo'lsin. Bunda k son A matrisaning chiziqli erkli satrlarining maksimal soniga teng bo'lib, k noma'lumlar soniga teng bo'lsa, u holda sistema tenglamalari soni noma'lumlari soniga teng va uning determinanti noldan farqli bo'ladi, bunday sistemaning yechimi yagona bo'lib uni Kramer qoidasi bo'yicha topish mumkin bo'ladi.

Endi matrisalarning rangi k noma'lumlar sonidan kichik, ya'ni $k < n$ bo'lsin. Bu holda k - tartibli minor noldan farqli bo'ladi. Sistema tenglamalarining har qaysisida $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ noma'lumli hadlarini tenglamalarning o'ng tomoniga o'tkazamiz va bu noma'lumlar uchun biror $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n$ qiymatlari majmuini tanlab olib k noma'lumli k ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Hosil bo'lgan sistemaga Kramer qoidasini qo'llash mumkin va yagona $c_1, c_2, \ldots, c_k$ yechim majmui mavjud bo'ladi. Sistema tenglamalarining o'ng tomoniga o'tkazilgan noma'lumlarni ***ozod*** **noma'lumlar** deb ataymiz. Chap tomondagi nomalumlar **bosh(bazis) o'zgaruvchilar,** Ozod noma'lumlar uchun $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n$ sonlarni ixtiyoriy tanlab olishiiz mumkin bo'lganligi uchun hosil bo'lgan sistemaning cheksiz ko'p turlicha yechimlari shu yo'l bilan hosil qilinadi. Shunday qilib, bu holda cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lamiz.

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ noma'lumlarning $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ ozod noma'lumlar qatnashgan yechimiga ***umumiy yechim*** deb ataladi, chunki boshqa cheksiz ko'p yechimlar $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ ozod noma'lumlarga ixtiyoriy qiymatlar majmuini berish bilan olinadi.

Tenglamalar sistemasini yechishga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini tekshring:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

Yechish. Sistema koeffisiyentlaridan matrisa tuzamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Bu matrisaning rangi 2 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14 \neq 0$$

bo‘lib,

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -6 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

bo‘ladi. Kengaytirilgan matrisa

$$B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

ning rangi 3 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

$r(A) = 2,\ r(B) = 3$ bo‘lib, $r(A) \neq r(B)$ bo‘ladi, demak isbotlangan teoremaga asosan sistema birgalikda emas.

2-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini tekshring:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12. \end{cases}$$

Yechish. Sistema koeffisiyentlaridan tuzilgan matrisa

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -4\\ 7 & 10\end{pmatrix}$$

bo‘lib, $r(A)=2$, chunki $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-14\neq 0$, lekin 3-tartibli minori yo‘q.

Kengaytirilgan matrisaning rangi ham 2 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & -4 & -1\\ 7 & 10 & 12\end{vmatrix}=-144+40-14+112-24+30=0.$$

Birinchi ikkita tenglamaning chap qismlari chiziqli erkli, bu ikkita tenglamalar sistemasini yechib, noma’lumlar uchun ushbu qiymatlarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2=4,\\ x_1-4x_2=-1.\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-14\neq 0,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}4 & 2\\ -1 & -4\end{vmatrix}=-14,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-7$$

$$x_1=1,\quad x_2=\frac{1}{2}$$

Bu yechim 3-tenglamani ham qanoatlantiradi.

3-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases}x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1,\\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4,\\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4=1.\end{cases}$$

Yechish. Sistema matrisasining rangi $r(A)=2$, chunki

$$\begin{vmatrix}1 & 5 & 4\\ 2 & -1 & 2\\ 5 & 3 & 8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & -1 & -1\\ 5 & 3 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 5 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 5 & 8 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 5 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 8 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

bo‘lganligini, ya’ni kengaytirilgan matrisaning barcha 3-tartibli minorlari 0 ga teng bo‘lganligi uchun, uning ham rangi $r(B)=2$. Shunday qilib, sistema birgalikda va $r(A)=r(B)=k=2<4$ noma’lumlar sonidan kichik, bu holda birinchi va uchinchi tenglamalar sistemasini olaylik, chunki

$$\begin{vmatrix}1 & 5\\ 5 & 3\end{vmatrix}=3-10=-7\neq 0;$$

$$\begin{cases}x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1,\\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4=1\end{cases}$$

bundan

$$\begin{cases}x_1+5x_2=1-4x_3-3x_4,\\ 5x_1+3x_2=1-8x_3-x_4\end{cases}$$

bo‘lib, tenglamalar sistemasini x_1, x_2 asosiy noma’lumlarga nisbatan yechsak:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1-4x_3-3x_4 & 5\\ 1-8x_3-x_4 & 3\end{vmatrix}}{-7}=\frac{2}{7}-4x_3+\frac{4}{7}x_4,$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1-4x_3-3x_4\\ 5 & 1-8x_3-x_4\end{vmatrix}}{-7}=\frac{4}{7}-\frac{12}{7}x_3-2x_4$$

bo‘ladi. Ozod noma’lumlarni $x_3=C_1,\ x_4=C_2$ deb

$$x_1=\frac{2}{7}-4C_1+\frac{4}{7}C_2,$$

$$x_2=\frac{4}{7}-\frac{12}{7}C_1+2C_2$$

umumiy yechimni olamiz. C_1 va C_2 larga xar xil qiymatlar berib, masalan, $C_1=2,\ C_2=3$ bo‘lganda $x_1=-6,\ x_2=\frac{22}{7},\ x_3=2,\ x_4=3,$ ya’ni $\left(-6,\frac{22}{7},2,3\right)$ yechimni, $C_1=0, C_2=-3$ bo‘lganda $x_1=-\frac{10}{7},\ x_2=-\frac{38}{7},\ x_3=0,\ x_4=-3,$ ya’ni $\left(-\frac{10}{7},-\frac{38}{7},\ 0,-3\right)$ va hokazo cheksiz ko‘p yechimlarni olish mumkin.

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi. (1) tenglamalar sistemasida ozod hadlar 0 lardan iborat bo‘lsa, bunday sistemaga ***bir jinsli sistema*** deyiladi, yani

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

bo‘lib, birjinsli sistema doimo birgalikda.

Bir jinsli sistema 0 dan farqli yechimga egaligini aniqlash muhimdir.

2-teorema. Bir jinsli sistema noldan farqli yechimga ega bo‘lishi uchun sistema matrisasining rangi noma’lumlar sonidan kichik bo‘lishi zarur va yetarlidir.

1-natija. Bir jinsli sistemada noma’lumlar soni tenglamalar sonidan katta bo‘lsa, sistema 0 dan farqli yechimlarga ham ega bo‘lishi mumkin.

2-natija. n noma’lumli n ta bir jinsli tenglamalar sistemasi 0 dan farqli yechimlarga ega bo‘lishi uchun sistemaning determinanti 0 ga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

4-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema matrisasini va uning kengaytirilgan matrisasini tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

B matrisada oxirgi ustunni saqlab elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&2&1&0\\1&1&-1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&-2&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

0 lardan iborat satrni tashlab

$B_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&0&-1\end{pmatrix}$ matrisani hosil qilamiz. Bunday almashtirishlarda B matrisa rangini aniqlash bilan A matrisaning ham rangini aniqlash imkoniyati tug'iladi. Shunday qilib, B matrisaning rangi 2 ga teng, A matrisaning rangi ham 2 ga teng. Demak, berilgan sistema birgalikda bo'ladi. Ma'lum bo'ldiki, uchinchi tenglama birinchi ikkita tenglamalarning chiziqli kombinasiyasidan iborat. Shuning uchun uchinchi tenglamani chiqarib

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\x_1+x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}$$

to'rt noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Ikkita noma'lumni qolganlari orqali ifodalaymiz. Ma'lumki, x_1, x_2 noma'lumlarga nisbatan yechish mumkin emas, chunki ularning koeffisiyentlaridan tuzilgan determinant 0 ga teng. Sistemani x_2, x_3 larga nisbatan yechish mumkin, ya'ni

$$\begin{cases}x_2+x_3=1-x_1-x_4,\\x_2+2x_3=-x_1-x_4\end{cases}$$

x_2, x_3 larni ***bosh (bazis) o'zgaruvchilar,*** x_1, x_4 lar esa ozod(erkin) o'zgaruvchilar bo'ladi. Bu sistemani yechib $x_3=-1,\ x_2=2-x_1-x_4$ ni aniqlaymiz. x_1, x_4 o'zgaruvchilarga ketma-ket qiymatlar berib, cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lamiz. Masalan, $x_1=0,\ x_4=1$ bo'lganda $x_1=0,\ x_2=1$, $x_3=-1,\ x_4=1$ yechim hosil bo'ladi va hokazo. Tekshirib ko'rish mumkinki, bu yechim berilgan sistemani qanoatlantiradi.

5-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema matrisasining rangini topamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Birinchi uchta satrini qo‘shib, to‘rtinchi satridan ayiramiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

hosil bo‘lgan matrisaning ranggi 3 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0.$$

Shunday kilib, A matrisaning rangi 3 ga teng, noma’lumlar soni to‘rtta, 2-teoremaga asosan sistema 0 dan farqli yechimga ega. Berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

sistemaga teng kuchli. x_1, x_2, x_3 noma’lumlar koeffisiyentidan tuzilgan determinant 0 dan farqli bo‘lgani uchun x_4 ni o‘ng tomonga o‘tkazib tenglamalar sistemasini yechamiz.

$$\Delta = 21,\quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} -x_4 & -1 & -3 \\ 2x_4 & 3 & 2 \\ -3x_4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -31x_4,\quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2-x_4 & -3 \\ 1 & 2x_4 & 2 \\ 3 & -3x_4 & 2 \end{vmatrix} = 43x_4,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -x_4 \\ 1 & 3 & 2x_4 \\ 3 & 2 & -3x_4 \end{vmatrix} = -28x_4.$$

Kramer formulalariga asosan:

$$x_1 = -\frac{31}{21}x_4,\ x_2 = \frac{43}{21}x_4,\ x_3 = -\frac{28}{21}x_4 = -\frac{4}{3}x_4.$$

Bu yechimni berilgan sistemaga bevosita qo‘yib yechimning to‘g’riligiga ishonish mumkin**.**

1.4.1. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning eng ko‘p ishlatiladigan usullaridan biri Gauss usulidir. Uning mohiyatini uch noma’lumli uchta chiziqli tenglama uchun ko‘rsatamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

Bunda $a_{11} \neq 0$ bo‘lsin. Birinchi tenglamaning hamma hadlarini a_{11} ga bo‘lamiz va uni $-a_{21},\ -a_{31}$ ga ko‘paytirib mos ravishda ikkinchi va uchinchi tenglamalarga qo‘shamiz. Bu holda quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2 \\ \alpha_{23}x_1 + \alpha_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases}$$

bu yerda $\alpha_{22} = a_{22} - a_{21}\dfrac{a_{12}}{a_{11}},\quad \alpha_{23} = a_{23} - a_{21}\dfrac{a_{13}}{a_{21}}$ va h.k.

$a_{11} = 0$ bo‘lib, boshqa tenglamalarda nomalumlar oldidagi koeffisiyentlari orasida noldan farqlilari bo‘lsa, u holda bu tenglamalardan birini birinchi tenglamaning o‘rni bilan almashtiramiz, keyin yuqoridagi amallarni bajaramiz. Bu birinchi qadam bo‘ladi. Demak, birinchi qadamda birinchi tenglamada x_1 - noma’lum qolib, qolgan tenglamalardan ketma-ket x_1 - *noma’lumni yo‘qotamiz*. Ikkinchi qadamda birinchi tenglama o‘z o‘rnida qolib, ikkinchi va uchinchi tenglama uchun yuqoridagi amallarni bajaramiz, ya’ni ikkinchi tenglamada x_2 noma’lumni qoldirib, uchinchi tenglamadan uni yo‘qotamiz. Shunday qilib, bu amallar natijasida (1) tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} x_1 + \alpha'_{12} x_2 + \alpha'_{13} x_3 = \beta'_1 \\ \alpha'_{22} x_2 + \alpha'_{23} x_3 = \beta'_2 \\ \alpha'_{33} x_3 = \beta_3 \end{cases} \qquad (2)$$

ko‘rinishga keladi. Endi hamma noma’lumlarni so‘nggi tenglamadan boshlab *teskari qadam* bilan topish qoldi.

1-misol. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$

tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

Yechish. Birinchi tenglamani (-4) va (-3) ga ko‘paytirib mos ravishda ikkinchi va uchinchi tenglamalarga qo‘shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ (4-4)x_1 + (1-8)x_2 + (4-12)x_3 = 9 - 4 \cdot 6 \\ (3-3)x_1 + (5-6)x_2 + (2-9)x_3 = 10 - 3 \cdot 6 \end{cases},$$

ya’ni $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 7x_2 - 8x_3 = -15 \\ -x_2 - 7x_3 = -8 \end{cases}$ bo‘ladi.

Shu bilan birinchi qadam tugadi.

Ikkinchi qadamda, birinchi tenglamani o‘z o‘rnida qoldirib, ikkinchi tenglamani (-7) ga bo‘lib yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7} \\ x_2 + 7x_3 = 8 \end{cases}$$

Uchinchi tenglamadan x_2 noma'lumni yo'qotamiz, buning uchun ikkinchi tenglamani (-1) ga ko'paytirib uchinchi tenglamaga qo'shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7} \\ \frac{41}{7}x_3 = \frac{41}{7} \end{cases}$$

Oxirgi tenglamadan $x_3 = 1$ ni topamiz. $x_3 = 1$ ni ikkinchi tenglamaga qo'ysak, $x_2 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7}$ yoki $x_2 = \frac{15}{7} - \frac{8}{7} = 1, \quad x_2 = 1$ bo'ladi. $x_2 = 1, \quad x_3 = 1$ larni birinchi tenglamaga quysak $x_1=1$ bo'ladi. Shunday qilib, $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$.

Gauss usulining xususiyati shundan iboratki, unda sistemaning birgalikda masalasini oldindan aniqlab olish talab etilmaydi va:

1) sistema birgalikda va aniq bo'lsa, u holda usul yagona yechimga olib keladi;

2) sistema *birgalikda va aniqmas bo'lsa*, bu holda biror qadamda ikkita aynan teng tenglama hosil bo'ladi va shunday qilib, tenglamalar soni noma'lumlar sonidan bitta kam bo'lib qoladi;

3) sistema *birgalikda bo'lmasa*, u holda biror qadamda chiqarilayotgan (yo'qotilayotgan) noma'lum bilan birgalikda qolgan barcha noma'lumlar ham yo'qotiladi, o'ng tomonda esa noldan farqli ozod had qoladi.

1.4.2.Tenglamalar sistemani Gauss-Jordan usulda yechish.

Tenglamalar sistemasini yechishda Gauss - Jordan usulining (Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi) mazmun-mohiyati quyidagidan iborat: dastlabki normal ko'rinishda berilgan sistemaning kengaytirilgan

(A/B) matritsasi quriladi. Yuqorida keltirilgan sistemaning teng kuchliligini saqlovchi elementar almashtirishlar yordamida, kengaytirilgan matritsaning chap qismida birlik matritsa hosil qilinadi.

Bunda birlik matritsadan o‘ngda yechimlar ustuni hosil bo‘ladi. Gauss – Jordan usulini quyidagicha sxematik ifodalash mumkin:

$$(A|B)\sim(E|X^*).$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish Gauss-Jordan usuli noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotishning Gauss strategiyasi va teskari matritsa qurishning Jordan taktikasiga asoslanadi. Teskari matritsa oshkor shaklda qurilmaydi, balki o‘ng ustunda bir yo‘la teskari matritsaning ozod hadlar ustuniga ko‘paytmasi-yechimlar ustuni quriladi.

2-misol. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss-Jordan usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1,\\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4,\\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6,\\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4. \end{cases}$$

Yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasi koeffisiyentlaridan kengaytirilgan matritsa tuzamiz. Tenglamalr uctida bajariladigan almashtirishlar yordamida asosiy matritsani quyidagicha birlik matritsaga keltirib javobini topamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4\\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6\\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7\\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8\\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5\\ 0 & -1 & 5 & 7 & 8\\ 0 & 4 & 7 & 11 & 7 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 6\\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5\\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 27 & 27 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 6\\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5\\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14\\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9\\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-2&-3\\0&1&0&-13&-14\\0&0&1&9&9\\0&0&0&1&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{array}\right)$$

$$x_1=-1,\qquad x_2=-1,\qquad x_3=0,\quad x_4=1$$

Tayanch iboralar

Chiziqli tenglamalar sistemasi(ChTS),tenglamalar sistemasining yechimi, yagona yechim, sistema birgalikda, aniq bo‘lmagan sistema, ekvivalent sistema, birgalikda bo‘lmagan sistema.

Takrorlash uchun savollar

1. Kroneker-Kapelli teoremasining sharti nimadan iborat?
2. Qanday matrisaga kengaytirilgan matrisa deyiladi?
3. Bir jinsli sistema deb qanday sistemaga aytiladi?
4. Bir jinsli sistema qanday holda birgalikda?
5. Bir jinsli sistema no‘ldan farqli yechimga ega bo‘lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?
6. Bosh (bazis) o‘zgaruvchilar nima?
9. Gauss usulining mohiyati nima?
10. Noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotishning 1-qadami nimadan iborat?
11. Ikkinchi qadam qanday?
12. Teskari qadam nima?
13. Sistema birgalikda va aniq degani nima?
14.Sistema birgalikda va aniqmas deganda nima tushuniladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Berilgan tenglamalar sistemasining birgalikda ekanligini tekshiring, agar birgalikda bo‘lsa, ularni:

a) Gauss usuli bilan yeching:

1) $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4\\3x_1+4x_2-2x_3=11\\3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$

2) $\begin{cases}4x_1+6x_2+3x_3=17\\2x_1+6x_2+5x_3=12\\3x_1+6x_2+4x_3=9\end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 17 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -7, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7; \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 7x_1 + x_3 = 6 \end{cases}$

a) Gauss-Gordan usuli bilan yeching:

11. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ 5x_1 + 2x_2 - 13x_3 = 21 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 3 \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 10 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -14 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -14 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -10 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -15; \end{cases}$

21) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$

22) $\begin{cases} x + 22y + 3z = 4 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$

1.5-§.Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsalar usuli. Kramer qoidasi

1.5.1.Chiziqli tenglamalar sistemasini matrisalar yordamida yechish.

Bizga n noma'lumli n- ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ..... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Bu sistema koeffisiyentlaridan tuzilgan matrisa quyidagicha bo‘ladi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}.....a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}.....a_{2n} \\ ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{2n}.....a_{nn} \end{pmatrix}$$

Biz faqat A maxsusmas matrisa bo‘lgan holnigina qaraymiz. (1) sistemaning chap tomonida A matrisani

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ matrisaga ko‘paytirishdan kelib chiqadigan n satrli va bir ustunli matrisaning elementlari, sistemaning o‘ng tomonida esa

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ matrisaning elementlari turibdi. Shu sababli ikki matrisaning tenglik ta’rifiga asosan, (1) ni quyidagicha

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}...a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}.....a_{2n} \\ ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2}.....a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ yoki, qisqacha

$$A \cdot X = B \quad (2)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu tenglamaga marisaviy tenglama deyiladi. A maxsusmas matrisa bo‘lgani sababli, unga teskari bulgan A^{-1} matrisa mavjud, shu sababli (2) ni chap tomondan A^{-1} ga ko‘paytiramiz:

$A^{-1}\cdot(A\cdot X)=A^{-1}\cdot B$, lekin $A^{-1}\cdot(A\cdot X)=(A^{-1}\cdot A)\times X=EX=X$, demak, $X=A^{-1}\cdot B$

1-misol. $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=5,\\ 5x_1+2x_2+4x_3=1,\\ 7x_1+3x_2+2x_3=4\end{cases}$ tenglamalar sistemasini matrisaviy ko‘rinishda yozing va uning yechimini toping.

Yechish. Berilgan sistemaning matrisasini yozamiz:

$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 5 & 2 & 4\\ 7 & 3 & 2\end{pmatrix}$ va $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$ deb belgilasak, u holda sistemaning matrisaviy ko‘rinishi

$A\cdot X=B$ $(*)$ko‘rinishda bo‘ladi. A ga teskari A^{-1} matrisa

$A^{-1}=\begin{pmatrix}-8 & -5 & 6\\ 18 & 11 & -13\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ bo‘lgani sababli $(*)$ ni chap tomondan A^{-1}ga ko‘paytiramiz: u vaqtda

$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$ yoki $X=A^{-1}\cdot B$ ga egamiz, bundan $A^{-1}\cdot B$ni topamiz.

$$A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-8 & -5 & 6\\ 18 & 11 & -13\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 1\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-8)\cdot5+(-5)\cdot1+6\cdot4\\ 18\cdot5+11\cdot1+(-13)\cdot4\\ 1\cdot5+1\cdot1+(-1)\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-21\\ 49\\ 2\end{pmatrix}$$

Demak, tenglamalar sistemasining yechimi:

$x_1=-21;\ \ x_2=49;\ \ x_3=2.$

1.5.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi yordamida yechish.

Kramer usuli ham chiziqli tenglamalar sistemasining yechishning bir usuli bo‘lib, bunda yechimlar determinantlar orqali sodda topiladi. Bu usul biror aniq noma’lumni topishda matritsaviy usulga nisbatan samaraliroqdir. Excel dasturida teskari matritsa topish va ko‘paytirishni bilishingizga qarasmasdan, qo‘lda hisoblashdagi vaqt muhim emas. Shuning uchun iqtisodiy jarayonlarni o‘rganishda Kramer usuli qulay hisoblanadi. Murakkabroq iqtisodiy matematika uchun Kramer qoidasi quyida algebraik formula ko‘rinishida keltiriladi.

Ma’lumki, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n ta noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasining matritsaviy ko‘rinishi $Ax = b$ bo‘lib**,** bunda

A parameterlarning $n \times n$ o‘lchovli matritsasi,

x noma’lumlarning $n \times 1$ o‘lchovli vektori va

b ozod hadlarning $n \times 1$ o‘lchovli matritsasi.

Ma’lumki bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, ularga tenglamalar sistemasi deyiladi.

Tenglamalar sistemasidagi barcha noma’lumlarning darajasi birga teng bo‘lsa, bunday tenglamalar sistemasiga chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots. + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots. + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots. + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi sistema n noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini ifodalaydi.

Bu sistemaning har bir tenglamasidagi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma’lumlar o‘rniga mos ravishda $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sonlarni qo‘yilganda (1) dagi barcha tenglamalar ayniyatga aylansa, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sonlar (1) sistemaning yechimi deyiladi. (1) sistemaning yechimi asosan quyidagi determinantga bog‘liqdir

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots . a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots . a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

(2) determinant (1) tenglamalar sistemasidagi noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan, u (1) sistemaning determinanti deyiladi.

Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, sistema yagona yechimga bo'ladi va bu yechim

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \dots; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

formulalar yordamida topiladi.

Bu yerda Δ_1 determinant Δ determinantdan birinchi ustun elementlarini ozod hadlar bilan almashtrishdan hosil bo'ladi, Δ_2 determinant Δ determinantdan ikkinchi ustun elementlarini ozod hadlar bilan almashtrishdan hosil bo'ladi, $\Delta_3,\dots,\Delta_n$ lar ham shunga o'xshash hosil qilinadi.

n ta chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning bunday usuli Kramer qoidasi deyiladi.

Ikki va uch noma'lumli shiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer qoidasi

Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini topishni oldin ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi uchun qaraymiz. Ushbu ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

dan, birinchi tenglamani a_{22} ga, ikkinchi tenglamani $-a_{12}$ ga hadma-had ko'paytiramiz va hosil bo'lgan tenglamalarni qo'shamiz, natijada

$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}$

(3)

tenglama hosil bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash, 1-tenglamani $-a_{21}$ ga, 2- tenglamani a_{11} ga hadma-had ko'paytirib, hosil bo'lgan tenglamalarni qo'shib ushbuni hosil qilamiz:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

(4)

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

bo‘lgani uchun, quyidagi belgilashlarni kiritib

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

(3) va (4) tengliklarni

$$\Delta x = \Delta_1, \quad \Delta y = \Delta_2$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bundan $\Delta \neq 0$ bo‘lsa,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

bo‘ladi, yoki determinantlar orqali yozsak

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

bunda Δ_1 yordamchi determinant Δ determinantning birinchi ustunini ozod hadlar bilan, Δ_2 da esa ikkinchi ustun ozod hadlar bilan almashtiriladi. Δ determinantga tenglamalar sistemasining determinanti deyiladi.

Shunday qilib, berilgan chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti 0 dan farqli bo‘lsa, sistema yagona yechimga ega bo‘ladi.

Endi uch noma’lumli uchta tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\}$$

(5)

tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Bu sistema noma’lumlari koeffisiyentlaridan tuzilgan determinantni Δ bilan belgilaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix}$$

(6)

bunga (5) *sistemaning determinanti* yoki aniqlovchisi deyiladi. Yordamchi deteminantlarni tuzamiz

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 a_{13} \\ a_{21} b_2 a_{23} \\ a_{31} b_3 a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} b_1 \\ a_{21} a_{22} b_2 \\ a_{31} a_{32} b_3 \end{vmatrix}$$

Berilgan sistema x_1, x_2, x_3 yechimga ega bo‘lsa, bu yechimni topish uchun quyidagi formulalarga ega bo‘lamiz

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

(7)

Quyidagi hollar bo‘lishi mumkin

1. $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, bu holda (7) formulalardan (5) sistema bitta yechimga ega ekani kelib chiqadi.
2. $\Delta = 0$ va $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ determinantlardan aqalli bittasi noldan farqli. Bu holda (5) sistema yechimga ega bo‘lmaydi.
3. $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$.

Bu holda (5) sistema yo cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi, yoki umuman yechimga ega bo‘lmaydi.

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2, \\ 3x - y + 2z = -3, \\ x + y - 3z = 4 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

***Yechish*.** Berilgan sistemaning asosiy determinanti va yordamchi determinantlarini tuzamiz

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 39 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 39,\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -39$$

Demak, $\Delta \neq 0$ bo‘lgani uchun sistema yagona yechimga ega. Bu yechim

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{0}{39} = 0,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1,\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-39}{39} = -1.$$

2-misol. Berilgan

$$\begin{cases} x - 5y + 2z = 1, \\ 3x - 15y + 6z = -3, \\ 9x - 45y + 18z = -3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

***Yechish*.** Bevosita hisoblash orqali $\Delta = \Delta_y = 0,\ \Delta_x \neq 0,\ \Delta_z \neq 0$ ekaniga ishonch hosil qilish oson. Bundan ko‘rinadiki sistema yechimga ega emas.

Takrorlash uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti deb nimaga aytiladi?
2. Chiziqli tenglamalar sistemasi qachon yagona yechimga ega bo‘ladi?
3. Chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo‘lsa, u qanday topiladi?
4. Kramer formulalari nimadan iborat?
5. Tenglamalar sistemasining matrisali yozuvi qanday bo‘ladi?
6. Tenglamalar sistemasi matrisalar yordamida qanday yechiladi?
7. Teskari matrisa qanday topiladi?
8. Qanday tenglamalar sistemasiga birgalikda deyiladi?

Mustaril bajarish uchun topshiriqlar

Berilgan tenglamalar sistemasining birgalikda ekanligini tekshiring, agar birgalikda bo‘lsa, ularni:

b) Kramer qoidasidan foydalanib,

c) Matrisa usuli,

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 17 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 12 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 17 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -7, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7; \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 7x_1 + x_3 = 6 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ 5x_1 + 2x_2 - 13x_3 = 21 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 3 \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 10 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -14 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -14 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -10 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -15; \end{cases}$

1.6-§. Chiziqli operatorlar va ularning xossalari

Biz asosan chiziqli operatolarni qaraymiz. Chiziqli operatorlarning aniqlanish sohasi va qiymatlar to‘plami chiziqli normalangan fazolarning qism fazolari bo‘ladi.

Berilgan bo‘lsin X va Y vektorlar fazosi. Agar X fazodan olingan har bir x elementga Y fazoning faqat bitta y elementini mos keluvchi

$$Ax = y \quad (x \in X,\ y \in Y)$$

akslantirish operator deyiladi.

Umuman A operator X fazoning hamma yerida aniqlangan bo‘lmasligi mumkin. Bu holda Ax mavjud va $Ax \in Y$ bo‘lgan barcha $x \in X$ lar to‘plami

A operatorni aniqlanish sohasi deyiladi va $D(A)$ bilan beligilanadi, ya’ni:

$$D(A) = \{\exists x \in X : Ax \in Y\}.$$

Agar ixtiyoriy $x_1, x_2 \in D(A) \subset X$ elementlar va ixtiyoriy α kompleks son uchun quyidagi tengliklar bajarilsa:

1. $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$
2. $A(ax) = aA(x)$

A ga chiziqli operator deyiladi.

Chiziqli operatorlar uchun misollar.

1.Faraz qilaylik $E = E_1$ topologik soha. Operator A bu sohada x ni barcha qiymatlar $x \in E$ uchun quyidagi formula bilan berilgan bo‘lsin:

$$AX = X$$

Sohani har bir element o‘zini o‘ziga aks ettiruvchi chiziqli operatorga chiqish yoki birlik operator deyiladi.

2.Differensiallanuvchi funksiyalar sohasini $D[a, b]$ deb olsak, differensiallanuvchi operator $D[a,b]$ sohada quyidagi formula bilan beriladi:

$$Df(x) = f(x).$$

bu yerda $f(x) \in D[a,b]$, $f(x) \in C[a,b]$.

Bu yerda D operator faqat differensiallanuvchi uzluksiz hosilaga ega bo‘lgan funksiyalar to‘plami $C[a,b]$ sohadan olinadi. Bu operatorni chiziqli ekanligi uzluksiz hosilaga ega ekanligidan ko‘rinib turibdi.

3.Uzluksiz va chegaralangan funksiyalar sohasida $C(-\infty,+\infty)$ A operator funksiyani o‘zgarmas a $(a = consta)$ intilish.

$$Af(x) = f(x + a)$$

A- operator ekanligini tekshirib ko‘raylik:

1) $A(f+g)=(f+g)(x+a)=f(x+a)+g(x+a)=A(f)+A(g)$

funksiyalarni yig‘indisi additiv haqidagi aksiomaga asosan quyidagi bajariladi.

2) $A(kf(x))=kf(x+a)=kA(f(x))$

3) Bir jinsli aksiomasi ekanligi ko‘rinadi. Bundan A operatorning chiziqli operator ekanligi kelib chiqadi.

4) Faraz qilaylik $E=E_1=C[0,1]$ $[0,1]$ oraliqdagi uzluksiz funksiyalar sohasi va uni aksi $A:E\to E_1$ da quyidagi formula yordamida berilgan.

$$Af\int_0^1 f(x)dx$$

Yuqori chegarasi o‘zgaruvchi bo‘lgani uchun bu funksiya uzluksiz funksiya bo‘lib, differensiallanuvchi funksiya bo‘ladi. Demak, aniq integral chiziqli funksiya. Bu akslantirish chiziqli operator deyiladi.

1.6.1. Chiziqli operator va uning matritsasi

Chekli chiziqli X fazoda $A-$chiziqli operator berilgan bo‘lsin, $\dim(X)=n$. Faraz qilaylik X fazoda $l_1,l_2,\ldots,l_n$ bazis vektorlar.

Bularga asoslanib, quyidagilarni belgilab olaylik:

$Al_1=(a_{11},a_{21},a_{31},\ldots,a_{n1})$

$Al_2=(a_{12}a_{22}a_{32},\ldots,a_{n2})$

……..

$Al_n=(a_{1n},a_{2n},a_{3n},\ldots,a_{nn})$

bu yerda $Al_1,Al_2,\ldots,Al_n$ lar $l_1,l_2,\ldots,l_n$ vektorlarning obrazlari.

Chiziqli operatorning $l_1,l_2,\ldots,l_n$ bazisdagi matritsasi quyidagicha bo‘ladi

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Bu matrsaning ustunlari $Al_1,Al_2,\ldots,Al_n$ obrazlarning koordinatalari hisoblanadi va bunga berilgan bazisdagi chiziqli operatorning matritsasi deyiladi.

Shuni ham aytish kerakki n o‘lchovli fazoda berilgan har bir chiziqli operator uchun yagona n-chi tartibli kvadratik matritsa to‘g‘ri

keladi yoki $n-$chi tartibli kvadratik matritsa uchun $n-$ o‘lchovli fazodagi chiziqli operatorni to‘g‘ri kelishi isbotlangan.

Shu bilan quyidagi tenglikni yozish mumkin.

$$Y = AX;\ Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Bu tenglik bir tomondan obrazni koordinatalari bilan proobrazni koordinatalari bilan bog‘laydi va operatorni A matritsaga ta’sirini ko‘rsatadi.

Bazisni o‘zgarishi bilan chiziqli fazo matritsa operatorini ham o‘zgartiradi. Faraz qilaylik, X fazoda $l=(l_1,l_2,\ldots,l_n)$ bazisdan $l^{'}=(l_1^{'},l_2^{'},\ldots,l_n^{'})$ bazisga o‘tsin. l bazisdagi A_l matritsa A operatori $l^{'}$ bazisdagi $A_{l^{'}}$ matritsa operatori o‘zaro bog‘lanish formulasi quyidagicha bo‘ladi

$$A_{l^{'}} = P_{l+l^{'}}^{-1} A_{\ell} P_{l+l^{'}},$$

$$A_{\ell} = P_{\ell+\ell^{'}}\, A_{\ell} P_{l+l^{'}}^{-1}$$

bu yerda $P_{\ell+\ell^{'}}, P_{l+l^{'}}^{-1}$ l bazisdan $l^{'}$ bazisiga o‘tish matrsasi yoki teskarisicha.

1-misol. Operator matritsasi yangi bazisda.

X_n chiziqli fazoda harakatdagi A operator o‘zini matritsasi bilan berilgan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 11 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Vektor obrazini koordinatalarini topamiz

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

X_4 chiziqli fazoga yangi bazisni kiritamiz

$$l_1^{'}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad l_2^{'}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad l_3^{'}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\quad l_4^{'}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

X vektorning koordinatalarini topamiz, obrazini koordinatlari $Y=AX$ va operator matritsasi yangi bazisdan topiladi.

1.6.2. Chiziqli operatorni obrazlari va yadrosi

Bizga berilgan bo‘lsin n o‘lchovli chekli X fazoda harakatda bo‘lgan chiziqli operator. $\mathrm{Im}(A)$ chiziqli operatorni obrazi ham chiziqli fazo ekanligi isboti bor. Shunga asosan chiziqli operator obrazini o‘lchoviga operatorni rangi deyiladi va quyidagicha belgilanadi.

$$R_9(A)=K=\dim(\mathrm{Im}(A)).$$

Chiziqli operatorning yadrosi deb, n o‘lchovli X vektorlar fazosidagi nolli elementlar to‘plami obraz deyiladi. Operatorning yadrosini quyidagicha belgilasak $Kek(A)$:

$$Kek(A)=\{x\in X: A(x)=0\}.$$

Chiziqli operatorning yadrosi chiziqli fazo bo‘lib, yadro o‘lchoviga chiziqli operatorning defekti deyiladi va quyidagicha belgilanadi

$$Def(A): d=Def(A)=\dim(Kek(A))$$

n -o‘lchovli X chiziqli fazoda harakatda bo‘lgan chiziqli operator uchun quyidagilar o‘rinlidir:

Operatorni rangi va defekti yig‘indisi operator harakatda bo‘lgan fazo o‘lchoviga teng:

$$Def(A)+R_g(A)=n$$

bo‘lib operatorni rangi uni matritsasini rangiga teng. Operatorni yadrosi esa A matritsaga ega jinsli tenglamalar sistemasi yechimiga to‘g‘ri keladi. Sistema yechimlar sohasini o‘lchovi esa operator defektiga teng bo‘lib sistemani fundamental yechimlari operator yadrosini bazisini tashkil qiladi;

Operator matritsasini minorini ustunlari operator obrazidagi bazisini tashkil qiladi.

Yuqoridagilarga asoslanib A matritsasi bilan berilgan chiziqni operator obrazi va yadrosini strukturasini berish mumkin. Buning uchun chiziqli tenglamalarning umumiy qoidalaridan va matritsalarni almashtirish formulalaridan foydalanamiz.

2-misol. Chiziqli operatorini obrazi va yadrosi berilgan.

X_4 chiziqli fazoda harakatdagi chiziqli operator obrazi va yadrosini strukturasini izohlang, ya'ni uni o'lchovini aniqlang va bazisni tuzing.

Yechish

A - operator quyidagi matritsasi bilan berilgan.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&2\\1&1&2&2\\2&2&2&3\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix} \text{ va } Y=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

vektorlarni operatorni yadrosiga tegishli ekanligini,

$$u=\begin{pmatrix}4\\5\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{va} \quad v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},$$ esa uni obraziga tegishli ekanligini tekshiramiz.

1.6.3. Chiziqli operatorni maxsus qiymatlari va maxsus vektori

Faraz qilaylik n –o'lchovli X chiziqli fazoda

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\dots a_{1n}\\a_{21}a_{22}\dots a_{2n}\\a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn}\end{pmatrix}$$

A operator matritsasi bilan berilgan. $\lambda -$ son maxsus qiymat deyiladi, agarda noldan farqli X vektor chiziqli operatorning maxsus vektori bo'lib, quyidagi tenglik bajarilsa

$$AX=\lambda X.$$

Faraz qilaylik A matritsa operatori birorta bazisda berilgan bo'lsin.

Operatorning maxsus qiymatlari va uning tegishli bo'lgan maxsus vektorlari quyidagi bog'lanishga ega

$$(A-\lambda E)X=0,$$

bu yerda E- birlik matritsa, 0- X fazoning nolli elementi. Bu shuni ko‘rsatadiki operatorni maxsus vektor chiziqli bir jinsli $(A-\lambda E)X=0$ tenglamani noldan farqli yechimi bo‘ladi, bu yechim mavjud bo‘ladi, agarda

$$\det(A-\lambda E)=0.$$

Shunday qilib chiziqli operatorning maxsus qiymatlari $\det(A-\lambda E)=0$ tenglamaning ildizlari orqali hisoblanishi mumkin, maxsus vektorlar esa bir jinsli chiziqli tenglamalar yechimidan kelib chiqadi.

Quyidagi tenglamaga $\det(A-\lambda E)=0$ operatorning harakteristik tenglamasi deyiladi.

Ko‘phad $\det(A-\lambda E)$-operatorning harakteristik ko‘phadi deyiladi. Chiziqli operatorning maxsus qiymatlari va maxsus vektorlari uchun quyidagilar o‘rinlidir:

1) $n-$ o‘lchovli fazoda harakatda bo‘lgan operator chiziqli fazoda λ ga nisbatan $n-$ chi darajali bo‘lib, operatorning harakteristik ko‘phadi deyiladi;
2) $n-$ o‘lchovli chiziqli fazoda harakatda bo‘lgan chiziqli operator eng ko‘pi bilan $n-$ta har xil maxsus qiymatlarga ega bo‘ladi.
3) maxsus vektorlarga mos bo‘lgan maxsus qiymatlar o‘zaro chiziqli bog‘liq emas;
4) $n-$ o‘lchovli X chiziqli fazoda harakatda bo‘lgan chiziqli operator har xil maxsus qiymatlarga ega, bo‘lsa u holda operatorni maxsus vektorlari X fazoda bazisni tashkil qiladi va bu bazisga operatorni maxsus bazisi deyiladi;
5) bazisdagi operator matritsasidan maxsus vektorlar dioganal ko‘rinishda bo‘lsa, ularga mos bo‘lgan maxsus qiymatlari ham diogonalda bo‘ladi.

3-misol. Operatorni maxsus qiymatlari va maxsus vektorlari

Quyidagi operator matritsasi berilganiga asoslanib maxsus qiymatlari va maxsus vektorlarini topamiz.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Bazisdagi operator matritsasini maxsus vektorlariga va maxsus bazisga o‘tish matritsasiga asoslanib yozamiz.

1.6.4. Operatorlar ustida amallar

Bizga berilgan bo‘lsin X va Y $n-$ o‘lchovli vektorlar fazosida harakatda bo‘lgan A operator.

X fazodan fazoga harakatda bo‘lgan barcha operatorlar to‘plamini $L(X,Y)$ deb belgilab olamiz. Bu to‘plamda umumiy holda qo‘shish va ko‘paytirish amallarini bajarsa bo‘ladi.

$L(X,Y)$ to‘plamda A va B operatorlarning yig‘indisi deb $A+B$ operatorga aytiladi va quyidagi munosabatda bo‘ladi. $\forall x\in X:(A+B)x=Ax+Bx$

$L(X,Y)$ to‘plamda $A\in L(X,Y)$ operatorni a songa ko‘paytmasi aA operatorga aytiladi va quyidagi munosabatda bo‘ladi. $\forall x\in X:(aA)x=a(Ax).$

Demak, yuqoridagi amallar sonli funksiyalarini qo‘shish amallarini umumlashganidir, ko‘paytirish amali esa sonli funksiyalarini songa ko‘paytirish kabidir.

$A+B$ va aA chiziqli operatorlar quyidagicha tekshiriladi.

$$(A+B)(ax+a'x')=A(ax+a'x')+B(ax+a'x')=$$
$$=aAx+a'Ax'+aBx+a'Bx'=a(Ax+Bx)+$$
$$+a'(Ax'+Bx')=a(A+B)x+a'(A+B)x',$$
$$(BA)(ax+a'x')=BA(ax+a'x')=BaAx+Ba'Ax=$$
$$=a(BAx)+a^1(BAy)=a(BA)x+a'(BA)x'$$

Xususiy holda, agar $X=Y$ bo‘lsa $L(X,Y)$ o‘rniga $L(X)$ yozish mumkin va bu to‘plam fazosiga X chiziqli fazo deyiladi.

Faraz qilaylik, uchta X,Y,Z vektorlar fazosi berilgan bo‘lsin va chiziqli operator $A:X\to Y$, $B:Y\to Z$. Bu holda BA ko‘paytma A va B operatorda aniqlangan:

$$\forall x\in x:(BA)x=B(Ax)$$

Boshqacha aytganda BA ko‘paytma A va B da aniqlangan murakkab funksiyadir.

BA funksiya chiziqli operator bo‘lib X fazodan Z fazoga harakatda. Shu yerdan ko‘rinib turibdiki X, X' fazodagi har qanday qiymati va a,b ni

A ychun quyidagi munosabatni yozish mumkin.

$$(BA)(ax+bx') = B(A(ax+bx')) =$$
$$= B(aAx+bAx') = aB(Ax)+bB(Ax') =$$
$$= a(BA)x+b(BA)x'$$

Chiziqli operatorlarning ko‘paytmalari quyidagi xossalarga ega ekanligini ko‘rsatib o‘tamiz.

$$(AB)C = A(BC)$$
$$a(BA) = (aB)A = B(aA)$$

Yuqorida ko‘rsatilgan xossalar ko‘rsatib turibdiki ularning har biri bir xil isbotlanadi. Bulardan birortasini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik

$I: X \to X, C: X \to Y, B: Y \to Z$ va $A: Z \to J$

bu yerda X, Y, Z va

J – har qanday vektorlar fazosi.

Oldin quyidagilarni ko‘rsatib o‘tamiz.

$(AB)C$ va $A(BC)$ J – ga tegishli X fazodagi operator

Har qanday $x \in X$ uchun quyidagilar bajariladi:

$$((AB)C)x = (AB)Cx = A(B(Cx)) = (A(BC))x$$
$$(AB)C = A(BC)$$

aksiomani bajarilishini ko‘rsatadi.

Bu yerda shuni ham eslatish kerakki chiziqli operatorlarni ko‘paytirish umuman komuntativ emas.

Haqiqatan ham $A \in (X,Y), B \in (Y,Z).$ bo‘lsa, $BA: X \to Z$ aniqlangan bo‘lib ko‘paytmada AB yo‘q.

1.7-§. Kvadratik formalar

1.7.1. Kvadratik formaning ta’rifi

Kvadratik forma deb, har bir hadi birorta hadini kvadratidan yoki bo‘lmasa har xil hadlarini ko‘paytmasi yig‘indisiga aytiladi.

Kvadratik formalar berilishiga qarab ikki xil bo‘ladi. Agar kvadratik formaning koeffitsiyentlari haqiqiy sonlardan iborat bo‘lsa, bunday kvadratik formaga haqiqiy kvadratik forma deyiladi.

Agar kvadratik formaning koeffitsiyentlari kompleks sonlardan iborat bo‘lsa, kompleks kvadratik forma deyiladi. Kvadratik formani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{n1}x_nx_1 + \\ + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

bu yerda a_{ij} lar x_i^2 ni koeffitsiyenti, $a_i + a_j (a_{ij} = a_{ji})$ esa $x_{ij} = x_j x_i \ (i \neq j)$ larni koeffitsiyenti.

Kvadratik formaning koeffitsentlaridan esa quyidagi kvadratik matritsani tuzish mumkin

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Bu kvadratik matritsaning rangi esa $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik formaning rangi deyiladi. Agar kvadratik formaning rangi $r = n$ bo‘lsa, u holda A matritsiaga aynimagan matritsa deyiladi, f kvadratik formaga esa aynimagan kvadratik forma deyiladi. Shuni ham aytish kerakki har qanday $n-$ tartibli matritsa uchun quyidagi ko‘rinishdagi kvadratik forma mos keladi

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad (1)$$

Endi $n-$noma'lumli X ustun matritsasini ko‘raylik

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Bu matritsa bitta ustun va $n-$ta satrdan iborat. Agar bu matritsaga transponerlash amalini bajarsak, quyidagi bitta satrga ega bo‘lgan matritsa hosil bo‘ladi:

$$X'=(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Shunday qilib (1) kvadratik formani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin bo‘ladi

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=X'AX$$

1.7.2. Kvadratik formalarni kanonik ko‘rinishga keltirish

Kvadratik formani aynimagan chiziqli almashtirish bilan quyidagi ko‘rinishdagi kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin

$$f(y_1,y_2,\ldots y_n)=b_1y_1^2+b_2y_2^2+\ldots+b_ny_n^2$$

bu yerda $y_1,y_2,\ldots,y_n$ yangi o‘zgaruvchilar, $b_1,b_2,\ldots,b_n$ koeffitsiyentlarning ayrimlari $0-$ga teng bo‘lishi mumkin.

Bu kvadratik formaning $0-$dan farqli koeffitsiyentlar soni $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ kvadratik formaning rangiga teng bo‘lishini isbotlash mumkin.

Faraz qilaylik kvadratik formaning matritsasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lsin

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_n \end{pmatrix}$$

va talab qilaylikki bu matritsaning rangi r ga teng bo‘lib, bosh dioganalda $r=n$ ta $0-$dan farqli elementga ega bo‘lsin.

Teorema. Har qanday kvadratik formani aynimagan chiziqli almashtirishlar yordamida kanonik formaga keltirish mumkin. Agar haqiqiy kvadratik forma o‘rganiladigan bo‘lsa, u vaqtda qo‘llaniladigan chiziqli almashtirishlarning koeffitsenntlari ham haqiqiy hisoblanadi.

Isboti. Har qanday bir noma’lumli kvadratik forma ax^2 ko‘rinishda bo‘lganligi uchun kanonik ko‘rinishga ega. Endi $(n-1)$-no‘malumli kvadratik forma uchun teorema isbot qilingan deb, n no‘malumli kvadratik forma uchun isbot qilamiz.

Faraz qilaylik $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no‘malumli (1) kvadratik forma berilgan bo‘lsin. Kvadratik formadan aynimagan chiziqli almashtirish natijasida birorta no‘malumni kvadratini ajratish mumkin bo‘lsin. U holda f kvadratik formani birorta hadini kvadratini bilgan holda, qandaydir no‘malumning kvadratik forma yig‘indisidan iborat bo‘ladi.

Bu maqsadga erishish bo‘ladi agarda kvadratik formaning matritsasidan bosh dioganalida birorta o‘zgaruvchini kvadrati noldan farqli koeffitsenti qatnashsa.

Faraz qilaylik $a_{11} \neq 0$ bo‘lsin, u holda $a_{11}^{-1}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right)^2$ kvadratik forma bo‘ladi, shu bilan f ham kvadratik forma. Shuning uchun

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) - a_{11}^{-1}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right)^2 = g\left(x_2, \ldots, x_n\right)$$

ham kvadratik forma bo‘ladi.

Bu yerda

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = a_{11}^{-1}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right)^2 + g\left(x_2, x_3, \ldots, x_n\right)$$

Agar quyidagilarni belgilab olsak

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, y_i = x_i \ , \qquad i = 2, 3, \ldots, n \qquad (2)$$

bundan quyidagi kelib chiqadi.

$$f = a_{11}^{-1} y_1^2 + g. \qquad (3)$$

Endi bu yerda g $y_1, y_2, \ldots, y_n$ o‘zgaruvchilarga nisbatan kvadratik forma bo‘ladi. (2) forma (1) ya’ni $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uchun kerakli forma bo‘ladi, chunki u aynimagan chiziqli almashtirishlar natijasida hosil bo‘ladi yoki teskaricha chiziqli almashtirishlar natijasida (2) hosil bo‘ladi va uning aniqlovchisi a_{11} aynimagan bo‘ladi.

Agar $a_{11} = a_{12} = \ldots = a_{1n} = 0$ bo‘lsa, u holda qaytadan chiziqli almashtirishlar kiritib no‘malumlarga nisbatan f kvadratik formalarni keltirib chiqarish mumkin bo‘ladi.

(1) kvadratik formaning koeffitsentlari $a_{ij} \neq 0$ bo‘lgani uchun buni isbot qilish o‘rinsizdir, ya’ni $a_{12} \neq 0$ bo‘lgani uchun $2a_{12}x_1x_2$ f kvadratik forma yig‘indisiga kiradi. Bu yig‘indida $x_1, x_2, \ldots, x_n$ no‘malumlarning birortasi albatta qatnashadi.

Endi bizga berilgan bo‘lsin

$$x_1 = z_1 - z_2, x_2 = z + z_2,\ x_i = z_i, i = 3,...,n \qquad (4)$$

ko‘rinishidagi chiziqli almashtirish. Bu almashtirish aynimagan chiziqli almashtirish bo‘ladi, chunki

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Bu almashtirishning natijasida $2a_{12}x_1x_2$ forma quyidagi ko‘rinishga o‘tadi,

$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 2a_{12}z_1^2 - 2a_{12}z_2^2$, ya’ni koeffitsiyentlar noldan farqli bo‘lgan f kvadratik forma hosil bo‘ladi.

Qaysiki ikkita hadi birdaniga kvadratik qatnashadi va boshqa hadlari bilan qisqarmaydi, chunki $z_1, z_2, \ldots z_n$ eng kamida bir marta qatnashadi.

(3) g kvadratik formada n dan kam no‘malumlar qatnashadi. Ayrim aynimagan almashtirishlar natijasida $y_2, y_3, \ldots, y_n$ o‘zgaruvchilar kanonik ko‘rinishga keladi. Bu almashtirishlar n o‘zgaruvchilar uchun bajarilib $y_2, y_3, \ldots, y_n$ larga ta’sir qilmaydi, shu bilan (3) kanonik ko‘rinishga ham ta’sir qilmaydi. Shunday qilib ikki, uch almashtirishlar natijasida ularning ko‘paytmalari o‘zgaruvchilar almashtirishlar kvadratlarining yig‘indisi bilan ayrim koeffitsiyentlari bilan qatnashadi.

Bu kvadratlarning soni kvadratik formaning rangi r ga teng.

Bu yerda shuni ham aytish kerakki $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik forma haqiqiy bo‘lib uning koeffitsiyentlari kanonik formada ham chiziqli almashtirishlar kiritgandan keyin haqiqiy bo‘ladi.

Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirish uchun uning harakteristik sonini va chiziqli almashtirib maxsus vektorlarini topish zarur.

Faraz qilaylikki R n o‘lchovli fazoda berilgan nolga teng bo‘lmagan vektor $x \in R$ ga chiziqli almashtirilgan $Ax = \lambda x$ maxsus vektor deyiladi. $\lambda -$ songa esa x maxsus vektorga mos bo‘lgan A chiziqli almashtirishning harakteristik soni deyiladi.

Agar $a_{12} = a_{21}$ bo‘lganda

$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ -ga kvadratik forma deyiladi.

Agar chiziqli almashtirishlar $A\vec{\ell}_1\,\vec{\ell}_2$ bazisda A matritsa bilan berilgan bo‘lsa: $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{pmatrix}$ u vaqtda A chiziqli almashtirishni harakteristik soni

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

tenglamaning λ_1 va λ_2 haqiqiy ildizlariga aytiladi.

Bu yerda λ_1 va λ_2 bir xil ishoraga ega bo‘lsa, kvadratik formaga elleptik tip deyiladi.

Agar λ_1 va λ_2 har xil ishoraga ega bo‘lsa, kvadratik formaga giperbolik tip deyiladi. Agar λ_1 yoki λ_2 nolga teng bo‘lsa, kvadratik formaga parabolik tip deyiladi. Maxsus vektorlarni tarkibiy qismlarini topish uchun ikkita sistemani yechamiz:

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda_1)m_1+a_{12}n_1=0,\\ a_{12}+(a_{22}-\lambda_1)n_1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda_2)m_2+a_{12}n_2=0,\\ a_{12}m_2+(a_{22}-\lambda_2)m_2=0\end{cases}$$

bu yerda $m_1, m_2, n_1, n_2 -$ maxsus vektorlarning koordinatalari.

Endi vektorlarni koordinatalarini yangi $\bar{\ell}_1$ va $\bar{\ell}_2$ bazisga nisbatan topamiz, buning uchun maxsus vektorlarni uzunligini quyidagi formulalar bilan topamiz.

$$\left|\bar{u}_1\right|=\sqrt{m_1^2+n_1^2};\quad \left|\bar{u}_2\right|=\sqrt{m_2^2+n_2^2},$$

bu yerda $u_1, u_2 -$ maxsus vektorlar bo‘lib, $\overline{\ell_1}=\left(\dfrac{m_1}{\left|\bar{u}_1\right|};\dfrac{n_1}{\left|\bar{u}_1\right|}\right)$; $\bar{\ell}_2=\left(\dfrac{m_1}{\left|\bar{u}_2\right|};\dfrac{n_2}{\left|\bar{u}_2\right|}\right)$ ga teng.

Shunday qilib ikkinchi tartibli chiziq tenglamasi hosil bo‘ladi:

$$\lambda_1 x'^2_1+\lambda_2 x'^2_2=c,\ \rightarrow \frac{\lambda_1}{c^2}+\frac{\lambda_2}{c^2}=1$$

Shuni uchun ham bu yerda muhim teoremalarni e’tiborga olish kerak.

1-teorema. Chiziqli almashtirishning harakteristik ko‘phadi bazisni tanlashga bog‘liq emas.

2-teorema. Agar chiziqli almashtirishni A matritsasi simmetrik bo‘lsa, u vaqtda harakteristik tenglamani $|A-\lambda E|=0$ hamma ildizlari haqiqiy bo‘lib, $E -$ esa aynan birga teng bo‘lgan operatordir.

1.7.3. Inersiya qonuni

Faraz qilaylik $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ har qanday koeffitsentli kompleks sonlardan iborat bo‘lib aynimagan chiziqli almashtirishlarni qo‘llash mumkin bo‘lsin.

Har qanday n o‘zgaruvchili, rangi r bo‘lgan kvadratik formani kanonik ko‘rinishga:

$$f(x_1, x_{2,}, \ldots, x_n) = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_n y_n^2$$

keltirish mumkin, bu yerda $c_1, c_2, \ldots, c_n$ larni hammasi noldan farqli. Shuni ham aytish kerakki har qanday kompleks sondan aynimagan chiziqli almashtirish kiritib kvadratik ildiz chiqarish mumkin: $z_i = \sqrt{c_i y_i} \quad i = \overline{1, r}.$ Bu almashtirish kvadratik formani quyidagi ko‘rinishga keltiradi:

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2 \qquad (5)$$

Bu ko‘rinishga normal ko‘rinish deyiladi.

Demak, koeffitsentlari birga teng bo‘lgan $r-$ ta noma’lum kvadratlarining yig‘indisiga normal ko‘rinish deyiladi.

Agar chiziqli forma f va g bir xil r ranga ega bo‘lsa, f ni (5) normal ko‘rinishga keltirish mumkin. Demak, $g-$ni ham (5) ko‘rinishga keltirish mumkin.

Teorema. Ikkita kompleks kvadratik formalarni kompleks hadli chiziqli almashtirishlar natijasida bir-biriga keltirish mumkin, agarda bu formaning rangi bir xil bo‘lsa.

Isboti: Teoremadan kelib chiqadiki har qanday r no‘malum r kvadratlar yig‘indidan r noma’lumli noldan farqli bo‘lgan kompleks koeffitsiyentli yig‘indidan bo‘lsa uni kvadratik formaga keltirish mumkin.

Har qanday haqiqiy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik formani haqiqiy chiziqli almashtirishlar natijasida haqiqiy koeffitsiyentli normal ko‘rinishga keltirish mumkin.

Har qanday $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n no‘malum rangi r ga teng bo‘lgan kvadratik formani quyidagi ko‘rinishdagi kanonik formaga keltirish mumkin

$$f = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_k y_k^2 - c_{k+1} c_{k+1}^2 - c_r y_r^2, \qquad 0 \le k \le r,$$

bu yerda $c_1, c_2, \ldots, c_{k+1}, \ldots, c_r$ lar musbat va noldan farqli sonlar, u vaqtda haqiqiy koeffitsiyentli aynimagan chiziqli almashtirish natijasida quyidagi hosil bo‘ladi $z_i = \sqrt{c_i y_i}, i = 1,2,...,r, z_j = y_j, j = \overline{r+1, \ldots, n}$ dan keyin f normal ko‘rinishga keladi

$$f = z_1^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - z_{k+2}^2 - \ldots - z_r^2$$

Bu kvadratlarning umumiy soni kvadratik formaning rangiga teng. Haqiqiy kvadratik forma har xil almashtirishlar yordamida normal ko‘rinishga keltirish mumkin. Lekin no‘malumlarni nomerlari bo‘yicha faqat bitta normal ko‘rinishga keltirish mumkin. Buni haqiqiy hadli kvadratik formaga keltirish mumkinligiga inersiya qonuni deyiladi.

Bu qonunni quyidagi teorema ifodalaydi.

Teorema. Normal ko‘rinishdagi musbat va manfiy kvadratlar soni, berilgan musbat hadli kvadratik formaga haqiqiy koeffitsentli haqiqiy aynimagan chiziqli almashtirishlarni tanlashga bog‘liq emas.

Isboti: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik formani $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o‘zgaruvchili n no‘malumli rangi r teng. Ikki xil usul bilan normal ko‘rinishga kelsin

$$f = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2 = z_1^2 + z_i^2 + \ldots + z_i^2 - z_{i+1}^2 - \ldots - z_r^2. \quad (6)$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ o‘zgaruvchilardan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ o‘zgaruvchilarga aynimagan chiziqli almashtirishlar orqali o‘tdik, endi teskarisi ikkinchi o‘zgaruvchilar ham birinchi o‘zgaruvchilar chiziqli ifodalanadi aniqlovchisi esa nolda farqli bo‘ladi

$$y_i = \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s, \quad i = \overline{1,n} \qquad (7)$$

Xuddi shunday

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (8)$$

bu yerda aniqlovchi yana noldan farqli bo‘ladi, (7) va (8) koeffitsentlar noldan farqli.

Bu yerda $k < i$ deb kuyidagi sistemani yozish mumkin.

$$y_i = 0, \ldots, y_k = 0, \;\; z_{i+1} = 0, \ldots, z_r = 0, \ldots, z_n = 0 \qquad (9)$$

(7) va (8) sistemalarga o‘ng tomonlarini tenglashtirib olsak $n - i + k$ ta chiziqli $n -$ no‘malumli bir jinsli tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Bu sistemada tenglamalar soni no‘malumlar sonidan kam, shuning uchun sistema nolga teng bo‘lmagan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yechimlarga ega. Agar (6) tenglikdagi y va z larni o‘rniga o‘zlarini qiymatlari bilan almashtirsak va no‘malumlarni o‘rniga $a_1, a_2, \ldots, a_n$ qo‘ysak va $y_i(a)$ va $z_j(a)$ deb $y_i z_j$ **belgilab olsak (6) tenglik quyidagi ko‘rinishni oladi.**

$$-y_{k+1}^2(a) - \cdots - y_r^2(a) = z_1^2(a) + \cdots + z_i^2(a) \qquad (10)$$

(7) va (8) tenglikni hamma hadlari haqiqiy sonlar bo‘lgani uchun (10) kvadratik forma hamma koeffitsentlari musbat. Bundan (6) dagi hamma kvadratlarni tengligi kelib chiqadi. Bu yerdan quyidagi tenlik kelib chiqadi:

$$z_1(a) = 0, \ldots, z_i(a) = 0 \qquad (11)$$

Ikkinchi tamondan

$$z_{i+1}(a) = 0, \ldots, z_r(a) = 0, \ldots, z_n(a) = 0 \qquad (12)$$

Shunday qilib $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $n -$ no‘malumli n ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi $z_i = 0, \; i = \overline{1,n}$ (11) va (12) xususiyatga ega bo‘lib $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yechimlarga ega bo‘ladi va aniqlovchisi nolga teng bo‘lishi shart. Bu qarama-qarshilik, lekin (11) tenglikda aynimagan almashtirishni taklif qilingan edi. Xuddi shunday bo‘ladi, $i < k$ bo‘lganda ham. Bu yerdan $i = k$ kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Normal formadagi musbat kvadratlar soniga haqiqiy f kvadratik formani inersiyasini inersiya musbat indeksi deyiladi, manfiy kvadratlar soni esa inersiyaning manfiy indeksi deyiladi.

Musbat va manfiy indekslar ayirmasiga f formaning signaturasi deyiladi.

Teorema. Ikkita n no‘malumli kvadratik formaga bir-biriga keltiriladi aynimagan chiziqli almashtirishlar natijasida, agarda ular bir xil rang va bir xil signaturaga ega bo‘lsa.

Isboti. Faraz qilaylik haqiqiy aynimagan almashtirish natijasida $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik forma g kvadratik formaga keltirilgan bo‘lsin. Bizga ma’lumki chiziqli almashtirishlar rangni o‘zgartirmaydi. Bu almashtirishlar signaturani ham o‘zgartirmaydi. Aks holda f va g lar bir-biriga keltirilmas edi. Bu esa inersiya qonuniga ikkinchi normal ko‘rinishga zid bo‘lib chiqardi.

Aks holda f va g bir xil ranga ega, bir xil signaturaga ega, bu esa f va g bir xil normal ko‘rinishga ega va shuninig uchun ularni biriga keltirish mumkin.

Agar g kvadratik forma kanonik berilgan bo‘lsin.

$$g = b_1 y_1^2 + b_r y_2^2 + \cdots + b_r y_r^2 \qquad (13)$$

$b_k \neq 0,\ k = 1, r.$ g kvadratik formaning rangi r ga teng. U vaqtda inersiya musbat indeksi (13) ni o‘ng tomonidagi musbat koeffitsiyentlar soniga teng bo‘ladi. Bu esa yuqoridagini tasdiqlaydi.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik forma (13) ko‘rinishga ega bo‘ladi, agar f ni rangi r bo‘lib, inersiyani musbat indeksi (13) inersiyani musbat indeksiga teng bo‘lsa.

Har qanday kvadratik formani ikkita kvadratik formani ko‘paytma ko‘rinishiga yozish mumkin emas. Buning ma’lum shartlarni keltirib chiqarish kerakki kvadratik forma ajraladigan bo‘lsin.

Kompleks kvadratik forma $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ajraladi shu vaqtdagi uni rangi ikkinchini rangidan kichik yoki ikkalasinikiga teng bo‘lsa.

Haqiqiy kvadratik forma $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ikkita kvadratik forma ko‘rinishida bo‘lishi uchun shu vaqtdaki uni rangi birdan katta bo‘lmasa yoki nolga teng bo‘lsa, signaturasi esa nolga teng bo‘lsa.

Oldin chiziqli formalarni ko‘paytmasini ko‘rish kerak $f \cdot \varphi$

Agar bu formalardan birortasi nolga teng bo‘lsa, u holda ularning ko‘paytmasi koeffitsiyentlari nollardan iborat bo‘lgan kvadratik forma bo‘ladi va uni rangi nolga teng bo‘lsa.

Agar f va φ chiziqli formalar proporsional bo‘lsa, ya’ni $f = c\varphi, c \neq 0$, u holda φ nolga teng, faraz qilaylik $a_1 \neq 0$. U vaqtda aynimagan chiziqli almashtirishlar kiritib

$$y_1 = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n, \quad y_i = x_i, i = \overline{2, \ldots n}$$

Kvadratik formani $f \cdot \varphi$ ni $f\varphi = c_1 y_1^2$ ko‘rinishga keltiramiz.

O‘ng tomonda kvadratik formaning rangi 1 ga teng bo‘ladi. Shuning uchun $f \cdot \varphi$ kvadtratik formaning rangi 1 ga teng. Agar chiziqli f va φ chiziqli formalar proporsional emas, shuning uchun faraz qilaylik, misol uchun

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

bo‘lsa, u vaqtda chiziqli almashtirishlar

$$y_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_1 x_n,$$
$$y_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n,$$
$$y_i = x_i \quad i = 3,4,\ldots,n$$

lar aynimagan bo‘ladi va $f \cdot \varphi$ kvadratik forma quyidagi ko‘rinishga keladi

$$f \cdot \varphi = y_1 \cdot y_2$$

O‘ng tomondagi kvadratik forma, formaning rangi 2 ga teng, haqiqiy koeffitsentlar bo‘lganida signatura 0 ga teng.

Endi isbotni teskarisidan boshlaymiz kvadratik formaning rangi 0 ga teng chekli, ikkita kvadratik formaning ko‘paytmasini qaraylik, ulardan birini nol deylik. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rangi 1 ga teng aynimagan chiziqli almashtirishlar kiritib quyidagi ko‘rinishga keltiramiz

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = cy_1^2,\ c \neq 0$ ya'ni $f = (cy_1)y_1$

y_1 ni chiziqni almashtirib $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lar orqali ifodalab, ikkita chiziqli ko‘paytma ko‘rinishiga keltiramiz. U vaqtda rangi 2 ga teng signaturasi 0 ga teng bo‘lgan haqiqiy kvadratik formani aynimagan chiziqli almashtirish natijasida kuyidagi ko‘rinishga keladi

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1^2 - y_2^2.$$

Bu holga rangi 2 ga teng bo‘lgan kompleks kvadratik formani ham keltirish mumkin.

Lekin $y_1^2 - y_2^2 = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)$, ifodaning o‘ng tomonida y_1 va y_2 ularni chiziqli ifodalari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ almashtirsak ikkita chiziqli formalarni ko‘paytmasi hosil bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

1.7.4. Musbat aniqlangan formalar

Haqiqiy musbat koeffitsentli $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik forma musbat aniqlangan deyiladi, agarda uni normal ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lsa, ya'ni n ta musbat kvadratga ega bo‘lib uni rangi va musbat inersiya indeksi no‘malumlar soniga teng bo‘lsa.

Teorema. Musbat koeffitsentli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n-no‘malumli $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik forma musbat aniqlangan deyiladi, agarda no‘malumlarning har qanday haqiqiy qiymatlarida eng kamida ulardan birortasi noldan farqli bo‘lib, bu forma musbat qiymat qabul qilsa.

Isbot: Faraz qilayliki f kvadratik formani normal ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lsin, ya'ni

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \qquad (14)$$

bu yerda

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i,\ j = 1,2,\ldots,n \qquad (15)$$

a_{ij} koeffitsentlarning aniqlovchisi noldan farqli bo‘lsin. Agar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ istalgan haqiqiy qiymatlarini f ga qo‘ysak, ularni (14) va (15) ga y_i larni hammasini qo‘ysak (15) kelib chiqadi bundan kelib chiqqan hamma $y_1, y_2, ..., y_n$ nolga teng bo‘la olmaydi, chunki

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,\ j = 1,\ldots,n$ sistema noldan farqi yechimga ega bo‘lishi mumkin, aniqlovchi 0 noldan farqi bo‘lishiga qaramasdan $y_1, y_2, ..., y_n$ larni qiymatlarini (14) f formani qiymatini topish mumkin, qaysiki ayrimlari noldan farqli bo‘lib, aniq musbat qiymatga ega bo‘lsa.

Endi teoremani teskarisini isbot qilamiz.

Faraz qilaylikki f musbat aniqlanmagan, ya’ni rang va musbat inersiya indeksi n dan kichik. Bu shuni ko‘rsatadiki chiziqli ayni almashtirishlar natijasida (14) normal ko‘rinishga keladi, lekin kvadratlarning hech bo‘lmasa birortasi nolga teng bo‘ladi, bo‘lmasa kvadratlar qatnashmaydi. Misol uchun y_n . Bu holda haqiqiy qiymatlarni tanlab olish mumkin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o‘zgaruvchilarni birortasi noldan farqli qaysikim f forma bu qiymatlarda nolga teng yoki bo‘lmasa manfiy.

Faraz qilaylik matritsasi $A = (a_{ij})$ ga teng bo‘lgan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n o‘zgaruvchili f kvadratik forma berilgan bo‘lsin. Bu matritsani minorlarini tartibi $1, 2, \ldots, n$ teng bo‘lsin va quyidagicha joylashgan bo‘lsin

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{12}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1k} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2k} \\ - - - - - - \\ a_{k1}a_{k2}\ldots a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ - - - - - - \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Oxirgi menor kvadratik formani A matritsasiga to‘g‘ri keladi. Bu minorga kvadratik $f(x_1, \ldots, x_n)$ formani bosh minori deyiladi.

Teorema. Haqiqiy koeffitsentli n no‘malumli f kvadratik forma faqat musbat aniqlangan deyiladi, agarda hamma bosh minorlari aniq musbat bo‘lsa.

Isbot: Agar $n = 1$ teorema to‘g‘ri, chunki bu holda forma ax^2 ko‘rinishga ega chunki $a > 0$ bu musbat aniqlangan. Shuning uchun

teoremani n no‘malumli uchun isbot qilish kerak. Buni $n-1$ no‘malum uchun isbot qilingan deb n uchun ko‘rsatamiz.

Ayrim almashtirishlardan keyin quyidagi matritsasi $Q^t AQ$ matritsaga ega bo‘lgan kvadrat forma hosil bo‘ladi.

Shunga qaramasdan

$|Q^1| = |Q|, |QAQ| = |Q^1| \cdot |A| \cdot |Q| = |A||Q|^2$, ni $|A|$ aniqlovchi musbat songa ko‘paymoqda. Bizga berilgan quyidagi kvadratik forma

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \qquad (16)$$

Buni quyidagicha yozish mumkin

$$f = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} x_i x_n + a_{nn} x_n^2, \qquad (17)$$

bu yerda φ $f(x_{11}, \ldots, x_n)$ kvadratik hadlaridan tuzilgan $n-1$ no‘malumli kvadratik forma. Bu yerda φ kvadratik formaning hamma bosh minorlari f kvadratik formaga qatnashadi.

Faraz qilaylikki f forma musbat aniqlanmagan. U vaqtda φ forma ham musbat aniqlanmagan bo‘ladi.

Faraz qilaylikki $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bosh minorlari musbat aniqlangan y vaqtdan, shartdan φ kvadratik formaning bosh minorlari musbat aniqlangan bo‘ladi (17) va asosan f kvadratik formani quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} b_{in} y_i y_n + b_{nn} y_n^2 \qquad (18)$$

$b_{nn}-$ koeffitsiyentlarni aniq ko‘rinishi shart emas. Chunki

$y_i^2 + 2b_{1n} y_i y_n = (y_i + b_{in} y_n)^2 - b_{in} y_n^2$, shuning uchun aynimagan almashtirishlar natijasida $z_i = y_i + b_{in}, i = 1,2,\ldots,n-1,\ z_n = y_n$ f kvadratik formani quyidagi kanonik formaga keltirish mumkin

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + Cz_n^2, \qquad (19)$$

Bu yerda f formani musbat aniqlanganligini isbot qilish uchun C ni musbatlini ko‘rsatish kerak.

Bu yerda (19) ni o‘ng tomonidagi aniqlovchi C ga teng. Bu aniqlovchi musbat bo‘lishi kerak, chunki (19) ni o‘ng tamonidagi ifoda f kvadratik formadan ikki marta chiziqli almashtirish natijasida olingan aniqlovchi f formaning bosh minori bo‘lib, musbatdir

1.7.5. Kvadratik formalarga ta’luqli misol va masalalar

1-masala. Kvadratik formaning matritsasini yozing

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3,$$

Yechish: $a_{11} = 2, a_{22} = -3, a_{33} = 8,\ a_{12} = a_{21} = 2, a_{13} = a_{31} = -1 a_{23} = a_{32} = 3$
Bularni o‘rniga quyidagini yozish mumkin.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

2-masala. Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirish

$$f(x_1, x_2) = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$$

Yechish: $a_{11} = 27, a_{12} = -5, a_{22} = 3$
Harakteristik tenglamani tuzamiz

$$\begin{vmatrix} 27-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(27-\lambda)(3-\lambda)\cdot 25 = 0$$

$$\lambda^2 - 30\lambda + 36 = 0,\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 28$$

3-masala. Ikkinchi tartibli kanonik ko‘rinishga keltiramiz:

$$17x^2 + 12xy + 8y + 8y^2 - 20 = 0$$

Yechish: Oldin koeffitsiyentlarini topamiz

$$a_{11} = 17;\ a_{12} = 6;\ a_{22} = 8$$

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Endi harakteristik tenglamani tuzamiz

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(17-\lambda)(8-\lambda) - 36 = 0,$$

$$\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0,$$

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 20.$$

Natijada:

$$5(x')^2 + 20(y')^2 - 20 = 0;$$

$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 1$ ellipisning kanonik tenglamasi.

4-masala. Ikkinchi tartibli egri chiziqlini tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiring: $2x^2 + 8xy + 8y^2 - 20 = 0.$

Yechish: Oldin koeffitsentlarni topamiz.

$$a_{11} = 2;\ a_{12} = 4,\ a_{22} = 8, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Endi harakteristik tenglamani tuzamiz.

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 4 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(8-\lambda) - 16 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 10$$

Natija: $10(y')^2 - 20 = 0$

$\frac{y'^2}{2} = 1,$ parabolaning kanonik tenglamasi.

5-masala. Ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirish:

$$6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2 - 21 = 0$$

Yechish: Oldin koeffitsentlarni topamiz

$$a_{11} = 6,\ a_{12} = \sqrt{5}, a_{22} = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 3 \end{pmatrix}$$

Endi harakteristik tenglamani tuzamiz

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(6-\lambda)(2-\lambda)-5=0$$
$$\lambda^2-8\lambda+7=0$$
$$\lambda_1=\frac{7}{6},\ \lambda_2=\frac{8}{6}$$

Natijada: $\frac{7}{6}(x')^2+\frac{1}{6}(y')^2-21=0$

$\frac{x'^2}{18}+\frac{y'^2}{126}=1$ ellipsning kanonik tenglamasi.

6-masala. Ikkinchi tartibli egri chiziqning tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiring:

$$22x^2+2\sqrt{69}xy+2y^2-4=0.$$

Yechish: Oldin koeffitsiyentlarni topamiz

$$a_{11}=22,\ a_{12}=\sqrt{69},\ a_{22}=2,\ A=\begin{pmatrix}22 & \sqrt{69}\\ \sqrt{69} & 2\end{pmatrix}.$$

Endi harakteristik tenglamani tuzamiz

$$(22-\lambda)(2-\lambda)-69=0$$
$$\lambda^2-24\lambda-25=0$$
$$\lambda_1=\frac{49}{2},\ \lambda_2=\frac{1}{2}.$$

Natijada

$\frac{49}{8}x'^2-\frac{y'^2}{8}=1$ giperbolaning kanonik tenglamasi.

7-masala. Ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiring:

$$2x^2+6xy+2y^2+5=0$$
$$a_{12}=a_{21}=3$$
$$a_{22}=2$$

Yechish: Oldin koeffitsiyentlarni topamiz.

$$a_{11}=2, a_{12}=3, a_{22}=2, \qquad A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

Koeffsiyentlarga asoslanib harakteristik tenglamani tuzamiz

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(2-\lambda) - 9 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$$

Natijada

$$-(x')^2 + 5(y')^2 + 5 = 0$$

$$\frac{x'^2}{5} - \frac{y'^2}{1} = 1$$

giperbolaning kanonik tenglamasi.

8-masala. Kvadratik forma musbat aniqlanganmi?

$$f = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

Yechish: Oldin koeffitsentlarni aniqlaymiz.

$$a_{11} = 5, a_{22} = 1, \quad a_{33} = 5, a_{12} = a_{21} = 2, a_{31} = a_{13} = -4,$$
$$a_{23} = a_{32} = -2$$

Endi bosh minorlarini hisoblab chizamiz.

$$5, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

Bosh minorlarni hammasi musbat bo‘lgani uchun kvadratik forma musbat aniqlangan.

9-masala. Kvadratik forma qoidalaridan foydalanib ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiring va grafigini sxematik izohlang

$$5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 6 = 0$$

Yechish: Harakteristik tenglamani tuzamiz va koeffitsiyentlarini aniqlaymiz.

$$a_{11}=5,\ a_{12}=\sqrt{3};\ a_{22}=3$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-8\lambda+12,$$

$$\lambda^2-8\lambda+12=0$$

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=6$$

Endi maxsus vektorlarni koordinatlarini topamiz:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_1)m_1+a_{12}n_1=0, \\ a_{12}m_1+(a_{22}-\lambda_1)m_1=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m_1+\sqrt{3}n_1=0, \\ \sqrt{3}m_1+n_1=0. \end{cases} \rightarrow m_1=1, n_1=-\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_2)m_2-a_{12}n_2=0, \\ a_{12}m_2+(a_{22}-\lambda_2)n_2=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m_2+\sqrt{3}n_2=0, \\ \sqrt{3}m_2-3n_2=0. \end{cases} \rightarrow m_2=1, n_2=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

U vaqtda maxsus vektorlar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\overline{U}_1(1;-\sqrt{3}), \qquad \left|\overline{U}_1\right|=\sqrt{1+3}=2$$

$$\overline{U}_2\left(1;\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \qquad \left|\overline{U}_2\right|=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Endi birlik vektorlarni tarkibiy qismlarini topamiz

$$\bar{\ell}_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \bar{\ell}_2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Yangi sistemada chiziqni tenglamasini tuzamiz

$$2(x')^2+6(y')^2=6$$

y vaqtda kanonik ko‘rinish quyidagicha bo‘ladi

$$\frac{(x')^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}+\frac{(y')^2}{1^2}=1$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Kvadratik formani matritsaviy ko‘rinishda yozing.

$f = -3x_1^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2^2 - x_3^2$

$f = x_1^2 - 6x_1x_2 - 8x_2x_3 + 14x_2^2 - 5x_3^2$

2.

$f = 3x_1^2 - 6x_1x_2 - x_2^2$

kvadratik forma berilgan

$$\begin{cases} x_1 = -y_1 - y_2, \\ x_2 = -3y_1 + 6y_2, \end{cases}$$

almashtirish yordamida hosil bo‘lgan kvadratik formani toping.

3.

Kvadratik forma $f(x_1; x_2) = 3x_1^2 - 6x_2^2 + 14x_1x_2$, berilgan. $\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2, \\ x_2 = 5y_1 + 3y_2, \end{cases}$

chiziqli almashtirish orqali hosil bo‘lgan kvadratik formani toping.

4. Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiring.

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 12x_1x_2 - 15x_1x_3 + 5x_2^2 - 3x_3^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 13x_1x_2 - 5x_1x_3 + 12x_2^2 - 13x_3^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 5x_1x_3 + 3x_2^2 - 13x_3^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = 15x_1^2 + 9x_1x_2 - 15x_1x_3 + 12x_2^2 - 6x_3^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 12x_1x_2 - 5x_1x_3 + 13x_2^2 - 3x_3^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_1x_2 - 5x_1x_3 + 12x_2^2 - 3x_3^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 12x_1x_2 - 15x_1x_3 + 3x_2^2 - 13x_3^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 12x_1x_2 - 15x_1x_3 + 3x_2^2 - 13x_3^2$

5. Quyidagi kvadratik formaning ishorasini aniqlang.

$f(x_1; x_2; x_3) = 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

$$f(x_1;x_2;x_3)=7x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2-x_3^2+8x_2x_3$$

$$f(x_1;x_2;x_3)=-3x_1^2-6x_1x_2+x_3^2+10x_1x_3-8x_2x_3$$

$$f(x_1;x_2;x_3)=2x_1^2-14x_1x_2+x_2^2-x_3^2$$

$$f(x_1;x_2;x_3)=x_1^2-x_2^2-6x_3^2+12x_1x_2$$

II-BOB. ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI HAMDA ULARNING TADBIQLARI

2.1-§. Analitik geometriya elementlari

2.1.1.Koordinatlar usuli va sodda masalalar

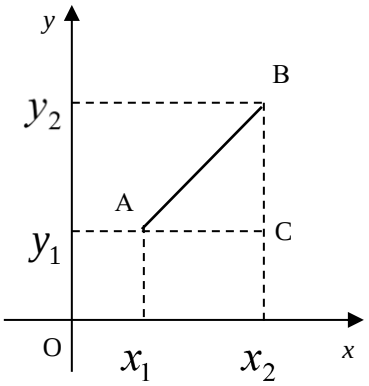
Ma’lumki, o‘zaro perpendikulyar bo‘lgan gorizontal va vertikal sonlar o‘qi Dekart to‘g’ri burchakli koordinatlar sistemasini tashkil qiladi. Bu sistema orqali tekislikdagi nuqta bilan bir juft haqiqiy son o‘rtasida bir qiymatli moslik o‘rnatiladi. Tekislikda nuqta $A(x, y)$ bilan belgilanadi. x, y sonlarga uning ***koordinatlari*** deyiladi. “,Nuqta berilgan” degan ibora uning koordinatlarining berilganligini, “Nuqtani toping” degan ibora esa, shu koordinatlarni topishni tushuniladi. Koordinatlar sistemasi orqali o‘rnatilgan bunday moslikka **koordinatlar usuli** deyiladi.

Bu usulni geometriyaning **sodda *masalalarini yechishga*** qo‘llaymiz:

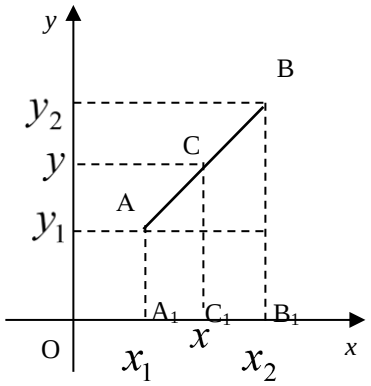
1) tekislikda berilgan $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi masofani topish talab etilsin. Ma’lumki, $AC = x_2 - x_1$, $BC = y_2 - y_1$(1-chizma). ABC to‘g’ri burchakli uchburchakdan, $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, bo‘lib,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

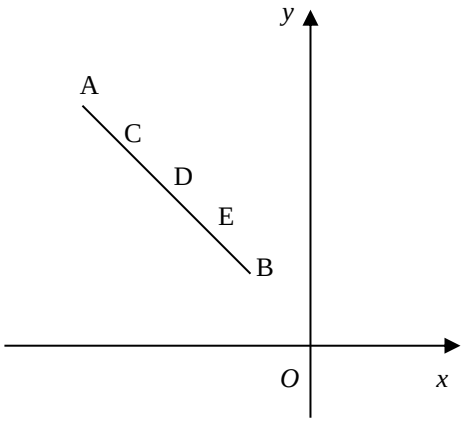
bo‘ladi. (1) formulaga tekislikda **berilgan ikkita nuqta orasidagi masofani topish** formulasi deyiladi .



2.1-chizma



2.2-chizma



2.3-chizma

2) AB kesma berilgan bo‘lib, uning uchlari $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ bo‘lsin. AB kesmani $AC : BC = \lambda$ nisbatda bo‘luvchi $C(x, y)$ nuqtani topish masalasi qo‘yilgan bo‘lsin. O‘rta maktab geometriyasidan ma’lumki (2-chizma),

$$AC : A_1C_1 = BC : B_1C_1 = \lambda,$$

yoki

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \lambda$$

bo‘lib,

$$A_1C_1 = x - x_1, \quad B_1C_1 = x_2 - x$$

bo‘lganligi uchun,

$$(x - x_1) : (x_2 - x) = \lambda,\ x - x_1 = \lambda(x_2 - x);\ x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2;$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

bo‘ladi. Xuddi shunday, ushbu tenglikka ega bo‘lish mumkun:

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Demak, C nuqtaning koordinatlari uchun

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (1)$$

formulani hosil qildik. (2) formulaga AB kesmani λ nisbatda bo‘luvchi $C(x, y)$ nuqta koordinatlarini topish formulasi deyiladi. Xususiy holda $C(x;\ y)$ nuqta AB

kesmani teng ikkiga bo‘lsa, u holda

$\frac{AC}{CB} = \lambda = 1$ bo‘lib, $\quad x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ \ y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

kesmani teng ikkiga bo‘lish formulasi kelib chiqadi.

1-misol. $M(5;3)$ va $N(2;-1)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. Shartga ko‘ra: $x_1 = 5,\ y_1 = 3,\ x_2 = 2,\ y_2 = -1$. Bularni (1) formulaga qo‘ysak:

$$MN = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

bo‘ladi.

2-misol. Tekislikda $A(5;3)$, $B(2;1)$ nuqtalar berilgan. AB kesmani $\frac{AC}{CB} = \lambda = 0{,}2$ nisbatda bo‘luvchi $C(x;\ y)$ nuqtaning koordinatlarini toping.

Yechish. Shartga ko‘ra $x_1 = 5,\ x_2 = 2,\ y_1 = 3,\ y_2 = 1,\ \lambda = 0{,}2$.

(2) formulaga asosan:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{5 + 0{,}2 \cdot 2}{1+0{,}2} = \frac{5+0{,}4}{1{,}2} = \frac{5{,}4}{1{,}2} = \frac{54}{12} = \frac{9}{2} = 4{,}5;$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{3 + 0{,}2 \cdot 1}{1+0{,}2} = \frac{3+0{,}2}{1{,}2} = \frac{3{,}2}{1{,}2} = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}.$$

Shunday qilib, $C\left(4{,}5;\frac{8}{3}\right)$ bo‘ladi.

2.1.2. Tekislikda to‘g’ri chiziq va uning tenglamalari

1. Chiziq va uning tenglamasi haqida. Analitik geometriyaning eng muhim tushunchalaridan biri, **chiziq tenglamasi** tushunchasidir. Tekislikda to‘g’ri burchakli koordinatlar sistemasida L chiziq berilgan bo‘lsin(4-chizma).

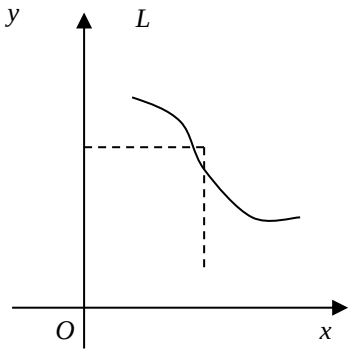
Ta’rif. L chiziqda yotuvchi istalgan $M(x,y)$ nuqtaning koordinatlari

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

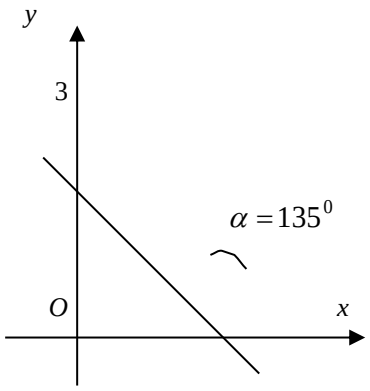
tenglamani qanoatlantirib, unda yotmagan nuqtalarning koordinatlari qanoatlantirmasa, bu tenglama L chiziqning tenglamasi deyiladi. Bundan L chiziq, koordinatlari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi barcha nuqtalar to‘plamidan iborat ekanligi kelib chiqadi. Chiziqning tenglamasini tuzish deganda unga tegishli ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtaning koordinatlari orasidagi munosabatni(bog’lanishni) tenglama ko‘rinishida ifodalashdan iborat. Topilgan chiziq tenglamasi uchun: chiziqdagi istalgan nuqtaning koordinatlari uni qanoatlantiradi va aksincha, nuqtaning koordinatlari tenglamani qanoatlantirsa, bu nuqta shu chiziqda yotadi.

2. *To‘g’ri chiziq va uning tenglamalari.* *To‘g’ri chiziq* tushunchasi analitik geometriyaning asosiy tushunchalaridan biridir. Quyida har xil holatlarda to‘g’ri chiziqning analitik ifodalarini (tenglamalarini) keltirib chiqaramiz va ular yordamida to‘g’ri chiziqning tekislikdagi vaziyatlarini o‘rganamiz.

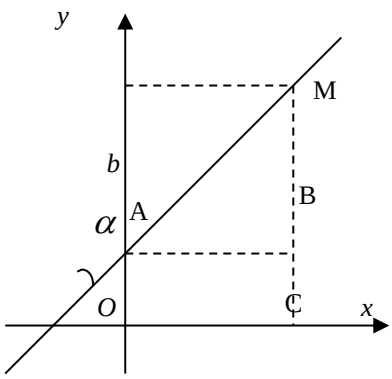
*To‘g’ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi***.** To‘g’ri chiziqning OX o‘qi musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi α va to‘g’ri chiziqning ordinatlar o‘qidan ajratgan kesmasining kattaligi b berilganda, uning tekislikdagi holati aniq bo‘ladi. Masalan, $b=2$, $\alpha=135^0$ bo‘lsa, uning holati aniq bo‘ladi (2.4, 2.5, 2.6-chizma).



2.4-chizma



2.5-chizma



2.6-chizma

Yuqoridagi miqdorlar berilganda to‘g’ri chiziqning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x, y)$ to‘g’ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy nuqta bo‘lsin (6-chizma). AMB to‘g’ri burchakli uchburchakdan

$$\frac{BM}{AB} = tg\alpha \text{, bundan } BM = ABtg\alpha$$

6–chizmadan $y = BC + BM$; yoki $y = ABtg\alpha + b$, $AB = x$ bo‘lganligi uchun $y = xtg\alpha + b$ bo‘ladi. $tg\alpha$ to‘g’ri chiziqning **burchak koeffisiyenti** deyiladi va $tg\alpha = k$ bilan belgilaymiz. Shunday qilib,

$$y = kx + b \qquad (2)$$

munosabat kelib chiqadi. Bunga to‘g’ri chiziqning **burchak koeffisiyentli tenglamasi** deyiladi. $b = 0$ bo‘lsa, to‘g’ri chiziq koordinatlar boshidan o‘tib, tenglamasi $y = kx$ bo‘ladi. $k = 1$ bo‘lsa, $y = x$ bo‘lib, bu birinchi koordinat- lar burchagining bissektrisasi bo‘ladi.

1-misol. OX o‘qi bilan 120^0 burchak hosil qiluvchi va OY o‘qini $A(0;\ 3)$ nuqtada kesib o‘tuvchi to‘g’ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko‘ra, to‘g’ri chiziq OY o‘qini $A(0;\ 3)$ nuqtada kesib o‘tadi, demak $b = 3$. Bu nuqtadan OX o‘qiga parallel chiziq o‘tkazamiz, hamda shu to‘g’ri chiziq bilan 120^0 burchak hosil qiluvchi tomon, yasalishi kerak bo‘lgan to‘g’ri chiziq bo‘ladi .

Endi shu to‘g’ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu holda $k = tg\ 120^0 = -\sqrt{3}$, $b = 3$ bo‘lganligi uchun, $y = -\sqrt{3}\,x + 3$ to‘g’ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi bo‘ladi.

2) Berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziqlar dastasining tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziq tenglamasi. $A(x_1, x_1)$, $B(x_2; y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin.

$$y = kx + b \qquad (3)$$

to‘g’ri chiziq A nuqtadan o‘tsin. Bu holda A nuqtaning koordinatlari to‘g’ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya’ni $y_1 = kx_1 + b$ bo‘ladi. (3) tenglikdan oxirgi tenglikni ayirsak:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (4)$$

hosil bo‘ladi. (4) tenglamaga berilgan **bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziqlar dastasining tenglamasi** deyiladi.

To‘g’ri chiziq $B(x_2; y_2)$ ikkinchi nuqtadan ham o‘tsa,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

bo‘lib,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

bo‘ladi. k ning yuqoridagi qiymatini (4)ga qo‘yib,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz. (5) **berilgan ikki** $A(x_1, y_1)$ **va** $B(x_2, y_2)$ **nuqtalardan o‘tuvchi to‘g’ri chiziq tenglamasi** deyiladi.

2-misol. Biror xil mahsulotdan 100 donasini ishlab chiqarishga 300 ming so‘m xarajat qilinsin. 500 donasi uchun esa xarajat 1300 ming so‘m bo‘lsin. Xarajat funksiyasi chiziqli (to‘g’ri chiziq) bo‘lsa, shu mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish xarajatini toping.

Yechish. Masala sharti bo‘yicha $A(100,\ 300)$ va $B = (500,\ 1300)$ nuqtalar berilgan. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziq tenglamasiga asosan,

$$\frac{y - 300}{1300 - 300} = \frac{x - 100}{500 - 100},\ \text{yoki}\quad y = 2{,}5x + 50$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Oxirgi tenglamadan $x=400$ uchun, $y=1050$ ekanligini topamiz. Demak, mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish uchun 1050 ming so‘m xarajat qilinadi.

3) To‘g’ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari. Ikki noma’lumli

$$Ax+By+C=0$$

tenglamani qaraymiz.

Bundan, $By=-Ax-C$, $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ bo‘lib, $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$ bilan belgilasak, $y=kx+b$ tenglama hosil bo‘ladi. Shunday qilib, $Ax+By+C=0$ tenglama ham to‘g’ri chiziq tenglamasi ekanligi kelib chiqadi.

$$Ax+By+C=0 \qquad (6)$$

tenglamaga to‘g’ri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

To‘g’ri chiziq umumiy tenglamasining hususiy hollari: 1) $A\neq 0$, $B\neq 0, C=0$ bo‘lsa, $Ax+By=0$ bo‘lib, to‘g’ri chiziq koordinatlar boshidan o‘tadi, chunki $O(0;0)$ nuqtaning koordinatlari tenglamani qanoatlantiradi;

2) $A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, bo‘lsa, $y=-\frac{C}{B}$ bo‘lib, OY o‘qdan $-\frac{C}{B}$ kesma ajratib, OX o‘qiga parallel to‘g’ri chiziq tenlamasi bo‘ladi;

3) $B=0$, $A\neq 0$, $C\neq 0$ bo‘lsa, $x=-\frac{C}{A}$ bo‘lib, OX o‘qdan $-\frac{C}{A}$ kesma ajratib , OY o‘qiga paralllel to‘g’ri chiziq tenglamasi bo‘ladi;

4) $A=0$, $C=0$, $B\neq 0$ bo‘lsa, $y=0$ bo‘lib, OX o‘qining tenglamasi hosil bo‘ladi;

5) $B=0$, $C=0$, $A\neq 0$ bo‘lsa, $x=0$ bo‘lib, OY o‘qining tenglamasi hosil bo‘ladi;

6) $A=0$, $B=0$, $C\neq 0$ bo‘lsa, $C=0$ bo‘lib, o‘zgarmas miqdor, bir paytda 0 dan farqli hamda 0 ga teng kelib chiqadi, bunday bo‘lishi mumkin emas.

3-misol. $x-2y+6=0$ to‘g’ri chiziq uchun k va b parametrlarni toping.

Yechish: Buning uchun berilgan tenglamani y ga nisbatan yechamiz: $2y = x + 6,\ \ y = 1/2 \cdot x + 3$ bundan (2) tenglama bilan taqqoslab, $k = 1/2$, $b = 3$, ekanligini topamiz. Shunday qilib, to‘g’ri chiziq umumiy tenglamasini burchak koeffisiyentli tenglamaga keltirib k va b parametrlarni topdik.

4) To‘g’ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi. To‘g’ri chiziq koordinat o‘qlaridan mos ravishda a va b kesmalar ajratib o‘tsin (2.7,2.8-chizma). To‘g’ri chiziq $A(a;\ 0)$ va $B(0;\ b)$ nuqtalardan o‘tadi. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziq tenglamasiga asosan

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{x-a}{-a}\ , \qquad \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$$

yoki

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (7)$$

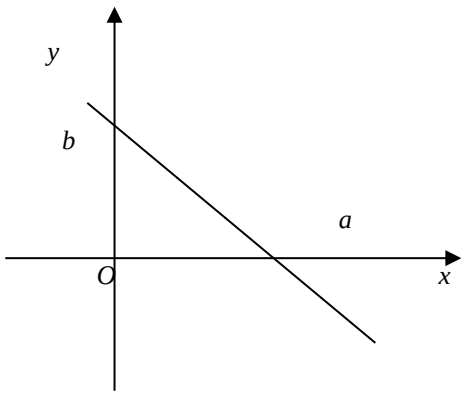
tenglama hosil bo‘ladi. Bu tenglamaga to‘g’ri chiziqning **kesmalarga nisbatan tenglamasi** deyiladi.

4-misol. $3x + 5y - 15 = 0$ to‘g’ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing va uni yasang.

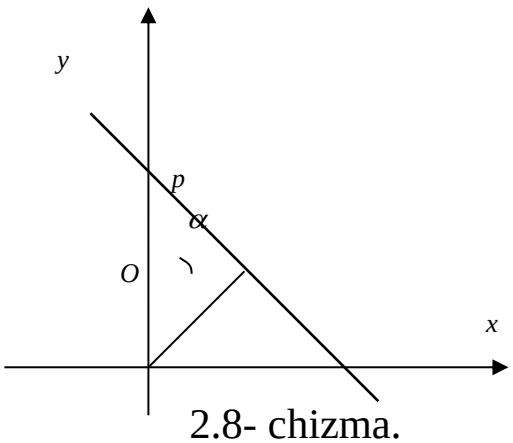
Yechish. $3x + 5y - 15 = 0$ to‘g’ri chiziqning umumiy tenglamasini (7) ko‘rinishdagi tenglamaga keltiramiz.

$$3x + 5y = 15,\ \ \frac{3x}{15} + \frac{5y}{15} = 1 \quad yoki \quad \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$$

bu to‘g’ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi bo‘ladi. Endi koordinat o‘qlaridan mos ravishda 5 va 3 kesmalarni ajratib, ajratilgan kesmalar oxiridan yasalishi kerak bo‘lgan to‘g’ri chiziqni o‘tkazamiz.



2.7- chizma.



2.8- chizma.

5) To‘g’ri chiziqning normal tenglamasi. To‘g’ri chiziqqa koordinat boshidan tushirilgan perpendikulyarning (normal) uzunligi va uning OX o‘qi musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi α berilganda to‘g’ri chiziqning tekislikdagi holati aniq bo‘ladi (8-chizma) va uning tenglamasi

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (8)$$

bo‘ladi. (8) tenglamaga to‘g’ri chiziqning **normal tenglamasi** deyiladi. Ma’lumki, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Normal tenglamada shu shart bajarilishi kerak. To‘g’ri chiziq umumiy tenglamasini normal tenglama keltirish uchun

$$M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

normallovchi ko‘paytuvchini hisoblab, uni

$$Ax + By + C = 0$$

tenglamaga ko‘paytiramiz. Bu holda

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

normal tenglama hosil bo‘ladi. Normallovchi ko‘paytuvchining ishorasi ozod had ishorasiga teskari olinadi.

5-misol. Normalning uzunligi $p = 3$ va uning OX o‘qi bilan hosil qilgan burchagi 30^0 bo‘lsa, to‘g’ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko‘ra normal OX o‘qi bilan 30^0 li burchak tashkil etadi. Bu burchakni yasaymiz va uning qo‘zg’aluvchi tomoni normal to‘g’ri chiziq bo‘ladi. Shu to‘g’ri chiziqda $p = 3$ kesma ajratib uning oxiridan unga perpendikulyar to‘g’ri chiziq o‘tkazamiz. Bu yasalishi kerak bo‘lgan to‘g’ri chiziq bo‘ladi . Endi to‘g’ri chiziqning tenglamasini yozamiz. Shartga ko‘ra normalning uzunligi va uning OX o‘qi bilan hosil qilgan burchagi berilgan, bu holda ma’lumki, to‘g’ri chiziqning (8) normal tenglamasini yozamiz. $p = 3$, $\alpha = 30^0$ bo‘lganligi uchun

$$x\cos 30^0 + y\sin 30^0 - 3 = 0 \qquad \text{ёки} \qquad \sqrt{3}/2\cdot x + 1/2\cdot y - 3 = 0$$

Natijada $\sqrt{3}x+y-6=0$ tenglama hosil bo‘ladi.

6-misol. $4x-3y-5=0$ to‘g’ri chiziq tenglamasini normal tenglamaga keltiring.

Yechish. Normallovchi ko‘paytuvchini topamiz: $M=\frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{1}{5}$ bo‘ladi.

Berilgan tenglamani $M=1/5$ ko‘paytirib, $4/5\cdot x-3/5\cdot y-1=0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu to‘g’ri chiziqning normal tenglamasi, chunki

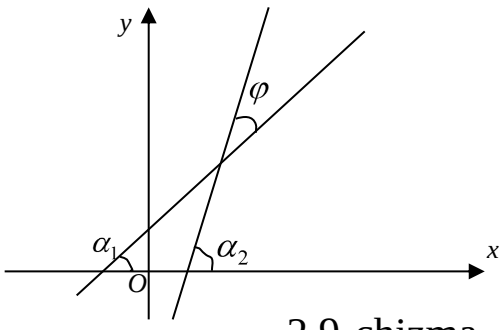
$$(\frac{4}{5})^2+(-\frac{3}{5})^2=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=\frac{25}{25}=1,\qquad (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1)$$ edi.

2.1.3. To‘g’ri chiziqlarga doir asosiy masalalar

1. Ikki to‘g’ri chiziq orasidagi burchak. Ikkita

$$y=k_1x+b_1,$$
$$y=k_2x+b_2$$

to‘g’ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Bunda $k_1=tg\alpha$, $k_2=tg\alpha_2$ bu to‘g’ri chiziqlar parallel bo‘lmasin va ular orasidagi burchakni topish talab etilsin. To‘g’ri chiziqlar orasidagi burchakni φ bilan belgilaymiz.



2.9-chizma.

Ya’ni ,$\varphi=\alpha_2-\alpha_1$(1-chizma) . Ma’lumki,

$$tg\varphi=tg(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2}$$

yoki

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} (1)$$

bo‘ladi. (1) ikki to‘g’ri chiziq orasidagi burchakning tangensini topish for- mulasi deb ataladi.

1-misol. $y = 3x + 1, y = 2x + 5$ to‘g’ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. (1) formulaga asosan,

$$\varphi = \frac{3-2}{1+2\cdot 3} = \frac{1}{7} \text{ bo‘lib, } \varphi = arctg\,⅐ \approx arctg\,0.14 \approx 8^0,\ \varphi \approx 8^0$$

bo‘ladi.

2. To‘g’ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari To‘g’ri chiziqlar perpendikulyar bo‘lsa, ular orasidagi burchak

$$\varphi = 90^0 \text{ bo‘lib, } tg90^0 = \infty \quad \text{yoki} \quad \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \infty, \quad 1 + k_1 k_2 = 0$$

kelib chiqadi, bundan

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

bo‘ladi, bunga ikki to‘g’ri chiziqning **perpendikulyarlik sharti** deyiladi.

To‘g’ri chiziqlar parallel bo‘lsa, $\varphi = 0$ bo‘lib, $tg0^0 = 0$, ,yoki

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0,\ k_2 - k_1 = 0\ ,\ k_1 = k_2$$

kelib chiqadi.

$$k_1 = k_2$$

tenglikka **ikki to‘g’ri chiziqning parallellik sharti** deyiladi.

3. Ikkita to‘g’ri chiziqning kesishuvi. Ikkita to‘g’ri chiziqning kesishish nuqtasini topish uchun ularning tenglamalarini birgalikda yechib, kesishish nuqtasining koordinatlari topiladi.

2-misol. $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

to‘g’ri chiziqlarning kesishish nuqtasini toping.

Yechish. Ikkinchi tenglamani (-1) ga ko‘paytirib, hosil bo‘lgan tenglamalarni hadma-had qo‘shib $x - 1 = 0$, $x = 1$ ni hosil qilamiz. $x = 1$

ni birinchi tenglamaga qo‘ysak, $2\cdot 1+y-3=0$ yoki $y=1$ bo‘ladi. Shunday qilib, bu to‘g’ri chiziqlar $A(1;1)$ nuqtada kesishadi.

4. Nuqtadan to‘g’ri chiziqqacha bo‘lgan masofa. $M(x_0;y_0)$ nuqta va $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ to‘g’ri chiziq berilgan bo‘lsin. Berilgan nuqtadan, berilgan to‘g’ri chiziqqacha bo‘lgan masofa

$$d=|x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p| \qquad (2)$$

formula yordamida topiladi. To‘g’ri chiziq tenglamasi umumiy

$$Ax+By+C=0$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, nuqtadan to‘g’ri chiziqqacha bo‘lgan masofa,

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (3)$$

formula bilan topiladi.

3-misol. $A(3;\ \sqrt{5})$ nuqtadan $2x+\sqrt{5}y-2=0$ to‘g’ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

Yechish. To‘g’ri chiziq tenglamasi umumiy holda berilgan. Shuning uchun (3) formulaga asosan,

$$d=\left|\frac{2\cdot 3+\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-2}{\pm\sqrt{2^2+\sqrt{5^2}}}\right|=\left|\frac{6+5-2}{3}\right|=\frac{9}{3},\qquad d=3$$

bo‘ladi.

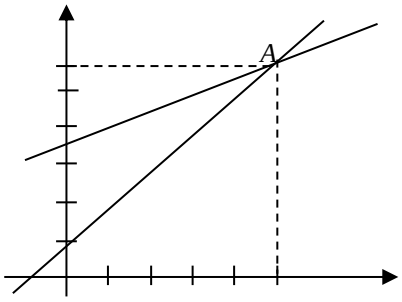
4-misol. Ikki xil transport vositasida yuk tashish xarajatlari funksiyasi

$$y=100+50x \text{ va } \quad y=200+30x$$

bilan ifodalansin. Bunda, y transport xarajati, x har yuz kilometrga yuk tashish masofasi. Qanday masofadan boshlab 2-xil transport vositasi bilan yuk tashish tejamliroq bo‘ladi.

Yechish. Masala shartida berilgan $y=100+50x$ va $y=200+30x$ to‘g’ri chiziqlar kesishadigan nuqtani topamiz: tengliklarning chap tomonlari teng bo‘lganligi uchun $100+50x=200+30x$tenglamani hosil qilamiz, bundan $x=5,\quad y=350$ bo‘ladi. Demak, to‘g’ri chiziqlar $A(5,\,350)$ nuqtada kesishadi.

Endi to‘g’ri chiziqlarni yasaymiz: (2.10-chizma).



2.10 - chizma

10-chizmadan ko‘rinadiki, yuk tashish masofasi 500 km dan ortiq bo‘lganda 2-xil transport vositasi bilan yuk tashilsa, xarajat kamroq bo‘ladi.

5. Ikkita parallel to‘g’ri chiziqlar orasidagi masofani topish

$$5x-2y+10=0 \textbf{ va } \quad 5x-2y+36=0$$

parallel to‘g’ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘g’ri chiziqlar orasidagi masofani topish uchun, bu to‘g’ri chiziqlarning bittasida ixtiyoriy bir nuqtani tanlaymiz va tanlangan nuqtadan ikkinchi to‘g’ri chiziqqacha bo‘lgan masofani topamiz: birinchi to‘g’ri chiziqda $x=4$ desak, $y=15$ bo‘lib, $A(4,15)$ 1-to‘g’ri chiziqdagi nuqta bo‘ladi. $A(4,15)$ nuqtadan ikkinchi $5x-2y+36=0$ to‘g’ri chiziqqacha bo‘lgan masofani (3) formulaga asosan, hisoblasak,

$$d=\left|\frac{5\cdot 4-2\cdot 15+36}{\sqrt{5^2+(-2)^2}}\right|=\frac{26}{\sqrt{29}}, \quad d==\frac{26}{\sqrt{29}}$$

bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Geometriya rivojlanish tarixi, analitik geometriya, koordinatlar usuli va sodda(asosiy) masalalar, nuqta koordinatlari, ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo‘lish, uchburchak yuzini topish. Tekislikda chiziq va uning tenglamasi, burchak koeffisiyent, to‘g’ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi, to‘g’ri chiziqning umumiy tenglamasi, to‘g’ri chiziqning o‘qlardan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi, berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziqlar tenglamasi, berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziq tenglamasi, to‘g’ri chiziqning normali, to‘g’ri chiziqning normal tenglamasi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Geometriya qachon paydo bo‘lgan va qanday tarixga ega?
2. Geometrik bilimlarning kelib chiqishi nima bilan bog’liq?
3. Geometriya tabiatshunoslikning boshqa bo‘limlari bilan qanday bog’langan?
4. Geometriyaning rivojida katta hissa qo‘shgan Markaziy Osiyolik olimlardan kimlarni bilasiz?
5. Koordinatlar usuli nima?
6. Analitik geometriya nimani o‘rganadi?
7. Berilgan ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?
8. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish qanday bajariladi?

Chiziqning tenglamasi deganda nima tushuniladi?

9. To‘g’ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi qanday yoziladi?
10. To‘g’ri chiziqning burchak koeffisiyenti deb nimaga aytiladi?
11. Berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday?
12. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziq tenglamasi qanday?
13. To‘g’ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy xollari nimalardan iborat?
14. To‘g’ri chiziqning koordinat o‘qlaridan ajratgan kesmalariga nisbatan tenglamasi qanday yoziladi?
15. To‘g’ri chiziqning normal tenglamasi qanday?
16. Normalning uzunligi nima?
17. To‘g’ri chiziqning umumiy tenglamasini normal tenglamaga qanday qilib keltiriladi?
18. To‘g’ri chiziqning tenglamasi normal ko‘rinishdaligini qanday tekshiriladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Son o‘qida $A(-5), B(4)$ va $C(-2)$ nuqtalar yasalsin va kesmalarning shu o‘qdagi *AB*, *VB* va *AB* kattaliklari topilsin. $AB + BC = AC$ ekanligi tekshirilsin.

Oldingi mashq $A(1), B(-4)$ va $C(5)$ nuqtalar uchun bajarilsin.

2. Uchlari $A(-4; 2), B(0; -1)$ va $C(3; 3)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning perimetrini toping.

3. $A(2; 1)$ nuqtadan ham, *Ou* o‘qdan ham 5 birlikka uzoqlashgan nuqta topilsin.

Ox o‘qida $A(8; 4)$ nuqtadan va koordinatlar boshidan baravar uzoqlikda turgan nuqta topilsin.

4. Uchlari $A(4; 3), B(-3; 2)$ va $C(1; -6)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakka tashqi chizilgan doiraning markazi va radiusi topilsin.

5. Ordinatalar o‘qida koordinatlar boshidan va $A(-2; 5)$ nuqtadan baravar uzoqlikda turgan nuqta topilsin.

6. Abssissalar o‘qida $A(-2; 3)$ nuqtadan $3\sqrt{5}$ birlikka uzoqlashgan nuqta topilsin.

7. $A(-3; -1)$ va $B(5; 3)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

8. $A(5; 3)$ va $B(6; -4)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

9. $A(-2; 1)$ va $B(3; 6)$ nuqtalar yasalsin. *AV* kesmani $AN : NB = 3 : 2$ nisbatda bo‘luvchi $N(x; y)$ nuqta topilsin.

10. $A(-2; 1)$ va $B(3; 6)$ nuqtalar yasalsin. *AV* kesmani $AM : MB = 2 : 1$ nisbatda bo‘luvchi $M(x; y)$ nuqta topilsin.

11. Uchlari $A(2; -1), B(4; 3)$ va $C(-2; 1)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak tomonlarining o‘rtalari aniqlansin.

12. Uchlari $O(0; 0), A(8; 0)$ va $B(0; 6)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakda *OS* mediana va *OD* bissektrisa uzunliklari aniqlansin.

13. Uchlari $A(2; 0), B(5; 3)$ va $C(2; 6)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning yuzi hisoblansin.

14. Uchlari $A(3; 1), B(4; 6), C(6; 3)$ va $D(5; -2)$ nuqtalarda bo‘lgan to‘rtburchakning yuzi hisoblansin.

15. OY o‘qidan $b=4$ kesama ajratib OX o‘qi bilan 135^0 burchak tashkil etuvchi to‘g’ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

16. OY o‘qidan $b=-2$ kesma ajratib OX o‘qi bilan 60^0 burchak tashkil etuvchi to‘g’ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

17. Koordinatlar boshidan o‘tib, OX o‘qi bilan: 1). 45^0, 2). 120^0, 3). 60^0, 4). 90^0 burchak tashkil etuvchi to‘g’ri chiziqlarni yasang va ularning tenglamalarini yozing.

18. 1) $3x+5y+15=0$; 2) $3x+2y=0$; 3) $y=-2$; 4) $x/4+y/4=1$ to‘g’ri chiziqlar uchun k va b parametrlarni aniqlang.

19. 1) $4x+3y-12=0$; 2) $4x+3y=0$; 3) $2x-7=0$; 4) $2y+7=0$ to‘g’ri chiziqlarning kesmalarga nisbatan tenglamalarini yozing va ularni yasang.

20. $A(2;3)$ nuqtadan o‘tib, OX o‘qi bilan 60^0 burchak hosil qiluvchi to‘g’ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

21. 1) $2x-3y-6=0$; 2) $3x-2y+4=0$ to‘g’ri chiziq tenglamalarini, kesmalar bo‘yicha tenglamasiga keltiring.

22. $Ax+5y-40=0$ to‘g’ri chiziq A ning qanday qiymatlarida koordinat o‘qlaridan bir xil kesmalar ajratadi.

23. Uchlari $A(3;4)$, $B(3;2)$ va $C(-1;2)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak tomonlarining tenglamalarini yozing.

24. To‘g’ri chiziqning koordinatlar boshidan uzoqligi 3, unga koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyar OX o‘qi bilan $\alpha=45^0$ burchak hosil qilsa, to‘g’ri chiziq tenglamasini yozing.

25. $x-y+3=0$ to‘g’ri chiziqqa koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyarning uzunligini va uning OX o‘qi bilan tashkil qilgan burchagini toping.

26. Ushbu 1) $\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y-6=0$, 2) $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}-7=0$

3) $\frac{3}{5}x+\frac{3}{4}y-2=0$, 4) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-4=0$

to‘g’ri chiziq tenglamalaridan qaysilari normal ko‘rinishda?

27. Ushbu 1) $5x+12y-26=0$, 2) $3x-4y+10=0$,

3) $y = 3x + 5$, 4) $2x + 2y + 7 = 0$

to‘g’ri chiziq tenglamalarini normal ko‘rinishga keltiring.

2.1.4. Ikkinchi tartibli chiziqlar

1. Ikkinchi tartibli chiziq va uning tenglamasi.

Ma’lumki, tekislikda to‘g’ri chiziq x va y o‘zgaruvchi kordinatlarga nisbatan birinchi darajali edi. Endi tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlarni o‘rganamiz. Ikkinchi tartibli chiziqlar x va y o‘zgaruvchi koordinatlarga nisbatan ikkinchi darajali tenglama bilan ifodalanadi. Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko‘rinishi

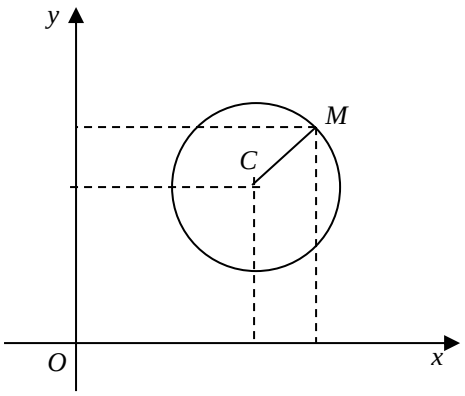
$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

bo‘ladi. (1) tenglamaga **ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi** deyiladi. Quyida muayyan hollarda, ikkinchi tartibli chiziqlarning analitik ifodalarini topib, ularning xususiyatlarini o‘rganamiz.

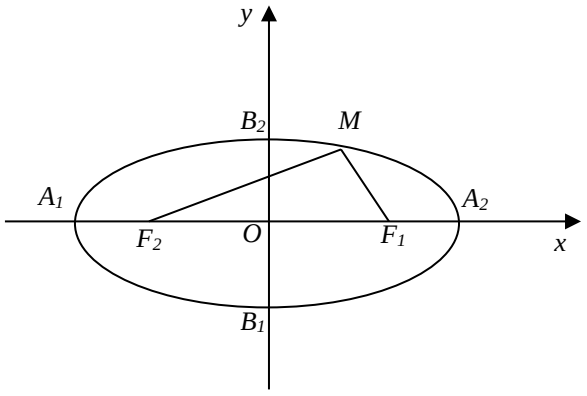
2. Aylana va uning tenglamasi.

Ta’rif. Tekislikda biror $C(a, b)$ nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o‘rniga aylana deyiladi.

$M(x, y)$ aylanaga tegishli ixtiyoriy nuqta bo‘lsin (2.11, 2.12-chizma). Aylana ta’rifiga ko‘ra CM masofa o‘zgarmas, bu masofani R bilan belgilaylik.



2.10-chizma



2.11-chizma

ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan,

$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ ёки $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikning ikkala tarafini kvadratga ko‘tarib,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \quad (2)$$

tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaga markazi $C(a, b)$ nuqtada, radiusi R ga teng **aylananing kanonik(qonuniy) tenglamasi** deb ataladi. (2) dan

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2 \text{ yoki}$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

bo‘ladi. Bu tenglama (1) tenglamaning $A = C$, $B = 0$ bo‘lgan xususiy holidir. Demak, aylana ikkinchi tartibli chiziqdir.

1-misol. Ikkinchi tartibli chiziq $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin. Uning aylana ekanligini ko‘rsating hamda markazini va radiusini toping.

Yechish. x va y li hadlar bo‘yicha to‘la kvadratlar ajratamiz:

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 + 4y + 4 - 4 - 23 = 0,$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 - 9 - 4 - 23 = 0 \text{ yoki } (x-3)^2 + (y+2)^2 = 36$$

bo‘ladi. Bu aylananing kanonik tenglamasidir. Uning markazi $C(3; -2)$, nuqtada, radiusi $R = 6$ bo‘ladi.

3. Ellips hamda uning tenglamasi. Ta’rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan ikkita nuqtalargacha bo‘lgan masofalar yig’indisi o‘zgarmas miqdordan iborat bo‘lgan nuqtalar geometrik o‘rniga ***ellips deyiladi*.** Berilgan nuqtalar F_1 va F_2 bo‘lsin. Bu nuqtalarga ellipsning fokuslari deyiladi. O‘zgarmas miqdorni $2a$, fokuslar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilab, koordinatlar sistemasini shunday olamizki, OX o‘qi fokuslardan o‘tsin va koordinatlar boshi F_1F_2 masofaning o‘rtasida bo‘lsin. $M(x, y)$ ellipsga tegishli ixtiyoriy nuqta bo‘lsa, ta’rifga ko‘ra

$$F_1M + F_2M = 2a \quad (3)$$

bo‘ladi. Ma’lumki, $F_1(+c;\ 0)$ va $F_2(-c;\ 0)$ bo‘lib, ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamadan irrasionallikni yo‘qotib,

$$x^2(a^2-c)^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

ko‘rinishga keltiramiz. $a^2-c^2=b^2$ bilan belgilaymiz (chunki, $a>c$). Bu holda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (4)$$

tenglamani hosil qilamiz. (4) tenglamaga ***ellipsning kanonik*** tenglamasi deyiladi.

Koordinatlar boshi, ellipsning **simmetriya markazi**, koordinatlar o‘qi **simmetriya o‘qlari** bo‘ladi.

$$A_1(-a,\ 0),\quad A_2(a,\ 0),\quad B_1(0,\ -b),\quad B_2\ (0,\ +b)$$

nuqtalar ellipsning uchlari, $a=OA_2$ $в a$ $b=OB_2$ masofalar mos ravishda **ellipsning katta va kichik yarim o‘qlari** deyiladi.

Shunday qilib, ellips ikkita simmetriya o‘qiga, simmetriya markaziga ega bo‘lgan yopiq egri chiziqdir.

$\varepsilon=c/a<1$ kattalik ***ellipsning ekssentrisiteti*** deyiladi. Aylanani ellipsning $a=b,\ \varepsilon=0$ bo‘lgan xususiy holi deb qarash mumkin.

$M(x,y)$ nuqtadan fokuslargacha bo‘lgan masofaga ellipsning fokal radiuslari deyiladi, ularni r_1 va r_2 bilan belgilasak, $r_1=a+\varepsilon x,\qquad r_2=a-\varepsilon x$ bo‘ladi.

2-misol. $16x^2+25y^2=400$ ellipsning yarim o‘qlarini, fokuslarini va ekssentrisitetini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani 400 ga bo‘lib,

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

ko‘rinishga keltiramiz. Bu tenglamadan $a^2=25,\ b^2=16$ bo‘lib, yarim o‘qlari mos ravishda $a=5,\ b=4$ bo‘ladi. Ma’lumki, $b^2=a^2-c^2$, bo‘lib, $c^2=25-16=9,\ \ c=\pm3$ bo‘ladi. Demak, fokuslari $F_1(3,0)$ va $F_2(-3,0)$ nuqtalarda bo‘ladi. Ekssentrisiteti esa, $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$.

4. Giperbola va uning tenglamasi. Ta’rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan ikkita (fokus) nuqtalargacha bo‘lgan masofalar ayirmasi o‘zgarmas miqdordan iborat bo‘lgan nuqtalar geometrik o‘rniga

giperbola deyiladi(ko‘rsatilgan ayirma absolyut qiymati bo‘yicha olinib, u fokuslar orasidagi masofadan kichik va 0 dan farqli).

O‘zgarmas miqdorni $2a$, fokuslar orasidagi masofani $2c$ va koordinat o‘qlarini ellipsdagidek olib, $c^2 - a^2 = b^2$ belgilash kiritib,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz. (5) tenglamaga ***giperbolaning kanonik*** tenglamasi deyiladi. Giperbolaning fokuslari $F_1(+c;\ 0)$ va $F_2(-c;\ 0)$ bo‘ladi. Koordinatlar o‘qi **simmetriya o‘qlari** va koordinatlar boshi $0(0;\ 0)$ **simmetriya markazi**dir. Giperbola kordinat o‘qlarini $A_1(-a;\ 0)$ *va* $A_2(a;\ 0)$ nuqtalarda kesib o‘tib, bu nuqtalarga **haqiqiy uchlari** va $a = 0A_2$ masofa **haqiqiy yarim o‘qi** deyiladi. $B_1(0,\ -b)$, *va* $B_2(0,\ b)$ nuqtalar giperbolaning **mavhum uchlari**, $b = 0B_2$ – **mavhum yarim o‘qi** deyiladi.

Giperbola ikkita asimptotalarga ega bo‘lib, uning tenglamalari

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad (6)$$

bo‘ladi.

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ kattalikka ***giperbolaning ekssentrisiteti*** deb ataladi.

Giperbola o‘qlari $a = b$ bo‘lsa, unga **teng tomonli giperbola** deyiladi va uning tenglamasi

$$x^2 - y^2 = a^2$$

bo‘ladi.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

giperbolalarga ***o‘zaro qo‘shma giperbolalar*** deb ataladi.

3-misol. $9x^2 - 16y^2 = 144$ giperbolaning yarim o‘qlarini, fokuslarini, ekssentrisitetini hamda aksimptotalarining tenglamalarini toping.

Yechish. Berilgan tenlamani 144 ga bo‘lib tenglamani kanonik

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

ko‘rinishga keltiramiz. Bundan $a^2=16,\quad b^2=9$ bo‘lib, haqiqiy yarim o‘q $a=4$, mavhum yarim o‘q $b=3$ bo‘ladi.

$c^2=a^2+b^2,\quad c^2=16+9,\quad c=\pm5$ bo‘lib, fokuslari

$F_1(+5;\ 0),\quad F_2(-5;\ 0)$ nuqtalarda bo‘ladi. Ekssentrisitet $\varepsilon=c/a=5/4$

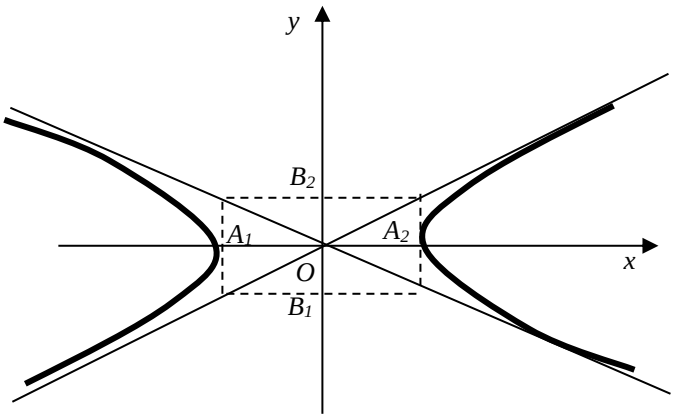
.

a va b larning qiymatini (6) asimptota tenglamasiga qo‘yib,

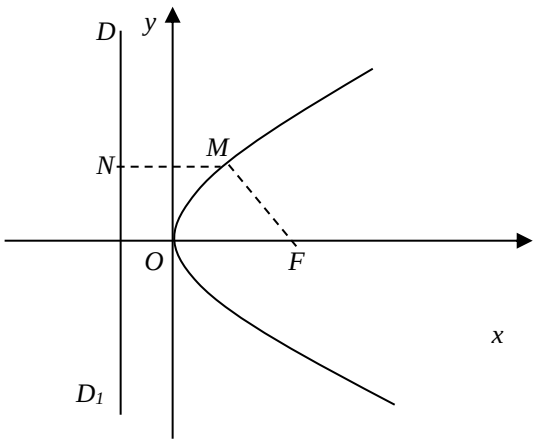
$$y=\pm\frac{3}{4}x$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Bu asimptotalar tenglamasidir.

$M(x,y)$ nuqtadan fokuslargacha bo‘lgan masofaga giperbolaning fokal radiuslari deyiladi, ularni r_1 va r_2 bilan belgilasak, nuqta o‘ng shoxlarida bo‘lganda $r_1=\varepsilon x-a,\quad r_2=\varepsilon x+a$ nuqta chap shoxlarida bo‘lganda $r_1=-\varepsilon x+a,\quad r_2=-\varepsilon x-a$ bo‘ladi.



2.12-chizma



2.13-chizma

5. Parabola va uning tenglamasi. Ta’rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan nuqta(fokus)gacha va berilgan to‘g’ri chiziq (direktrisa)gacha masofalari o‘zaro teng bo‘lgan nuqtalar geometrik o‘rniga **parabola** deyiladi.

Koordinatlar sistemasini shunday olamizki, OX o‘qi F (fokus)dan o‘tib, DD_1 direktrisaga perpendikulyar, OY o‘qi esa fokus va

direktrisaning o‘rtasidan o‘tsin (4.5-chizma). $M(x, y)$ parabolaga tegishli ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. F nuqtadan DD_1 to‘g’ri chiziqqacha bo‘lgan masofani p $(p>0)$ bilan belgilaymiz. Bunda $F(p/2,\ 0)$ bo‘lib, direktrisaning tenglamasi

$$x=-\frac{p}{2}$$

bo‘ladi.

Ta’rifga asosan, $MN=MF$. $N(-\frac{p}{2},\ y)$.

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan,

$$x+p/2=\sqrt{(x-p/2)^2+y^2}\ .$$

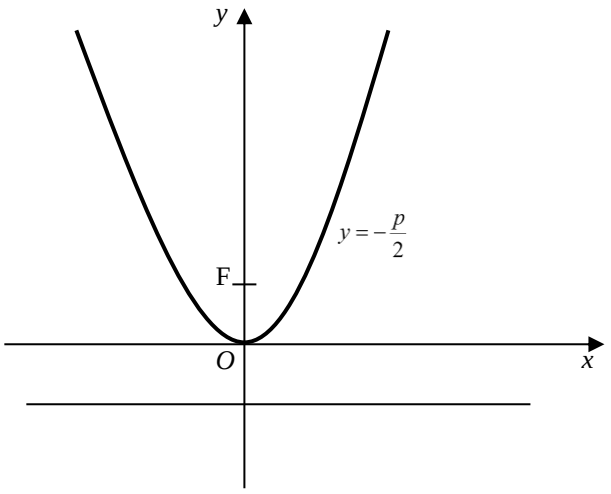
Bu tenglamadan irrasionallikni yo‘qotib,

$$y^2=2px \qquad (7)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu absissalar o‘qiga simmetrik ***parabolaning kanonik*** tenglamasi bo‘ladi. Ordinatlar o‘qi **simmetriya o‘qi** bo‘lsa, parabola tenglamasi

$$x^2=2py(p>0)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu holda $y=-p/2$ direktrisa tenglamasi, $F=(0;\ p/2)$ nuqta fokus bo‘ladi (2.14-chizma).



2.14-chizma

$M(x,\ y)$ nuqtadan $F(p/2;\ 0)$ fokusgacha masofaga fokal radius

deyiladi va $r = x + p/2.$ $M(x,\ y)$ nuqtadan $F(0,\ p/2)$ fokusgacha
masofa $r = y + p/2$ bo‘ladi.

4-misol. $y^2 = 12x$ parabolaning fokusini va direktrisasining tenglamasini toping. $M(3;\ 6)$ nuqtadan fokusgacha bo‘lgan masofani aniqlang.

Yechish. Berilgan tenglamani (7) tenglama bilan solishtirib $2p = 12,$ bundan $p = 6,\quad p/2 = 3.$ Shunday qilib, fokus $F(3;\ 0)$ nuqtada direktrisa tenglamasi $x = -3$ ekanligini topamiz. $M(3;\ 6)$ nuqta uchun $x = 3,$ bo‘lib, fakol radius $r = 3 + 3 = 6,\quad r = 6$ bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ikkinchi tartibli chiziq, aylana, ellips, giperbola, parabola, ellips va giperbola yarim o‘qlari, asimptota, qo‘shma giperbola, kanonik tenglama, simmetriya markazi, simmetriya o‘qi, ekssentrisitet, fokus, direktrisa, parabola fokusi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli chiziqlar deb qanday chiziqlarga aytiladi?
2. Aylana, ellips, giperbola va parabola deb nimalarga aytiladi va ularning kanonik tenglamalari qanday bo‘ladi?
3. Ellips va giperbolalarning ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi?
4. Ekssentrisitet aylana uchun nimaga teng?
5. Ellips, gipebala va parabolalarning fokal radiuslari nima?
6. Ellips va giperbolalarning simmetriya markazi va simmetriya o‘qlari bormi?
7. Ellips va giperbolalarning yarim o‘qlari nimalardan iborat?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $A(-4;6)$ nuqta berilgan. Diametri OA kesmadan iborat aylana tenglamasi yozilsin.
2. 1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0;$ 2) $x^2 + y^2 - 8x = 0;$ 3) $x^2 + y^2 + 4y = 0$ aylanalar yasalsin.

3. $x^2 + y^2 + 5x = 0$ aylana $x + y = 0$ to‘g’ri chiziq yasalsin va ularning kesishgan nuqtalari topilsin.

4. $A(1;2)$ nuqtadan o‘tuvchi va koordinat o‘qlariga urinuvchi aylana tenglamasi yozilsin.

5. $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ aylananing Oy o‘q bilan kesishgan nuqtalariga o‘tkazilgan radiuslari orasidagi burchak topilsin.

6. $A(-1;3)$, $B(0;2)$ va $C(1;-1)$ nuqtalardan o‘tuvchi aylana tenglamasi yozilsin.

7. $A(4;4)$ nuqtadan va $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ aylana bilan $y = -x$ to‘g’ri chiziqning kesishgan nuqtalaridan o‘tuvchi aylana tenglamasi yozilsin.

8. $y = -\sqrt{-x^2 - 4x}$ egri chiziqning joylashish sohasi aniqlanib, shakli chizilsin.

9. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$ aylanaga koordinatlar boshidan o‘tkazilgan urinmalarning tenglamalari yozilsin.

10. $A(-3;0)$ va $B(3;6)$ nuqtalar berilgan. Diametri AV kesmadan iborat aylana tenglamasi yozilsin.

11. 1) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 5x - 7y + 2{,}5 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + 7y = 0$
aylanalarning markazlari va radiuslari topilsin. Aylanalar yasalsin.

12. Koordinatlar boshidan va $x^2 + y^2 = a^2$ aylananing $x + y + a = 0$ to‘g’ri chiziq bilan kesishgan nuqtalaridan o‘tuvchi aylana tenglamasi yozilsin.

13. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$ aylananing Ox o‘q bilan kesishgan nuqtalariga o‘tkazilgan radiuslari orasidagi burchak topilsin.

14. $x^2 + 4y^2 = 16$ ellips yasalsin, uning fokuslari va ekssentrisiteti topilsin.

15. Agar ellipsning fokuslari orasidagi masofa 8 ga teng bo‘lib, kichik yarim o‘qi $b = 3$ bo‘lsa, uning kanonik tenglamasi yozilsin.

16. Agar ellipsning katta yarim o‘qi $a = 6$, ekssentrisiteti $\varepsilon = 0{,}5$ bo‘lsa, uning kanonik tenglamasi yozilsin.

17. Ellipsning katta yarim o‘qi $a=5$ va c parametri 4,8 ga teng bo‘lsa, uning kichik yarim o‘qi b va ekssentrisiteti ε topilsin.

18. Ellipsning katta yarim o‘qi $a=5$ va c parametri 4 ga teng bo‘lsa, uning kichik yarim o‘qi b va ekssentrisiteti ε topilsin.

19. Ellipsning katta yarim o‘qi $a=5$ va c parametri 3 ga teng bo‘lsa, uning kichik yarim o‘qi b va ekssentrisiteti ε topilsin.

20. Koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lgan ellips $M(2;\sqrt{3})$ va $B(0;2)$ nuqtalardan o‘tadi. Uning tenglamasi yozilsin va M nuqtadan fokuslargacha bo‘lgan masofa topilsin.

21. Fokuslari Ox o‘qda yotuvchi ellips koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lib, $M(-4;\sqrt{21})$ nuqtadan o‘tadi va $\varepsilon=\frac{3}{4}$ ekssentrisitetga ega. Ellips tenglamasi yozilsin va M nuqtaning fokal radiuslari topilsin.

22. $x^2+2y^2=18$ ellipsning o‘qlari orasidagi burchakni teng ikkiga bo‘luvchi vatar uzunligi topilsin.

23. Agar ellipsning fokuslari orasidagi masofa uning katta va kichik yarim o‘qlarining uchlari orasidagi masofaga teng bo‘lsa, uning ekssentrisiteti ε topilsin.

24. $9x^2+25y^2=225$ ellipsda shunday $M(x,y)$ nuqta topilsinki, undan o‘ng fokusgacha bo‘lgan masofa chap fokusgacha bo‘lgan masofadan 4 marta katta bo‘lsin.

25. Katta yarim o‘qi 5 ga, kichik yarim o‘qi 3 ga teng bo‘lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing.

26. $M(0;3)$ nuqta orqali o‘tuvchi, fokuslari orasidagi masofa 4 ga teng bo‘lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing.

27. $9x^2+16y^2=114$ ellipsning ekssentrisitetini toping.

28. Giperbolaning haqiqiy o‘qi 18 ga, fokuslari orasidagi masofa 24 ga teng bo‘lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing.

29. $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{16}=1$ giperbola tenglamasi berilgan. Giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o‘qlarini, fokuslarini, ekssentrisitetini aniqlang.

30. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$ giperbola asimptotalarining tenglamalarini tuzing.

31. Giperbolaning kanonik tenglamasi berilgan:

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$.

Bu giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o‘qlarini, ekssentrisitetini, fokuslarini, uchlarini toping, asimptotalari tenglamalarini tuzing.

32. M nuqta $F(2;0)$ nuqtaga $x=9$ to‘g’ri chiziqqa qaraganda 3 marta yaqin turib harakat qiladi. M nuqtaning harakat trayektoriyasini toping.

33. $5x^2-4y^2=20$ giperbolaning yarim o‘qlarini, ekssentrisitetini va fokuslarining koordinatlarini toping. $M(-4;\sqrt{15})$ nuqtadagi fokal radiuslarining uzunliklarini toping.

34. Asimptotasi $y=\pm\frac{1}{2}x$ to‘g’ri chiziqdan iborat va $(3;1)$ nuqtadan o‘tuvchi giperbolaning tenglamasini tuzing.

35. Giperbolaning direktrisalari orasidagi masofa 8 ga, fokuslari orasidagi masofa 12 ga teng. Giperbolaning tenglamasini tuzing.

36. Giperbolaning fokuslari abssissalari o‘qida yotib, uning fokuslari orasidagi masofa 6 ga va ekssentrisiteti 1,5 ga teng bo‘lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing.

37. Giperbolaning fokuslari abssissalar o‘qida yotib, uning haqiqiy yarim o‘qi 5 ga teng, uchlari esa markazi bilan fokusi orasidagi masofani teng ikkiga bo‘lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing.

38. $x^2-4y^2=16$ giperbolada ordinatasi 1 ga teng M nuqta olingan. Undan fokuslargacha bo‘lgan masofalar topilsin.

39. Fokuslari orasidagi masofa $2c=10$, uchlari orasidagi masofa $2a=8$ bo‘lgan giperbolaning kanonik tenglamasi yozilsin.

40. Hakikiy yarim o‘qi $a=2\sqrt{5}$, ekssentrisiteti $\varepsilon=\sqrt{1{,}2}$ bo‘lgan giperbolaning kanonik tenglamasi yozilsin.

41. Uchlari $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ellipsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlarida bo‘lgan giperbolaning tenglamasi yozilsin.

42. Asimptotasi haqiqiy o‘q bilan 60^0 burchakni tashkil etuvchi giperbolaning ekssentrisiteti topilsin.

43. $y^2=4x$ parabola berilgan. Parabolaning shunday nuqtasini topingki, undan fokusigacha bo‘lgan masofa 1 ga teng bo‘lsin.

44. $x+4=0$ to‘g’ri chiziq va $F(-2;0)$ nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o‘rnining tenglamasini tuzing.

45. $y^2=12x$ parabola fokusining koordinatalarini toping va direktrisasining tenglamasini tuzing.

III BOB. MATEMATIK ANALIZ ASOSLARI VA UNING TATBIQLARI

3.1-§. R^n fazoda nuqtalarning o‘zaro joylashishi. Nuqtalar ketma-ketligi va uning limiti

3.1.1. To‘plamlar va ular haqida asosiy tushunchalar.

*To‘plam tushunchasi matematikaning boshlang’ich va muhim tushunchalardan bir*idir. Masalan: Natural sonlar to‘plami, auditoriyadagi talabalar to‘plami, bibleotekadagi kitoblar to‘plami, bir nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziqlar to‘plami biror xildagi mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalar to‘plami va boshqalar.

To‘plamni tashkil etgan narsalar to‘plamning elementlari deyiladi. Matematikada to‘plamlar bosh harflar bilan, masalan: $A, B, X, Y, \ldots\ldots$ uning elementlari esa kichik harflar, masalan: $a, b, x, y, \ldots\ldots$ bilan belgilanadi.

To‘plam chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo‘lsa, unga ***chekli to‘plam*** deb ataladi. Masalan, bibleotekadagi kitoblar soni yoki guruhdagi talabalar soni chekli bo‘ladi. Cheksiz elementlardan tashkil topgan to‘plam ***cheksiz to‘plam*** deb ataladi. Masalan, natural sonlar to‘plami, bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziqlar to‘plami va boshqalar.

x element X to‘plamga tegishli bo‘lsa, $x \in X$ deb belgilanadi, aks holda $x \notin X$ yoziladi. $\{x \in X / P(x)\}$ belgi P xossaga ega bo‘lgan $x \in X$ lar to‘plamini bildiradi. Bo‘sh to‘plamni

$\varnothing = \{x \in \varnothing / x \neq x\}$ deb yozish mumkin.

1-misol. Quyidagi xossalarga ega bo‘lgan to‘plamlar elementlarini aniqlang.

1) $A = \{x \in N \mid x \leq 5\}$; 2) $B = \{x \in N \mid x \leq 0\}$; 3) $C = \{x \in Z \mid |x| \leq 2\}$

Yechish. 1) To‘plam 5 dan kichik va teng bo‘lgan natural sonlardan iboratligini bildiradi, ya’ni $A = \{1,2,3,4,5\}$.

2) manfiy natural son yo‘q shuning uchun $B = \varnothing$;

3) bu holda $|x| \le 2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi faqat butun sonlar olinadi, bu $[-2; 2]$ kesmada bo‘ladi. Shunday qilib, $C = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

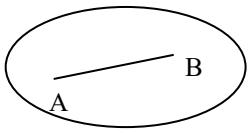
Qavariq to‘plam.

1-ta’rif. Istalgan ikki nuqta shu to‘plamga tegishli bo‘lganda, bu nuqtalarni tutashtiruvchi to‘g’ri chiziq kesmasi ham shu to‘plamga tegishli bo‘lsa, bunday to‘plamga ***qavariq to‘plam*** deyiladi(3.1, 3.2, 3.3-chizma).

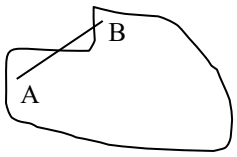
Nuqtaning atrofi.

2-ta’rif. r biror musbat son bo‘lsin. $M_0 \in R^n$ fazoning nuqtasi uchun $p(M, M_0) < r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi hamma $M \in R^n$ nuqtalar to‘plamiga M_0 ***nuqtaning*** r ***-atrofi*** deyiladi va $S_r(M_0)$ bilan belgilanadi, ya’ni

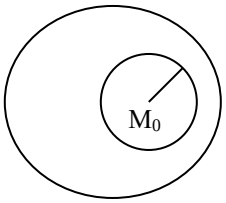
$S_r(M_0) = \{M \in R^n \mid \rho(M, M_0) < r\}$. (3-chizma)



3.1-chizma



3.2-chizma



3.3-chizma

Masalan, $M_1(2; 3; -1; 3) \in S_2(M_0), M_0(1; 2; -1; 2)$ nuqtaning $S_r(M_0)$ atrofiga tegishli, chunki

$$\rho(M_1, M_0) = \sqrt{(1-2)^2 + (2-3)^2 + (-1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{3}$$

bo‘lib, $\sqrt{3} < 2$ bo‘ladi. $M_2(3; 3; -1; 3)$ nuqta $S_2(M_0)$ atrofga tegishli emas, chunki $\rho(M_2, M_0) = \sqrt{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (-1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{6}$ bo‘lib, $\sqrt{6}$ bo‘lib, $\sqrt{6} > 2$ bo‘ladi.

R^1(sonlar o‘qi) fazoda $M_0(a)$ nuqtaning r atrofi $(a-r, a+r)$ intervaldan iborat.

R^2(tekislik) fazoda $M_0(a,b)$ nuqtaning r atrofi, radiusi r, markazi $M_0(a,b)$ nuqtada bo‘lgan doiraning ichki nuqtalaridan iborat

bo‘ladi. R^3 fazoda esa, $M_0(a,b,c)$ nuqtaning r atrofi, radiusi, r, markazi. $M_0(a,b,c)$ nuqtada bo‘lgan sharning ichki qismidan iborat bo‘ladi.

To‘plamning chegaralanganligi.

3-ta’rif. R^n fazoning V to‘plamning istalgan $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in V$ nuqtasi uchun shunday $A > 0$ son mavjud bo‘lib,

$$|x_1| \le A, \quad |x_2| \le A, ..., |x_n| \le A$$

munosabatlar bajarilsa, V to‘plamga ***chegaralangan to‘plam*** deyiladi. Masalan, n o‘lchovli fazoda istalgan nuqtaning r atrofi chegaralangan to‘plamdir.

To‘plamning ichki va chegaraviy nuqtalari.

4-ta’rif. $M_0 \in V$ nuqta V to‘plamga o‘zining biror r atrofi bilan kirsa, unga V ***to‘plamning ichki nuqtasi*** deyiladi .

5-ta’rif. $M_0 \in V$ nuqta o‘zining har bir atrofida V to‘plamga tegishli bo‘lgan hamda tegishli bo‘lmagan nuqtalar bilan kirsa, M_0 nuqtaga V to‘plamning ***chegaraviy nuqtasi*** deyiladi .

To‘plamning quyuqlanish nuqtasi.

6-ta’rif. M_0 nuqtaning ixtiyoriy atrofi V to‘plamning M_0 nuqtadan farqli cheksiz ko‘p nuqtalari (M_0 nuqtadan farqli)ni o‘z ichiga olsa, M_0 nuqta V to‘plamning ***quyuqlanish nuqtasi*** deyiladi. Quyuqlanish nuqtasi to‘plamning o‘ziga qarashli bo‘lishi ham, qarashli bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan, $V = [a,b]$ yoki $V = (a,b]$ bo‘lsa, ikkala holda ham a nuqta V uchun quyuqlanish nuqtasi bo‘ladi, lekin birinchi holda bu nuqta V to‘plamda yotadi, ikkinchi holda esa u V to‘plamda yotmaydi.

Yopiq va ochiq to‘plamlar.

7-ta’rif. V to‘plam o‘zining hamma quyuqlanish nuqtalarini o‘zida saqlasa, unga ***yopiq to‘plam*** deyiladi. Masalan, $[a,b]$ *кесма* R^1 sonlar o‘лida, $\{M(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2\}$ R^2 doira tekislikda yopiq to‘plamlardir.

8-ta'rif. V to'plamning hamma nuqtalari ichki nuqtalar bo'lsa, bunday to'plamga ***ochiq to'plam*** deyiladi. Masalan, (a,b) R^1da, $\left\{M(x,y)\in R^2 \middle| x^2+y^2<r^2\right\}$ R^2da ochiq to'plamlardir. R^n fazoda istalgan nuqtaning r atrofi ochiq to'plamdir.

R^n fazoda chegaralangan yopiq to'plamga ***kompakt*** deb ataladi.

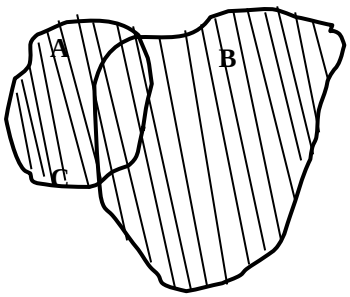
2. To'plamlar ustida amallar. B to'plamning har bir elementi A to'plamning ham elementi bo'lsa, B to'plamga A to'plamning ***qism to'plami*** deyiladi va $B\subset A$ yoki $A\supset B$ bilan belgilanadi. $A\subset B$ va $B\subset A$ bo'lsa, A va B to'plamlar teng deyiladi va $A=B$ bilan belgilanadi.

1) A va B ***to'plamlarning birlashmasi*** **(yig'indisi)** deb uchinchi bir C to'plamga aytiladiki, bu to'plamning istalgan elementi A yoki B to'plamga,yoki ikkalasiga ham tegishli bo'ladi va $A\cup B$ bilan belgilanadi, ya'ni

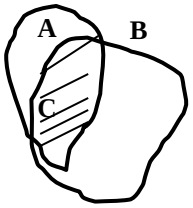
$C=A\cup B=\left\{x\middle|\ x\in A \quad ёки \quad x\in B\right\}$ (3.4 -chizma).

2) A va B ***to'plamlarning kesishmasi*** **(ko'paytmasi)** deb, uchunchi bir C to'plamga aytiladiki, uning har bir elementi A to'plamga ham, B to'plamga ham tegishli bo'ladi va $A\cap B$ bilan belgilanadi, ya'ni $C=A\cap B=\left\{x\middle|\ x\in A \quad ва \quad x\in B\right\}$ (3.5 -chizma).

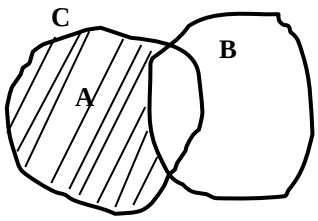
3) A to'plamdan B to'plamning **farqi (ayirmasi)** deb shunday uchinchi bir C to'plamga aytiladiki, uning har bir elementi A ga tegishli bo'lsa, B ga tegishli bo'lmaydi, va uni $A/B=\left\{x\middle|\ x\in A \quad ва \quad x\notin B\right\}$ (6-chizma).



3.4-chizma



3.5-chizma



3.6-chizma

2-misol. $A=\{1,\ 2\}$ to‘plamning hamma qism to‘plamlaridan iborat bo‘lgan B to‘plamni tuzing.

Yechish. Qism to‘plam ta’rifiga asosan,

$\varnothing \in A,\quad \{1\}\in A,\quad \{2\}\in A,\quad \{1,\ 2\}\in A$, Demak, $B=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

3-misol. $A=(4,\ 8)$ va $B=(1,\ 4]$ bo‘lsa, ularning birlashmasini va kesishmasini toping.

Yechish. Birlashmaning ta’rifidan $A\cup B=(1,8)$ bo‘lib kesishmaning ta’rifidan $A\cap B=\varnothing$ bo‘ladi.

4-misol. $A=(-3,\ 7]$ va $B[5,\ 6]$ bo‘lsa, ularning birlashmasi va kesishmasini toping.

Yechish. Ta’rifga asosan $A\cup B=(-3,\ 7],\quad A\cap B=[5,6]$ bo‘ladi.

5-misol. Ushbu

$A=\{1,2,3,4,5,6\},\quad B=\{2,4,6,8\},\ C=\{1,3\}$

to‘plamlarni qaraylik. Bu to‘plamlar uchun

$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\},$

$A\cap B=\{2,4,6\},$

$A\setminus B=\{1,3,5\},$

$B\setminus A=\{8\},$

$A\cup C=\{1,2,3,4,5,6\},$

$A\cap C=\{1,3\},$

$B\cap C=\varnothing,$

$B\times C=\{(2,1),(2,3),(4,1),(4,3),(6,3)(8,1),(8,3)\}.$

bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan ta’riflardan

$E\cup E=E,\quad E\cap E=E,\quad E\setminus E=\varnothing,$

shuningdek $E\subset F$ bo‘lganda

$E\cup F=F,\quad E\cap F=E$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Barcha 1, 2, 3, …., n, … - natural sonlardan iborat to‘plam natural sonlar to‘plami deyiladi va u N harfi bilan belgilanadi:

$N=\{1,\ 2,\ 3,...,\ n,...\}.$

Barcha …, -2, -1, 0, 1, 2, … - butun sonlardan iborat to‘plam ***butun sonlar to‘plami*** deyiladi va u Z harfi bilan belgilanadi:

$$Z = \{..., -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ 2, ...\}$$

Ravshanki,

$$N \subset Z$$

bo‘ladi.

3. To‘plamning quvvati. 1). Tartiblangan to‘plamlar haqida

Agar biror E to‘plamning elementlari uchun quyidagi tasdiqlar:

1) $n = m,\ n > m,\ n < m$ munosabatlardan bittasi va faqat bittasi o‘rinli;

2) $n < m,\ m < p$ tengsizliklardan $n < p$ tengsizlik

o‘rinli bo‘lsa, E to‘plam tartiblangan to‘plam deyiladi.

Tartiblangan to‘plamlarga dastlabki misol, $N = \{1,\ 2,\ 3, ...,\ n, ...\}$ natural sonlar to‘plami bo‘ladi. Bundan tashqari butun, rasional, haqiqiy sonlar to‘plamlari ham tartiblangan to‘plamlarga misol bo‘laoladi.

1). To‘plamlarning ekvivalentligi

Ixtiyoriy ikkita E va F to‘plamlar berilgan holda, tabiiyki, ularning qaysi birining elementi «ko‘p» degan savol tug’iladi. Natijada to‘plamlarni solishtirish (elementlar soni jihatidan solishtirish) masalasi yuzaga keladi. Odatda bu masala ikki usul bilan hal qilinadi:

1) to‘plamlarning elementlarini bevosita sanash bilan ularning elementlari soni solishtiriladi ;

2) biror qoidaga ko‘ra bir to‘plamning elementlariga ikkinchi to‘plamning elementlarini mos qo‘yish yo‘li bilan ularning elementlari solishtiriladi.

Masalan, $E = \{1,\ 2,\ 3\}$, $F = \{1,\ 4,\ 9,\ 16\}$ to‘plamlarning elementlari sonini solishtirib, F to‘plamning elementlari soni E to‘plamning elementlari sonidan ko‘p ekanligini aniqlaymiz. Yoki, E to‘plamning har bir elementiga F to‘plamning bitta elementini

$$1 \to 1,\ 2 \to 4,\ 3 \to 9$$

tarzda mos qo‘yib, F to‘plamda E to‘plam elementiga mos qo‘yilmay qolgan element borligini (u 16) hisobga olib, yana F ning elementlari soni E ning elementlari sonidan ko‘p degan xulosaga kelamiz. Agar to‘plamlar cheksiz bo‘lsa, ravshanki, ularni 1- usul bilan solishtirib bo‘lmaydi. Bunday vaziyatda faqat 2 - usul bilangina ish ko‘riladi.

Masalan, $N=\{1,\ 2,...,\ n,...\}$ natural sonlar to‘plamining har bir n elementiga $(n=1,\ 2,...)$ juft sonlar to‘plami $N_1=\{2,\ 4,...,\ 2n,...\}$ ning $2n$ elementini $(n=1,\ 2,...)$ mos qo‘yish bilan $(n\to 2n)$ solishtirib, ularning elementlari soni «teng» degan xulosaga kelamiz.

1-ta‘rif. Agar E to‘plamning har bir a elementiga F to‘plamning bitta b elementi mos qo‘yilgan bo‘lib, bunda F to‘plamning har bir elementi uchun E to‘plamda unga mos keladigan bittagina element bor bo‘lsa, u holda E va F to‘plamlar elementlari orasida **o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatilgan** deyiladi.

2-ta‘rif. Agar E va F to‘plam elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, ular bir-biriga **ekvivalent to‘plamlar** deb ataladi va

$$E\sim F$$

kabi belgilanadi.

6-misol. 1. Ushbu

$$E=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},\qquad F=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}\right\}$$

to‘plamlar ekvivalent to‘plamlar bo‘ladi. Bu to‘plam elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud. Uni quyidagicha

$$1\leftrightarrow 1,\ 2\leftrightarrow\frac{1}{2},3\leftrightarrow\frac{1}{3},\ 4\leftrightarrow\frac{1}{4},5\leftrightarrow\frac{1}{5},$$

o‘rnatish mumkin. Demak, $E\sim F$.

7-misol. Ushbu

$$E=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\},\ F=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\},$$

to‘plamlar ekvivalent to‘plamlar bo‘lmaydi. Chunki bu to‘plam elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatib bo‘lmaydi.

8-misol. Ushbu

$$E=N=\{1,\ 2,\ 3,.....,\ n....\},\qquad F=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ .....\ \frac{1}{n}....\right\},$$

to‘plamlar ekvivalent to‘plamlar bo‘ladi. Bu to‘plam elementlari orasidagi o‘zaro bir qiymatli moslik har bir n ga $(n\in N)\frac{1}{n}$ ni $(\frac{1}{n}\in F)$ mos qo‘yish bilan o‘rnatiladi. Demak, $E\sim F$.

9-misol. Ushbu

$$E = N = \{1,2,3,....n,,,,\},\ N_1 = \{2,4,6,....,2n,.....\}$$

to‘plamlar o‘zaro ekvivalent bo‘ladi. Bu to‘plam elementlari orasida o‘zaro bir qiymatili moslikni quyidagicha o‘rnatish mumkin: har bir natural n $(n \in N)$ songa $2n$ son $(2n \in N_1)$ mos qo‘yiladi $n \leftrightarrow 2n$). Demak, $E = N \sim N_1$.

Ravshanki, $N_1 \subset N$. Bu esa to‘plamning qismi o‘ziga ekvivalent bo‘lishi mumkin ekanligini ko‘rsatadi. Bunday ќolat faqat cheksiz to‘plamlargina xosdir.

Yuqorida keltirilgan ta’rif va misollardan ikki chekli to‘plamning o‘zaro ekvivalent bo‘lishi uchun ularning elementlari soni bir-biriga teng bo‘lishi zarur va yetarli ekanligini ko‘ramiz.

Ekvivalentlik munosabati quyidagi xossalariga ega:

1) $E \sim E$ (refleksivlik xossasi) ;

2) $E \sim F$ bo‘lsa, $F \sim E$ bo‘ladi(simmetrik xossasi) ;

3) $E \sim F$, $F \sim G$ bo‘ladi (tranzitivlik xossasi).

To‘plamlarning ekvivalentlik tushunchasi to‘plamlarni sinflarga ajratish imkonini beradi.

Masalan,

$$N_1 = \{2,4,6,....,2n,...\},$$
$$N_2 = \{1,3,5,...2n-1,...\},$$
$$N_3 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$$

to‘plamlar sanoqli to‘plamlardir, chunki

$$N_1 \sim N \quad (2n \leftrightarrow n, n = 1,2,3,...),$$
$$N_2 \sim N \quad (2n-1 \leftrightarrow n, n = 1,2,3,...),$$
$$N_3 \sim N \ (\frac{1}{n} \leftrightarrow n, n = 1,2,3,....).$$

2). To‘plamning quvvati. To‘plamning quvvati, to‘plam “elementlarining soni” tushunchasining ixtiyoriy (chekli va cheksiz) to‘plamlar uchun umumlashtirilganidir. To‘plamning quvvati berilgan to‘plamga ekvivalent bo‘lgan barcha to‘plamlarga, ya’ni elementlari berilgan to‘plamning elementlari bilan o‘zaro bir qiymatli moslikda

bo‘la oladigan barcha to‘plamlarga umumiy bo‘lgan narsa sifatida aniqlanadi.

To‘plam quvvati tushunchasini matematikaga to‘plamlar nazariyasining asoschisi nemis matematigi G.Kantor (1845-1918) kiritgan (1879 yilda). Kantor cheksiz to‘plamlar uchun ***har xil quvvatlar*** mavjudligini isbotlagan.

3-ta’rif. Natural sonlar qatoriga ekvivalent bo‘lgan to‘plam, ya’ni hamma elementlarini natural sonlar bilan raqamlab (belgilab) chiqish mumkin bo‘lgan to‘plamga ***sanoqli to‘plam*** deyiladi. Masalan,

$$N_1 = \{2,4,6,....,2n,...\},$$
$$N_2 = \{1,3,5,...2n-1,...\},$$
$$N_3 = \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...\right\}$$

to‘plamlar sanoqli to‘plamlardir, chunki

$$N_1 \sim N \qquad (2n \leftrightarrow n, n = 1,2,3,...),$$
$$N_2 \sim N \quad (2n-1 \leftrightarrow n, n = 1,2,3,...),$$
$$N_3 \sim N \quad (\frac{1}{n} \leftrightarrow n, n = 1,2,3,....).$$

Sanoqli to‘plamning quvvati cheksiz to‘plamlar quvvati orasida eng kichigi bo‘lib hisoblanadi.

Sanoqli bo‘lmagan to‘plam sanoqsiz to‘plam deb ataladi.

$0 \le x \le 1$ kesmadagi sonlarning L to‘plamining quvvati nomi ***kontinuum*** deyiladi. L ni natural sonlar to‘plamiga o‘zaro bir qiymatli akslantirish mumkin emas. **“Kontinuum matematikasi”** termini uzluksizlik tushunchasi bilan bog’liq bo‘lgan nazariyalarda qo‘llanilib, u diskret matematikaga qarama-qarshi qo‘yiladi. Kontinuum quvvat sanoqli to‘plam quvvatidan katta. Bir necha o‘n yil muqaddam sanoqli to‘plam quvvatidan katta va kontinuum quvvatdan kichik bo‘lgan to‘plam mavjudmi? degan muammo qo‘yilgan.

Matematik belgilar haqida . Matematikada tez-tez uchraydigan so‘z va so‘z birikmalari o‘rniga maxsus belgilar ishlatiladi. Ulardan eng muhimlarini keltiramiz:

1) «Agar …. bo‘lsa, u holda ….. bo‘ladi» iborasi «$\Rightarrow$» belgisi orqali yoziladi;

2) ikki iboraning ekvivalentligi ushbu «$\Leftrightarrow$» belgisi orqali yoziladi;

3) «Har qanday», «ixtiyoriy», «barchasi uchun» so‘zlari o‘rniga «$\forall$» umumiylik belgisi ishlabitadi;

4) «Mavjudki», «topiladiki» so‘zlari o‘rniga «$\exists$» mavjudlik belgisi ishlatiladi.

3.1.2. Sonli ketma-ketliklar

1. Sonli ketma-ketlik ta’rifi va umumiy tushunchalar

1-ta’rif. Natural sonlar qatoridagi

$$1,2,3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

har bir n songa haqiqiy x_n son mos qo‘yilgan bo‘lsa,

$$x_1, x_2\ , \ldots , x_n\ , \ldots \qquad (1)$$

(1) haqiqiy sonlar to‘plamiga sonli ketma-ketlik yoki qisqacha ketma-ketlik deyiladi.

$x_1, x_2\ , \ldots , x_n\ , \ldots$ sonlarga sonli ketma-ketlikning hadlari deyilib, x_n ga ketma – ketlikning umumiy hadi yoki n – hadi deb ataladi, (1) sonli ketma-ketlikni qisqacha $\{x_n\}$ simvol bilan belgilanadi. Masalan,

1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sonlar ketma-ketligi

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n}\ldots.$$

bo‘ladi;

2) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ sonlar ketma-ketligi $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\ldots,\frac{n}{n+1},\ldots.$

bo‘ladi.

Sonli ketma-ketlikning umumiy hadini olish usuli ko‘rsatilgan bo‘lsa, u berilgan deyiladi. Misol uchun, 1) $x_n = 2+(-1)^n$ bo‘lsa, u 1, 3, 1, 3, 1, 3, ..., 1, 3;

3) $\frac{2}{3}$ kasrni o‘nli kasrga aylantirganda verguldan keyin bitta, ikkita, uchta va hokazo raqamlarni olib,

$$x_1 = 0,6,\ x_2 = 0,66,\quad x_3 = 0,666,\ ...$$

sonlar ketma-ketligini olish mumkin;

4) $a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d, ...,\ a_1 + (n-1)d,\ ...$

arifmetik progressiya ham sonli ketma-ketlikdir, bunda a_1 birinchi had, d arifmetik progressiya ayirmasi;

$$5)\ b_1, b_1 q, b_1 q^2, \ldots, b_1 q^{n-1}, \ldots$$

sonlar ketma-ketligi ham ketma-ketlikka misol bo‘ladi, bu birinchi hadi b_1 maxraji q bo‘lgan geometrik progressiyadir.

Sonli ketma-ketlikning ta’rifidan ma’lumki, u cheksiz sondagi elementlarga ega bo‘lib, ular hyech bo‘lmaganda o‘zlarining tartib raqami bilan farq qiladi.

Sonlar ketma-ketligining geometrik tasviri sonlar o‘qidagi nuqtalar bilan ifodalanadi.

Sonli ketma-ketliklar ustida ushbu arifmetik amallarini bajarish mumkin:

1) $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligini songa ko‘paytirish,

$$m x_1,\ m x_2,\ m x_3, ..., m x_n, ...$$

ko‘rinishda bo‘ladi;

2) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligining yig’indisi

$$x_1 + y_1,\ x_2 + y_2, ..., x_n + y_n, ...;$$

ko‘rinishda aniqlanadi;

3) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketiligini ayirmasi

$$x_1 - y_1,\ x_2 - y_2, ..., x_n - y_n, ...$$

ko‘rinishda bo‘ladi;

4) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligi ko‘paytmasi

$$x_1 \cdot y_1,\ x_2 \cdot y_2, ..., x_n \cdot y_n, ...;$$

kabi aniqlanadi;

5) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligining nisbati, maxraj 0 dan farqli bo‘lganda,

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2}, ..., \frac{x_n}{y_n}, ...$$

ko‘rinishda bo‘ladi hamda mos ravishda $\{mx_n\}$, $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ simvollar bilan belgilanadi.

2. Chegaralangan va chegaralanmagan sonli ketma-ketliklar.

1-ta’rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma – ketligi uchun shunday M (m son) son mavjud bo‘lib, ketma-ketlikning istalgan elementi uchun $x_n \le M$ ($x_n \ge m$) tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi.

2-ta’rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi quyidan va yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, ya’ni shunday m va M sonlar mavjud bo‘lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning istalgan elementi uchun $m \le x_n \le M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

3-ta’rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi uchun shunday A musbat son mavjud bo‘lib, x_n element mavjud bo‘lib, $|x_n| > A$ (ya’ni $x_n > A$ yoki $x_n < -A$) tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi chegaralanmagan deyiladi.

Yuqoridagi ta’riflardan kelib chiqadiki, $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, uning hamma elementlari $(-\infty, M]$ oraliqqa tegishli, $\{x_n\}$ ketma-ketlik quyidan chegaralangan bo‘lsa, uning hamma elementlari $[m, +\infty)$ oraliqqa tegishli, yuqoridan va quyidan chegaralangan bo‘lsa, $[m, M]$ oraliqqa tegishli bo‘ladi.

Misollar:

1) 1, 2, 3, ..., n, ... sonlar ketma-ketligi quyidan chegaralangan, lekin yuqoridan chegaralangan;

2) -1, -2, -3, ..., -n, ... sonlar ketma-ketligi yuqoridan chegaralangan;

3) 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ sonlar ketma-ketligi chegaralangan, chunki uning hamma elementlari uchun $0 \le x_n \le 1$ tengsizlik bajariladi, bunda $m = 0$ $M = 1$ bo‘ladi;

4) -1, 2, -3, 4, -5, ..., $-(-1)^n n$,... sonlar ketma-ketligi chegaralanmagan, chunki qanday A son olmaylikki, bu ketma-ketlik ichida $|x_n| > A$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi elementlari mavjud bo‘ladi.

3. Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar hamda ularning xossalari

1-ta’rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi istalgan A son uchun, shunday N raqam mavjud bo‘lib, hamma $n > N$ lar uchun $|x_n| > A$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi. $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik chegaralanmagan bo‘ladi.

2-ta’rif. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N raqam mavjud bo‘lib,
$n > N$ lar uchun $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik sonlar ketma-ketligi deyiladi.

Misollar:

1) natural sonlar ketma-ketligi $\{n\}$ cheksiz katta ketma-ketlikdir;

2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sonlar ketma-ketligi cheksiz kichikdir, haqiqatan ham, istalgan $\varepsilon > 0$ son olsak, $|x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ dan $n > \frac{1}{\varepsilon}$ bo‘lib, N uchun $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ($\frac{1}{\varepsilon}$ butun qismi) olib, hamma $n > N$ lar uchun $\frac{1}{n} = |x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. 2-ta’rifga asosan $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo‘ladi.

Cheksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklar orasida ushbu bog’liqlik bor.

1-teorema. $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik va uning hamma elementlari 0 dan farqli bo‘lsa, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik va aksincha $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik va $\alpha_n \neq 0$ bo‘lsa, $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo‘ladi.

Isbot. $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik bo‘lsin. Istalgan $\varepsilon > 0$ son olib, $A = \frac{1}{\varepsilon}$ deylik. 1-ta’rifdan shu A son uchun shunday N raqam mavjudki, $n > N$ lar uchun $|x_n| > A$ bo‘ladi. Bundan hamma $n > N$ uchun $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{A} = \varepsilon$ kelib chiqadi. Bu $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligini bildiradi. (Teoremaning ikkinchi qismini isbot qilishni o‘quvchiga havola etamiz).

3.1.3.Cheksiz kichik ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega.

2-teorema. Ikkita cheksiz kichik ketma-ketliklarning algebraik yig’indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

Isbot. $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklar bo‘lsin. Bu cheksiz kichik ketmk-ketliklar uchun, istalgan ε son uchun N_1 raqam topiladiki, $n > N_1$ lar uchun, $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizlik, N_2 raqam topiladiki, $n > N_2$ Lar uchun $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bajariladi. $N = \max\{N_1, N_2\}$ desak, $n > N$ lar uchun birdaniga $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bajariladi. Shunday qilib,

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bo‘ladi.

Bu $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichik ekanligini bildiradi.

Natija. Istalgan chekli sondagi cheksiz kichiklarning algebraik yig’indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlikdir.

3-teorema. Ikkita cheksiz kichik ketma-ketlikning ko‘paytmasi, cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

Isbot. $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ lar cheksiz kichik ketma-ketliklar bo‘lsin. $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligini isbotlash talab etiladi. $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik bo‘lganligi uchun, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N_1 raqam topiladiki, $n > N_1$ lar uchun $|\alpha_n| < \varepsilon$, $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik

ketma-ketlik bo‘lganligi uchun $\varepsilon = 1$ uchun shunday N_2 topiladiki $n > N_2$ lar uchun $|\beta_n| < 1,$ bajariladi. $N = \max\{N_1,\ N_2\}$ deb olsak, $n > N$ lar uchun ikkala tengsizlik ham bajarilib,

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| \le |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

bo‘ladi. Bu $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz kichikligini bildiradi.

Natija. Istalgan sondagi cheksiz kichiklarning ko‘paytmasi yana cheksiz kichik bo‘ladi.

Eslatma. Ikkita cheksiz kichiklarning nisbati cheksiz kichik bo‘lmasligi mumkin, masalan, $\alpha_n = \frac{1}{n},\ \beta_n = \frac{1}{n}$ cheksiz kichiklarning nisbati hamma elementlari 1 lardan iborat chegaralanlan ketma-ketlikdir. $\alpha_n = \frac{1}{n},\ \beta_n = \frac{1}{n^2}$ cheksiz kichik ketma-ketliklarning nisbati $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\} = \{n\}$ bo‘lib, cheksiz katta ketma-ketlik hosil bo‘ladi. $\alpha_n = \frac{1}{n^2},\ \beta_n = \frac{1}{n}$ bo‘lsa, ularning nisbati $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ cheksiz kichik bo‘ladi.

4-teorema. Chegaralangan ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlikka ko‘paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi. (Bu teoremaning isbotini o‘quvchiga havola qilamiz).

3.1.4. Sonli ketma-ketlikning limiti va uning xossalari

1-ta’rif. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun unga bog’liq bo‘lgan N son topilsaki, barcha $n > N$ lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a songa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $n \to \infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad ёки \quad n \to \infty \ да \ x_n \to a$$

simvollar bilan belgilanadi. Chekli limitga ega sonli sonli ketma-ketlikka, yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Limitning ta’rifiga misol qaraymiz.

Limitning ta’rifidan foydalanib,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ ekanligini ko‘rsatamiz. Istalgan $\varepsilon > 0$ son olamiz.

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

bo‘lganligi uchun, $|x_n - 1| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n larning qiymatini topish, $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ tengsizlik bilan bog’liq va $1 < \varepsilon(n+1)$ $ёки$ $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ bo‘ladi. Shuning uchun N sifatida $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ sonning butun qismini olish mumkin, ya’ni $N = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$ bo‘ladi. Bu holda $|x_n - 1| < \varepsilon$ tengsizlik hamma $n > N$ lar uchun bajariladi. Masalan, $\varepsilon = 0{,}1$ bo‘lsin, bu holda

$$N = \left[\frac{1-0{,}1}{0{,}1}\right] = \left[\frac{0{,}9}{0{,}1}\right] = 9. \quad n = 10 > N = 9$$

bo‘lsin. Bunda

$$x_{10} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$$

bo‘lib,

$$|x_{10} - 1| = \left|\frac{10}{11} - 1\right| = \frac{1}{11} < \varepsilon = 0{,}1.$$

Shunday qilib n=10 dan boshlab, hamma n lar uchun $|x_{10} - 1| < 0{,}1$ tengsizlik bajariladi.

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Boshqa bir necha $\varepsilon > 0$ lar olib, qaysi raqamlardan boshlab, tengsizlikning bajarilishini ko‘rsatishni o‘quvchiga havola etamiz.

1-eslatma. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi biror a limitga ega bo‘lsa, uni $\alpha_n = x_n - a$ cheksiz kichik miqdor ko‘rinishida ifodalash mumkin, chunki $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N topiladiki, $n > N$ lar uchun

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Shuning uchun a limitga ega bo‘lgan $\{x_n\}$sonlar ketma-ketligini

$$x_n - a = \alpha_n$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin, bunda α_n cheksiz kichik ketma-ketlik.

2-ta'rif. $\varepsilon > 0$ biror musbat son bo'lsin. $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik hamma n lar uchun bajarilsa, $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi a nuqtaning ε atrofida deyiladi.

2-eslatma. Ma'lumki $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizligi

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \text{ yoki } a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

tengsizlik bilan teng kuchli bo'lib, x_n element a nuqtaning ε atrofida bo'ladi. Shuning uchun, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limitini quyidagicha ham ta'riflash mumkin:- a nuqtaning ε atrofi uchun shunday N raqamni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, hamma $n > N$ lardan boshlab, hamma x_n elementlar a nuqtaning ε atrofida bo'lsa, a songa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

3-eslatma. Ma'lumki cheksiz katta ketma-ketlik limitga ega emas yoki uni cheksiz limitga ega deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

bilan belgilanadi. Ketma-ketlikning limitini cheksiz limitdan farq qilishi uchun chekli limit ham deb yuritiladi.

Eslatma. Tushunarliki, har bir cheksiz kichik ketma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti $a = 0$ ga teng.

3.1.5.Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega

1.Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti yagonadir.

2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan.

Eslatma. Chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lmasligi mumkin. Masalan,

$$-1, 1, -1, ..., (-1)^n, ...$$

ketma-ketlik, chegaralangan, lekin limitga ega emas.

3. $\{x_n\}$va $\{y_n\}$ soli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, mos ravishda a va b limitlarga ega bo'lsa, ularning algebraik yig'indisi ham yaqinlashuvchi bo'lib, $a \pm b$ limitga ega bo'ladi.

4. $\{x_n\}$va $\{y_n\}$ soli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, mos ravishda a va b limitlarga ega bo'lsa, ularning ko'paytmasi ham yaqinlashuvchi bo'lib, limiti $a \cdot b$ ga teng bo'ladi.

5. $\{x_n\}$va $\{y_n\}$ soli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib, mos ravishda a va b limitlarga ega bo‘lsa, ularning nisbati ham maxrajning limiti noldan farqli bo‘lganda, yaqinlashuvchi bo‘lib, uning limiti $\frac{a}{b}$ ga teng bo‘ladi.

Bu xossalarni, ketma-ketlikning limiti va cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalaridan foydalanib isbotlash mumkin. Masalan, 4-xossani isbotlaylik. Ketma-ketliklar yaqilashuvchi bo‘lganligi uchun

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n$$

ko‘rinishda ifodalanadi, bunda α_n, β_n lar cheksiz kichik ketma-ketliklar. Bu holda

$$x_n \cdot y_n - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n$$

bo‘ladi. $(a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n)$ ifoda cheksiz kichik ketma-ketlikning xossalariga asosan cheksiz kichik ketma-ketlikdir. Demak $x_n y_n - ab$ ham cheksiz kichikdir, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n - ab) = 0 \quad ёки \quad \lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$$

bo‘ladi.

1-misol. Ushbu limitni hisoblang.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{4n^2 - 5}$$

Yechish. $n \to \infty$ surat ham maxraj ham cheksiz katta bo‘lib, nisbatning limiti haqidagi xossani qullash mumkin emas, chunki bu xossada surat va maxrajning limiti mavjud bo‘lishi kerak edi. Shuning uchun, bu ketma-ketliklarni n^2 ga bo‘lib, shaklini o‘zgartiramiz hamda limitlarning xossalarini qo‘llab, ushbuni hosil qilamiz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{4n^2 - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{4 - \frac{5}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(4 - \frac{5}{n^2})} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 4 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}} = \frac{3 + 0 - 0}{4 - 0} = \frac{3}{4}.$$

Tayanch ibora va tushunchalar

To‘plamlar va ular haqida asosiy tushunchalar, to‘plam turlari, ochiq va yopiq to‘plamlar, to‘plamlar ustida qanday amallar, sonli ketma-ketlik, umumiy had, chegaralangan va chegaralanmagan ketma-ketliklar, quyidan chegaralangan, cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar, ketma-ketlikning limiti, yaqinlashuvchi ketma – ketlik, nuqtaning atrofi, cheksiz limit, chekli limit.

Mustahkamlash uchun savollar

1. To‘plamlar va ular haqida asosiy tushunchalar
2. To‘plamning qanday turlarini bilasiz?
3. Ochiq va yopiq to‘plamlar ta’rifini ayting.
4. To‘plamlar ustida qanday amallarni bilasiz?
5. Sonli ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
6. Sonli ketma – ketlikning umumiy hadi nima?
7. Sonlar ketma – ketligi qanday belgilanadi?
8. Sonli ketma – ketlik qachon berilgan deyiladi?
9. Arifmetik va geometrik progressiyalar sonli ketma – ketliklarga misollar bo‘ladimi?
10. Sonli ketma – ketlik nechta elementga ega?
11. Sonli ketma – ketlikning geometrik tasviri qanday bo‘ladi?
12. Sonli ketma – ketliklar ustida qanday amallarni bajarish mumkin?
13. Qanday sonlar ketma – ketligi chegaralangan deyiladi va misollar keltiring?
14. Quyidan chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
15. Quyidan chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
16. Yuqoridan chegaralangan sonlar ketma-ketligiga misollar keltiring?
17. Chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
18. Chegaralanmagan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
19. Cheksiz ketma – ketlik deb nimaga aytiladi?
20. Cheksiz kichik ketma – ketlik qanday ta’riflanadi?
21. Cheksiz katta va kichik ketma – ketliklarga misollar keltiring?

22. Cheksiz katta va kichik ketma – ketliklar orasida qanday bog'lanish bor?
23. Cheksiz kichik ketma – ketliklar qanday xossalarga ega?
24. Ketma-ketlikning limiti deb nimaga aytiladi?
25. Qanday sonlar ketma – ketligi yaqinlashuvchi deyiladi?
26. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikni yig'indi ko'rinishda qanday ifodalash mumkin?
27. Nuqtaning atrofi nima?
28. Cheksiz katta sonlar ketma-ketlikning limiti nimaga teng?
29. Chekli limit deganda nima tushuniladi?
30. Cheksiz kichik sonlar ketma-ketligining limiti nimaga teng?
31. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar qanday xossalarga ega?
32. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari qanday isbotlanadi?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Ushbu

$$x_n = \frac{1}{3n},\ x_n = \frac{n}{5n-1},\ x_n = \frac{1}{4n-1},\ x_n = 3n$$

sonli ketma-ketliklarning n=1,2,3,4,5, bo'lgandagi qiymatlarini yozing?

2. $x_n = \frac{n}{n+2}$ sonli ketma-ketlikning chegaralanganligini ko'rsating.

3. $x_n = \frac{3}{n},\ x_n = \frac{3(-1)^n}{2n},\ x_n = 3 + (-1)^n$ sonlar ketma-ketligining geometrik tasvirini n=1,2,3,4,5,6 bo'lganda ko'rsating.

4. Bir necha arifmetik va geometrik progressiyalarning umumiy (n -hadi)ni yozing va n=1,2,3,4,5,6 bo'lgandagi qiymatlarini yozing.

5. Ushbu

$$x_n = 3n,\ \ x_n = -5n+1,\ \ x_n = \frac{1}{y_n + 1},\ \ x_n = (-1)^n 3n$$

sonlar ketma-ketliklari chegaralanganmi va qanday?

6. Bir necha cheksiz katta va cheksiz kichik sonlar ketma-ketliklarini yozing.

7. Ushbu tengliklar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=3$$

ning to‘g’riligini sonli ketma-ketlikning limiti, ta’rifidan foydalanib, isbotlang va har biri uchun $\varepsilon>0$ ni aniqlab qanday raqamdan boshlab tengsizlikning bajarilishini ko‘rsating?

8. Ushbu sonlar ketma-ketliklarining limitlarga ega ekanligi yoki ega emasligi va u nimaga tengligini ko‘rsating?

$$1)\ x_n=\frac{n}{3n+1},\ 2)\ x_n=\frac{5n-1}{2n},\ 3)\ x_n=\frac{(-1)^n n}{4n+1},4)\ x_n=\frac{3n+1}{n^2},$$

$$5)\ x_n=\frac{n}{4n-3},6)\ x_n=\frac{(-1)^n n}{3n-1},7)\ x_n=\frac{3n^2}{n+1},\ 8)\ x_n=\frac{2n+5}{n^3}.$$

3.2-§. Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar va ularning iqtisodiy jarayonlardagi o‘rni. Kobb-Duglas funksiyasi

1. O‘zgarmas va o‘zgaruvchi miqdorlar. Qaralayotgan jarayonda bir xil son qiymatlarini qabul qiladigan miqdorlarga ***o‘zgarmas miqdorlar*** deyiladi. Masalan, qanday radiusli aylana olmaylik, uning uzunligining deametriga nisbati bir xil π sondan iborat bo‘ladi. Bu holda nisbat o‘zgarmas miqdordir.

Qaralayotgan jarayonda har xil son qiymatlari qabul qiladigan miqdorlarga ***o‘zgaruvchi miqdorlar*** deyiladi. Masalan, havo harorati (temperaturasi), vaqt, harakatning tezligi o‘zgaruvchi miqdorlardir. Bunday misollarni ko‘plab keltirish mumkin. Hamma o‘zgaruvchi miqdorlarni birdaniga o‘rganib bo‘lmaydi. Endi ikkita o‘zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog’lanishni qaraymiz.

2. Funksiya tushunchasi. ***Funksiya tushunchasi*** matematikaning eng asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, uning yordamida tabiat va jamiyatdagi ko‘p jarayon va hodisalar modellashtiriladi.

Matematik tahlilda elementlari haqiqiy sonlardan iborat, bo‘lgan to‘plamlarni qaraymiz. X va Y lar haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsin. $x\in X$ to‘plamda, $y\in Y$ to‘plamda o‘zgarsin.

Ta’rif. $x \in X$ har bir x ga biror qoida yoki qonun bo‘yicha $y \in Y$ dan bitta y mos qo‘yilsa, X to‘plamda ***funksiya berilgan*** **(aniqlangan)** deb ataladi va u

$$y = f(x)$$

simvol bilan belgilanadi. Ayrim hollarda $y = xf$ ham deb belgilanadiki, bunda kompyuterda oldin x qiymati olinib, keyin hisoblanadigan simvol olinadi. Bunda X to‘plamga funksiyaning **aniqlanish sohasi,** Y to‘plamga o‘zgarish sohasi yoki ***qiymatlar to‘plami*** deyiladi. Odatda funksiya aniqlanish sohasini D, qiymatlar to‘plamini E bilan belgilanadi.

Shunday qilib, har bir element $x \in X$ ga bitta va faqat bitta $y \in Y$ moslik o‘rnatilgan bo‘lsa, bu moslikka X to‘plamda funksiya aniqlangan deyiladi. x ga **erkli o‘zgaruvchi** yoki **argument,** y ga esa **erksiz o‘zgaruvchi** yoki x **ning funksiyasi** deyiladi.

Shunday qilib, funksiya berilgan bo‘lishi uchun: 1) X to‘plam berilishi kerak (ko‘p hollarda uni x bilan y o‘zgaruvchilarning bog’lanishiga ko‘ra topiladi); 2) x o‘zgaruvchining X to‘plamdan olingan har bir qiymatiga unga mos qo‘yiladigan y ni aniqlaydigan qoida yoki qonun berilishi kerak. (ta’rifda uni f simvol bilan belgiladik).

Masalan; 1) f $X = (-\infty, +\infty)$ to‘plamga tegishli bo‘lgan har bir songa uning o‘zini o‘ziga ko‘paytirib, ya’ni kvadratga ko‘tarib mos qo‘yuvchi qoida bo‘lsin. Bu holda $y = x^2$ funksiya hosil bo‘ladi. Bu funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan; 2) f har bir $x \in [0, +\infty)$ songa shu sondan olingan kvadrat ildizni mos qo‘ysin. Bu $y = \sqrt{x}$ funksiyani ifodalaydi. Uning aniqlanish sohasi $[0, +\infty)$bo‘ladi.

1-misol. $y = \sqrt{x-3} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Ma’lumki, funksiyaning aniqlanish sohasi x ning shunday qiymatlari to‘plamiki, bunda y funksiya haqiqiy son qiymatlarga ega bo‘lishi kerak. Berilgan funksiyada

$$x-3\ge 0,$$
$$4-x>0$$

bo‘lgandagina x ning har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati haqiqiy bo‘ladi. Bu tengsizliklar sistemasidan, $x\ge 3$, $x<4$ bo‘lib, ya’ni $3\le x<4$ bo‘lishini topamiz. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $[3,\ 4)$ bo‘ladi.

3. Funksiyaning berilish usullari. Funksiya ta’rifida keltirilgan x o‘zgaruvchining har bir qiymatiga mos qo‘yiladigan y ni aniqlovchi qoida yoki qonun turlicha bo‘lishi mumkin. Demak, funksiyaning berilishi ham turlichadir. Funksiya ***analitik, jadval*** **va** ***grafik*** **hamda kompyuter** usullari yordamida berilishi mumkin:

1) funksiyaing ***analitik usul*** bilan berilishida, x o‘zgaruvchining har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati, x argument ustida algebraik amallarning bajarilishi natijasida, ya’ni formulalar yordamida beriladi. Masalan,

$$y=x^3+1,\quad y^2=\frac{x+5}{x^2-3},\qquad y=3^{x+1},\qquad y=\log_2(x+3);$$

2) o‘zgaruvchilar orasidagi bog’lanish **jadval** ko‘rinishida berilishi mumkin. Masalan, kuzatish natijasida sutni yopiq idishda qizdirilganda P_1 bosim ostida uning qaynash temperaturasi t_1, P_2 bosim ostida qaynash temperaturasi t_2 va h.k. bo‘lishini topganda qo‘yidagi jadval kelib chiqadi.

Bosim P	P_1	P_2	…	P_n
Temperatura t	t_1	t_2	…	t_n

Bundan ko‘rinadiki P bosim bilan t temperatura orasida bog’lanish bo‘lib, P argument, t funksiya bo‘ladi. Funksiyaning bunday berilishiga ***jadval usulda*** berilgan deyiladi. Bunday usul ko‘proq tajribalarda ishlatiladi.

3) Funksiyaning ***grafik usulida*** berilishida, x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog’lanish tekislikdagi biror chiziq yordamida beriladi. Bunda X va Y to‘plamlar orasidagi moslik grafik bilan beriladi. XOY tekislikda l chiziq berilgan bo‘lsin. x ning qiymatiga mos kelgan y ning

qiymatini, topish uchun x nuqtadan OX o‘qiga perpendikulyar o‘tkazamiz. U l chiziqni bitta A nuqtada kesib o‘tadi. A nuqtadan OY o‘qiga perpendikulyar o‘tkazamiz, bu perpendikulyarning OY o‘qi bilan kesishish nuqtasi, y ning x ga mos qiymati bo‘ladi. Ma’lumki, bunday moslik l chiziq yordamida bajariladi. Funksiyaning bunday berilishi, **grafik usulda berilgan** deyiladi. Funksiyaning grafik usulida berilishidan, uni analitik usul bilan ifodalash qiyin bo‘lgan hollarda va funksiyaning sifat o‘zgarishi grafik usulda yaxshi ko‘rinadigan hollarda foydalaniladi. Masalan, fizikaviy tajribalar jarayonida ossillografdan olinadigan grafik.

4) ***algoritmik yoki kompyuter usuli*.** Funksiyaning bunday usulda berilishida x ning har bir qiymati uchun, $y = f(x)$ funksiyaning qiymatini hisoblaydigan algoritm yoki programma berilgan bo‘ladi. Bunday programma EHMga qo‘yilgan bo‘lib funksiyaning qiymati avtomatik hisoblanadi.

3.2.1. Funksiyaning ayrim hollari

1. Oshkor va oshkormas funksiyalar. Funksiya $y = f(x)$ ko‘rinishda, ya’ni y ga nisbatan yechilgan bo‘lsa, unga ***oshkor funksiya*** deyiladi. Funksiya $F(x,\ y) = 0$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, ya’ni y ga nisbatan yechilmagan bo‘lsa, ***oshkormas funksiya*** ko‘rinishda berilgan deyiladi. Masalan, $y = 3x^2 + 5,\ \ y = \sin x,\ \ y = 4^x$ funksiyalar oshkor ko‘rinishda; $2x - 3y + 6 = 0,\ \ \ x^2 + e^{xy} + 3 = 0$ funksiyalar oshkormas ko‘rinishda berilgan. Shuni ta’kidlaymizki hamma $F(x,\ y) = 0$ ko‘rinishdagi tenglik ham funksiyani ifodalay bermaydi. Masalan, $x^2 + y^2 + 4 = 0$ tenglama funksiyani ifodalamaydi, chunki x ning har bir qiymatiga y ning ќалыљыy son qiymatini mos qo‘yish mumkin emas.

2. Murakkab funksiya. $y = f(u)$ bo‘lib, $u = \varphi(x)$ funksiya berilgan bo‘lsa, y funksiyaga $\varphi(x)$ **funksiyaning funksiyasi** yoki y ga x ning ***murakkab funksiyasi*** deyiladi. Masalan, $y = \lg(x^2 + 1)$ funksiyada $u = x^2 + 1$ bo‘lib. y x ning murakkab funksiyasi bo‘ladi.

Bundan tashqari $y=\sin(x^2+1)$, $y=3^{x+5}$, $y=\sqrt[3]{(x^3-1)^2}$ va h.k. lar ham, murakkab funksiyaga misol bo‘laoladi.

3. *Teskari funksiya.* $y=f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. y funksiyaning qiymatlar to‘plamidagi har bir qiymatiga x argumentning aniqlanish sohasidan bitta qiymati mos qo‘yilgan bo‘lsa, berilgan funksiyaga ***teskari*** $x=d(y)$ ***funksiya*** berilgan bo‘ladi va $D(f)=E(d)$ va $E(f)=D(d)$ har bir $x_0\in D(f)=E(d)$ va $y_0=E(f)=D(d)$ bo‘lib. $y_0=f(x_0)$ faqat $x_0=d(y_0)$ uchun bajariladi. Masalan $y=2x-3$ funksiyaga teskari funksiya $2x=y+3$, $x=(y+3)/2$ bo‘ladi. $y=x^3$ funksiya $x=\sqrt[3]{y}$ teskari funksiyaga ega bo‘ladi. O‘zaro teskari bo‘lgan funksiyalarning grafiklari $y=x$ to‘g’ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘ladi.

3.2.2. Iqtisodiyotda qo‘llaniladiga ayrim asosiy funksiyalar

1. **Chiziqli funksiya.** Ma’lumki,

$$y=ax+b \qquad (1)$$

formula bilan aniqlangan funksiyaga chiziqli funksiya deyiladi. Bu burchak koeffisiyenti $k=a$, boshlang’ich ordinatasi b bo‘lgan to‘g’ri chiziq tenglamasidir.

1-misol. Biror korxonada ishlab chiqarilayotgan bir xil mahsulot xarajatini ikki guruh:

1) mahsulot hajmiga, proporsional o‘zgaruvchi xarajat, masalan, materiallar sarfi;

2) ishlab chiqarilgan mahsulot hajmiga bog’liq bo‘lmagan o‘zgarmas xarajatlar, masalan, ma’muriyat binosi ijarasiga, uni isitishga ketadigan va boshqa xarajatlar deb qarash mumkin.

O‘zgarmas xarajatlarni b bilan, o‘zgaruvchi xarajatlarni, mahsulotning hir bir birligi uchun a bilan belgilasak, biror davrda x birlik hajmdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan umumiy xarajat

$$y=b+ax$$

bo‘lib, bu chiziљli funksiyadir.

2-misol. Mahsulotning umumiy bahosi uning soniga proporsional bo‘lsin. a bitta mahsulot narxi bo‘lsa, x birlik mahsulotning umumiy bahosi

$$y = ax$$

chiziqli funksiya bilan ifodalanadi, ma’lumki bu koordinatlar boshidan o‘tuvchi to‘g’ri chiziqlar dastasining tenglamasidir.

Chiziqli funksiya va uning grafigi, iqtisodiy miqdorlar orasida proporsionallik mavjud bo‘lgan bog’lanishlarda ishlatiladi.

2. Darajali funksiya. Bunday funksiya

$$y = x^{\alpha} \qquad (2)$$

formula bilan ifodalanadi, bunda α 0 dan farqli ixtiyoriy haqiqiy son. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi α ko‘rsatgichga bog’liq. α natural son bo‘lsa, hamma haqiqiy sonlar uchun aniqlangan, α butun manfiy son bo‘lsa,

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

bo‘lib, $x \neq 0$ bo‘lgan hamma x lar uchun aniqlangan (bunda n natural son). $\alpha = 1/n$ ko‘rinishdagi son bo‘lsa,

$$y = f(x) = x^{\alpha} = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

bo‘lib, n toq son bo‘lsa, $(-\infty, +\infty)$ intervalda, n juft son bo‘lsa, $[0, \infty)$ intervalda aniqlangan.

Umuman olganda darajali funksiya o‘zining aniqlanish sohasida uzluksizdir.

3-misol. Italyan iqtisodchisi Pareto jamiyatda foydani taqsimlashning quyidagi qoidasini taklif etdi: y bilan x dan kichik bo‘lmagan foydaga ega bo‘lgan shaxslar sonini belgilasak,

$$y = \frac{a}{x^m}$$

bo‘ladi, bunda a va m o‘zgarmaslar.

Pareto qonuni katta foydaga ega bo‘lganda, taqsimotni yetarli darajada aniqlik bilan ifodalaydi, past darajadagi foydaga ega bo‘lganda aniq emas.

Biror jamiyatda foydani taqsimlash

$$y = \frac{2000000000}{x^{1,5}}$$

formula bilan aniqlansin:

1) 100000 dan ko‘p foydaga ega bo‘lgan shaxslar soni;

2) 100 nafar eng boy shaxslar orasida, eng kam foydani toping.

$$\lg y = \lg \frac{2000000000}{100000^{1.5}} = \lg 2000000000 - 1{,}5 \lg 100000 = \lg 2 \cdot 10^9 - 1.5 \lg 10^5 =$$

$$= 9 + 0{,}301 - 1{,}5 \cdot 5 = 9{,}301 - 7{,}5 = 1{,}801,$$

Yechish. 1) masala sharti bo‘yicha, $x = 100000$, uni taqsimot formulasiga qo‘ysak:

$$y = \frac{2000000000}{100000^{1.5}}$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni logarifmlasak:ya’ni $\lg y = 1.801$ bo‘ladi. Logarifmlar jadvalidan $y = 63{,}2$ ni topamiz. Shunday qilib, Pareto taqsimoti bo‘yicha 63 kishi 100000 dan ko‘p foydaga ega bo‘ladi;

2) masala sharti bo‘yicha $y = 100$, taqsimot formulasidan

$$100 = \frac{2000000000}{x^{1.5}}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan $x = 73700$ ekanligini aniqlash mumkin (uni bajarishni o‘quvchiga havola etamiz).

Shunday qilib, 100 nafar eng boy kishilar ichida eng kichik foyda 73700 ni tashkil etadi.

Funksiyalarning iqtisodda qo‘llanilishiga misollarni ko‘plab keltirish mumkin. Bu mavzu bo‘yicha talabalarning shug’ullanishini taklif etamiz.

Tayanch iboralar va tushunchalar

O‘zgarmas va o‘zgaruvchi miqdorlar, funksiya tushunchasi, funksiya aniqlanish sohasi, qiymatlar to‘plami, analitik usul, grafik usul, jadval usul, oshkor va oshkormas funksiyalar, funksiyaning algoritmik berilishi, murakkab funksiya, teskari funksiya.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday miqdorlar o‘zgaruvchi deb ataladi?
2. Qanday holda funksiya aniqlangan deyiladi?
3. Funksional bog’lanish qanday belgilanadi?
4. Funksiyaning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning qiymatlar to‘plami nima?
6. Qanday moslik funksiyani ifodalashi mumkin?
7. Funksiya qanday o‘zgaruvchi?
8. Argument qanday o‘zgaruvchi?
9. Funksiya qanday usullarda berilishi mumkin?
10. Oshkor va oshkormas funksiyalar qanday?
11. Funksiyaning funksiyasi yoki murakkab funksiya deb nimaga aytiladi?
12. Teskari funksiya qanday funksiya?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. $f(x)=x^2+1$ funksiya berilgan: 1) $f(4)$; 2) $f(\sqrt{2})$; 3) $f(a+1)$;
4) $f(2a)$ larni hisoblang.

2. Quyidagi funksiyalarning $D(f)$ aniqlanish sohasini va $E(f)$ qiymatlar to‘plamini toping:

1) $f(x)=\ln(x+3)$; 2) $f(x)=\sqrt{5-2x}$; 3) $f(x)=\sqrt{1-|x|}$.

3. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1) $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$; 2) $f(x)=(a+x)/(a-x)$;

3) $f(x)=\lg(5x-x^2-6)$; 4) $f(x)=2^{\arccos(1-x)}$.

4. Hajmi $v=1$ birlikka teng bo‘lgan silindr asosining radiusi r va balandligi h orasidagi funksional bog’lanishni toping.

5. 1) $f(u)=1-u,\ u=x^2$; 2) $f(u)=1/(1-u),\ u(x)=x-1/x$;

3) $f(u)=u^2,\ u(x)=4x$

funksiyalardan x ning murakkab funksiyalarini tuzing.

6. Quyidagi funksiyalarga teskari funksiyalarni toping va topilgan funksiyalarning aniqlanish va o‘zgarish sohalarini aniqlang:

1) $f(x)=x^2-1,\ x\in[0,+\infty)$; 2) $f(x)=2x+3,\ x\in(-\infty,+\infty)$; 3) $f(x)=(x-1)^3,\ x\in(-\infty,+\infty)$; 4) $f(x)=x^2-1,\ x\in(-\infty,0]$.

7. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping va ularning grafiklarini yasang.

1) $y=\frac{1}{x}$; 2) $y=-\frac{3}{x}$; 3) $y=2-\frac{1}{x}$; 4) $y=\frac{2}{x-1}$.

3.3-§. Funksiya limiti va uzluksizligi

3.3.1. Funksiyaning limiti va uning asosiy xossalari

1-ta'rif. $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lsaki, $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x\neq a$ nuqtalar uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A chekli son $y=f(x)$ funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti deb ataladi va quyidagicha yoziladi

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \quad yoki \quad x\to a \quad da \quad f(x)\to A \text{ bo'ladi.}$$

(1)

Funksiya limitining ta'rifidan kelib chiqadiki $x-a=\alpha$ cheksiz kichik bo'lganda $f(x)-A$ ham cheksiz kichik bo'ladi.

2-ta'rif. $y=f(x)$ funksiya, x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday, $N>0$ mavjud bo'lsaki, $|x|>N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o'zgarmas A son, $y=f(x)$ funksiyaning $x\to\infty$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

(2)

bilan belgilanadi.

1-ta'rifda faqat $x<a$ yoki $x>a$ bo'lgan qiymatlar qaralsa, funksiyaning ***chap yoki o'ng limit*** tushunchasi kelib chiqadi va

$$\lim_{x\to a-0} f(x),\quad \lim_{x\to a+0} f(x)$$

(3)

bilan begilanadi.

3-ta’rif. Limiti $A=0$ bo‘lgan funksiyaga **cheksiz kichik funksiya (ch. kich. f.)** deyiladi.

4-ta’rif. Limiti $A=+\infty$ yoki $A=-\infty$ bo‘lgan funksiyalarga **cheksiz katta funksiya (ch. kat. f.)** deyiladi va

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a} f(x)=+\infty \qquad (4)$$

simvollar bilan belgilanadi.

Limitning ta’rifidan kelib chiqadiki $y=C$ o‘zgarmas miqdorning limiti o‘ziga teng.

3.3.2.Funksiya limitining asosiy xossalari:

1) *yig’indining limiti.* Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig’indisining limiti, qo‘shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig’indisiga teng, ya’ni $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalarning $x\to a$ dagi limitlari mavjud bo‘lsa,

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]=\lim_{x\to a} f_1(x)\pm\lim_{x\to a} f_2(x) \qquad (5)$$

2) chekli sondagi funksiyalar *ko‘paytmasining limiti* funksiyalar limitlarining ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=\lim_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim_{x\to a} f_2(x) \qquad (6)$$

Natija: O‘zgarmas ko‘paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya’ni,

$$\lim_{x\to a}\left[cf_1(x)\right]=c\lim_{x\to a} f_1(x) \qquad (7)$$

3) Ikkita funksiya *nisbatining limiti,* maxrajning limiti no‘ldan farqli bo‘lsa, bu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng, ya’ni

$$\lim_{x\to a} f_2(x)\neq 0$$

bo‘lsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$$

(8)

bo‘ladi.

Limitlarni hisoblashda quyidagi limitlardan foydalaniladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{x}=1;$$

(9)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e, \qquad e=2{,}71828\ldots \qquad (10)$$

Bu limitlarga mos ravishda ***birinchi*** **va** ***ikkinchi*** **ajoyib** limitlar deyiladi.

3.3.3. Aniqmasliklar va ularni ochish

1.Aniqmasliklar. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ limitni hisoblashda $f(x),\ \varphi(x)$ funksiyalar ch.kich.f. lar bo‘lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x\to a$ da **(0/0) ko‘rinishdagi aniqmaslik** deyiladi. $f(x),\ \varphi(x)$ funksiyalar ch.kat.f. lar bo‘lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x\to a$ da (∞/∞) ***ko‘rinishidagi aniqmaslik*** *deyiladi*. Xuddi shunga o‘xshash $\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ \infty^0$ aniqmasliklar

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)-\varphi(x)],\quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)] \quad \text{ва} \quad \lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$$

limitlarni hisoblashda kelib chiqadi. Bunday hollarda limitlarni hisoblashga **aniqmasliklarni ochish** deyiladi.

$(0/0)$ va (∞/∞) ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochishda quyidagi xossadan foydalaniladi: $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtaning biror atrofidagi hamma nuqtalarda o‘zaro teng bo‘lsa, ularning $x\to a$ dagi limiti ham teng bo‘ladi.

Masalan, $f(x)=\frac{x^2-9}{2(x-3)}$ va $\varphi(x)=\frac{x+3}{2}$ funksiyalar x ning $x=3$ dan boshqa hamma qiymatlari uchun teng, chunki

$$\frac{x^2-9}{2(x-3)} = \frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)} = \frac{x+3}{2}$$

Yuqoridagi xossaga asosan,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x)$$

bo‘ladi, ya’ni

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{2(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

natijaga ega bo‘lamiz.

Funksiyalarning limitini topishga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+6}{6x} = \frac{5}{6}$$

ekanligini funksiya limitining ta’rifidan foydalanib isbotlang.

Yechish. Buni isbotlash uchun $f(x) = (5x+6)/6x$ o‘zgaruvchi miqdor va $A = 5/6$ o‘zgarmas miqdor orasidagi farq $x \to \infty$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini ko‘rsatish kifoya. Demak,

$$\frac{5x+6}{6x} - \frac{5}{6} = \frac{5x+6-5x}{6x} = \frac{6}{6x} = \frac{1}{x}$$

$1/x$ o‘zgaruvchi miqdor $x \to \infty$ da cheksiz kichik funksiyadan iborat. Shunday qilib,

$$\lim_{x\to\infty} (5x+6)/6x = 5/6..$$

2-misol.

$$\lim_{x\to 3} (2x^2 - 5x + 4) = 7$$

ekanligini isbotlang hamda x va $(2x^2 - 5x + 4)$larning qiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

Yechish. $x \to 3$ bo‘lganligi uchun $x - 3 = \alpha$ cheksiz kichik miqdordir.

$x = 3 + \alpha$ni $(2x^2 - 5x + 4) - 7$ ayirmaga qo‘yib,

$$2(3+\alpha)^2 - 5(3+\alpha) + 4 - 7 = 2(9 + 6\alpha + \alpha^2) - 15 - 5\alpha + 4 - 7 =$$

$$= 18 + 12\alpha + 2\alpha^2 - 15 - 5\alpha + 4 - 7 = 2\alpha^2 + 7\alpha$$

natijaga ega bo‘lamiz.

α cheksiz kichik funksiya bo‘lganligi uchun $2\alpha^2+7\alpha$ ham cheksiz kichik bo‘ladi. Shunday qilib, $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-5x+4)=7$ isbot bo‘ldi.

Endi yuqoridagi holatni x argument, $2x^2-5x+4$ funksiya qiymatlari jadvali bilan ko‘rsataylik. Ma’lumki $x\to 3$ intiladi.

x	2	2,5	2,8	2,9	2,99	2,999	$\to 3$
$2x^2-5x+4$	2	4	5,68	6,32	6,9302	6,993002	$\to 7$

Bu jadvaldan ko‘rinadiki, argumentning 3 ga yaqinlashib boruvchi qiymatlari uchun, funksiyaning mos qiymatlari 7 ga yaqinlashib boradi, ya’ni $x-3$ cheksiz kichik miqdorga $2x^2-5x+4-7$ ayirmaning ham cheksiz kichik miqdori to‘g’ri keladi. Yuqoridagi jadvalda $x<3$ bo‘lib, $x\to 3$ holni qaradik. $x>3$ bo‘lib, $x\to 3$ holni o‘quvchiga mustaqil ko‘rsatishni tavsiya qilamiz.

3-misol.

$\lim\limits_{x\to 2}(4x^2-6x+3)$ limitni hisoblang.

Yechish. Algebraik yig’indining limiti, (3.5) formula, o‘zgarmas ko‘paytuvchini limit ishorasidan chiqarish (73.) formulalarga asosan:

$$\lim_{x\to 2}(4x^2-6x+3)=\lim_{x\to 2}4x^2-\lim_{x\to 2}6x+\lim\lim_{x\to 2}3=4\lim_{x\to 2}x^2-6\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}3=$$

$$=4(\lim_{x\to 2}x)^2-6\lim_{x\to 2}x+3=4\cdot 2^2-6\cdot 2+3=7$$

hosil bo‘ladi.

Yuqoridagi misolda, limitlarning xossalariga asosan, argument x ning o‘rniga uning limitik qiymatini qo‘yishga olib keldi.

4-misol.

$\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-4x+7)/(2x^2-5x+6)$ limitni hisoblang.

Yechish. Ikkita funksiya nisbatining limiti (3.8) formula hamda oldingi misolda foydalanilgan limitlarning xossalarini qo‘llasak,

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6} = \frac{\lim_{x\to 1}\left(3x^2-4x+7\right)}{\lim_{x\to 1}\left(2x^2-5x+6\right)} = \frac{\lim_{x\to 1}3x^2-\lim_{x\to 1}4x+\lim_{x\to 1}7}{\lim_{x\to 1}2x^2-\lim_{x\to 1}5x+\lim_{x\to 1}6} =$$

$$= \frac{3\left(\lim_{x\to 1}x\right)^2-4\left(\lim_{x\to 1}x\right)+7}{2\left(\lim_{x\to 1}\right)^2-5\lim_{x\to 1}x+6} = \frac{3\cdot 1^2-4\cdot 1+7}{2\cdot 1^2-5\cdot 1+6} = \frac{6}{3} = 2$$

bo‘ladi.

Rasional funksiyaing limitini hisoblash shu funksiyaning argument x ning limitik qiymatidagi, qiymatini hisoblashga keltirildi.

Eslatma. $f(x)$ elementar funksiyalarning $x\to a$ intilgandagi limiti (a aniqlanish sohasiga tegishli) funksiyaning $x=a$ nuqtadagi qiymatiga teng bo‘ladi. Masalan,

$$\lim_{t\to 1}\left[\lg\left(t+\sqrt{t^2+80}\right)+\sqrt{t^2+8}\right] = \lg(1+\sqrt{t^2+80})+\sqrt{1+8} = \lg 10+3 = 1+3 = 4.$$

5-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x=1$ da surat ham, maxraj ham nolga aylanib $(0/0)$ ko‘rinish-dagi aniqmaslik hosil bo‘ladi.

Surat va maxrajni $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ formula yordamida chiziqli ko‘paytuvchilarga ajratamiz. Bunda x_1 va x_2 lar $ax^2+ba+c=0$ kvadrat tenglamaning ildizlari. Demak,

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x+2/3)}{4(x-1)(x-1/4)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{3(x+2/3)}{4(x-1/4)} = \frac{3(1+2/3)}{4(1-1/4)} = 5/3$$

bo‘ladi.

6-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x\to\infty$ da (∞/∞) ko‘rinishdagi aniqmas ifodaga ega bo‘lamiz. Bunday aniqmaslikni ochish uchun kasrning surat va maxrajini x ning eng yuqori darajalisiga, ya’ni x^2 ga bo‘lamiz, hamda limitlarning xossalaridan foydalansak

$$\lim_{x\leftarrow\infty}\frac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+5/x+4/x^2}{3+7/x-2/x^2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(6+5/x+4/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(3+7/x-2/x^2)}=\frac{6+0+0}{3+0+0}=2$$

bo‘ladi. Bunda $5/x$, $4/x^2$ $7/x$, $2/x^2$ lar $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiyalardir.

7-misol. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x=3$ da surat va maxraj 0 ga teng bo‘ladi. Maxrajda $\sqrt{x+1}$ irrasional ifoda mavjud, uni suratga o‘tkazamiz, buning uchun kasrning surat va maxrajini $\sqrt{x+1}+2$ ga ko‘paytiramiz.

$$\lim_{x\to3}\frac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{(x+1)^2}-2^2}=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to3}(x+3)\cdot(\sqrt{x+1}+2)=(3+3)(\sqrt{x+1}+2)=6\cdot4=24.$$

8-misol. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ bo‘lganligi uchun

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x-\sin^2 x}=$$

$$=-\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=-\lim_{x\to\pi/4}\frac{1}{\cos x+\sin x}=$$

$$=-\frac{1}{\cos\pi/4+\sin\pi/4}=-\frac{1}{\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

natijani olamiz.

9-misol. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ limitni birinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $5x=\alpha$, deb almashtirsak, bundan $x=\alpha/5$, $x\to0$ $\alpha\to0$ bo‘ladi.

Shuning uchun,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha/5} = 5\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 5\cdot 1 = 5,$$

chunki

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

10-misol. $\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x$ limitni ikkinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $x\to\infty$ da limitga o‘tsak, 1^∞ ko‘rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. $3/x=\alpha$ bilan almashtirsak, bu yerdan $x=3/\alpha$ hamda $x\to\infty$ da $\alpha\to 0$ bo‘ladi..Demak,

$$\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{3/\alpha} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^3 = e^3$$

kelib chiqadi.

Shundayqilib, $\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x = e^3$.

11-misol. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$ limitni hisoblang.

Yechish: $x\to 1$da $1/(x-1)\to\infty$ va $2/(x^2-1)\to\infty$ bo‘lib, $(\infty-\infty)$ ko‘rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. Oydinki,

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1} = \frac{x+1-2}{x^2-1} = \frac{x-1}{x^2-1}.$$

Oxirgi ifoda $x\to 1$ da $(0/0)$ aniqmas ifoda bo‘ladi. Shunday qilib,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

12-misol. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$ limitni hisoblang.

Yechish. $x\to+\infty$ da $(\infty-\infty)$ ko‘rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. Quyidagi shakl almashtirishni bajaramiz:

$$\sqrt{x^2+3x}-x = \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{(\sqrt{x^2+3x})^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} =$$

$$= \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}.$$

Oxirgi ifoda $x \to \infty$ da (∞ / ∞) ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘lib, 11-misoldagidek x ning yuqori darajalisiga surat va maxrajini bo‘lib,

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x/x}{\sqrt{x^2/x^2+3x/x^2}+x/x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}=1{,}5;$$

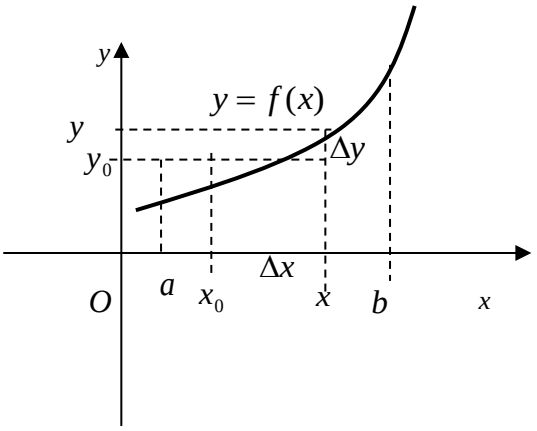
bunda $x \to +\infty$ da $3/x \to 0$ bo‘ladi.

3.3.4. Funksiyaning uzluksizligi va uzilishi

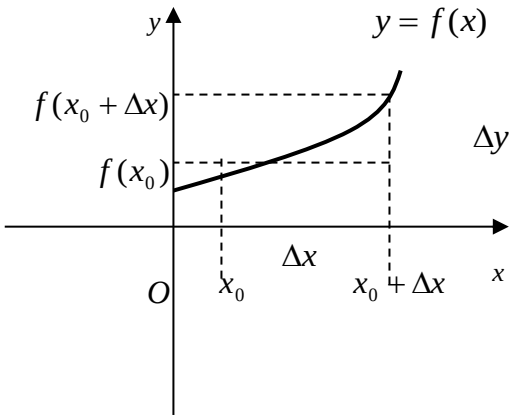
1. Funksiya orttirmasi. *Uzluksizlik* matematik tahlilning asosiy tushunchalaridan biridir. Matematika uzluksiz funksiya tushunchasiga birinchi navbatda turli harakat qonunlarini o‘rganish natijasida keldi. Fazo va vaqt uzluksiz, masalan: harakatdagi nuqtaning bosib o‘tgan yo‘li s ning t vaqtga bog’lanishini ifodalovchi $s = f(t)$ qonun uzluksiz funksiyaga misol bo‘ladi. Qattiq jismlar, suyuqlik va gazlardagi holatlar hamda jarayonlar uzluksiz funksiyalar yordamida tavsiflanadi. Bunday uzluksiz jarayonlar iqtisodiyot modellarida ham mavjud. Bunday jarayonlar mexanika fizika va bir qancha maxsus fanlarda muayyan holda o‘rganiladi.

Matematikada uzluksiz jarayonni umumiy holda o‘rganamiz.

Funksiya orttirmasi. $y = f(x)$ funksiya biror $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan va x_0 shu kesmadagi biror nuqta bo‘lsin. x argumentning keyingi qiymati bo‘lsa, $x - x_0 = \Delta x$ ga ***argument orttirmasi*** deyiladi (3.7,3.8-chizma).



3.7-chizma



3.8-chizma

$f(x)-f(x_0)$ funksiyaning qiymatlari orasidagi farqqa ***funksiya orttirmasi*** deyiladi va odatda Δy bilan belgilanadi. $\Delta y = f(x)-f(x_0)$ yoki $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ chizmadan ko‘rinadiki $\Delta x \to 0$ da $\Delta y \to 0$ bo‘ladi.

1-misol. $y = f(x) = x^3$ funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtada argument $\Delta x = 0{,}5$ orttirma olgandagi funksiya Δy orttirmasini toping.

Yechish. $f(x_0) = 2^3 = 8$ funksiyaning boshlang’ich nuqtadagi qiymati. $f(x_0+\Delta x) = f(2+0{,}5) = (2+0{,}5)^3$ funksiyaning keyingi qiymati, demak, funksiya orttirmasi

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = (2+0{,}5)^3 - 2^3 =$$
$$= 2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot 0.5 + 3\cdot 2\cdot 0{,}5^2 + 0{,}5^3 - 8 = 7{,}625$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, $\Delta y = 7{,}625$.

2. Funksiya uzluksizligi ta’riflari.

1-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo‘lib, argumentning x_0 nuqtadagi cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya’ni

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} \left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right] = 0$$

bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz deyiladi*** (2-chizma). Bu ta’rifga qo‘yidagi ta’rif ham teng kuchlidir.

2-ta’rif. x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan $y = f(x)$ funksiya shu nuqtada chekli limitga ega bo‘lib, bu limit funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya’ni

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi.

Funksiya uzluksizligi ta’riflari quyidagi ***shartlarni*** o‘z ichiga oladi:

1) funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan;

2) funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o‘ng limitlari

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x), \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

mavjud;

3) x_0 nuqtada chap va o‘ng limitlar o‘zaro teng, ya’ni

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x);$$

4) chap va o‘ng limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya’ni

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

2-misol. $y = x^3$ funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtada uzluksizligini tekshiring.

Yechish. Ma’lumki, $y = x^3$ funksiya $x_0 = 2$ nuqtada va uning istalgan atrofida aniqlangan. Uzluksizlikni 1-ta’rifga asosan tekshiramiz. Buning uchun $x_0 = 2$ nuqtadagi funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^3 - x_0{}^3 = (2+\Delta x)^3 - 2^3 =$$

$$2^3 + 3\cdot 2^2\cdot\Delta x + 3\cdot 2\cdot\Delta x^2 + \Delta x^3 - 2^3 = 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3$$

argument orttirmasi $\Delta x \to 0$ ga intilganda limitga o‘tamiz.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(12\cdot\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3) = 12\cdot 0 + 6\cdot 0^2 + 0^3 = 0.$$

Shunday qilib, $\Delta x \to 0$ da $x_0 = 2$ nuqtada $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$, bu esa 1-ta’rifga asosan funksiya uzluksiz ekanligini bildiradi. Bu misolda x_0 nuqta o‘rniga ixtiyoriy nuqtani olish mumkin(masalan, $x_0 = 3$ uchun uzluksizlikni tekshiring).

Funksiya oraliqning hamma nuqtalarida uzluksiz bo‘lsa, u shu **oraliqda** uzluksiz deyiladi.

2-misolda $y = x^3$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqning hamma nuqtalarida uzluksizligi ravshan. Demak, $y = x^3$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda uzluksiz funksiyadir.

Elementar funksiyalarning hammasi o‘zlarining aniqlanish sohalarida uzluksizdir.

$f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa:

1) $f(x)\pm\varphi(x)$; 2) $f(x)\cdot\varphi(x)$; 3) $f(x)/\varphi(x)$ ($\varphi(x_0)\neq 0$ bo‘lganda) lar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Kesmada uzluksiz funksiyaning xossalari. $f(x)$ funksiya $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u: 1) shu kesmada chegaralangan; 2) shu kesmada eng kichik va eng katta qiymatlarga erishadi; 3) kesmaning uchlarida turli ishorali qiymatlar qabul qilsa, shu kesmaning biror nuqtasida 0 ga teng bo‘ladi; 4) $f(a)$ va $f(b)$ orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi.

$y = f(z)$ va $z = \varphi(x)$ funksiyalar o‘z argumentlarining uzluksiz funksiyalari bo‘lsa, $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya ham uzluksiz bo‘ladi. $y = f(x)$ uzluksiz bo‘lib, $x = \varphi(y)$ teskari funksiya mavjud bo‘lsa, u ham uzluksizdir.

3. Funksiyaning uzilish va uning turlari

Ta’rif. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan, lekin bu nuqtaning o‘zida uzluksizlik shartlaridan birortasi bajarilmasa, funksiya x_0 nuqtada **uzilishga ega deyiladi.**

$f(x)$ funksiya uchun

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ chekli limitlar mavjud bo‘lsa, chap va o‘ng limitlar hamda $f(x_0)$ sonlar o‘zaro teng bo‘lmasa, x_0 nuqta ***1-tur uzilish*** *nuqtasi* deyiladi.

Xususan, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$ bo‘lsa x_0 ***bartaraf qilinadigan (yo‘qotiladigan) uzilish*** nuqtasi deyiladi.

1-tur uzilish nuqtasi bo‘lmagan uzilish nuqtalariga ***2-tur uzilish nuqtalari*** deyiladi. Bunday nuqtalarda, aqalli bitta tomonli limit qiymati cheksiz yoki mavjud bo‘lmaydi.

1-misol. $f(x) = \dfrac{x-2}{|x-2|}$ funksiya $x_0 = 2$ nuqtada 1-tur uzilishga ega ekanligini isbotlang.

Yechish. funksiya $x_0 = 2$ nuqtada aniqlanmagan. Absolyut qiymat ta’rifidan $x-2<0$ yoki $x<2$ va $x-2>0$ yoki $x>2$ bo‘lganda mos ravishda

$$f(x) = \frac{x-2}{-(x-2)} = -1, \qquad f(x) = \frac{x-2}{x-2} = 1$$

bo‘ladi.

Demak, $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = 1.$

Shunday qilib, $x_0 = 2$ nuqta 1-tur uzilish nuqtasi bo‘ladi. Bu uzilish nuqtasi **bartaraf** qilib (yo‘qotib) bo‘lmaydigan uzilish nuqtasiga kiradi.

2-misol. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, funksiya $x_0 = 0$ nuqtada aniqlanmagan, lekin $x \neq 0$ hamma nuqtalarda aniqlangan.

Bir tomonli limitlar o‘zaro teng, ya’ni

$$\lim_{x\to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Shunday qilib, berilgan funksiya uchun $x_0 = 0$ nuqta ***bartaraf qilinadigan (yo‘qotiladigan) uzilish*** nuqtasi bo‘ladi.

3-misol. $f(x) = 6/(x-3)^2$ funksiyaning $x = 3$ nuqtada uzilishga ega ekanligini ko‘rsating:

Yechish. Berilgan funksiya $x = 3$ nuqtadan boshqa hamma nuqtalarda aniqlangan. $x < 3$ bo‘lganda $f(x) > 0$ va $x > 3$ bo‘lganda ham $f(x) > 0$.

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = +\infty \quad \text{va} \quad \lim_{x\to 3+0} f(x) = +\infty.$$

Bu 2-tur uzilishdir .

Tayanch iboralar va tushunchalar

Funksiya limiti va uning xossalari, ketma-ketlik, cheksiz katta miqdor, chap va o‘ng limitlar, cheksiz kichik funksiya, ko‘paytmaning va bo‘linmaning limiti, birinchi ajoyib limit, aniqmasliklarni ochish, argument orttirmasi, funksiya orttirmasi, funksiya uzluksizligi, funksiyaning uzilishi, oraliqda uzluksiz, ikkita uzluksiz funksiya yig’indisi , ko‘paytmasi va nisbati uzluksizligi, kesmada uzluksiz funksiyalar xossalari, funksiyaning uzilishi, 1-tur uzilish, 2-tur uzilish, bartaraf etiladigan(yo‘qotiladigan) uzilish, elementar funksiyalarning uzuksizligi va uzilishi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning limiti deb nimaga aytiladi va u qanday yoziladi?

2. Chap va o‘ng limitlar nimalar va u qanday yoziladi?
3. Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar qanday miqdorlar?
4. Ikki funksiya algebraik yig’indisining limiti nimaga teng?
5. Chekli sondagi funksiyalar ko‘paytmasining limiti nimaga teng?
6. O‘zgarmas ko‘paytuvchini limit ishorasidan chiqarish mumkinmi?
7. Ikkita funksiya nisbatining limiti nimaga teng?
8. Birinchi ajoyib limit deb nimaga aytiladi?
9. Ikkinchi ajoyib limit nimaga teng?
10. Aniqmasliklarni ochish nimadan iborat?
1. Qanday jarayon uzluksiz bo‘ladi?
2. Funksiya orttirmasi nima?
3. Qanday funksiya uzluksiz deyiladi?
4. Qanday funksiyaga oraliqda uzluksiz deyiladi?
5. Ikkita uzluksiz funksiya yig’indisi, ko‘paytmasi va nisbati uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?
6. Kesmada uzluksiz bo‘lgan funksiyalar qanday xossalarga ega?
7. Qanday funksiyaga uzilishga ega deyiladi?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{5x}=\dfrac{4}{5}$, 2) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-7)=5$,

3) $\lim\limits_{x\to -1}(5x+8)=3$, 4) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2)-4x+6=10$

ekanligini funksiya limiti ta’rifidan foydalanib isbotlang xamda x va berilgan funksiyalar kiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

5. Quyidagi limitlarni, limitlarning xossalaridan foydalanib hisoblang:.

1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-7x+6)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^4-5x^3+6x^2-4x+7)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+5}$; 6) $\lim\limits_{t\to 3}\left|2t+\sqrt{t^2-8}+\lg(3t+\sqrt{t^2-8})\right|$.

6. Ushbu $(0/0)$ va (∞/∞) ko‘rinishdagi aniqmasliklarni oching:

1) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^4-4x+3}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3-6x^2+7x+5}{8-4x+3x^2-2x^3}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^3+7x^2+8x-9}{3x^5+6x^3+4x^2-2x+11}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+8x^6+5x^4-3x^2-12}{10x^6+7x^5-6x^3-4x-17}$.

7. Quyidagi limitlarni hisoblang:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tgx}{\sin 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

8. Quyidagi limitlarni birinchi va ikkinchi ajoyib limitlardan foydalanib hisoblang:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x/3}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x/2}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x}+2-\sqrt{2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin 1/x$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2/n)^n$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{1/x}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-5/n)^n$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-1/3n)^n$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2x)^{1/x}$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n/(n+1)\right]^n$.

9. Quyidagi aniqmasliklarni oching:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

10. 1) $y=x^2$ funksiyaning uzluksizligini, $x_0=3$, $x=5$ nuqtalarda, orttirmalar orqali ko‘rsating.

2) $y=3x^3+5x^2-7$, 2) $y=4x^3+3x^2+5$ funksiyalar uzluksizligini $x_0=2$; $x_1=-3$ nuqtalarda, orttirmalar orqali ko‘rsating.

3) $y = \sin x$ va $y = \cos x$ funksiyalarning x ning hamma qiymatlari uchun uzluksiz ekanligini ko‘rsating.

4) Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va ularning turini aniqlang:

1) $f(x) = \frac{8}{x+4}$; 2) $f(x = \frac{x}{x-4}$.

5) Ushbu funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va ularning turini aniqlang:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x-3}$; 2) $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x-5}$.

3.4-§. Bir o‘zgaruvchili funksiya hosilasi va differensiali

3.4.1. Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida

*Oniy tezlik haqidagi masala***.** Amaliyotda har xil jarayonlarni tekshirishda birinchi navbatda, shu jarayonning kechishi tezligini aniqlash kerak bo‘ladi. Tezlikni aniqlash haqidagi masala fan va texnikaning eng asosiy masalalaridan biridir.

Ma’lumki, tekis kechadigan jarayonlarda uning kechishi tezligi o‘zgarmasdir. Masalan, tekis harakatda o‘tilgan yo‘lning shu yo‘lni o‘tishga ketgan vaqtga nisbati uning tezligini bildirib u o‘zgarmasdir.

Lekin tabiatdagi yoki jamiyatdagi ko‘pchilik hodisalar notekis kechadigan jarayonlardir. Masalan, og’ir moddiy nuqtaning bo‘shliqda og’irlik kuchi ta’sirida erkin tushushi masalasini qaraylik. Fizikadan ma’lumki, bo‘shliqda moddiy nuqtaning erkin tushishi qonuni

$$S = \frac{g}{2}t^2 \qquad (1)$$

munosabat bilan ifodalanib, bu yerda t erkin tushish boshlanishidan hisoblangan vaqt, S t vaqtda o‘tgan yo‘l, g erkin tushish tezlanishi, $g \approx 9{,}81 м/сек^2$. Bu harakat notekis bo‘lib, uning tezligini topish masalasini qaraymiz.

Vaqtning biror aniq t momenti (oni)ni qaraylik. Bu momentda moddiy nuqta A holatda bo‘lsin. OA yo‘lning miqdori (1) formula bilan topiladi. Vaqt Δt miqdorga ortsin, ya’ni t, Δt orttirma qabul qiladi.

$t+\Delta t$ momentda nuqta B holatda bo‘ladi. AB, vaqt Δt orttirma olgandagi yo‘l orttirmasi, uni $AB=\Delta S$ bilan belgilaymiz. (1) formulaga $t+\Delta t$ qo‘yib,

$$S+\Delta S=\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2, \quad \text{bundan} \quad \Delta S=\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2-\frac{gt^2}{2}$$

yoki $\Delta S=\frac{g}{2}(2t\Delta t+\Delta t^2)$.

Oxirgi tenglikni Δt ga bo‘lib,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{g}{2}(2t+\Delta t)$$

(2)

natijani olamiz. Oxirgi tenglikdan ma’lumki, $\Delta S/\Delta t$ nisbat t va Δt ga bog’liq. Masalan: $\Delta t=0{,}1$ sek, $t=1$ sek bo‘lganda,

$\frac{\Delta S}{\Delta t}-\frac{g}{2}(2\cdot 1+0{,}1)=1{,}05g$ bo‘lib, $t=3$ sek bo‘lganda

$\frac{\Delta S}{\Delta t}-\frac{g}{2}(2\cdot 3+0{,}1)=3{,}05g$ bo‘ladi.

Shuning uchun, notekis harakatning tezligi faqat vaqtning aniq momentiga tegishli bo‘ladi. Shunday qilib, vaqtning har bir momentidagi ***oniy tezlik*** haqida gapirish kerak bo‘ladi.

Oniy tezlik tushunchasini qanday aniqlash kerak?

(2) tenglikdan ma’lumki, t o‘zgarmas bo‘lganda, $\Delta S/\Delta t$ A dan B holatgacha oraliqdagi o‘rtacha tezlik bo‘lib, uni v_{yp} bilan belgilaymiz. Ma’lumki, (2) da Δt qancha kichik bo‘lsa, t momentdagi tezlikni shuncha yaxshiroq ifodalaydi. Bundan shunday xulosaga kelamizki, erkin tushayotgan nuqtaning t momentidagi oniy tezligi v ni v_{yp} o‘rtacha tezlikning $\Delta t\to 0$ dagi limiti kabi aniqlaymiz, ya’ni

$$v=\lim_{\Delta t\to 0} v_{yp}$$

Shunday qilib, oniy tezlikni hisoblash uchun qo‘yidagi ko‘rinishdagi limitni hisoblash kerak bo‘ladi.

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

(3)

(3) ko‘rinishdagi limitni hisoblashga ko‘p sondagi amaliy masalalarni yechishda to‘g’ri keladi.

Umuman, o‘zgaruvchi miqdor o‘zgarish tezligini topish masalasi, matematika fanining eng ahamiyatli tushunchalaridan biri - hosila tushunchasiga olib keladi.

Shuning uchun (3) ko‘rinishdagi limitlarni hisoblashni umumiy holda qarash zarur bo‘ladi.

3.4.2. Funksiya hosilasining ta’rifi.

1-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya (a, b) intervalda aniqlangan bo‘lib, x_0 nuqtadagi funksiya Δy orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbatining, argument orttirmasi nolga intilgandagi limitiga, $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi. Bu limit

$$y',\ f'(x_0),\ \frac{dy}{dx},\ \frac{df}{dx}$$

simvollardan biri bilan belgilanadi.

Shunday qilib, ta’rifga asosan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo‘ladi, bu limit mavjud bo‘lsa, hosila x_0 nuqtada mavjud deyiladi.

Hosilani topish jarayoni ***differensiallash*** **deb** ataladi.

Biz o‘rganayotgan $y = f(x)$ funksiya orqali qanday jarayon tavsiflan-masin, uning hosilasi $y = f(x)$ fizik nuqtai nazardan shu jarayon kechishining tezligini ifodalaydi.

Chunonchi, τ vaqt, Q biror reaksiya natijasida olingan moddaning τ momentdagi miqdori bo‘lsa, demak Q τ ning funksiyasi bo‘ladi. Q dan olingan hosila, reaksiya kechishining tezligini ifodalaydi. τ vaqt, Q biror o‘tkazgich kesim yuzidan vaqt birligida o‘tayotgan elektr miqdori bo‘lsa, Q hosila tok kuchining o‘zgarish tezligini ifodalaydi. Q isitilayotgan jismning o‘zgaruvchi temperaturasini tavsiflasa, Q' hosila isish tezligini ifodalaydi.

Funksiya hosilasini hosila ta’rifiga asosan topishga bir necha misollar qaraymiz:

Misol. $y = x^3$ funksiyaning hosilasini hosila ta’rifiga asosan toping.

Yechish. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ limitni hisoblaymiz:

$$\Delta y = (x+\Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2) + 3x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

Shunday qilib, $y' = 3x^2$.

2-misol. $y = \sin x$ funksiya hosilasini hosila ta’rifiga asosan, toping.

Yechish. argument x, Δx orttirma olganda, funksiya Δy orttirma oladi.

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos(x + \Delta x/2)\sin \Delta x/2;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)};$$

$$\Delta x \to 0 \quad \partial a \quad \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x. \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)} = 1.$$

Shunday qilib, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x, \qquad y' = (\sin x)' = \cos x$

bo‘ladi.

Umuman, x va y o‘zgaruvchilarning fizik, iqtisodiy, kimyoviy ma’nolaridan voz kechsak, y dan x bo‘yicha olingan hosila, y ning x ga bog’liq bo‘lib o‘zgarishining tezligini ifodalaydi.

Hosilaning geometrik ma’nosi. Hosila muhim geometrik ma’noga ega. Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi uning grafigiga $M(x_0,\ f(x_0))$ ***nuqtada o‘tkazilgan urinmaning*** OX o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagining tangensiga teng. $y = f(x)$ egri chiziqqa $M_0(x_0,\ y_0)$ nuqtadan ***o‘tkazilgan urinma tenglamasi***

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

bo‘ladi, bunda $y_0 = f(x_0)$. Funksiya grafigiga urinish nuqtasi $M_0(x_0, y_0)$ da o‘tkazilgan normalning tenglamasi

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),\ (f'(x_0) \neq 0)$$

bo‘ladi.

3-misol. $y = \frac{x^3}{3} + 4$ egri chiziqqa abssissasi $x_0 = 2$ nuqtada o‘tkazilgan urinma va normalning tenglamasini yozing.

Yechish. $y_0 = \frac{20}{3}, \quad y'(2) = 2^2 = 4, \quad y - \frac{20}{3} = 4(x-2)$

yoki $3y - 20 = 12(x-2)$, $12x - 3y - 4 = 0$, bu $M_0(2,20/3)$ nuqtadan o‘tkazilgan urinmaning tenglamasi. Normalning burchak koeffisiyenti

$$-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{4}, \quad \text{demak,} \quad y - \frac{20}{3} = -\frac{1}{4}(x-2)$$

yoki

$$12y - 80 = -3(x-2),\ 3x + 12y - 86 = 0$$

bo‘lib, bu M_0 nuqtadan o‘tkazilgan normalning tenglamasi bo‘ladi.

3.4.3. Murakkab funksiya hosilasi va hosilalar jadvali

1). Agar $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, ya’ni $y = f[\varphi(x)]$ **murakkab funksiya** bo‘lsa, $y = f(u)$ funksiyaning x o‘zgaruvchi bo‘yicha hosilasi

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

bo‘ladi.

Agar $y = f(x)$ va $x = \varphi(y)$ lar o‘zaro teskari funksiyalar bo‘lsa,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

bo‘ladi.

2). Differensiallash qoidalarini eslatib o‘tamiz:

x erkli o‘zgaruvchi, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ uning differensiallanuvchi funksiyalari bo‘lsin.

1. $C' = 0$ C – o‘zgarmas miqdor.
2. $x' = 1$.
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

5. $(cu)' = c \cdot u'$.

6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$.

3). **Murakkab funksiya uchun hosilalar jadvali** quyidagicha bo‘ladi:

1) $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u' \;\; n \in R, \;\; u > 0$;

2) $(a^u)' = a^u \cdot 1na \cdot u'$; 3) $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot 1na} \cdot u'$; 5) $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;

6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; 7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

8) $(tg\ u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$; 9) $(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

10) $(\arcsin\ u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; 11) $(\arccos\, u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

12) $(arctg\ u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$; 13) $(arcctg\ u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

14) $(u^v)' = vu^{м-1} \cdot u' + u^v \cdot 1nu \cdot v'$.

5. Yuqori tartibli hosilalar. $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deb, uning hosilasidan olingan hosilaga, ya’ni $(y')'$ ga aytiladi. Ikkinchi tartibli hosila quyidagilarning biri bilan belgilanadi:

$$y'', \;\; f''(x), \;\; d^2y/dx^2.$$

$y = f(x)$ funksiyaning n-tartibli hosilasi deb uning $(n-1)$ tartibli hosilasidan olingan hosilaga aytiladi va quyidagilarning biri bilan belgilanadi $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $d^n y/dx^n$. Ta’rifga ko‘ra $y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'$.

1-misol. $y = (2x^2 - 7)^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

Yechish.

$$y' = \left[(2x^2-7)^3\right] = 3(2x^2-7)^2(2x^2-7)' = 3(2x^2-7)^2 \cdot 4x = 12x(2x^2-7)^2;$$

$$y'' = (y')' = \left[12x(2x^2-7)^2\right] = 12\{x'(2x^2-7)^2 + x\left[(2x^2-7)^2\right] =$$

$$= 12\left[(2x^2-7)^2 + 2x(2x^2-7)\cdot 4x\right] = 12(2x^2-7)(2x^2-7+8x^2) =$$

$$= 12(2x^2-7)(10x^2-7).$$

Demak, $y'' = 12(2x^2-7)(10x^2-7)$.

2-misol. $y = x^n$ funksiyaning n –tartibli hosilasini toping.

Yechish. $y' = nx^{n-1}$, $y^n = n(n-1)x^{x-2}$, $y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$,

$y^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$, ... , $y^{(n-1)} =$

$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ ...\ \left[n-(n-2)\right]x^{n-(n-1)} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ ...\ 2x$

$y^{(n)} = n(n-1(n-2)(n-3)\ ...\ 3\cdot 2\cdot 1 = n!$

($n!$) 1 dan n gacha bo‘lgan sonlar ko‘paytmasining qisqa yozilishi).

6. Oshkormas va parametrik berilgan funksiyalarning hosilalari 1). x o‘zgaruvchining y funksiyasi ***oshkormas ko‘rinishda*** $F(x,\ y) = 0$ berilgan bo‘lsa, y' hosilani topish uchun $F(x,\ y) = 0$ tenglikni x bo‘yicha differensiallab, so‘ngra hosil bo‘lgan tenglamadan y' ni topamiz. Ikkinchi va undan yuqori tartibli hosilalar ham shu kabi topiladi.

Misol. $x^2 + y^2 = 100$ oshkormas ko‘rinishda berilgan, y funksiyaning ikkinchi tartibli hosilani toping.

Yechish. $2x + 2y\cdot y' = 0;$ $2yy' = -2x,$ $y' = -x/y;$ keyingi ifodadan yana hosila olib,

$$(y')' = -\frac{x'y - x(y)'}{y^2} = -\frac{y - xy'}{y^2} \quad .$$

Endi , $y' = -\frac{x}{y}$ ni xisobga olsak,

$$y'' = -\frac{y - x(-x/y)}{y^2}$$

yoki

$$y'' = -\frac{x^2 + y^2}{y^3};\ y'' = -\frac{100}{y^3}$$

bo‘ladi, chunki, $x^2 + y^2 = 100$ edi.

1). Funksional bog’lanish parametrik

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, $dy/\ dx$, $d^2y/\ dx^2$ hosilalar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \qquad (1)$$

formula bilan topiladi.

Misol. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$

parametrik ko‘rinishda berilgan, y funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t,\ \frac{d^2x}{dt^2} = -a\cos t,\ \frac{dy}{dt} = a\cos t,\ \frac{d^2y}{dt^2} = -a\sin t$$

(1) formulaga asosan,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-a\sin t\cdot(-a\sin t) - (-a\cos t)\cdot a\cos t}{(-a\sin t)^3} = \frac{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}{-a^3\sin^3 t} =$$

$$= -\frac{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}{a^3\sin^3 t} = -\frac{1}{a\sin^3 t}.$$

Demak, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a\sin^3 t}$

bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Oniy tezlik, hosila, egri chiziqqa urinma, yuqori tartibli hosila, differensiallash, murakkab funksiya, oshkormas va parametrik funksiyalar hosilalari.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Jarayonning kechishi tezligi nima?
2. Oniy tezlik nima bilan xarakterlanadi?
3. Funksiyaning hosilasi deb nimaga aytiladi?
4. Hosilaning geometrik ma’nosi nima?
5. Ikkinchi tartibli hosila nima?
6. Differensiallash qoidalari va formulalarini yoddan bilasizmi?
7. Qanday hosilaga n-tartibli hosila deyiladi?
8. Oshkormas va parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyalar hosilalari qanday topiladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

1) $y = x\ln x$; 2) $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$; 3) $y = \lg(5x)$.

4) $y = \ln x - \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x^2}$; 5) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$; 6) $y = \ln(x^2 + 2x)$.

7) $y = \ln(1+\cos x)$; 8) $y = \ln\sin x - \dfrac{1}{2}\sin^2 x$.

9) $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$; 10) $y = \ln\dfrac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$; 11) $y = \lg(5x+3)$.

12) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$; 13) $y = \ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-ax}}$; 14) $y = \ln(tgx)$.

2. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

1) $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$; 2) $y = \arcsin\sqrt{1-4x}$.

3) $y = x - arctgx$; 4) $y = \arcsin\dfrac{x}{a}$.

5) $y = arctg\dfrac{x}{a}$; 6) $y = \arccos(1-2x)$.

7) $y = x\sqrt{1-x^2} + \arccos x$; 8) $y = \arcsin(e^{3x})$.

9) $y = xarctgx + \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; 10) $y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

11) $y = \arcsin\sqrt{x}$; 12) $y = arctg\sqrt{6x-1}$.

13). $y = x\arccos(1-x^2)$; 14) $y = arctgx - \frac{1}{x}$.

15) $y = \arccos\sqrt{1-3x} + \sqrt{2x-4x^2}$;

3. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = tgx$; 3) $y = \sqrt{1+x^2}$ funksiyalarning 2- tartibli hosilalari topilsin.

4. 1) $y = \cos^2 x$; 2) $y = \frac{1}{x^2}$; 3) $y = x\sin x$ funksiyalarning 3- tartibli hosilalari topilsin.

5. 1) $y = x\ln x$; 2) $y = te^{-t}$; 3) $y = arctg\frac{x}{a}$ funksiyalarning 3- tartibli hosilalari topilsin.

6. 1) $y = \ln x$; 2) $y = e^{-\frac{x}{a}}$; 3) $y = \sqrt{x}$ funksiyalarning n- tartibli hosilalari topilsin.

7. 1) $y = x^n$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = \cos^2 x$ funksiyalarning n- tartibli hosilalari topilsin.

3.5-§. Differensiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremalar. Hosilaning ba'zi tatbiqlari

3.5.1.Funksiyaning differensiali va uning taqribiy hisoblashdagi tatbiqi

1. Funksiyaning differensiali. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi, ya'ni hosilaga ega bo'lsa, ya'ni

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \quad \Delta x \to 0 \quad \partial a \quad \alpha \to 0$$

bo'lib, bunda α cheksiz kichik funksiya bo'ladi. Demak,

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\,\Delta x \qquad (1)$$

bo'ladi. (1) formulaga **funksiya orttirmasi uchun formula** deyiladi.

1-ta’rif. Funksiya orttirmasining $y'\Delta x$ bosh qismiga ***funksiya differensiali*** deyiladi va dy bilan belgilanadi.

Ta’rifga asosan,

$$dy = y'\Delta x \qquad (2)$$

(2) formulada $y = x$ bo‘lsa, $dx = x'\Delta x$ yoki $dx = \Delta x$ bo‘lib, funksiya differensiali

$$dy = y'dx$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Elementar funksiyalarning differensiali jadvalini keltiramiz.

1. $d(x^n) = nx^{n-1}dx \quad (x > 0)$;
2. $d(a^x) = a^x \ln a\, dx \quad (a > 0, a \neq 1)$;
3. $d(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e\, dx \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$;
4. $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$;
5. $d(\sin x) = \cos x dx$;
6. $d(\cos x) = -\sin x dx$;
7. $d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x}dx$;
8. $d(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx$;
9. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
10. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
11. $d(arctgx) = \frac{1}{1+x^2}dx$;
12. $d(arcctgx) = -\frac{1}{1+x^2}dx$

3.5.2. Funksiyaning differensialining taqribiy hisoblashga tatbiqi.

(1) formuladan $\Delta y \approx dy$ **taqribiy tenglik kelib chiqadi**, ya'ni Δx yetarlicha kichik bo'lganda, funksiya orttirmasi uning differensialiga taqriban teng deyish mumkin. Bunda $\Delta y \approx dy$ bo'lib, ya'ni

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x \text{ yoki}$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x \qquad (3)$$

(3) formuladan ***funksiya qiymatini taqribiy hisoblashlarda*** foydalaniladi.

2-ta'rif. $y=f(x)$ funksiyaning ***ikkinchi tartibli differensiali*** deb funksiya differensialidan olingan differensialga aytiladi va

$$d^2y=d(dy)=d(y'dx)=y''dx^2$$

bilan belgilanadi.

Xuddi shunday, $d^3y=y'''dx^3$, ... , $d^ny=y^{(n)}dx^n$ differensiallar ham aniqlanadi.

1-misol. $y=\sqrt{1+x^2}$ funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli differensiallarini toping.

Yechish. Oldin birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$y'=(\sqrt{1+x^2})'=\frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$y''=\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{x'\sqrt{1+x^2}-x(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}-x\cdot x/\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}=\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Shunday qilib,

$$dy=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \text{ va } d^2y=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx^2$$

bo'ladi.

2-misol. $f(x)=3x^2-7$ funksiyaning, argument 2 dan 2,001 gacha o‘zgargandagi orttirmasini taqriban toping.

Yechish. (3) formuladan foydalanamiz. $x_0=2$, $\Delta x=0.001$. $f'(x)=6x,\quad f'(x_0)=6\cdot 2=12$, $\Delta f(x_0)\approx df(x_0)=f'(x_0)\ \Delta x=12\cdot 0.001=$ $=0.012$.

Funksiya orttirmasi o‘rniga uning differensialini olib qancha xatoga yo‘l qo‘yilganini baholaymiz: buning uchun haqiqiy orttirmani topamiz,

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=3(x_0+\Delta x)^2-7-(3x_0^2-7)=$$
$$=3x_0^2+6x_0\Delta x+3(\Delta x)^2-7-3x_0^2+7=$$
$$=6x_0\Delta x+3(\Delta x)^2=6\cdot 2\cdot 0.001+3\cdot 0.000001=0.012003.$$

Demak, absalyut xato

$$|\Delta y-dy|=|0.012003-0.012|=0.000003.$$

Nisbiy xato

$$\frac{|\Delta y-dy|}{dy}=\frac{0.000003}{0.012}=0.00025\qquad \text{yoki}\qquad 0{,}025\%.$$

Taqribiy hisoblash xatosi ancha kichik, bu esa yuqoridagi taqribiy tenglikdan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkinligini ko‘rsatadi.

3.5.3.Differensial hisobning asosiy teoremalari

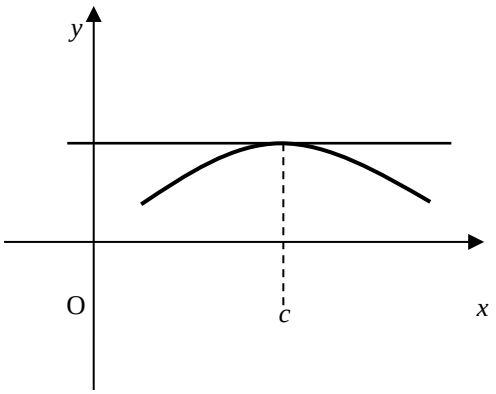
Biror funksiyaning hosilasini bilish funksional bog’lanish haqida xulosa chiqarishga imkoniyat yaratadi. Hosila tushunchasining har xil tatbiqlari, xususan iqtisodga qo‘llanilishida sodda lekin muhim bo‘lgan teoremalar va formulalar yotadi. Bu teoremalardan ayrimlarini isbotsiz keltiramiz.

1. Ferma teoremasi. (1602-1665y. - atoqli fransuz matematigi). $f(x)$ funksiya birorta X oraliqda aniqlangan va bu oraliqning ichki c nuqtasida eng katta (eng kichik) qiymatga ega bo‘lib, hamda bu nuqtada chekli $f'(c)$ hosila mavjud bo‘lsa,

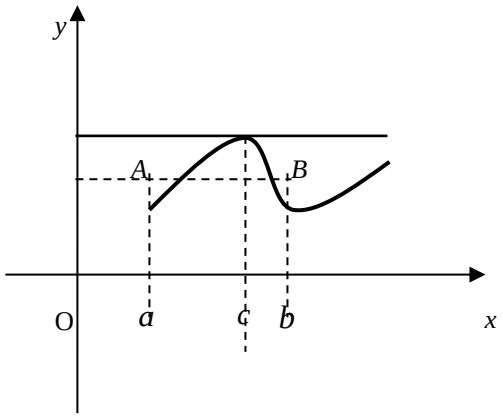
$$f'(c)=0$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi zarur.

Ferma teoremasi sodda geometrik ma’noga ega. Teorema shartlari bajarilganda X oraliqda shunday c nuqta mavjud bo‘ladiki, bu nuqtadan funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma OX o‘qiga parallel bo‘ladi (3.9-chizma).



3.9-chizma



3.10-chizma

2. *Roll teoremasi*. (Mishel Roll (1652-1719) fransuz matematigi).

1) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz;

2) aqalli (a,b) oraliqda $f'(x)$ chekli hosila mavjud;

3) oraliqning chetki nuqtalarida funksiya teng $f(a)=f(b)$ qiymatlarni qabul qilsa, a va b orasida shunday c nuqta topiladiki,

$$\hat{f}'(c)=0$$

tenglik bajariladi $(a<c<b)$.

Geometrik nuqtasi nazardan Roll teoremasi quyidagini bildiradi: $y=f(x)$ funksiyaning chetki ordinatalari teng bo‘lsa, egri chiziqda shunday nuqta topiladiki, undan egri chiziqqa o‘tkazilgan o‘rinma, OX o‘qiga parallel bo‘ladi (2-chizma).

3. Lagranj teoremasi. (1736-1813y. mashhur fransuz matematigi va mexanigi).

1) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz;

2) aqalli (a,b) ochiq oraliqda chekli $f(x)$ hosila mavjud bo‘lsa, a va b orasida kamida bitta $c\,(a<c<b)$ nuqta topiladiki

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Lagranj teoremasini geometrik tomondan quyidagicha ifodalash mumkin (3-chizma): teorema shartlarida

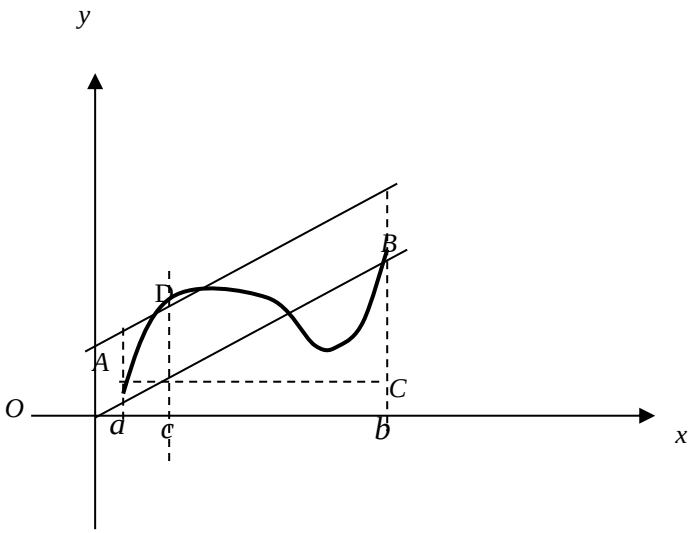
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{CB}{AC}$$

nisbat AB kesuvchining burchak koeffisiyenti ekanini, $f'(c)$ esa $y=f(x)$ egri chiziqqa $x=c$ abssissali nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffisiyenti ekanini payqaymiz.

Shunday qilib, Lagranj teoremasining tasdig’i AB yoyda hyech bo‘lmaganda bitta shunday D nuqta topiladiki, bu nuqtadan o‘tkazilgan urinma, AB kesuvchiga parallel bo‘ladi.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\text{ yoki}\quad f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

formulaga Lagranj formulasi yoki chekli orttirmalar formulasi deyiladi.



3.11-chizma

4. *Teylor teoremasi* ((1685-1731y., ingliz matematigi). $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtani o‘z ichiga olgan biror oraliqda $(n+1)$ tartibgacha barcha hosillarga ega bo‘lsa,

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+....+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

formula o‘rinli bo‘ladi, bunda θ, $0<\theta<1$ bo‘lgan son. Bu formulaga qoldiq hadi, Langranj formasida

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}x-a)^{n+1}$$

bo‘lgan, ***Teylor formulasi*** deyiladi. Teylor formulasida $a=0$ bo‘lsa,

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

formula hosil bo‘ladi. Bunga ***Makloren formulasi*** deyiladi.

Teylor va Makloren formulalari funksiyalrni x ning darajalari bo‘yicha yoyishda va taqribiy hisoblashlarda katta ahamiyatga ega.

1-misol. Ushbu $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-1$ funksiya $(-1;1)$ intervalning ichki $x=0$ nuqtasida o‘zining eng kichik qiymatiga erishsa ham, bu funksiya uchun Ferma teoremasining xulosasi o‘rinli emas. Shuni ko‘rsating.

Yechish. Berilgan funksiya $x=0$ nuqtada o‘zining eng kichik qiymatiga erishadi. Biroq funksiya shu $x=0$ nuqtada chekli hosilaga ega emas. Bu ushbu

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$$

nisbatning $\Delta x\to 0$ da chekli limitga ega emasligidan kelib chikadi.

Demak, Ferma teoremasining sharti bajarilmaydi. Binobarin, teoremaning xulosasi o‘rinli emas.

2-misol. Ushbu $f(x)=x^2+3$ funksiya [-1; 2] segmentda Lagranj teoremasining shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. Ravshanki, berilgan funksiya [-1; 2] segmentda uzluksiz va $(-1;2)$ intervalda $f'(x)=2x$ xosilaga ega.

Demak, $f(x)=x^3+3$ funksiya [-1; 2] segmentda Lagranj teoremasiga ko‘ra shunday *s* nuqta (-1 < *c* < 2) topiladiki,

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-(-1)}=f'(c)=2c$$

bo‘ladi. Keyingi tenglikdan $c=\frac{1}{2}$ ekanini topamiz.

3.5.4. Differensial hisob yordamida funksiya dinamikasini tekshirish

Ma’lumki, tabiat va iqtisodning ko‘p qonunlari funksiya yordamida modellashtiriladi. Bunday funksiyalrni bilish ularning qaysi oraliqda o‘suvchi yoki kamayuvchi hamda ular qanday nuqtalarda eng katta va eng kichik qiymatlarga erishishini aniqlash imkonini yaratadi. Bunga o‘xshash tekshirishlar *funksiya dinamikasini* anglashga olib keladi.

1). Funksiyaning monotonligi mezonlari (kriteriyasi).

1-ta’rif. (a,b) oraliqning $x_2 > x_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ikkita nuqtalari uchun, $f(x_2) > f(x_1)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda o‘suvchi deyiladi.

2-ta’rif. (a,b) oraliqning $x_2 > x_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ikkita nuqtalarsi uchun $f(x_2) < f(x_1)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda kamayuvchi deyiladi.

Oraliqda o‘suvchi yoki kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deyiladi.

Monotonlikning zaruriy va yetarli shartlari:

1) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya musbat hosilaga ega, ya’ni $f'(x)>0,$ bo‘lsa, funksiya shu oraliqda *o‘suvchi* bo‘ladi;

2) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya manfiy hosilaga ega, ya’ni $f'(x)<0,$ bo‘lsa, funksiya shu oraliqda *kamayuvchi* bo‘ladi.

1-misol. $y=f(x)=x^3-3/2\cdot x^2-6x+4$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

Yechish. Birinchi tartibli hosilani topamiz:

$y' = f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2),\ x^2 - x - 2 = 0,$

bundan $x_1 = -1,\ x_2 = 2$ kritik nuqtalar bo‘lib, ular funksiyaning aniqlanish sohasini $(-\infty;-1), (-1;2), (2;+\infty)$ oraliqlarga ajratadi.

Bu oraliqlarning har birida hosilaning ishorasini tekshiramiz. $(-\infty;-1)$ oraliqdan ixtiyoriy nuqta olib, masalan, $x = -2$ bo‘lsa, $f'(-2) = (-2)^2 - (-2) - 2 = 4 + 2 - 2 = 4 > 0$ bo‘ladi. Bunday tengsizlik oraliqning istalgan nuqtasi uchun bajariladi (buni tekshirib ko‘ring). Demak, $(-\infty;-1)$ oraliqda funksiya o‘suvchi (o‘suvchi funksiyaning yetarli shartiga asosan).

$(-1;2)$ oraliqning $x = 0$ nuqtasida $f'(0) = -2 < 0,$ bo‘lib, bu oraliqning istalgan nuqtasi uchun, $f'(x) < 0$ tengsizlik bajariladi. Kamayuvchi funksiyaning yetarli shartiga asosan, $(-1;2)$ oraliqda funksiya kamayuvchi bo‘ladi.

$(2;+\infty)$ oraliqning $x = 3$ nuљtasi uchun, $f'(3) = 3^2 - 3 - 2 = 9 - 5 = 4 > 0,$ bo‘lib, bu tengsizlik ham oraliqning istalgan nuqtasi uchun bajariladi, demak, funksiya $(2;+\infty)$ oraliqda o‘suvchi.

2. Funksiyaning ekstremumi. Funksiyaning birinchi tartibli hosilasi no‘lga teng yoki uzilishga ega bo‘ladigan nuqtalari *kritik* nuqtalar deyiladi.

1-ta’rif. x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo‘lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) < f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *maksimumga* ega deyiladi.

2-ta’rif. x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo‘lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) > f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *minimumga* ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum yoki minimum nuqtalariga *ekstremum* nuqtalari deyiladi.

Ekstremumga ega bo‘lshishinig zaruriy sharti. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo‘lsa, $y' = f'(x_0)$ no‘lga teng yoki u mavjud bo‘lmaydi.

Eslatma. Har qanday kritik nuqta ham ekstremum nuqtasi bo‘lavermaydi.

Ekstremumning yetarli shartlari. ***Birinchi qoida.*** x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo‘lib, funksiya hosilasi ishorasi bu nuqtadan o‘tishda ishorasini o‘zgartirsa, x_0 nuљta, funksiyaning ekstremum nuqtasi, va:

1) x_0 nuqtadan chapdan o‘ngga o‘tishda $f'(x)$ o‘z ishorasini musbatdan manfiyga o‘zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya *maksimumga;*

2) x_0 nuqtadan chapdan o‘ngga o‘tishda $f'(x)$ o‘z ishorasini manfiydan musbatga o‘zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya *minimumga* ega bo‘ladi.

Ikkinchi qoida. x_0 nuqtada birinchi hosila no‘lga teng, ikkinchi hosila no‘ldan farqli bo‘lsa, x_0 nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi va :

1) $f''(x_0) < 0$ bo‘lsa, *maksimum* nuqtasi;

2) $f''(x_0) > 0$bo‘lsa, *minimum* nuqtasi bo‘ladi.

Shunday qilib, monotonlik oraliqlarini, funksiya ekstremumini topish uchun, oldin funksiyaning aniqlanish sohasini kritik nuqtalar yordamida monotonlik oraliqlariga bo‘lish va ularda hosila ishorasini tekshirish kerak. Keyin monotonlik va ekstremumning yetarlilik shartlaridan foydalanib, o‘sish va kamayish oraliqlarini, maksimum va minimum nuqtalarini aniqlaymiz.

2-misol. $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 - 6x + 2\frac{2}{3}$ funksiyaninshg ekstremumini birinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish. Kritik nuqtalarni topamiz:

$f'(x) = x^2 - x - 6,\ x^2 - x - 6 = 0,$bunda $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2};$

bo‘lib, $x_1 = -2,\ x_2 = 3$bo‘ladi.

Endi argumentning kritik nuqtalaridan o‘tishda funksiya hosilasining ishoralarini tekshiramiz:

$f'(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3),\ \ x < -2$ bo‘lsa, $x+2<0,\ x-3<0$ bo‘lib,

$(x+2)(x-3) > 0,$ bo‘ladi, ya’ni ishora musbat $(+)$. $x > -2$ bo‘lsa, $x+2>0;\ \ x-3<0,\ (x+2)(x-3)<0,$ ya’ni ishora manfiy(-). Demak, $x_1 = -2$ nuqtadan o‘tishda funksiya hosilasining ishorasi musbatdan manfiyga o‘zgaradi. Birinchi qoidaga asosan $x_1 = -2$ nuqtada berilgan funksiya maksimumga ega bo‘ladi.

$$y_{\max} = \frac{1}{3}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 - 6(-2) + 8/3 = 10\ .$$

Endi $-2<x<3$ bo‘lsa, $(x+2)>0;\ \ (x-3)<0$ bo‘lib, $(x+2)(x-3)<0,$ hosilaning ishorasi manfiy $(-), x>3$ bo‘lsa, $(x+2)>0;\ \ (x-3)>0$ bo‘lib, $(x+2)(x-3)>0,$ musbat (+) bo‘ladi. Demak, $x_2 = 3$ nuqtadan o‘tishda funksiya hosilasi ishorasini manfiydan musbatga o‘zgartiradi, birinchi qoidaga asosan funksiya $x_2 = 3$ nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

$$y_{\min} = 1/3 \cdot 3^3 - 1/2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8/3 = -65/6.$$

3-misol. $f(x) = 1/4 \cdot x^4 - 2x^3 + 11/2 \cdot x^2 - 6x + 9/4$ funksiya ekstremumini ikkinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \qquad f''(x) = 3x^2 - 12x + 11\ .$$

endi kritik nuqtalarni topaylik:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 =$$
$$= x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) =$$
$$= (x-1)(x^2 - 5x + 6), \qquad x^2 - 5x + 6 = 0,\ \ x - 1 = 0$$

bundan, $x = 1$ va

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}\ ;\ \ x_2 = 2\ ,\ x_3 = 3$$

bo‘ladi. Demak, kritik nuqtalar: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ bo‘ladi. Endi ikkinchi tartibli hosilaning kritik nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f''(1) = 3\cdot 1^2 - 12\cdot 1 + 11 = 2 > 0,$$
$$f''(2) = 3\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 11 = -1 < 0,$$
$$f''(3) = 3\cdot 3^3 - 12\cdot 3 + 11 = 2 > 0.$$

Shunday qilib, ekstremumga ega bo‘lishning ikkinchi qoidasiga asosan, $x_1 = 1$, $x_3 = 3$ nuqtalarda minimum, $x_2 = 2$ nuqtada funksiya maksimumga ega bo‘ladi. $\min f(1) = 0$; $\max f(2) = 0.25$; $\min f(3) = 0$.

3). Funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlari. $y = f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini topish uchun:

1) kritik nuqtalarni topamiz;

2) funksiyaning bu kritik nuqtalardagi va kesmaning chetlaridagi qiymatlarini hisoblaymiz;

3) bu topilgan qiymatlardan eng kichigi funksiyaning berilgan kesmadagi eng kichik qiymati, eng kattasi bu kesmadagi eng katta qiymati bo‘ladi.

4-misol. $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ funksiyaning $[-2;3]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini toping.

Yechish. Berilgan funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz.

$y' = 4x^3 - 4x$, $4x^3 - 4x = 0$, $4x(x^2 - 1) = 0$,

bundan , $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ kritik nuqtalar bo‘ladi. Funksiyaning berilgan kesmaning chetki nuqtalaridagi hamda kritik nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + 5 = 16 - 8 + 5 = 13,$$

$f(-1) = 4$; $f(0) = 5$; $f(1) = 4$ *ва* $f(3) = 3^4 - 2\cdot 3^2 + 5 =$

$= 81 - 18 + 5 = 68$.

Bu topilganlarni solishtirib, funksiyaning $[-2;3]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari, mos ravishda $y_{эким} = 4$, $y_{экат} = 68$ bo‘ladi.

Shuni eslatamizki, funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatini topish katta amaliy ahamiyatga ega.

5-misol. Perimetri $2p(p>0)$ bo‘lgan to‘g’ri to‘rtburchaklar orasida eng katta yuzaga ega bo‘lgan to‘g’ri to‘rtburchak topilsin.

Yechish: Bunday to‘g’ri to‘rtburchakning asosi x bo‘lsin. Bu holda to‘g’ri to‘rtburchakning balandligi $p-x$ ga, yuzi esa,

$$S = S(x) = x(p-x),\ (0 < x < p)$$

bo‘ladi.

$S(x)$ funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz:

$S'(x) = p-2x,\ p-2x=0,\quad x=\frac{p}{2}$

kritik nuqta bo‘ladi. $S''(x) = -2;$ $S''(p/2) = -2 < 0.$

Demak, $S(x)$ funksiya, $x=\frac{p}{2}$ nuqtada maksimumga ega bo‘ladi.

$$S_{\max} = \frac{p}{2}(p-\frac{p}{2}) = \frac{p^2}{4}.$$

Shunday qilib, eng katta yuzaga ega bo‘lgan to‘g’ri to‘rtburchak tomoni $\frac{p}{2}$ bo‘lgan kvadratdan iborat ekan.

4. Funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini hosila yordamida tekshirish. Funksiya grafigining asimptotalari.

1-ta’rif. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi (a,b) oraliqning istalgan nuqtasidan unga o‘tkazilgan urinmadan pastda yotsa, funksiya grafigi shu oraliqda *qavariq* deyiladi.

2-ta’rif. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi (a,b) oraliqning istalgan nuqtasidan unga o‘tkazilgan urinmadan yuqorida yotsa, funksiya grafigi shu oraliqda *botiq* deyiladi.

3-ta’rif. Funksiya grafigining qavariq qismini, botiq qismidan ajratuvchi $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqta *egilish* nuqtasi deyiladi.

Funksiya grafigining qavariq yoki botiq bo‘lishining yetarli shartlari:

1) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi manfiy, ya’ni $f''(x)<0$ bo‘lsa, bu oraliqda funksiya grafigi qavariq bo‘ladi;

2) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi musbat, ya'ni $f''(x)>0$ bo'lsa, bu oraliqda funksiya grafigi botiq bo'ladi.

$f''(x)=0$ va $f''(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarga 2-tur kritik nuqtalar deyiladi.

Egilish nuqtalari mavjud bo'lishining yetarli sharti. x_0 nuqta $y=f(x)$ funksiya uchun ikkinchi tur kritik nuqta bo'lsa va $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosila bu nuqtadan o'tishda ishorasini o'zgartirsa, x_0 abssissali nuqta egilish nuqtasi bo'ladi.

Shunday qilib, funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik oraliqlarini, egilish nuqtalarini topish uchun, oldin funksiya aniqlanish sohasini ikkinchi tur kritik nuqtalar bilan oraliqlarga bo'lish va bu oraliqlarda ikkinchi tartibli hosila ishorasini tekshirish kerak. Keyin yetarli shartlardan foydalanib, qavariqlik, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalari aniqlanadi.

5). Funksiya grafigining asimptotalari. **1**-ta'rif. $y=f(x)$ funksiya grafigidagi nuqta shu grafik bo'ylab cheksiz uzoqlashganda, undan biror to'g'ri chiziqqacha masofa no'lga intilsa, bu to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining *asimptotasi* deyiladi.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ bo'lsa, $x=a$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotasi bo'ladi.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ va } b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

yoki

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ ва } b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

limitlar mavjud bo'lsa, $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'ladi. $k=0$ bo'lsa, $y=b$ gorizantal asimptota bo'ladi.

6-misol. Gauss egri chizig'i deb ataluvchi $y = e^{-x^2}$ funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlang.

Yechish. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$y' = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2},\ y'' = -2\left[x'e^{-x^2} + (-2xe^{-x^2})x\right] = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

Ikkinchi tartibli hosilani nolga tenglashtirib, ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz:

$$(4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0,\ e^{-x^2} \neq 0,\ 4x^2 - 2 = 0,\ x^2 = \frac{1}{2};\ x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}};\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bular ikkinchi tur kritik nuqtalar bo'lib, sonlar o'qini

$$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\ \textit{ва}\ (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$$

oraliqlarga ajratadi.

$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ oraliqlarda $y'' > 0$ bo'lib, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ oraliqda $y'' < 0$ bo'ladi.

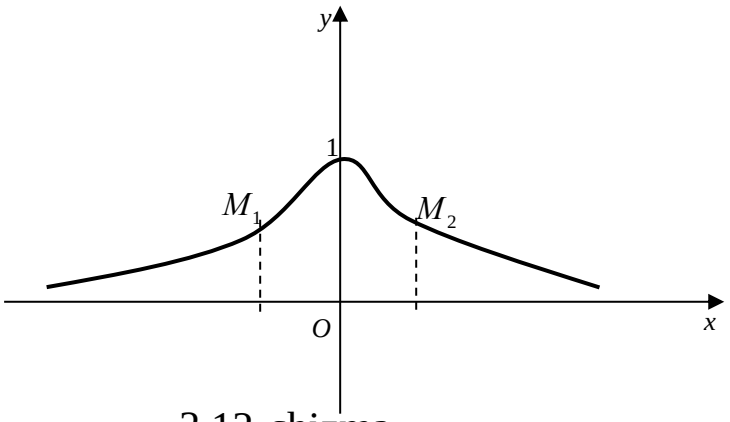
Demak,

$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})\ \textit{ва}\ (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi botiq, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ oraliqda funksiya grafigi qavariq bo'lib, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtadan o'tishda $f''(x)$ o'z ishorasini musbatdan manfiyga, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtadan o'tishda manfiydan musbatga o'zgartiradi. Bu ikkala holda ham egilish bo'ladi:

$$f_{эгл} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}};\ M_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}).\ f_{эгл}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}\ \ M_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$$

.

Yuqoridagilarga asosan funksiya grafigini yasaymiz.



3.12-chizma

6). Funksiyani tekshirishning umumiy rejasi. Funksiyani hosila yordamida tekshirishni hisobga olib, funksiyani tekshirishning quyidagi umumiy rejasini tavsiya etamiz:

1) funksiyaning aniqlanish sohasini topish hamda argumentning aniqlanish sohasi chetlariga intilganda funksiya o‘zgarishini tekshirish;

2) funksiyaning juft-toqligini tekshirish;

3) funksiyaning davriyligini aniqlash;

4) funksiyaning uzluksizligi, uzilishini tekshirish;

5) funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlash;

6) funksiyaning monotonlik oraliqlarini va ekstremumini tekshirish;

7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topish;

8) funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlash;

9) funksiya grafigining asimtotalarini tekshirish;

10) imkoniyati bo‘lsa funksiya grafigining koordinat o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlash;

11) yuqoridagi aniqlangan xususiyatlarni hisobga olib, funksiya grafigini yasash.

7-misol. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ funksiyani tekshiring.

Yechish. Funksiyani tekshirishning umumiy rejasidan foydalanamiz:

1) funksiya maxraji no‘lga aylanadigan nuqtalardan boshqa hamma nuqtalarda aniqlangan. Maxraj $x_1=-2, x_2=2$ nuqtalarda no‘lga teng,

demak, funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty,-2)$, $(-2;+2)$, $(2,+\infty)$ oraliqlardan iborat. Aniqlanish oraliqlarining chetlarida funksiyaning o‘zgarishini tekshiramiz:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to-\infty}x=-\infty,\quad \lim_{x\to-2-0}\lim\frac{x^3}{x^2-4}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-2+0}\lim\frac{x^3}{x^2-4}=\infty,\quad \lim_{x\to2-0}\frac{x^3}{x^2-4}=-\infty,\quad \lim_{x\to2+0}\frac{x^3}{x^2-4}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty$$

;

2) $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=-\dfrac{x^3}{x^2-4}=-f(x)$

bo‘lganligi uchun toq funksiya;

3) funksiya $f(x+T)=f(x)$ tenglikni qanoatlantirmaydi, demak, davriy emas;

4) funksiya $x=\pm2$ nuqtalarda uzilishga ega;

5) kritik nuqtalarni topamiz:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-4)-x^3 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2},\quad f'(x)=0,\ x=0,\ x=\pm2\sqrt{3}..$$

Bundan tashqari $f'(x),\ x=\pm2$ nuqtalarda mavjud emas. Demak, kritik nuqtalar: $x_1=-2\sqrt{3},\ x_2=-2,\ x_3=0,\ x_4=2,\ x_5=2\sqrt{3}$ bo‘ladi;

6) $(-\infty,-2\sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3},-2),(-2,0)$, $(0,2),(2,2\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3},+\infty)$ oraliqlarning har birida $f'(x)$ ning ishorasini tekshiramiz;

$(-\infty,-2\sqrt{3})$ *va* $(-2\sqrt{3},+\infty)$ oraliqlarda $f'(x)$ funksiya hosilasi musbat, ya’ni funksiya bu oraliqlarda o‘suvchi; $(-2\sqrt{3},-2),(-2,0)$, $(0,2),(2,2\sqrt{3})$ oraliqlarda $f'(x)<0$, ya’ni kamayuvchi $x_1=-2\sqrt{3}$ nuqtada funksiya maksimumga, $x_5=2\sqrt{3}$ nuqtada minimumga ega bo‘ladi. $x=0$ kritik nuqtadan o‘tishda $f'(x)$ ishorasi o‘zgarmaydi, demak bu nuqtada ekstremum yo‘q.

$$\max f(x)=f(-2\sqrt{3})=-3\sqrt{3};\ \min f(x)=f(2\sqrt{3})=3\sqrt{3};$$

7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz:

$$f''(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2-x^2(x^2-12)\cdot 2\cdot(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=$$

$$=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)-4x^3(x^2-12)}{(x^2-4)^3}=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}\ .$$

$f''(x)=0,\quad 8x(x^2+12)=0,\quad x=0,\quad x=\pm 2$

nuqtalarda ikkinchi tartibli hosila mavjud emas. Demak ikkinchi tur kritik nuqtalar

$x_1=-2;\ \ x_2=0;\quad x_3=2$

bo‘ladi ;

8) $(-\infty,-2),(-2,0),\ (0,2),\ (2,+\infty)$ oraliqlarda $f''(x)$ ning ishorasini tekshiramiz: $x=-3$ bo‘lsin.

$$f''(-3)=\frac{8(-3)\left[(-3)^2+12\right]}{\left[(-3)^2-4\right]}=\frac{-24\cdot 21}{5^3}=-\frac{504}{125}<0,$$

xuddi shunday

$f''(-1)>0,\quad f''(1)<0,\quad f''(3)>0$ bo‘lib, $(-\infty,-2)$ *va* $(0,2)$ oraliqlarda funksiya grafigi qavariq, $(-2,0)$ *va* $(2,+\infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi botiq bo‘ladi. Ikkinchi tartibli hosila har bir ikkinchi tur kritik nuqtada ishorasini o‘zgartiradi, lekin $x=\pm 2$ da funksiya uzilishga ega. Shuning uchun faqat $x=0$ nuqtada funksiya grafigi egilishga ega bo‘ladi $f(0)_{эгл}=0;$

9) funksiya grafigining asimptotalarini topamiz:

$$\lim_{x\to 2\pm 0}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty\quad va\quad \lim_{x\to -2\pm 0}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty\ .$$

Demak, $x=-2,\ x=2$ funksiya grafigining vertikal asimgtotalari bo‘ladi.

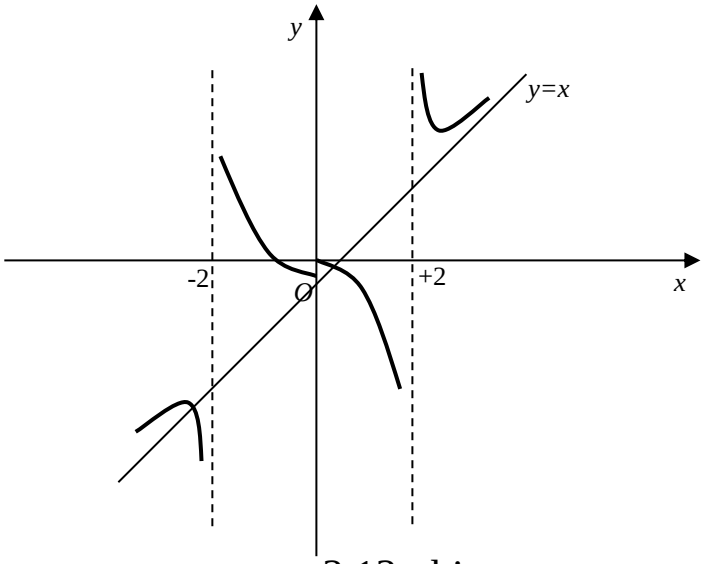
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-4)}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}==\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4/x}{1-4/x}=\frac{0}{1}=0.$$

Shunday qilib, $y=x$ og’ma asimptota bo‘ladi;

10) $x=0$ bo‘lganda $y=0$ bo‘lib, funksiya grafigi koordinatalar boshidan o‘tadi;

11) yuqoridagi tekshirishga asosan, funksiya grafigini yasaymiz. (3.13-chizma)



3.13-chizma

2. Hosila yordamida aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidasi. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda berilgan bo‘lsin.

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

bo‘lsa, $x\to a$ da $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\dfrac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi.

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

bo‘lsa, $x\to a$ da $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\dfrac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi.

Berilgan funksiyalar hosilalarga ega bo‘lsa, ulardan foydalanib, aniqmaslikni ochish mumkin.

Lopital qoidasi

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bo‘lib,

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo‘lsa, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. $x\to\infty$ da ham Lopital qoidasi o‘rinli.

$(0\cdot\infty)$ yoki $(\infty-\infty)$ ko‘rinishdagi aniqmasliklar algebraik almashtirishlar orqali $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmasliklarga keltirilib, keyin Lopital qoidasidan foydalaniladi.

1-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$ ni hisoblang.

Yechish. Bu limit $x\to 0$ da $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘lib, Lopital qoidasini qo‘llab,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}$$

natijaga ega bo‘lamiz. Oxirgi limit $x\to 0$ da yana $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik , demak, Lopital qoidasini yana qo‘llash mumkin:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{x'}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{0-\sin x}{1}=\frac{1}{2}\cdot 0=0.$$

Shunday qilib, ketma-ket Lopital qoidasini qo‘llash bilan berilgan limitning 0 ga tengligini ko‘rsatdik.

3. Differensial hisobning iqtisodda qo‘llanilishi haqida.

1. ***Hosilaning iqtisodiy ma’nosi haqida.*** Hosilaning iqtisodiy ma’nosini quyidagi misolda qaraymiz. Biror xil mahsulot ishlab chiqarilganda ishlabchiqarish xarajatlari ishlab chiqarilgan mahsulotning miqdoriga bog’liq. Mahsulot miqdorini x bilan, *ishlab chiqarish xarajatlarini* y bilan belgilasak

$$y=f(x)$$

funksional bog’lanish kelib chiqadi. Mahsulot ishlab chiqarishni Δx ga ko‘paytirilsa $x+\Delta x$ mahsulotga mos keluvchi xarajat

$$f(x+\Delta x)$$

bo‘ladi. Demak, mahsulot miqdorining Δx orttirmasiga, *mahsulot ishlab chiqarish xarajatining orttirmasi*

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

mos keladi.

1-ta’rif. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatga mahsulot ishlab chiqarish xarajatining o‘rtacha orttirmasi deyiladi.

2-ta’rif.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

ga *ishlab chiqarish limitik xarajati* deb ataladi.

Yuqoridagiga o‘xshash $\varphi(x)$ bilan x mahsulotni sotishdan olingan jami savdo pul mablag’i bo‘lsa, quyidagi limit

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x)$$

ga *savdo limitik pul mablag’i* deyiladi.

1-misol. Mahsulot ishlab chiqarish xarajati va mahsulot hajmi x orasida

$$y = 100x - \frac{1}{30}x^3$$

bog’lanish bo‘lsin. Ishlab chiqarish hajmi, 5 birlik va 10 birlik bo‘lganda limitik xarajatni toping.

Yechish. Masala shartiga asosan, $x = 5,\ x = 10.$ Funksional bog’lanish hosilasi

$$y' = 100 - \frac{1}{10}x^2$$

bo‘lib,

$$f'(5) = 100 - \frac{1}{10}5^2 = 97.5, \quad f'(10) = 90$$

bo‘ladi.

Bularning iqtisodiy ma’nosi, mahsulot ishlab chiqarish hajmi 5 birlik bo‘lganda, mahsulot ishlab chiqarish xarajati kelgusi mahsulotni ishlab chiqarishga o‘tishda 97,5 ni tashkil etadi; ishlab chiqarish hajmi 10 birlik bo‘lganda, esa u 90 ni tashkil etadi.

2. Ayrim iqtisodiy tushunchalarning ta’riflari . 1-ta’rif. Tovar va xizmatlarning ma’lum turiga, iste’molchining ma’lum vaqtda, narxlarning mavjud darajasida, sotib olishga qodir bo‘lgan ehtiyoji talab deyiladi.

Talab miqdorining o‘zgarishiga bir qancha omillar ta’sir qiladi. Ularning ichida eng ko‘p ta’sir qiladigan omil narx omilidir.

2-misol. Biror mahsulotga talab va mahsulot narxi orasida bog’lanish

$$p = 20 - 3x$$

formula bilan ifodalansin, bunda x mahsulotga talab, p mahsulotning narxi.

Mahsulotni sotishdan olingan savdo puli

$U = xp \quad ёки \quad U = x(20-3x) = 20x - 3x^2$

bo‘ladi. Bundan hosila

$U' = 20 - 6x$

bo‘ladi. $x = 2$ bo‘lsa, $U'(2) = 8$. Buning ma’nosi, talab 2 dan 3 birlikka ortsa, savdo puli 8 birlikka oshishini bildiradi.

3. Funksiyaning egiluvchanligi (elastikligi). Hosila yordamida erkli o‘zgaruvchi (argument) orttirmasiga mos erksiz o‘zgaruvchi (funksiya) orttirmasini hisoblash mumkin. Ko‘p iqtisodiy masalalarni hal etishda *nisbiy orttirma*, ya’ni argumentning o‘sish foiziga mos, funksiyaning o‘sish foizini hisoblashga to‘g’ri keladi. Bu funksiyaning egiluvchanligi yoki nisbiy hosila tushunchasiga olib keladi.

1-ta’rif. $\dfrac{\Delta x}{x}, \dfrac{\Delta y}{y}$

nisbatlarga, mos ravishda, argument va *funksiya nisbiy orttirmalari* deyiladi. Funksiya nisbiy orttirmasining argument nisbiy orttirmasiga nisbati

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}$$

ni qaraymiz. Bu nisbatni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \qquad (1)$$

$y = f(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo‘lsa,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} \qquad (2)$$

kelib chiqadi.

2-ta'rif. (2) munosabatga $y = f(x)$ *funksiyaning* x *ga nisbatan egiluvchanligi deyiladi*, va $E_x(y)$ bilan belgilanadi. Ta'rifga asosan:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

bo'ladi.

x ga nisbatan egiluvchanlik argumentning orttirmasi 1% ga oshganda unga mos funksiya orttirmasining foizlarda hisoblangan o'sishi (yoki kamayishi)ni taqriban ifodalaydi.

Funksiya egiluvchanligini topishga bir necha misollar qaraymiz.

3-misol. $y = 3x - 6$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish: Egiluvchanlik ta'rifiga asosan:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{3x-6} \cdot 3 = \frac{3x}{3x-6} = \frac{x}{x-2}.$$

Masalan, $x = 10$ bo'lsa, funksiya egiluvchanligi

$$\frac{10}{10-2} = \frac{5}{4}$$

bo'ladi, ya'ni x 1% oshganda, y $\frac{5}{4}$% ga oshadi.

4-misol. $y = 1 + 6x^2 - 4x^3$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish. Ta'rifga asosan:

$$E_x(y) = \frac{x}{1+6x^2-4x^3}(12x - 12x^2) = \frac{12x^2 - 12x^3}{1+6x^2-4x^3}$$

Masalan, $x = 1$ bo'lganda, $\frac{(12-12)}{7} = 0$. Bu argument 1% ga ya'ni 1 dan 1,01 ga oshganda, funksiya qiymati taqriban o'zgarmaydi.

Endi funksiya egiluvchanligini hisoblashda qo'llaniladigan ayrim qoidalarni eslatamiz.

1-teorema. Ikkita funksiya ko'patmasining egiluvchanligi shu funksiyalar egiluvchanliklari yig'indisiga teng.

Isbot. Ikkita funksiya ko'paytmasining hosilasi formulasiga asosan.

$$E_x(u\cdot v)=\frac{x}{uv}(u\cdot v)'=\frac{x}{uv}(u'v+uv')=$$

$$=\frac{x}{u}u'+\frac{x}{v}v'=E_x(u)+E_x(v),\ \textit{яъни}\ \ E_x(u\cdot v)=E_x(u)+E_x(v). \qquad (3)$$

Bu teoremaning isbotidir.

5-misol. $y=x^2\cdot e^{2x}$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish. $u=x^2,\ v=e^{2x}$ ni olish mumkin. Demak, (3) formulaga asosan:

$$E_x(y)=\frac{x}{x^2}(x^2)'+\frac{x}{e^{2x}}(e^{2x})'=2+2x,\ E_x=(y)=2(1+x)$$

bo‘ladi.

2-teorema. Ikkita funksiya nisbatining egiluvchanligi bo‘linuvchi va bo‘luvchi egiluvchanliklarining ayirmasiga teng, ya’ni

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v) \qquad (4)$$

bo‘ladi (bu tasdiqning isbotini o‘quvchiga havola etamiz).

6-misol. $y=\dfrac{x^3+5}{e^{3x}}$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish. $u=x^3+5,\quad v=e^{3x}$ ekanligini hisobga olib (4) formulaga asosan:

$$E_x(y)=E_x(x^3+5)-E_x(e^{3x})=\frac{x}{x^3+5}\cdot 3x^2-\frac{x}{e^{3x}}\cdot 3e^{3x}=\frac{3x^3}{x^3+5}-3x,\ \textit{yani}$$

$$E_x(y)=\frac{3x^3}{x^3+5}-3x$$

bo‘ladi.

4. Talab va taklif egiluvchanligi. Aniq bir mahsulotga talab va uning narxi orasidagi funksional bog’liqlikni (boshqa tovar narxi, inste’molchining daromadi va ehtiyoji o‘zgarmas bo‘lgan shartlarda) talabga mos narxni aniqlash mumkin. Lekin ko‘p iqtisodiy tekshirishlarda talabning miqdori emas, mahsulot narxining o‘zgarishi bilan unga talabning qanday o‘zgarishi muhimdir. Boshqacha aytganda,

talabning narxga nisbatan egiluvchanligini hisoblash katta ahamiyatga ega.

Talab y, narx x ning funksiyasi bo‘lsin, ya’ni

$$y = f(x).$$

Δx narx orttirmasi, Δy unga mos talab orttirmasi bo‘lsa, narxning nisbiy o‘zgarishi $\Delta x / x$, talabning nisbiy o‘zgarishi $\Delta y / y$ bo‘lib,

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}$$

nisbat narx 1% oshganda unga mos talabni nisbiy o‘zgarishi, ya’ni *talabning narxga nisbatan egiluvchanligi* qo‘yidagi limitga teng:

$$E_x(y) = E_T = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \qquad (5)$$

Demak, $E_T = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Shunday qilib, *talabning narxga nisbatan egiluvchanligi*, narx 1% ga oshganda, biror tovarga bo‘lgan talabning qanday o‘zgarishini taqriban ifodalaydi.

Ma’lumki, talab funksiyasi narxga nisbatan kamayuvchi funksiyadir, ya’ni $\frac{dy}{dx} < 0$ bo‘ladi. Shuning uchun amalda manfiy sonlarni ishlatmaslik uchun

$$E_T = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}. \qquad (6)$$

qilib olinadi.

$E_T > 1$ bo‘lsa, narxning 1%ga o‘sishi, talabning taxminan 1% dan ko‘p pasayishini ifodalaydi va talab egiluvchan deyiladi.

$E_T = 1$ bo‘lsa, narxning 1% ga o‘sishi, talabning taxminan 1% ga pasayishini bildirib, talab neytral deyiladi.

$0 < E_T < 1$ bo‘lsa, narxning 1% ortishi unga mos talabning 1% dan kam bo‘lishini ifodalab, talab egiluvchan emas deyiladi.

7-misol. Talab funksiyasi $y = 10 - x$ bo‘lsa uning egiluvchanligini toping.

Yechish. (6) formulaga asosan:

$$E_T = -\frac{x}{y}y' = -\frac{x}{10-x}(-1) = \frac{x}{10-x} \qquad x = 2 \ bo'lsa, \quad E_T = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

bo‘ladi. Buning ma’nosi narx 2 bo‘lganda uni 1% orttirish, talabning $\left(\frac{1}{4}\right)\%$ ga kamayishini ko‘rsatadi.

Talabning daromad (kirim, unum, tushum)ga nisbatan elastikligini qaraymiz. x iste’molchining daromadi bo‘lsin. Talab funksiyasi y desak,

$$y = f(x)$$

bog’lanish kelib chiqadi. Bunda *daromadga nisbatan egiluvchanlik*

$$E_d(y) = \frac{x}{y}y'$$

bo‘ladi.

8-misol. Tadbirkor biror mahsulotga talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi 0,2 ekanligini bilgan holda, uning narxini 10% oshirmoqchi bo‘lsa uning oladigan daromadini hisoblang?

Yechish. Talabning egiluvchanligi 0,2 bo‘lganligi uchun unga talab 2% ga kamayadi. Natijada tadbirkorning daromadi 8% tashkil etadi.

Taklif deganda biror mahsulotning vaqt birligida sotishga chiqarilgan hajmini tushuniladi. Ma’lumki, biror mahsulotning taklifi biror davrda, narxning o‘suvchi funksiyasidir. Taklif funksiyasining ham egiluvchanligini talab egiluvchanligiga o‘xshash topish mumkin.

$$y = f(x)$$

taklif funksiyasi bo‘lsin bunda x narx, y taklif funksiyasi, demak

$$E_x(y) = \frac{x}{y}y'$$

bo‘ladi. ***Taklif funksiyasining egiluvchanligi*** *narx 1% ga oshganda* taklif funksiyasining foizlarda o‘sishini taxminan ifodalaydi.

5. *To‘la va o‘rtacha xarajatlar egiluvchanligi*. Korxona biror mahsulotdan x birlik miqdorda ishlab chiqarsa va $k(x)$ to‘la xarajat funksiyasi aniqlangan bo‘lsa, to‘la xarajat egiluvchanligi

$$E_x(K) = E_k = \frac{x}{K} \cdot \frac{dK}{dx} = \frac{dK}{dx} : \frac{K}{x}, \qquad (7)$$

bo‘ladi, demak, *to‘la xarajat egiluvchanligi limitik xarajatning* o‘rtacha xarajatga nisbatini ifodalaydi..

O‘rtacha xarajat $\Pi = \frac{K}{x}$ bo‘lsa, uning egiluvchanligi,

$$E_x(\Pi) = \frac{x}{\Pi} \cdot \frac{d\Pi}{dx} = \frac{x}{K/x} \cdot \frac{x(dK/dx) - K}{x^2} = \frac{x^2}{K} \cdot \frac{xdK/dx - K}{x^2} =$$

$$= \frac{x}{K} \cdot \frac{dK}{dx} - 1 = E_x(K) - 1, \qquad (8)$$

bo‘ladi, demak, o‘rtacha xarajat egiluvchanligi to‘la xarajat egiluvchanligidan 1 ga kam ekan.

$E_T = 1$ bo‘lsa, o‘rtacha xarajat egiluvchanligi 0 ga teng, ya’ni $E_x(\Pi) = 0$ bo‘lib, o‘rtacha xarajat o‘zgarmasligini bildiradi. Bundan

$$x\frac{dk}{dx} - K = 0 \quad yoki \quad \frac{dK}{dx} = \frac{K}{x} \ . \qquad (9)$$

Shunday qilib, *to‘la xarajat egiluvchanligi* 1 ga teng bo‘lsa, to‘la limitik xarajat o‘rtacha xarajatga teng bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Funksiya differensiali, ikkinchi tartibli differensial, differensial yordamida taqribiy hisoblash, cheksiz kichik funksiya, funksiya orttirmasi uchun formula. Ferma teoremasi, Roll teoremasi, Lagranj teoremasi, Chekli orttirmalar formulasi, Teylor va Makloren formulalari, qoldiq had formulasi. Funksiya dinamikasi, funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik qismlari, egilish nuqtasi, funksiyani tekshirish, asiptota, Lopital qoidasi, ishlab chiqarish xarajatlari, mahsulot ishlab chiqarish orttirmasi, ishlab chiqarish xarajatlari orttirmasi, ishlab chiqarish xarajati o‘rtacha orttirmasi, ishlab chiqarish limitik xarajati, savdo limitik pul mablag’i, funksiya egiluvchanligi, argument va funksiyaning nisbiy orttirmalari, nisbiy hosila, nisbiy egiluvchanlik, ikkita funksiya ko‘paytmasi va nisbati egiluvchanliklari, talabning narxga nisbtan egiluvchanligi, talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi, taklifning narxga nisbatan egiluvchanligi, to‘la va o‘rtacha xarajatlar egiluvchanliklari.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning differensiali deb nimaga aytiladi?
2. Funksiya orttirmasi va differensiali o‘rtasida qanday bog’liqlik bor?
3. Differensialdan fodalanib taqribiy hisoblash mumkinmi?
4. Ikkinchi tartibli differensial nima?
5. Hisoblash xatosi nima?
6. Ferma teoremasining shartlari nimalardan iborat?
7. Ferma teoremasi tasdiђi љanday bo‘ladi?
8. Roll teoremasining nechta sharti bor va ularni sanang?
9. Roll teoremasi shartlarida, uning tasdiђi nimadan iborat?
10. Geometrik tomondan Roll teoremasining tasdiђi nimani ifodalaydi?
11. Ferma teoremasi geometrik nuљtai nazardan nimani anglatadi?
12. Lagranj teoremasi shartlarini sanab ko‘ring, ular nimalardan iborat?
13. Lagranj teoremasining tasdiђi nima?
14. Lagranj teoremasi tasdiђi geometrik tomondan nimani bildiradi?
15. Lagranj yoki chekli orttirmalar formulasini yozing?
16. Chekli orttirmalar deyilishini tushinasizmi?
17. Teylor formulasi nimadan iborat?
18. Makloren formulasi qanday olinadi?
19. Funksiyaning monotonligi nima?
20. Funksiyaning ekstremumi nima?
21. Funksiya ekstremumga ega bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlari nimalardan iborat?
22. Hosila yordamida ekstremumni tekshirishning ikkinchi qoidasi qanday?
23. Funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik qismlari va uning egilish nuqtasi hosila yordamida qanday aniqlanadi?
24. Funksiya grafigining asimptotalari qanday topiladi?
25. Funksiyani umumiy tekshirish nimalardan iborat?
26. Aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi nimadan iborat?

27. Funksiya hosilasini bilgan holda funksional bog’lanish haqida nima deyish mumkin?

28. Ishlab chiqarish xarajatlari, ishlab chiqarilgan mahsulot miqdoriga bog’liqmi?

29. Ishlab chiqarish xarajatlari o‘rtacha orttirmasi deb nimaga aytiladi?

30. Ishlab chiqarishning limitik xarajati qanday aniqlanadi?

31. Jami savdoning pul mablag’i nima?

32. Savdoning limitik pul mablag’i qanday aniqlanadi?

33. Biror mahsulotga talab va uning narxi orasida bog’lanish bormi?

34. Nisbiy orttirma nima?

35. Funksiyaning egiluvchanligi qanday aniqlanadi?

36. Funksiya egiluvchanligi $E_x(y)$ nimaga teng?

37. Argument x ga nisbatan funksiya y ning egiluvchanligi foizlarda nimani ifodalaydi?

38. Ikkita funksiya ko‘paytmasining egiluvchanligi nimaga teng?

39. Ikkita funksiya nisbatining egiluvchanligi qanday aniqlanadi?

40. Talabning narxga nisbtan egiluvchanligi nimani ifodalaydi.

41. Talabning narxga nisbatan egiluvchanligi $E_x(y)$ qanday topiladi?

42. Talab egiluvchan degani nima?

43. Talab neytral degani nimani ifodalaydi?

44. Talab egiluvchan emas deb nimaga aytiladi?

45. Talab daromadga bog’liqmi?

46. Talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi qanday hisoblanadi?

47. Taklif nima?

48. Taklif va narx orasida bog’lanish bormi?

49. Taklifning narxga nisbatan egiluvchanligi $E_x(y)$ qanday aniqlanadi.

50. Taklif funksiyasining egiluvchanligi nimani ifodalaydi?

51. To‘la xarajatlarning mahsulot hajmiga nisbatan egiluvchanligi $E_x(K)$ qanday aniqlanadi?

52. O‘rtacha xarajt egiluvchanligi $E_x(\Pi)$ qanday aniqlanadi?

53. To‘la xarajat egiluvchanligining 1 ga teng bo‘lishi nimani ifodalaydi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1-8 misollarda funksiyalarning differensiallari topilsin.

1. 1) $y = x^n$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.
2. 1) $y = \sqrt{1 + x^2}$; 2) $s = \frac{gt^2}{2}$.
3. 1) $r = 2\varphi - \sin 2\varphi$; 2) $x = \frac{1}{t^2}$.
4. 1) $d(\sin^2 t)$; 2) $d(1 - \cos u)$.
5. 1) $d\left(\frac{a}{x} + arctg\frac{x}{a}\right)$; 2) $d(\alpha + \ln\alpha)$;
6. 1) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; 2) $r = \sin(a - b\varphi)$; 3) $s = \sqrt{1 - t^2}$.
7. 1) $y = \ln\cos x$; 2) $z = arctg\sqrt{4u - 1}$; 2) $s = e^{-2t}$.
8. 1) $d(\sqrt{x} + 1)$; 2) $d(tg\alpha - \alpha)$; 3) $d(bt - e^{-bt})$.

9. Ushbu $f(x) = \sin x$ funksiya uchun $[0; 2\pi]$ segmentda Roll teoremasining shartlari bajariladimi?

10. Ushbu $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$ funksiyalar $[0; 2\pi]$ segmentda Koshi teoremasining shartlarini kanoatlantiradimi?

11. Ushbu $f(x) = x(x^2 - 1)$ funksiya uchun $[0; 2\pi]$ va $[0, 1]$ segmentlarda Roll teoremasining shartlarini tekshiring.

12. $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ булса} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ булса} \end{cases}$ funksiya uchun [-1; 1] oralikda Lagranj teoremasi o‘rinlimi?

13. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ funksiya ildizlari orasida uning xosilasining xam ildizi bor ekani tekshirilsin.

14. Roll teoremasini $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ funksiyaga [-1; 1] segmentda tatbiq qilish mumkinmi?

15. $y=x^2$ parabolaning qaysi nuqtasida o‘tkazilgan urinma $A(-1;1)$ va $B(3;9)$ nuktalarni birlashtiruvchi vatarga parallel bo‘ladi?

16. $[a, b]$ segmentda $f(x)=x^2$ funksiya uchun Lagranj formulasi yozilsin va *s* topilsin. Grafik usul bilan tushuntirlsin.

17. $[1; 4]$ segmentda $f(x)=\sqrt{x}$ funksiya uchun Lagranj formulasi yozilsin va *s* topilsin.

18. $f(x)=x^3$ va $g(x)=x^2$ funksiyalar uchun Koshining $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ formula yozilsin hamda *s* topilsin.

19. $f(x)=x^3$ funksiya uchun Lagranjning $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ formulasi yozilsin va *s* topilsin.

1. Quyidagi funksiyalarning o‘sishi va kamayishi oraliqlari tekshirilsin.

1) $y=x^2$;
2) $y=x^3$;
3) $y=\frac{1}{x}$;
4) $y=\ln x$;
5) $y=tg\,x$;
6) $y=e^x$;
7) $y=4x-x^2$;
8) $y=4x+x^3$

2. Quyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin va ularning grafiklari yasalsin.

1) $y=x^2+4x+5$;
2) $y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$;
3) $y=\frac{x^4}{4}-x^3$;
8) $y=\frac{1}{1+x^2}$
9) $y=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$;
10) $y=x^2(1-x)$;

4) $y=\sqrt[3]{x^2}-1;$

5) $y=1+2x^2-\frac{x^4}{4};$

6) $y=4x-\frac{x^3}{3};$

7) $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x};$

11) $y=1-\sqrt[3]{(x-4)^2};$

12) $y=4x-tg\,x$ $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ oralikda

13) $y=xe^{-\frac{x}{2}};$

14) $y=x\ln x.$

3. Quyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin va jadvallari tuzilsin.

1. $y=4x-x^2;$

2. $y=x^2+2x+3;$

3. $y=\frac{x^3}{3}+x^2;$

4. $y=\frac{x^2}{x-2}$

5. $y=\frac{x^4}{4}-2x^2;$

6. $y=x^3+6x^2+9x;$

7. $y=x^3+\frac{x^4}{4};$

8. $y=x-2\ln x;$

9. $y=\sin 2x-x,$ $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$oralikda.

10) $y=4x-x^3$

4. Quyidagi funksiyalarning qavariqlik va botiqlik oraliqlarini toping:

1) $f(x)=x^{\alpha},\ \alpha>1,\ x>0;$

2) $f(x)=e^x;$

3) $f(x)=\ln x;$

4) $f(x)=x^5-10x^2+3x;$

5) $f(x)=\frac{1}{1-x^2};$

6) $y=x^5+5x-6;$

7) $y=(x-4)^5+4x+4;$

8) $y=e^{-\frac{x^2}{2}};$

9) $y = 2 + \frac{12}{x^2 - 4}$.

5. Quyidagi funksiyalar grafiklarining egilish nuqtalarini toping:

1) $y = x^5 + 5x - 6$;

2) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$;

3) $y = xe^{1-x}$;

4) $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$;

5) $y = \cos x$;

6) $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$.

6. Quyidagi funksiyalarning asimptotalarini toping.

1) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$;

2) $y = \frac{x^2}{x - 2}$;

3) $y = x - \ln x$;

4) $y = \frac{e^x}{x}$;

5) $y = \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x$.

7. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang:

1) $y = 3x - x^3$;

2) $y = -x^3 + 4x - 3$;

3) $y = -4x + x^3$;

4) $y = x^5 - \frac{5}{3}x^3$;

5) $y = x(x-1)^3$.

8. Quyidagi limitlar Lopital qoidasiga asosan topilsin.

1.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$	10.	$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$
2.	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x^n-a^n}$	11.	$\lim\limits_{x\to 0} x^x$
3.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$	12.	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$
4.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$	13.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$
5.	$\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)tg\dfrac{x}{2}$	14.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-7x^2+4x+2}{x^3-5x+4}$
6.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$	15.	$\lim\limits_{x\to 0} tg\,x\cdot\ln x$
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot ctg\,x-1}{x^2}$	16.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$
8.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x-\sin x}{x-\sin x}$	17.	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$
9.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$	18.	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

9. To‘la xarajatlar chizig’i tenglamasi $K=6\lg(1+3x)$ bo‘lsa, limitik xarajat chizig’i tenglamasini yozing?

10. $E_x(f(x))$ $f(x)$ funksiyaning egiluvchanligi bo‘lsa, $xf(x)$ funksiya egiluvchanligi $E_x(f(x))+1$ bo‘lishini isbotlang.

11. $y=x^3-1$ funksiya egiluvchanligini hisoblang. $x=1$ *va* $x=5$ bo‘lganda egiluvchanligi ko‘rsatkichini toping.

12. $y=e^{6x}$ funksiya egiluvchanligini toping?

$x = 1,\ x = 0,\ x = 2$ bo‘lganda egiluvchanlik ko‘rsatkichini toping?

3.6 -§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya differensiali. Xususiy hosila va yuqori tartibli differensiallar

3.6.1.Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar haqida asosiy tushunchalar

Tabiat va jamiyatda juda ko‘p masalalar borki o‘zgaruvchi miqdorlar bog’lanishlarida bittasining sonli qiymati boshqa bir nechasining qiymati bilan aniqlanadi. Masalan, tomonlarining uzunliklari x *ва* y dan iborat bo‘lgan to‘g’ri to‘rtburchakning yuzi, uning tomonlarining uzunliklari o‘zgarishi bilan o‘zgarib boradi; parallelepipedning hajmi uning uchala o‘lchovining o‘zgarishi bilan o‘zgaradi; biror yer maydonidan olinayotgan hosildorlik yerning tuzilishiga, unga o‘g’it berishga, sug’orishga, dehqonning malakasiga va boshqa juda ko‘p faktorlarga; sigirdan sog’ib olinayotgan sut miqdori, sigir zotiga, uning qanday yem-xashak bilan boqilishiga va hakozolarga bog’liq. Bunday misollarni istalgancha keltirish mumkin.

Bunday bog’lanishlarni tekishirish uchun ***ko‘p o‘zgaruvchili (argumentli) funksiyalar*** tushunchasini kiritamiz va ularni tekshirish apparati amallarini o‘rganamiz.

1-ta’rif. R^2 fazoda biror D to‘plamning bir-biriga bog’liq bo‘lmagan x *ва* y o‘zgaruvchilari har bir (x, y) haqiqiy sonlari juftligiga biror qoidaga ko‘ra E to‘plamdagi bitta z haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘lsa, D to‘plamda ***ikki*** x *ва* y ***o‘zgaruvchilarning funksiyasi*** z ***aniqlangan*** deyiladi. Ikki o‘zgaruvchining funksiyasi simvolik tarzda quyidagicha belgilanadi: $z = f(x, y),\ z = F(x, y)$ (funksiya bilan o‘zgaruvchilar mos ravishda x, t *ёки* x_1, x_2 lar bilan belgilangan bo‘lsa $U = f(x,t)$ *ёки* $y = f(x_1, x_2)$ tarzda ifodalanishi ham mumkin va h.k.). Bunda $x,\ y$ o‘zgaruvchilarga yerkli o‘zgaruvchilar yoki argumentlar, z ga yerksiz o‘zgaruvchi yoki funksiya deb ataladi.

D to‘plamga *funksiyaning aniqlanish* sohasi, E to‘plamga o‘zgarish yoki qiymatlar sohasi deyiladi. Har bir juft haqiqiy songa biror tayin koordinat sistemasida bitta M nuqta va bitta nuqtaga bir juft

haqiqiy son mos kelganligi uchun ikki argumentli funksiyani M nuqtaning funksiyasi ham deb qaraladi, hamda $y = f(x_1, x_2)$ o‘rniga $y = f(M)$ ham deb yozish mumkin.

Ikki o‘zgaruvchili funksiya berilish usullari ham, bir o‘zgaruvchili funksiyaga o‘xshash har xil bo‘lishi mumkin. Ko‘proq funksiyaning ***analitik usulda*** berilishini qaraymiz. Masalan. 1) $y = x_1^2 + x_2^2$ bu funksiya analitik usulda bo‘lib, OX_1X_2 tekislikning hamma nuqtalari uchun aniqlangan. O‘zgarish sohasi $[0, +\infty)$ dan iborat bo‘ladi. 2) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ funksiya aniqlangan bo‘lishi uchun $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ *ёки* $x^2 + y^2 \leq 4$ bo‘lishi kerak, bunday nuqtalar to‘plami markazi koordinatlar boshida radiusi 2 ga teng bo‘lgan doiradan iborat. Qiymatlar to‘plami $[0,2]$ bo‘ladi. 3) $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ funksiya $x^2 + y^2 - 9 > 0$, ya’ni markazi koordinatlar boshida radiusi 3 ga teng bo‘lgan doiradan tashqarida aniqlangan. Qiymatlar to‘plami $(0, +\infty)$.

Ikki argumentli funksiyaning geometrik tasviri fazoda tenglamasi $z = f(x, y)$ bo‘lgan sirtni ifodalaydi. Masalan: 1) $z = 2x + 3y - 12$ ikki argumentli funksiya fazoda $2x + 3y - z - 12 = 0$ tekislikni tasvirlaydi. 2) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ sfera tenglamasi bo‘lib, $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ikki argumentli funksiyalar grafiklari sferani ifodalaydi.

2-ta’rif . D to‘plamning har bir (x_1, x_2, x_3) haqiqiy sonlar uchligiga biror qoida bo‘yicha E to‘plamdagi bitta y haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘lsa, D to‘plamda uch (x_1, x_2, x_3) o‘zgaruvchining funksiyasi aniqlangan deyiladi.

Bunda x_1, x_2, x_3 yerkli o‘zgaruvchilar yoki argumentlar, y esa erksiz o‘zgaruvchi yoki funksiya deb ataladi. Uch o‘zgaruvchining funksiyasi $y = f(x_1, x_2, x_3)$, $u = f(x, y, z)$, $u = A(x, y, z)$ va h.k. belgilanadi.

Geometrik nuqtai nazardan to‘g’ri burchakli koordinatlar sistemasida haqiqiy sonlarning har bir (x, y, z) uchligiga fazoning yagona

$P(x,y,z)$ nuqtasi mos keladi va aksincha. Shuning uchun uch o‘zgaruvchining fuksiyasini $P(x,y,z)$ nuqtaning funksiyasi sifatida ham qarash mumkin. Shunday qilib, $u=f(x,y,z)$ o‘rniga, $u=f(P)$ deb yozish ham mumkin. Uch o‘zgaruvchili funksiya aniqlanish sohasi R^3 fazoning biror nuqtalar to‘plami yoki butun fazo bo‘lishi mumkin. Masalan: $z=\sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$ funksiya aniqlanish sohasi: $25-x^2-y^2-z^2\geq 0$ yoki $x^2+y^2+z^2\leq 25$ shartda aniqlanganligi uchun $x^2+y^2+z^2=25$ sfera va uning ichida aniqlangan.

To‘rt o‘zgaruvchili va umuman n o‘zgaruvchili funksiyaga ham yuqoridagidek ta’rif berish mumkin. Bunday funksiyalar mos ravishda $y=f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ $ёки$ $u=f(x,y,z,t),$ $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$
Simvollar bilan belgilanadi.

To‘rt va undan ortiq o‘zgaruvchiga bog’liq funksiyalarning aniqlanish sohasini chizmalarda ko‘rgazmali namoyish yetish mumkin yemas. Ammo, uni tasvirlash mumkin bo‘lmasa y yo‘q deyish mumkin yemas. Masalan, to‘rtinchi o‘zgaruvchi fazodagi nuqtaning temperaturasi, beshinchisi zichlik va h.k. lar bo‘lishi mumkin. Lekin, geometrik atamalarni davom yettirib, n o‘zgaruvchining funksiyasini biror n o‘lchovli fazo $P(x_1,x_2,...,x_n)$ nuqtasining funksiyasi sifatida qarash mumkin.

2. ***Ikki va ko‘p argumentli funksiya limiti***. $y=f(x)$ funksiya uchun nuqtaning atrofi shu nuqtani o‘z ichiga olgan oraliq bo‘lar edi. Ikki argumentli $z=f(x,y)$ funksiya qaralganda ***nuqtaning*** δ ***atrofi*** deyilganda markazi $P_0(x_0,y_0)$ nuqtada δ radiusli doiraning ichida yotuvchi barcha $P(x,y)$ nuqtalar tushuniladi.

Fazodagi nuqtaning δ atrofi ham shunga o‘xshash aniqlanib markazi $P_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtada radiusi δ bo‘lgan sharning ichki nuqtalari bo‘ladi.

n o‘lchovli $(n>3)$ fazoda $P_0(x_1,x_2,...,x_n)$ nuqtaning δ atrofi shunga o‘xshash aniqlanadi.

2-ta’rif. Ikki o‘zgaruvchili $z = f(x,y) = f(P)$ funksiya P_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsa, (P_0 nuqtada aniqlanmagan bo‘lishi mumkin) va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$topilsaki, $\rho(P,P_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $P(x,y)$ nuqtalar uchun

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon \quad ёки \quad |f(P) - A < \varepsilon|$$

tengsizlik bajarilsa, A ***o‘zgarmas son*** $z = f(x,y)$***funksiyaning*** $P \to P_0$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \quad ёки \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A$$

bilan belgilanadi.

Limitning ta’rifidan kelib chiqadiki, A son $z = f(x,y)$ funksiyaning limiti bo‘lsa, $|f(x,y) - A|$ ayirma $x \to x_0$, $y \to y_0$ da cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Uch va undan ortiq o‘zgaruvchi funksiyasining limiti ham yuqoridagiga o‘xshash aniqlanadi.

Bir necha o‘zgaruvchili funksiyaning limiti 0 ga teng bo‘lsa, bunday funksiyaga cheksiz kichik funksiya yoki cheksiz kichik miqdor deyiladi.

$y = f(x)$ funksiya uchun limitlar haqidagi barcha asosiy teoremalar bir necha o‘zgaruvchining funksiyasi uchun ham o‘rinli ekanligini ta’kidlab o‘tamiz.

3. ***Ikki va ko‘p argumentli funksiyaning uzluksizligi va uzilishi.***

1-ta’rif. $z = f(x,y) = f(P)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada hamda uning biror atrofida aniqlangan va

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0) \ ёки \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

bo‘lsa, ya’ni funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi limiti, funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo‘lsa, ***funksiya*** $P_0(x_0, y_0)$ ***nuqtada uzluksiz*** deyiladi.

Bu ta’rifga teng kuchli 2-tarifni ham keltiramiz.

$z = f(x,y) = f(P)$ funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi to‘liq orttirmasi

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0) \ ,$$

$z = f(x,y) = f(P)$ funksiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi to‘liq orttirmasi bo‘lsin.

2-ta’rif. $z = f(x,y) = f(P)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada va uning atrofida aniqlangan bo‘lib, argumentlarning Δx *va* Δy cheksiz kichik orttirmalariga funksiyaning ham Δz cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya’ni

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$

bo‘lsa, ***funksiya R_0 (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz*** deyiladi.

3-ta’rif. Uzluksizlik shartlari bajarilmagan nuqtalar **uzilish nuqtalari** deyiladi. Ikki o‘zgaruvchili funksiya uzilish nuqtalari butun chiziqni hosil qilishi mumkin.

4-ta’rif. $z = f(x,y)$ funksiyada x o‘zgaruvchiga biror Δx orttirma berib, y o‘zgaruvchini o‘zgarishsiz qoldirsak, funksiya $\Delta_x z$ orttirma olib, bu orttirmaga z funksiyaning x ***o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy orttirmasi*** deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x,y).$$

Xuddi shunday, y o‘zgaruvchiga Δy orttirma berib x o‘zgarishsiz qolsa, unga z funksiyaning y ***o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy orttirmasi*** deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x,y).$$

5-ta’rif. x *va* y o‘zgaruvchilar mos ravishda Δx *va* Δy orttirmalar olsa, $z = f(x,y)$ funksiya $\Delta z = f(x - \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)$ **to‘liq orttirma** oladi.

6-ta’rif. 1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ chekli limit mavjud bo‘lsa, unga $z = f(x,y)$ funksiyaning x ***o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy hosilasi*** deyiladi va $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ yoki $z'_x = f'_x(x,y)$ bilan belgilanadi.

2) $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ chekli limit mavjud bo‘lsa, unga $z=f(x,y)$ funksiyaning y o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy hosilasi deyiladi va $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ yoki $z'_y=f'_y(x,y)$ bilan belgilanadi.

Xususiy hosilalar ta’riflaridan ko‘rinadiki, bir argumentli funksiyani differensiallashning hamma qoida va formulalari o‘z kuchida qoladi.

Istalgan chekli sondagi o‘zgaruvchilar funksiyasining xususiy hosilalari ham yuqoridagidek aniqlanadi.

1-misol. $z=x^2+2xy+3y^2$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

Yechish: Oldin y ni o‘zgarmas deb z'_x ni topamiz:

$$z'_x=(x^2+2xy+3y^2)'_x=(x^2)'_x+(2xy)'_x+(3y^2)'_x=2x+2y,$$

yendi x ni o‘zgarmas deb $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ni topamiz:

$$z'_y=(x^2+2xy+3y^2)'_y=(x^2)'_y+(2xy)'_y+(3y^2)'_y=2x+6y.$$

2-misol. $u=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

Yechish: Hosila olish qoidalari va formulalaridan foydalanib quyidagilarni topamiz:

$$u'_x=\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right)'_x=\frac{x'_x(x^2+y^2+z^2)-x(x^2+y^2+z^2)'_x}{(x^2+y^2+z^2)^2}=$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

(u'_y,u'_z larni mustaqil toping).

To‘la differensial. Ma’lumki, x *va* y o‘zgaruvchilar mos ravishda Δx *va* Δy orttirmalar olsa, $z=f(x,y)$ funksiya $\Delta z=f(x-\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$ to‘la orttirma oladi. Bu to‘la orttirmaning

Δx *ва* Δy larga nisbatan chiziqli bo‘lgan bosh qismi funksiyaning ***to‘la differensiali*** deyiladi va dz bilan belgilanadi. $z = f(x, y)$ funksiyaning to‘la differensiali

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad (1)$$

formula bilan hisoblanadi, bu yerda $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y.$ To‘la differensialdan funksiyaning taqribiy qiymatlarini hisoblashda foydalanish mumkin, ya’ni $\Delta z \approx dz$ yoki $f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx dz,$ bundan

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + z'_x dx + z'_y dy. \qquad (2)$$

bo‘ladi.

Uch argumentli $u = F(x, y, z)$ funksiyaning to‘la differensiali

$$du = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \qquad (3)$$

formula bilan hisoblanadi.

1-misol. $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ funksiyaning to‘la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$z'_x = \frac{\left(x^2 + y^2\right)'_x}{x^2 + y^2} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad z'_y = \frac{\left(x^2 + y^2\right)'_y}{x^2 + y^2} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

(1) formulaga asosan, $dz = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$ bo‘ladi.

2-misol. $u = x^2 yz^2$ funksiyaning to‘la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^2 yz^2\right)'_x = yz^2 (x^2)'_x = 2xyz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2 yz^2\right)'_y = x^2 z^2 (y)'_y = x^2 z^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(x^2 yz^2\right)'_z = yx^2 (z^2)'_z = 2x^2 yz.$$

(3) formulaga asosan, $du = 2xyz^2 dx + x^2 z^2 dy + 2x^2 yzdz$ bo‘ladi.

3-misol. O‘lchovlari $a = 8м,\ b = 6м,\ c = 3м$ bo‘lgan parallelepipedning uzunligi va yeni mos ravishda 10 sm va 5 sm ga

ko‘paytirilsa, balandligi yesa, 15 sm kamaysa, uning hajmi qanday o‘zgaradi.

Yechish. Parallelepipedning hajmi $v = xyz;\quad x, y, z$ uning o‘lchamlari. Hajm orttirmasini taqriban $\Delta V \approx dV$ formuladan hisoblash mumkin.

$$dV = yzdx + xzdy + xydz$$

bo‘lib, shartga ko‘ra

$x = 8,\quad y = 6,\quad z = 3,\quad dx = 0.1,\quad dy = 0.05,\quad dz = -0.15$

bo‘lganligi uchun

$\Delta V \approx dV = 6 \cdot 3 \cdot 0.1 + 8 \cdot 3 \cdot 0.05 + 8 \cdot 6(-0.15) = -4,2$

bo‘ladi. Shunday qilib, hajm taxminan $4.2м^3$ ga kamayadi.

4-misol. To‘la differensial formulasidan foydalanib:

1) $arcctg\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right),\quad$ 2) $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$

larni taqribiy hisoblang.

Yechish: To‘la differensial formulasidan taqribiy hisoblashda foydalanish uchun, oldin qiymati taqribiy hisoblanadigan funksiyaning analitik ifodasini tanlash zarur, keyin boshlang’ich nuqtani shunday tanlash kerakki, funksiyaning va xususiy hosilalarning bu nuqtadagi qiymatlarini jadvalsiz hisoblash mumkin bo‘lsin. Shundan keyin, (2) formuladan foydalanish mumkin bo‘ladi.

1) $arcctg\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right)$ ifoda $f(x, y) = arcctg\left(\frac{x}{y} - 1\right)$ funksiyaning

$P_1(1.97;1.02)$ nuktadagi kiymati deyish mumkin. Boshlang’ich nuqta uchun $P_0 = (2;1)$ ni olsak, $\Delta x = 1.97 - 2 = -0.03,\quad \Delta y = 1.02 - 1 = 0.02$ bo‘ladi. Yendi xususiy hosilalarni topib, ularning P_0 nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f_x'(x,y)=\left[arcctg\left(\frac{x}{y}-1\right)_x'\right]=-\frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)_x'}{1+\left(\frac{x}{y}-1\right)^2}=-\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{(x-y)^2}{y^2}}=-\frac{y}{y^2+(x-y)^2};$$

$$f_y'(x,y)=\left[arcctg\left(\frac{x}{y}-1\right)_y'\right]=-\frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)_y'}{1+\left(\frac{x}{y}-1\right)^2}=-\frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{\left(y^2+(x-y)^2\right)}{y^2}}=\frac{x}{y^2+(x-y)^2};$$

$$f_x'(2;1)=-\frac{1}{1+(2-1)^2}=-0.5; \qquad f_y'(2;1)=\frac{2}{1+(2-1)^2}=1.$$

(2) formuladan foydalansak,

$$arcctg\left(\frac{1.97}{1.02}-1\right)\approx arcctg\left(\frac{2}{1}-1\right)+(-0.5)(-0.03)+1\cdot 0.02=\frac{\pi}{4}+0.015+0.02=0.82$$

bo‘ladi.

2) $\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}$ ni $f(x,y,z)=\sqrt{x^y+\ln z}$ funksiyaning $P_1(1.04;\,1.99;\,1.02)$ nuktadagi qiymati deb qaraymiz: boshlang’ich nuqta uchun $P_0(1;\,2;\,1)$ ni tanlaymiz. Bu holda

$\Delta x=1.04-1=0.04,\quad \Delta y=1.99-2=-0.01,\ \Delta z=1.02-1=0{,}02$

bo‘ladi. Xususiy hosilalarni topib, ularning $P_0(1;\,2;\,1)$ nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$f_x'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)_x'}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\ f_x'(1;2;1)=\frac{2\cdot 1^{2-1}}{2\sqrt{1^2+\ln 1}}=1;$$

$$f_y'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)_y'}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{x^y.\ln x}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\ f_y'(1;2;1)=\frac{1^2\cdot 0}{2\sqrt{1^2+\ln 1}}=0;$$

$$f_z'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)_z'}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\quad \boldsymbol{f_z'(1;2;1)=\frac{1}{2}}.$$

(2) formulaning uch argumentli funksiya uchun umumlashganidan foydalanib,

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}\approx\sqrt{1^2+\ln 1}+1\cdot 0{,}04+0\cdot(-0{,}01)+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02=1{,}05$$

natijani olamiz.

3.6.2. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar

1) $z=f(x,y)$ **funksiyaning *ikkinchi tartibli xususiy hosilalari*** deb birinchi tartibli xususiy hosilalardan olingan xususiy hosilalarga aytiladi. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalar qo‘yidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z_{xx}''=f_{xx}''(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z_{xy}''=f_{xy}''(x,y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z_{yx}''=f_{yx}''(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z_{yy}''=f_{yy}''(x,y).$$

$f_{xy}''(x,y)$ va $f_{yx}''(x,y)$ xususiy hosilalar **aralash xususiy xosilalar** deyiladi. Aralash xususiy hosilalar funktsiy uzluksiz bo‘lgan nuqtalarda ular o‘zaro teng bo‘ladi.

Uchinchi va undan yuqori tartibli xususiy hosilalar ham yuqoridagidek aniqlanadi.

Ushbu $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^m\partial y^{n-m}}$ yozuv z funksiyani m marta x o‘zgaruvchi bo‘yicha va $(n-m)$ marta y o‘zgaruvchi bo‘yicha differensiallashni bildiradi.

1-misol. $z=x^4+4x^2y^3+7xy+1$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

Yechish. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^4+4x^2y^3+7xy+1\right)_x'=4x^3+8xy^3+7y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^4+4x^2y^3+7xy+1\right)_y'=4x^2.3y^2+7x=12x^2y^2+7x.$$

Topilgan hosilalardan yana xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{dx^2}=\left(4x^3+8xy^3+7y\right)_x'=12x^2+8y^3,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{dx\partial y}=\left(4x^3+8xy^3+7y\right)_y'=24xy^2+7,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{dy\partial x}=\left(12x^2y^2+7x\right)_x'=24xy^2+7,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{dy^2}=\left(12x^2y^2+7x\right)_y'=24x^2y.$$

2). *Ikkinchi tartibli to‘la differensial* $d(dz)=d^2z$ kabi aniqlanib, xususiy hosilalar orqali quyidagi formula bo‘yicha topiladi.

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

(1)

2-misol. $z=x^2y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli to‘la differensialini toping.

Yechish. Xususiy hosilalarni topamiz:

$z_x'=\left(x^2y^3\right)_x'=2xy^3;\ z_y'=3x^2y^2;\ z_{xx}''=2y^3,\ z_{xy}''=6xy^2,\qquad z_{yx}''=6xy^2,$

$z_{yy}''=6xy^2,$

(1) formulaga asosan ikkinchi tartibli to‘la differensial

$$d^2z=2y^3dx^2+12xy^2dxdy+6x^2ydy^2$$

bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya, ikki o‘zgaruvchili funksiya, ikki o‘zgaruvchili funksiya aniqlanish va o‘zgarish sohalari, berilish usullari, geometrik tasviri, limiti, uzluksizligi va uzilishi. Xususiy orttirma, xususiy hosila, to‘la differensial, ikkinchi tartibli xususiy hosila, ikkinchi tartibli to‘la differensial, taqribiy hisoblash.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning xususiy orttirmasi deb nimaga aytiladi?

2. Ikki argumentli funksiyaning xususiy xosilasi deb nimaga aytiladi?

3. Ikki o‘zgaruvchili(argumentli) funksiyaning xususiy hosilalari nechta bo‘ladi?

4. Ikki o‘zgaruvchili(argumentli) funksiyaning to‘la differensiali deb nimaga aytiladi?

5. Funksiyaning to‘liq orttirmasi va to‘la differensiali orasida bog’lanish bormi?

6. To‘la differensialdan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkinmi?

7. Ikkinchi tartibli xususiy hosila qanday topiladi?

8. Ikki o‘zgaruvchili(argumentli) funksiyaning ikkinchi tartibli to‘la differensiali nimaga teng?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning xususiy hosilalarini toping:

1) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$; 2) $z = \dfrac{xy}{x-y}$; 3) $u = \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} - \dfrac{x}{z}$;

4) $z = \sqrt{1 - \left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin\dfrac{x+y}{y}$.

2. Quyidagi funksiyalarning to‘la differensiallarini toping:

1) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$; 2) $u = x^{y^2 z}$;3) $u = \sqrt{x^2 - 2y^2 + 3z^2}$;

4) $s = x\ln t$.

3. $z = xy$ funksiya uchun $P_0(5;4)$ nuqtada $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = -0{,}2$ bo‘lganda dz *va* Δz larni hisoblang.

4. 1) $(1{,}04)^{2{,}02}$; 2) $\sin 32^0 \cdot \cos 59^0$ larni taqribiy hisoblang.

5. $z = x^3y + y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

6. $s = \ln\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{t}\right)$ funksiya uchun, $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \dfrac{1}{x^2}$ yekanligini tekshiring.

7. $u = arctg(2x - t)$ bo‘lsa, $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = 0$ bajarilishini tekshiring.

8. $z=(x^2+y^2)^2$ ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

9. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ funksiya $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

10. $u=x^4y^2$ ikkinchi tartibli to‘la differensialini toping.

11. $z=\sin x\cos y$ ikkinchi tartibli to‘la differensialini toping.

12. 1) $u=\dfrac{y^2}{x^2}$; 2) $u=x\ln\dfrac{y}{x}$ ikkinchi tartibli to‘la differensiallarini toping.

3.7-§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ekstremumi

3.7.1.Ikki o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasining tatbiqlari. Ikki argumentli funksiya ekstremumi.

1-ta’rif. $z=f(x,y)$ funksiyaning $P_0(x_0;y_0)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x,y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan katta, ya’ni

$$f(x_0;y_0)>f(x,y)$$

bo‘lsa, $z=f(x,y)$ funksiya $P_0(x_0;y_0)$ nuqtada *maksimumga* ega deyiladi.

2-ta’rif. $z=f(x,y)$ funksiyaning $P_1(x_1;y_1)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x,y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan kichik bo‘lsa, ya’ni

$$f(x_1;y_1)<f(x,y)$$

bo‘lsa, $z=f(x,y)$ funksiya $P_1(x_1;y_1)$ nuqtada *minimumga* ega deyiladi.

Funksiyaning maksimumi yoki minimumi uning ekstremumi deyiladi. Funksiya ekstremumga ega bo‘lgan nuqta uning ekstremum nuqtasi deyiladi. Funksiya ekstremumini xususiy hosilalar yordamida tekshiriladi.

Ekstremumning zaruriy shartlari: $P_0(x_0;y_0)$ nuqta, uzluksiz $z=f(x,y)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘lsa,

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{aligned}\right\}$$

bo‘ladi, yoki bu nuqtada hosilalarning hyech bo‘lmaganda bittasi mavjud bo‘lmaydi.

Bunday nuqtalarga ekstremum uchun *kritik (stasionar)* nuqtalar deyiladi. Shuni takidlaymizki, hamma kritik nuqtalar ham ekstremum nuqtalar bo‘lavermaydi. Kritik nuqtada ekstremum bo‘lmasligi ham mumkin.

Ekstremumning yetarli shartlari

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarning kritik nuqtadagi qiymatlarini

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0); \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0); \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

bilan belgilaymiz va

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

ni tuzamiz.

1. $\Delta = AC - B^2 > 0$ bo‘lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremumga ega bo‘lib: 1) A<0 bo‘lganda $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga; 2) A>0 bo‘lganda minimumga ega bo‘ladi.

2. $\Delta = AC - B^2 < 0$ bo‘lsa, $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremum yo‘q.

3. $\Delta = AC - B^2 = 0$ bo‘lsa, ekstremum bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin.

1-misol. $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ funksiya ekstremumini tekshiring.

Yechish. Bu funksiya butun *XOY* tekislikda aniqlagan. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f'_x = 4x^3 - 4x + 4y; \; f'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

ekstremumga ega bo‘lishning zaruriy shartidan:

$$\left.\begin{aligned} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} y = x - x^3 = x(1 - x^2) \\ y^3 + x - y = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left[x\left(1-x^2\right)\right]^3+x-x^{+x^3}=0,\\ \left(1-x^2\right)^3=-1,1-x^2=-1,x^2=2\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}x_1=0;x_2=-\sqrt{2},x_3=\sqrt{2}\\ y_1=0;y_2=\sqrt{2},y_3=-\sqrt{2}\end{array}\right\}.$$

Demak, uchta O(0,0), $P_1\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ va $P_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ kritik nuqtalarga ega bo‘lamiz, boshqa kritik nuqtalar yo‘q, chunki $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ xususiy hosilalar XOY tekislikning hamma nuqtalarida mavjud.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f''_{xx}(x,y)=12x^2-4;\ f''_{xy}(x,y)=4;\ f''_{yy}(x,y)=12y^2-4.$$

O(0,0) nuqtada ekstremumning yetarli shartini tekshiramiz: $A=-4,\ B=4,\ C=-4;\ \Delta=AC-B^2=$-4·(-4)-4^2=0 bo‘lib, yuqoridagi yetarli shart javob bermaydi. Bu nuqta atrofida berilgan funksiya musbat ham, manfiy ham bo‘lishini ko‘ramiz, masalan OX o‘qi bo‘yicha ($y=0$)

$$f(x,y)_{y=0}=f(x,0)=x^4-2x^2=-x^2\left(2-x^2\right)<0.$$

$y=x$, bissektrisa bo‘yicha,

$$f(x,y)\big|_{y=x}=f(x,x)=2x^4>0$$

bo‘ladi. Shunday qilib, O(0,0) biror atrofida $\Delta f(x,y)$ orttirma ishorasini bir xil saqlamaydi, demak ekstremum yo‘q.

P_1(-$\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$) nuqtada yetarli shartni tekshiramiz:

$AC-B^2=$400-16>0 va A=20>0 demak $P_1(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ nuqtada funksiya minimumga ega. $f_{\min}$ =-8;

$P_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ nuqtada yetarli shartni tekshiramiz: bu nuqta uchun A=20, B=4, C=20 bo‘lib, $\Delta=AC-B^2=$400-16>0 va A=20>0 bo‘lganligi uchun $P_2(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ nuqtada ham berilgan funksiya minimumga ega bo‘ladi, $f_{\min}$ =-8

2-misol. $z=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ funksiyaning ekstremumini tekshiring.

Yechish.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-1}{2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}.$$

$P_0(1;1)$ nuqtada xususiy hosilalar mavjud yemas. Demak, $P_0(1;1)$ nuqta kritik nuqta bo‘ladi. Bu nuqtada ekstremumni tekshirish uchun Δz orttirmaning P_0 nukta atrofida ishorasini tekshiramiz:

$$\Delta z = \sqrt{(1+\Delta x-1)^2+(1+\Delta y-1)^2} = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} > 0,$$

bu ishora $P_0(1;1)$ nuktaning istalgan atrofida saqlanadi, ya’ni $P_0(1;1)$ nuktada funksiya minimumga ega $z_{\min} = f(1;1)=0$.

3.7.2.Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi yeng katta va yeng kichik qiymatlarini topish.

Chegaralangan yopiq sohada differensiallanuvchi funksiya o‘zining *yeng katta va yeng kichik qiymatiga* yo sohada yotuvchi kritik nuqtada, yo bu soha chegarasida yerishadi.

1-misol. $z = x^2+y^2-xy+x+y$ funksiyaning $x \le 0, y \le 0, x+y \ge -3$ sohadagi yeng katta va yeng kichik kiymatlarini toping.

Yechish. Soha AOB uchburchakdan iborat. Soha ichidagi kritik nuqtalarni topamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x-y+1, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y-x+1=0 \end{cases}$$

bundan $x=-1, y=-1$ bo‘lib, P_0(-1,-1) kritik nuqtaga ega bo‘lamiz. Funksiyani soha chegarasida tekshiramiz: A0 chegarada $y=0$ bo‘lib, $z=x^2+x$ funksiya xosil bo‘ladi. Bu funksiyaning ekstremumi: $z'_x = 2x+1=0$, $x=-\dfrac{1}{2}=-0{,}5$ nuqtada bo‘ladi.

Demak, P_1(-0,5, 0) AO chegaradagi kritik nuqta. Tenglamasi $x=0$, BO chegarada $z=y^2+y$ funksiya hosil bo‘lib, $z'_y = 2y+1=0$ y=-1/2. Demak, $P_2\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ BO chegaradagi kritik nuqta bo‘ladi. Tenglamasi $y=-3-x$ bo‘lgan AB chegarada $z=3x^2+9x+6$ funksiya

hosil bo‘lib, $z'_x = 6x + 9 = 0 \quad x = -\frac{3}{2}.$ AB ning tenglamasidan $y = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2},$ demak, AB chegaradagi kritik nuqta $P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ bo‘ladi.

Berilgan funksiyaning P_0, P_1, P_2, P_3 kritik nuqtalardagi, hamda A, B, O nuqtalardagi qiymatlarni hisoblaymiz:

$$z_0 = f(P_0) = f(-1,-1) = -1;$$

$$z_1 = f(P_1) = f\left(-\frac{1}{2}, -0\right) = -\frac{1}{4};$$

$$z_2 = f(P_2) = f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4};$$

$$z_3 = f(P_3) = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4};$$

$$z_4 = f(0) = f(0,0) = 0;$$

$$z_5 = f(A) = f(-3,0) = 6;$$

$$z_6 = f(B) = f(0,-3) = 6.$$

Funksiyaning topilgan barcha qiymatlarini taqqoslab,

$z_{engkat.} = f(A) = f(B) = 6 \quad va \quad z_{engkich.} = f(P_0) = -1$

degan xulosaga kelamiz.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ekstremumga ega bo‘lishning zaruriy va yetarli shartlari, yeng kichik va yeng katta qiymatlar, xarajat funksiyasi, foyda funksiyasi, tovarning limitik bahosi, limitik xarajat, foyda funksiyasi maksimumi. Integral yig’indi, ikki karrali integral, ichki integral, tashqi integral, silindrik jismning hajmi, statik momentlar, og’irlik markazi, inersiya momentlari.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikki argumentli funksiyaning ekstremumga ega bo‘lishining zaruriy sharti nima?

2. Ikki argumentli funksiyaning ekstremumga ega bo‘lishining yetarli sharti nima?

3. Kritik nuqtalar qanday nuqtalar?

4. Ikki argumentli funksiyaning biror yopiq sohadagi yeng katta va yeng kichik qiymatlari qanday topiladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi funksiyalarning ekstremumini tekshiring.

1. $z = 2(x+y) - x^2 - y^2.$
2. $z = xy(12 - x - y).$
3. $z = (x-5)^2 + y^2 + 1.$
4. $z = x^2 - xy + y^2 + x - y + 1.$
5. $z = x^2 + 3(y+2)^2.$
6. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 6y + 20.$
7. $z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10.$
8. $z = 3x^3 + 3y^2 - 9xy + 10.$
9. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$
10. $z = xy - 3x^2 - 2y^2.$

Berilgan $z = f(x, y)$ funksiyaning berilgan chiziqlar bilan chegaralangan D yopiq sohadagi yeng katta va yeng kichik qiymatlarini toping.

1. $z = x^2 - y^2 - x + y;\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 1.$
2. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y;\ x = 0,\ y = 0,\ 5x - 3y + 45 = 0.$
3. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 5;\ x + y = 5,\ x = -1,\ y = -1.$
4. $z = 3y - 2x - xy;\ x = 0,\ y = 0,\ 3x - 4y = 12.$
5. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x,\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 2.$
6. $z = x^2 + 6xy - x + 3y;\ x = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 3.$

3.8-§. Aniqmas integral

3.8.1. Boshlang'ich funksiya.

Ma'lumki matematikada amallar juft-juft bo'lib uchrab keladi. Jumladan, qo'shish va ayirish, ko'paytirish va bo'lish, darajaga ko'tarish va ildiz chiqarish va boshqalar. Funksiya hosilasini topishga yoki differensialash amaliga teskari amal bormikan degan tabiiy savol tug'iladi.

Differensial hisobda funksiya berilgan bo'lsa, uning hosilasini topishni qaradik. Haqiqatda ham fan va texnikaning bir qancha masalalarini hal etishda teskari masalani yechishga to'g'ri keladiki, berilgan $f(x)$ funksiya uchun shunday, $F(x)$ funksiyani topish kerakki, uning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo'lsin. Ma'lumki, bunday $F(x)$ funksiyaga berilgan $f(x)$ funksiyaning ***boshlang'ich*** **(dastlabki)** ***funksiyasi*** deyiladi.

Masalan, $y = f(x) = x^4$ funksiyaning boshlanғich funksiyasi, $F(x) = \frac{x^5}{5}$ bo'ladi, chunki $F'(x) = (\frac{x^5}{5})' = x^4 = f(x)$ bo'ladi.

2. Aniqmas *integral va uning xossalari.*

Ta'rif. $F(x)$ funksiya biror oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, $F(x)+C$ (bunda C ixtiyoriy o'zgarmas) funksiyalar to'plami shu oraliqda $f(x)$ ***funksiyaning aniqmas integrali*** deyiladi va

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

bilan belgilanadi. Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, x integrallash o'zgaruvchisi, $\int$ integral belgisi deyiladi.

Demak, $\int f(x)dx$ simvol, $f(x)$ funksiyaning hamma boshlang'ich funksiyalari to'plamini belgilaydi.

Berilgan funksiyaning aniqmas integralini topish amaliga integrallash deyiladi.

Aniqmas *integralning xossalari*:

1) aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga, differensiali esa integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{va} \quad d\int F(x)dx = F(x)dx;$$

2) biror funksiyaning hosilasidan hamda differensialidan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \quad \text{va} \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

Bu xossalar aniqmas integralning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan, 1-xossadan $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) + 0 = f(x)$ bo'ladi. (Qolganlarini keltirib chiqarish o'quvchiga havola etiladi).

Bu xossalardan differensiallash va integrallash amallari o'zaro teskari amallar ekanligini payqash mumkin.

3) o'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni $K = const \neq 0$ bo'lsa,

$$\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx;$$

4) chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining aniqmas integrali, shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int\left[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)\,dx.$$

3. Asosiy integrallar jadvali. Berilgan funksiyaga asosan uning boshlang'ichini topish, berilgan funksiyani differensiallashga nisbatan ancha murakkabroq masaladir. Differensial hisobda asosiy elementar funksiyalarning, yig'indining, ko'paytmaning, bo'linmaning hamda murakkab funksiyalarning hosilasini topishni o'rgandik. Bu qoidalar istalgan elementar funksiyalarning hosilasini topishga imkon berdi. Elementar funksiyalarni integrallashda esa differensiallashdagidek umumiy qoidalar yo'q. masalan, ikkita elementar funksiyalar boshlang'ichlarining ma'lum bo'lishiga qaramasdan, ular ko'paytmasining, bo'linmasining boshlang'ichini topishda aniq bir qoida yo'q.

Integrallashda integral ostidagi ifodaning muayyan berilishiga qarab, unga mos individual usullardan foydalanishga to‘g’ri keladi. Boshqacha aytganda, integrallashda ancha kengroq fikr yuritish kerak bo‘ladi. Funksiyani integrallash ya’ni boshlang’ich funksiyani topish metodlari bir qancha shunday usullarni ko‘rsatadiki, ular yordamida ko‘p hollarda maqsadga erishiladi.

Integrallashda maqsadga erishish uchun quyidagi **asosiy integrallar jadvalini** yoddan bilish zarur.

$$1)\ \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \ n \neq -1;\quad 2)\ \int dx = x + C;\quad 3)\ \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$4)\ \int \sin x dx = -\cos x + C;\qquad 5)\ \int \cos x dx = \sin x + C;\quad 6)\ \int e^x dx = e^x + C;$$

$$7)\int\ a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1);\quad 8)\ \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C;$$

$$9)\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C;\quad 10)\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C;$$

$$11)\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C;\quad 12)\ \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\frac{x-a}{x+a} + C,\ a \neq 0;$$

Bu formulalarning to‘g’riligini, tekshirish tengliklarning o‘ng tomonidagi ifodalar differensiali integral ostidagi ifodaga teng ekanligini ko‘rsatishdan iboratdir. Masalan,

$$d\left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right) = \left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right)' dx = \frac{(n+1)x^n}{n+1} dx = x^n dx.$$

Integrallashga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralning 4 va 3 xossalariga asosan,

$$\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx = \int x^3\ dx + 5\int \sin x\, dx - 9\int dx$$

bo‘ladi. Asosiy integrallar jadvalidagi 1), 2), 4) formulalarga asosan,

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C_1,\ \ 5\int \sin x dx = 5(-\cos x + C_2),\ \ -9\int dx = -9(x + C_3).$$

Demak,

$$\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx = \frac{x^4}{4} - 5\cos x - 9x + (C_1 + 5C_2 - 9C_3)\,.$$

Yuqoridagi integralni hisoblashda har bir uchta integralda o‘zining ixtiyoriy o‘zgarmasini qo‘shdik, lekin oxirgi natijada bitta ixtiyoriy o‘zgarmasni qo‘shamiz, chunki C_1, C_2, C_3 ixtiyoriy o‘zgarmaslar bo‘lsa, $C = C_1 + 5C_2 - 9C_3$ ham ixtiyoriy o‘zgarmas bo‘ladi, shuning uchun, oxirgi natijani quyidagicha yozamiz:

$$\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx = \frac{x^4}{4} - 5\cos x - 9x + C\,.$$

Integralning to‘g’ri hisoblanganligini tekshirish uchun oxirgi tenglikning o‘ng tomonini differensiallash bilan ko‘rsatish mumkin(buni bajarishni o‘quvchiga havola etamiz).

2-misol. $\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Manfiy daraja xossasidan, hamda 4) xossadan foydalanib, jadvaldagi 1) formulaga asosan,

$$\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx = \int\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}\right)dx = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{3}\int x^{\frac{2}{3}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{3}} + C = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + C$$

bo‘ladi.

3-misol. $\int \frac{3dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ayniyatdan hamda integralning 3) va 4) hossalaridan foydalanib hisoblaymiz:

$$\int \frac{3dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = 3\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = 3\int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx + 3$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = 3\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + 3\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = 3(tgx - ctgx) + C.$$

4-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. Jadvaldagi 9) formulaga asosan,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

3.8.2. Aniqmas integralda integrallash usullari

1. O‘zgaruvchini almashtirish. Ko‘p hollarda yangi o‘zgaruvchi kiritish bilan integralni hisoblash, jadval integraliga keltiriladi. Bunda $\varphi(x) = t$ almashtirish olinib, bunda t yangi o‘zgaruvchi bo‘lib, o‘zgaruvchini almashtirish formulasi

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

O‘zgaruvchini almashtirish usuliga bir necha misollar qaraymiz

1-misol. $\int (3x+1)^7 dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $3x+1=t$ deb $3dx=dt$ yoki $dx=\frac{dt}{3}$ ekanligini hisoblasak,

$$\int (3x+1)^7 dx = \int t^7 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8} + C = \frac{t^8}{24} + C = \frac{(3x+1)^8}{24} + C$$

bo‘ladi.

2-misol. $\int \sqrt[3]{1+x^2}\, x\,dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $1+x^2=t$ o‘zgaruvchi bilan almashtiramiz. Bu holda $2xdx=dt$ yoki $xdx=\frac{dt}{2}$ bo‘lib,

$$\int \sqrt[3]{1+x^2}\cdot x dx = \int \sqrt[3]{t}\cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2}\cdot \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} t\sqrt[3]{t} + C = \frac{3}{8}(1+x^2)\sqrt[3]{1+x^2} + C$$

bo‘ladi.

3-misol. $\int \cos mx dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bunda $dx = \frac{1}{m} d(mx)$ o‘zgartirish olib,

$$\int \cos mx dx = \frac{1}{m}\int \cos mx d(mx) = \frac{1}{m}\sin mx + C$$

natijaga ega bo‘lamiz. Bunday integrallashga ***bevosita integrallash*** deb ataladi. Chunki $mx = t$ bilan o‘zgaruvchini almashtirib ham shu natijaga kelish mumkin edi. Yuqoridagi integralda o‘zgaruvchini almashtirib o‘tirmasdan uni fikrda bajardik.

4-misol. $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\ln x = t$ bilan yangi o‘zgaruvchini almashtirib, $\frac{dx}{x} = dt$ ekanligini hisobga olsak,

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$$

bo‘ladi.

5-misol. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $x = t^2$ bilan yangi o‘zgaruvchi kiritamiz oxirgi tenglikdan differensial topib, $dx = 2tdt$ bo‘lganligi uchun,

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin t}{t} 2tdt = 2\int \sin t dt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C$$

bo‘ladi.

6-misol. $\int e^{\sin x}\cdot \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\cos x dx = d(\sin x)$ ni hisobga olib,

$$\int e^{\sin x}\cdot \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$$

natijaga kelamiz.

Shunday qilib, oddiy hollarda

$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2),\ \ \cos x dx = d(\sin x),\ \ \frac{dx}{x} = d(\ln x),\ \ dx = \frac{1}{a}(ax+b),\ ....$$

tengliklardan foydalanib, o‘zgaruvchini almashtirishni fikrda bajarib, bevosita integrallash ham mumkin.

2. Bo‘laklab integrallash. Bo‘laklab integrallash usuli differensial hisobning ikkita funksiya ko‘paytmasi differensiali formulasiga asoslangan.

Ma’lumki, $d(uv) = udv + vdu,$ bundan $udv = d(uv) - vdu.$ Oxirgi tenglikni integrallab,

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv - \int vdu$$

natijaga ega bo‘lamiz. Shunday qilib,

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1)$$

formulani hosil qildik. (1) formulaga ***bo‘laklab integrallash*** formulasi deyiladi.

Bu formula yordamida berilgan $\int udv$ integraldan ikkinchi $\int vdu$ integralga o‘tiladi. Demak, bo‘laklab integrallashni qo‘llash natijasida hosil bo‘lgan ikkinchi integral, berilgan integralga nisbatan soddaroq yoki jadval integrali bo‘lgandagina bu usulni qo‘llash maqsadga muvofiqdir. Bu maqsadga integral ostidagi ifodani u va dv ko‘paytuvchilarga qulay bo‘laklab olish natijasida erishish mukmin. Berilgan integral ostidagi ifodaning bir qismini u va qolgan qismini dv deb olgandan keyin (1) formuladan foydalanish uchun v va du larni aniqlash kerak bo‘ladi. du ni topish uchun u ning differensiali topilib, v ni topish uchun esa dv ifodani integralaymiz, bunda integral ixtiyoriy o‘zgarmas C ga bog’liq bo‘lib, uning istalgan bir qiymatini xususiy holda $C = 0$ ni olish mumkin.

Shunday qilib, integral ostidagi ifodaning bir qismini u deb olishda u differensiallash bilan soddalashadigan, qolgan qismi dv bo‘lib, qiyinchiliksiz integrallanadigan bo‘lishi kerak.

Bo‘laklab integrallash formulasi ko‘proq:

1) $\int p(x)e^{ax}dx,\ \int p(x)\sin mxdx,\ \int p(x)\cos axdx$ *va*

2) $\int p(x)\ln xdx, \int p(x)\arcsin xdx, \int p(x)\arccos xdx, \int p(x)arctgxdx, \int p(x)arcctgxdx$

(bularda $p(x)$ biror darajali ko‘phad) ko‘rinishdagi integrallarni hisoblashda ishlatiladi. Bu integrallarni hisoblashda 1) guruh integrallarda u uchun $p(x)$ ko‘phad, qolgan qismi dv uchun olinib, 2) guruh integrallarda u uchun mos ravishda

$$\ln x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\quad arctgx,\quad arcctgx \text{ lar,}$$

qolgan qismi dv uchun olinadi.

Bo‘laklab integrallashga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int x\cos xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi ifodani $u = x,\ dv = \cos xdx$ deb bo‘laklasak, $du = dx,\ v = \int \cos xdx = \sin x$ bo‘lib, (1) formulaga asosan,

$$\int x\cos xdx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$$

$u\quad dv \qquad u\quad v \qquad v\quad du$

natijaga ega bo‘lamiz.

Bu integralda (1) formuladan foydalanish natijasida ikkinchi integral $\int \sin x\,dx$ hosil bo‘ldi, bu jadval integrali bo‘lganligi uchun osongina topildi.

2-misol. $\int x^2e^{3x}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqorida eslatilganidek $u = x^2,\ dv = e^{3x}dx$ ko‘rinishda bo‘laklab olsak,

$$du = 2xdx,\ \ v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x}$$

hosil bo‘ladi. (1) formulaga asosan

$$\int x^2e^{3x}dx = x^2\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}2xdx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx$$

bo‘ladi. Oxirgi hosil bo‘lgan integral berilgan integralga nisbatan soddalashdi (berilgan integralda x ning 2- darajasi, ikkinchisida buning darajasi bittaga kamaydi). Keyingi integralda yana (1) formulani qo‘laymiz.

$$\int xe^{3x}dx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{3x}, & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| =$$

$$= x\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + C_1 = \frac{1}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + C_1.$$

Shunday qilib, natijada

$$\int x^2 e^{3x}dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + C_1\right] =$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}\right) + C$$

hosil bo‘ladi.

3-misol. $J = \int e^x \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bo‘laklab integrallasak

$$J = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = \cos x, & du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx,$$

hosil bo‘ladi.

Keyingi integral, berilgan integral bilan o‘xshashdek tuyuladi, lekin oxirgi integralda bo‘laklab integrallash formulasini ikkinchi marta qo‘llash bilan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = \sin x, & du = \cos x dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

Shunday qilib,

$$J = e^x \cos x + e^x \sin x - J$$

J hisoblanishi kerak bo‘lgan integralga nisbatan oddiy chiziqli tenglamaga keldik. Oxirgi tenglamadan

$$2J = e^x \cos x + e^x \sin x \qquad ёки \qquad J = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$$

natijaga ega bo‘lamiz.

3.8.3.Rasional va irrasional funksiyalarni integrallash

*1. Rasional kasr funksiyalarni integrallash. 1). To‘g’ri va noto‘g’ri kasr rasional funksiyalar haqida***.** Yuqorida ko‘rsatilgan integrallash

usullari yordamida hamma integrallarni hisoblash mumkin deb bo‘lmaydi.

Shunday funksiyalar sinflari borki, ular uchun muayyan usullardan foydalanib ularni jadval integrallariga yoki integrallash usullaridan foydalanish uchun qulay holga keltirish mumkin, shunday funksiya sinflaridan ayrimlarini qaraymiz.

Ma’lumki, har qanday rasional funksiyani ushbu ko‘rinishida ifodalash mumkin, ya’ni

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...a_n}.$$

Curatdagi ko‘phadning darajasi maxrajdagi ko‘phad darajasidan kichik, ya’ni $m<n$ bo‘lsa, berilgan kasrga ***to‘g’ri kasr rasional*** funksiya deyiladi. Suratdagi ko‘phadning darajasi $m\geq n$ bo‘lsa, ***noto‘g’ri kasr rasional funksiya*** deyiladi. Kasr noto‘g’ri kasr rasional funksiya bo‘lsa, suratni maxrajga, ko‘phadni ko‘phadga bo‘lish qoidasiga asosan bo‘lib, uning butun qismini ajratib, uni butun va to‘g’ri kasr rasional funksiyaga keltirish mumkin. Masalan, $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-x}$ noto‘g’ri kasr rasional funksiyani, x^3+3x^2+3x+1 ko‘p ќadni x^2-x ko‘p ќadga bo‘lib,

$$\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-x}=x+4+\frac{7x+1}{x^2-x}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Umumiy holda, $\frac{Q(x)}{P(x)}$ noto‘g’ri kasr rasional funksiya bo‘lsa, uni

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=T(x)+\frac{R(x)}{P(x)}$$

shaklda ifodalash mumkin, bu yerda $T(x)$ butun rasional funksiya, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to‘g’ri rasional kasr funksiyadan iborat. $T(x)$ funksiyani osongina integrallash mumkin.

Shunday qilib, noto‘g’ri kasr rasional funksiyani integrallashni, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to‘g’ri kasr rasional funksiyani integrallashga keltiriladi.

2). To‘g’ri kasr rasional funsiyalarni sodda kasrlar ko‘rinishida ifodalash va ularni integrallash

1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k>1$ *бутун сон*); 3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; ($\frac{p^2}{4}-q<0$ ya’ni, kvadrat uch had haqiqiy ildizga ega emas);

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ ($n>1$ butun son, $\frac{p^2}{4}-q<0$) rasional to‘g’ri kasrlarga ***sodda kasr rasional funksiyalar*** deyiladi. (A, B, p, q, a - haqiqiy sonlar).

Birinchi ikki xildagi funksiyalarni osongina integrallash mumkin, ya’ni,

1) $\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C,$

2) $\int\frac{A}{(x-a)^k}=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$

bo‘ladi. Endi ushbu

3) $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$

integralni ќisoblaymiz.

Oldin xususiy hol $\int\frac{1}{x^2+px+q}dx$ integralni qaraylik. x^2+px+q dan to‘la kvadrat ajratib, $x+\frac{p}{2}=t$ almashtirishdan keyin quyidagini hosil qilamiz:

$$\int\frac{1}{x^2+px+q}dx=\int\frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}dx=\left|\begin{matrix}x+\frac{p}{2}=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)},$$

bu yerda $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Oxirgi integralda 8) jadval integralidan foydalanib,

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{a}\,arctg\,\frac{t}{a} + C = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\,arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \qquad (2)$$

natijani hosil qilamiz.

Endi $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$ integralni hisoblaymiz.

$$Ax+B = (2x+p)\frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B$$

shakl o‘zgartirishdan foydalanib, integralni quyidagicha yozamiz.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{(2x+p)\frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx.$$

Oxirgi tenglikning o‘ng tomonidagi birinchi integral

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln\left|x^2+px+q\right| + C_1$$

bo‘lib, ikkinchi integral (2) formulaga asosan,

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\,arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C_2\,.$$

Shunday qilib,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\,arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

natijaga ega bo‘lamiz.

Bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int \frac{x^4}{x^2+9}\,dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya noto‘g’ri kasr rasional funksiyadan iborat. Uning butun qismini ajratamiz:

$$\begin{array}{r|l} -\ x^4 & x^2+9 \\ \hline x^4+9x^2 & x^2-9 \\ \hline -9x^2 & \\ -9x^2-81 & \\ \hline 81 & \end{array}$$

Demak, $\dfrac{x^4}{x^2+9} = x^2 - 9 + \dfrac{81}{x^2+9}$

bo‘ladi.

Shunday qilib,

$$\int \frac{x^4}{x^2+9}dx =$$

$$= \int\left(x^2 - 9 + \frac{81}{x^2+9}\right)dx = \frac{x^3}{3} - 9x + 81\frac{1}{3}arctg\,\frac{x}{3} + C = \frac{x^3}{3} - 9x + 27arctg\,\frac{x}{3} + C.$$

2-misol. $\int \dfrac{x+3}{x^2-8x+25}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Maxrajdagi kvadrat uch haddan to‘la kvadrat ajratamiz:

$x^2 - 8x + 25 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 25 = (x-4)^2 + 9,$ hamda

$x - 4 = t,\ dx = dt$ almashtirish kiritib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{x+3}{x^2-8x+25}dx = \int \frac{t+4+3}{t^2+9}dt = \int \frac{tdt}{t^2+9} + 7\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+9} + 7\int \frac{dt}{t^2+3^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+9\right| + \frac{7}{3}arctg\,\frac{t}{3} + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 - 8x + 25) + \frac{7}{3}arctg\,\frac{x-4}{3} + C.$$

3.8.4. To‘g’ri kasr rasional funsiyalarni sodda kasrlar ko‘rinishida ifodalash.

$\dfrac{R(x)}{P(x)}$ to‘g’ri kasr rasional funksiyaning maxrajini

$P(x) = (x-a)^r \cdot (x-b)^s .....(x^2 + 2px + q)^t \cdot (x^2 + 2kx + \ell)^m .....,$

ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lsa, bu funksiyani yagona

$$\frac{R(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_r}{(x-a)^r}+\frac{B_1}{(x-b)}+...+\frac{B_s}{(x-b)^s}+...+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q}+...+$$
$$+\frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t}+\frac{F_1x+E_1}{\left(x^2+2kx+\ell\right)}+...+\frac{F_mx+E_m}{\left(x^2+2kx+\ell\right)^m}+... \quad (1)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bunda $r,s,...t,m,$ musbat butun sonlar, $a,\ b,\ p,\ q,\ k,\ \ell$, haqiqiy sonlar.

$A_1,\ A_2,....\ A_r,\ B_1,...,B_s,\ M_1,\ N_1,.....,\ M_t,\ N_t,....$ lar ayrim haqiqiy sonlar. (1) tenglikka to‘g’ri rasional funksiyaning ***sodda kasrlar orqali yoyilmasi*** deyiladi.

(1) yoyilmadagi $A_1,\ A_2,....\ A_r,\ M_1,\ N_1,.....,\ M_t,\ N_t,....$

koeffisiyentlarni topish uchun uni $P(x)$ ga ko‘paytiramiz. $R(x)$ ko‘phad bilan (1) yoyilmaning o‘ng tomonida hosil bo‘lgan ko‘phad o‘zaro teng bo‘lishi uchun bir xil darajali x lar koeffisiyentlari o‘zaro teng bo‘lishi kerak. Bir xil darajali x lar koeffisiyentlarini tenglashtirib $A_1,\ A_2,....\ A_r,\ .....,\ M_1,\ N_1,....,$ noma’lum koeffisentlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu tenglamalar sistemasini yechib aniqmas koeffisiyentlarni topamiz.

Rasional funkiya yoyilmasidagi noma’lum koeffisiyentlarni bunday usul bilan topishga ***noma’lum koeffisiyentlar usuli*** deyiladi.

Bu usulni bir necha misollarda qaraymiz.

1-misol. $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ rasional funksiyani sodda kasrlar yoyilmasi ko‘rinishida yozing.

Yechish. Maxrajni $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$ chiziqli ko‘paytuvchilarga ajratib, (1) formulaga asosan, qo‘yidagicha yozamiz:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{x-2}.$$

Oxirgi tenglikni x^2-5x+6 ga ko‘paytirib $2x-1=A_1(x-2)+A_2(x-3)$ *ёки* $2x-1=(A_1+A_2)x-2A_1-3A_2$ tenglikni hosil qilamiz. Bir xil darajali x lar koeffisiyentlarini tenglashtirib

$$\begin{cases}A_1+A_2=2,\\ -2A_1-3A_2=-1\end{cases}$$

A_1 va A_2 noma'lumlarga nisbatan, chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bundan $A_1 = 5,\ A_2 = -3$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x-2}$$

hosil bo'ldi.

2-misol. $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ rasional kasrni, sodda kasrlar yig'indisi ko'rinishida yozing.

Yechish. (1) formulaga asosan, quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Oxirgi tenglikni $x(x^2+1)^2$ ga ko'paytirib quyidagini hosil qilamiz:

$$x^2-1 = A_1(x^2+)^2 + (M_1x+N_1)x(x^2+1) + (M_2x+N_2)x \quad \text{ёки}$$

$$x^2-1 = (A_1+M_1)x^4 + N_1x^3 + (2A_1+M_1+M_2)x^2 + (N_1+N_2)x + A_1$$

x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 larning koeffisiyentlarini tenglashtirib

$$x^4 \div 2A_1 + M_1 = 0,$$
$$x^3 \div N_1 = 0,$$
$$x^2 \div 2A_1 + M_1 + M_2 = 1,$$
$$x^1 \div N_1 + N_2 = 0,$$
$$x^0 \div A_1 = -1$$

chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemadan $N_1 = 0,\ N_2 = 0,\ A_1 = -1,\ M_1 = 1,\ M_2 = 2$ bo'ladi. Shuning uchun yoyilma quyidagicha

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

bo'ladi.

Endi bir necha integrallarni hisoblaymiz.

3-misol. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{1}{(x-2)(x-3)}$ funksiyani $\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)$ ikkita sodda kasrning
ayirmasi ko‘rinishda yozish mumkin. Shuning uchun,

$$\int\frac{1}{(x-2)(x-3)}dx=-\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right)dx=-\ln|x-2|+\ln|x-3|+C=$$
$$=\ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)+C$$

bo‘ladi.

4-misol. $\int\frac{x-2}{x^3+2x^2}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{x-2}{x^2(x+2)}$ integral ostidagi to‘g’ri rasional funksiyani sodda kasrlar yig’indisi shaklida yozamiz:

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+2}$$

oxirgi tenglikni $x^2(x+2)$ ga ko‘paytirib,

$$x-2=Ax(x+2)+B(x+2)+Cx^2 \quad yoki \quad x-2=(A+C)x^2+(2A+B)x+2B$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Endi x ning bir xil darajalilari koeffisiyentlarini tenglashtirsak, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi.

$$\begin{array}{l|ll|ll} x^2 & A+C=0 & & A+C=0 & \\ x^1 & 2A+B=1 & \text{bundan} & 2A+B=1 & A=1 \\ x^0 & 2B=-2 & & B=-1 & C=-1 \end{array}$$

bo‘ladi. Shunday qilib,

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)}=\frac{1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{-1}{x+2}$$

Natijada

$$\int\frac{x-2}{x^3+2x^2}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\ln|x|+\frac{1}{x}-\ln|x+2|+C=\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$$

bo‘ladi.

3.8.5. Ayrim irrasional funksiyalarni integrallash.

Irrasional funksiyalarni integrallash ko‘p hollarda o‘zgaruvchini almashtirish bilan rasional funksiyalarni integrallashga keltiriladi. Bunday irrasional funksiyalarning ayrimlarini qaraymiz.

1. $\int x^m(a+bx^n)^p$ ko‘rinishdagi integralni hisoblash talab etilsin, bunda m, n, p rasional sonlar, a va b lar no‘ldan farqli o‘zgarmaslar.

1) p butun son bo‘lsa, Nyuton binomi bo‘yicha yoyish bilan integrallanadi;

2) $\frac{m+1}{n}$ butun bo‘lsa, $a+bx^n=t^s$ almashtirish orqali rasionallashtiriladi, bunda s p kasrning maxraji;

3) $\frac{m+1}{n}+p$ butun bo‘lsa, $ax^{-n}+b=t^s$ almashtirish olinib, rasional funksiyaga keltiriladi.

1-misol. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralni $\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})dx$ ko‘rinishida yozib,

$$m=-\frac{2}{3},\ n=\frac{1}{3},\ p=\frac{1}{2},\ \frac{m+1}{n}=\frac{-2/3+1}{1/3}=\frac{1/3}{1/3}=1$$

bo‘lganligi uchun $(1+x^{1/3})=t^2$ almashtirish olsak,

$$x^{1/3}=t^2-1,\ \frac{1}{3}x^{-2/3}dx=2tdt,\quad x^{-2/3}dx=6tdt$$

bo‘ladi. Bularni berilgan integralga qo‘ysak,

$$\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2}dx=\int t\cdot 6tdt=6\int t^2dt=6\cdot\frac{t^3}{3}+C=2(1+\sqrt[3]{x})^{3/2}+C$$

bo‘ladi.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ko‘rinishdagi integralni qaraymiz.

Bunday ko‘rinishdagi ifodalarni integrallash kvadrat uch haddan to‘la kvadrat ajratish bilan $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ yoki $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}$ jadval integrallaridan biriga keltiriladi.

3-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $x^2+2x+5=x^2+2x+1+4=(x+1)^2+4$ to‘la kvadrat ajratib,

$x+1=u$ desak,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int \frac{du}{\sqrt{u^2+4}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+4}\right|+C=\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$$

bo‘ladi.

3) $\int \frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ko‘rinishdagi integral, $\frac{1}{x+\alpha}=t$ almashtirish orqali **2.** ko‘rinishdagi integralga keltiriladi.

4-misol. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{1}{x+1}=t$ bilan almashtirsak,

$$t(x+1)=1,\ tx+t=1,\ tx=1,\ x=\frac{1-t}{t},\ dx=-\frac{1}{t^2}dt$$

bo‘lib,

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}=\int \frac{t\left(\frac{-1}{t^2}\right)dt}{\sqrt{\left(\frac{1-t}{t}\right)^2+2\frac{1-t}{t}+2}}=-\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1-2t+t^2}{t^2}+\frac{2-2t}{t}+2}}=$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t+t^2+2t}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

bu jadval integraldir. (Oxirgi integralni mustaqil bajarishni o‘quvchiga havola qilamiz).

Tayanch ibora va tushunchalar

O‘zgaruvchini almashtirish, bevosita integrallash, bo‘laklab integrallash, bo‘laklab integrallashning maqsadga muvofiqligi. Boshlang’ich funksiya, aniqmas integral, integrallash, aniqmas integral xossalari, asosiy integrallar jadvali. Kasr rasional funksiyalar, to‘g’ri va noto‘g’ri kasr rasional funksiyalar, ko‘p hadni ko‘p hadga bo‘lish, sodda kasrlar, rasional funksiya yoyilmasi, noma’lum koeffisiyentlar usuli, irrasional funksiyalar.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Boshlang’ich funksiya qanday funksiya?
2. Boshlang’ich funksiya va aniqmas integral orasida qanday bog’lanish bor?
3. Integrallash amali nima?
4. Aniqmas integral qanday xossalarga ega?
5. Asosiy integrallar jadvali nimalardan iborat?
6. Integrallash to‘g’ri bajarilganligini qanday tekshirish mumkin?
7. Butun rasional funksiya nimadan iborat?
8. Kasr rasional funksiyalar qanday?
9. To‘g’ri va noto‘g’ri kasr rasional funksiyalr deb nimaga aytiladi?
10. Noto‘g’ri kasr rasional funksiyani integrallash, to‘g’ri rasional funksiyani integrallashga qanday qilib keltiriladi?
11. Sodda kasr rasional funksiyalar deb nimaga aytiladi?
12. Sodda kasr rasional funksiyalar qanday integrallanadi?
13. Aniqmas koeffisiyentlar usuli nima?
14. Qanday funksiyalar sinfiga irrasional funksiyalar deyiladi?
15. Irrasional funksiyalar qanday integrallanadi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $\int \frac{5x^8+6}{x^4}dx$; 2. $\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)dx$; 3. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$

4. $\int \frac{x^2+\sqrt{x}+3dx}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; 5. $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$; 6. $\int\left(5^x+\frac{5^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$; 7. $\int \frac{5+3tg^2x}{\sin^2 x}dx$;

8. $\int\left(\frac{4}{9+x^2}-\frac{5}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$ 9. $\int \frac{dx}{x^2-49}$; 10. $\int \frac{dx}{x^2+16}$;

11. $\int\left(\frac{5}{\sqrt{9-x^2}}-\frac{3}{\sqrt{x^2+3}}\right)dx$; 12. $\int\left(\frac{7}{x^2+7}-\frac{6}{x^2-3}\right)dx$.

2. Ushbu integral hisoblang.

1. $\int \sin 3xdx$. 2. $\int \frac{2x-7}{x^2-7x+5}dx$.

3. $\int e^{-x^3}x^2dx$. 4. $\int \frac{x^2}{1+x^3}dx$. 5. $\int (e^x+e^{-\frac{x}{2}})dx$. 6. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$.

7. $\int (5-2x)^9 dx$. 8. $\int \sqrt[3]{7-3x}dx$. 9. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{6-x}}dx$. 10. $\int \cos(1-3x)dx$.

11. $\int \sin(5x+7)dx$. 12. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$. 13. $\int 3^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. 14. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

15. $\int \frac{1-3\sin x}{\cos^2 x}dx$. 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-5x}}$. 17. $\int x^2 \sin xdx$. 18. $\int x\ln xdx$. 19. $\int arctgxdx$.

20. $\int \arcsin xdx$. 21. $\int x^2e^{2x}dx$. 22. $\int e^x \sin xdx$. 23. $\int (x+3)\sin xdx$.

24. $\int x\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$. 25. $\int xarctgxdx$. 26. $\int \frac{dx}{(3x+1)^3}$. 27. $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+6}dx$.

3. Ushbu rasional funksiyalarni integrallang.

1) $\int \frac{x^3}{x-3}dx$; 2) $\int \frac{x^4}{x^2+25}dx$; 3) $\int \frac{x-5}{(x-2)(x+4)}dx$; 4) $\int \frac{2x+9}{x^2+x+2}dx$;

5) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx$; 6) $\int \frac{5x-1}{2x^2+x-3}dx$; 7) $\int \frac{2x+5}{(x-4)(x+5)}dx$; 8) $\int \frac{6x-7}{x^3-4x^2+4x}dx$.

2. Ushbu irrasional funksiyalarni integrallang.

1) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx$; 2) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$; 3) $\int \frac{7x-5}{\sqrt{\sqrt{5+2x-x^2}}}dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$; 5) $\int \frac{\sqrt{x}+3}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}dx$.

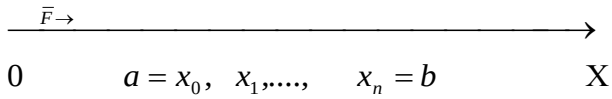
3.9-§.Aniq integral

3.9.1 Aniq integral va uning asosiy xossalari

Aniq integralga keltiriladigan masalalar haqida. Aniq integral matematik tahlilning eng asosiy amallaridan biridir.Yuzalarni, yoy uzunliklarini, hajmlarni, o‘zgaruvchan kuchning bajargan ishini hamda iqtisodning bir qancha masalalari aniq integralga keltiriladi.

1. O‘zgaruvchan kuchning bajargan ishi masalasi. Material nuqta F o‘zgaruvchan kuch ta’sirida OX o‘qi bo‘yicha harakatlanayotgan bo‘lsin. F kuch ta’sirida material nuqta *a* nuqtadan *v* nuqtaga o‘tganda bajarilgan ishni hisoblang. F kuch x ning funksiyasi bo‘ladi. $F(x)$ $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsin.

Yechish: $[a,b]$ kesmani $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ nuqtalar orqali $\lfloor x_{i-1,}x_i\rfloor$ šismiy kesmalarga ajratamiz.



1-chizma.

Mexanikadan ma’lumki kuch o‘zgarmas bo‘lsa, bajarilgan ish $A=F\cdot 1$, bunda F kuch miqdori, l - siljish uzunligi. Har bir qismiy kesmada bittadan nuqta tanlaymiz. Bu nuqtalardagi kuchning qiymatini $F(c_i)$larni hisoblaymiz $(i=1,n)$. Bunda har bir qismiy kesmada bajarilgan ish

$$A_i=F(c_i)\Delta x_i$$

bo‘ladi. $[a,b]$ kesmada bajarilgan ish taqriban

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}F(c_i)\Delta x_i$$

bo‘ladi.

$\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i=\lambda$ deb belgilasak, bajarilgan ishning aniq qiymati

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, *F o‘zgaruvchan kuchning bajargan ishini hisoblash* uchun (1) ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p sondagi cheksiz kichiklar yig’indisining limitini hisoblash kerak ekan. Bunday limitni hisoblashga juda ko‘p sondagi geometrik, texnik, texnologik va iqtisodiy jarayonlardagi masalalar keltiriladi.

2. Aniq integralning ta’rifi va uning geometrik ma’nosi. Yuqoridagi masalani umumiy holda qaraymiz. kesmada uzluksiz funksiya berilgan bo‘lsin. $[a,b]$ kesmani $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1,\ n$ qismiy kesmalarga ajratamiz, har bir qismiy kesmada bittadan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nuqtalar tanlaymiz. Bu nuqtalarda $f(c_i)$ funksiya qiymatlarini hisoblab $f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n$ yig’indini tuzamiz? bu yig’indiga $y = f(x)$ fugksiya uchun $[a,b]$ kesmadagi integral yig’indi deyiladi. $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i = \lambda$ belgilash kiritamiz.

Ta’rif. $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ integral yig’indining $[a,b]$ kesmaning $[x_{i-1},\ x_i](i = 1,2,3,\ldots,n)$ qismiy kesmalarga bo‘linish usuliga va ularda $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nuqtalarning tanlanishiga bog’liq bo‘lmagan $\lambda \to 0$ dagi chekli limiti mavjud bo‘lsa, bu limitga $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi ***aniq integrali*** deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

simvol bilan belgilanadi.

Ta’rifga asosan

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

bo‘lib, $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u *integrallanuvchi* ya’ni bunday funksiyaning *aniq integrali* mavjuddir.

3. Aniq integralning asosiy xossalari

Aniq integral quyidagi asosiy xossalarga ega:

1) chekli sondagi integrallanuvchi funksiyalar algebraik yig'indisining aniq integrali qo'shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx;$$

2) o'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx;$$

3) $[a,b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

bo'ladi;

4) $[a,b]$ kesmada $f(x) \leq g(x)$ tengsizlik bajarilsa,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi;

5) c $[a,b]$ kesmadagi biror nuqta bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi;

6) m va M sonlar $y = f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi mos ravishda eng kichik va eng katta qiymatlari bo'lsa,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi;

7) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$

8) $\int_a^a f(x)dx = 0;$

9) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(n)dn$

bo‘ladi;

10) $y = f(x)$ $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, bu kesmada shunday bir c nuqta topiladiki

$$\int_a^b f(x)dx = f'(c)(b-a)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bunga o‘rta qiymat haqidagi teorema deb ham aytiladi.

4. Aniq integralni hisoblash. N’yuton-Leybnis formulasi.

Aniq integralning ta’rifiga asosan, ya’ni cheksiz ko‘p sondagi cheksiz kichiklar yig’indisining limitini hisoblash ancha qiyinchilikka olib keladi. Shuning uchun aniq integralni hisoblash uchun, boshqa aniqmas integral bilan aniq integral orasidagi bog’lanishga asoslangan usuldan foydalaniladi.

$F(x),[a,b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning boshlang’ich funksiyalaridan biri bo‘lsa

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (2)$$

formula o‘rinli bo‘lib, bunga *N’yuton-Leybnis formulasi* deyiladi. Bundan foydalanib *aniq integralning kattaligi* hisoblanadi.

Shunday qo‘yilib, aniq integralni hisoblash uchun ham, aniqmas integraldagidek, boshlang’ich funksiyani topish kerak ekan. Bunday masala bilan aniqmas integralni hisoblashda to‘laroq shug’ullandik. Demak, aniqmas integralni hisoblashdagi hamma formula va usullar o‘z kuchida qolib, undan aniq integralni hisoblashda ham foydalanamiz.

1-misol. $\int_1^4 x^2 dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$

Eslatma: $y = x^2$ funksiyaning $\frac{x^3}{3}$ boshlang'ich funksiyasini oldik, buning o'rniga ixtiyoriy $\frac{x^3}{3} + C$ boshlang'ich funksiyasini olganda ham natija bir xil bo'ladi. Haqiqatan, ham

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} + C - \left(\frac{1^3}{3} + C\right) = \frac{64}{3} + C - \frac{1}{3} - C = \frac{63}{3} = 21$$

bo'ladi. Shuning uchun bundan keyin $C = 0$ bo'lgan boshlang'ich funksiyani olamiz.

2-misol. $\int_0^5 x\sqrt{x+4}\,dx$ integralni hisoblang:

Yechish; $\sqrt{x+4} = t$ almashtirish olamiz, $x = t^2 - 4,\ dx = 2tdt$ bo'lib,

$x = 0$ bo'lganda, $\sqrt{0+4} = t,\ t = 2,\ \sqrt{5+4} = t,\ t = 3$ bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\int_0^5 x\sqrt{x+4}dx = \int_2^3 (t2-4)t2tdt = \int_2^3 (2t^4 - 8t^2)dt = 2\int_2^3 t^4dt - 8\int_2^3 t^2dt = 2\frac{t^5}{5}\Big|_2^3 - 8\frac{t^3}{3}\Big|_2^3 =$$

$$= \frac{2}{3}(3^5 - 2^5) - \frac{8}{3}(3^3 - 2^3) = \frac{2}{5}\cdot 211 - \frac{8}{3}\cdot 19 = \frac{506}{15} = 33\frac{11}{15}.$$

Demak, *aniq integralda o'zgaruvchini almashtirilganda* o'zgaruvchilar bo'yicha uning integrallash chegaralarini ham almashtirib olinsa, aniqmas integraldagidek oldingi o'zgaruvchiga qaytish kerak emas.

3-misol. $\int_0^\pi x\sin x dx$ integralni hisoblang.

Yechish: *Bo'laklab integrallash*

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b udv$$

formulasidan foydalanamiz:

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi(\cos\pi + \sin x\pi) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\pi(-1) + \sin\pi - \sin 0 = \pi.$$

3.9.2. Aniq integralni taqribiy hisoblash

Hisoblash amaliyotida ko‘pincha boshlang’ich funksiyalari elementar bo‘lmagan, ya’ni chekli ko‘rinishda ifodalab bo‘lmaydigan funksiyalardan olingan integrallar bilan, shuningdek, jadval yoki grafik usulda berilgan funksiyalardan olingan integrallar bilan ish ko‘rishga to‘g’ri keladi. Bunday hollarda Nyuton - Leybnis formulasini qo‘llab bo‘lmaydi va integral taqribiy usullar yordamida hisoblanadi.

Hisoblash mashinalarining jadal taraqqiy etib borishi natijasida aniq integrallarni hisoblashning taqribiy usullari keng tatbiq qilinmoqda.

Integral ostidagi funksiya elementar boshlang’ich funksiyaga ega bo‘lsada, biroq, uni Nyuton - Leybnis formulasi bo‘yicha hisoblash murakkab va katta hajmdagi hisoblash ishlarini talab etadigan hollarda ham taqribiy hisoblash usullari afzal bo‘ladi.

Aniq integralni taqribiy hisoblashning bir necha usullari mavjud bo‘lib ulardan ko‘proq ishlatiladiganlari trapesiyalar va Simpson usullaridir.

1. Trapesiyalar formulasi

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integralni hisoblash talab etilsin $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz $[a,b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$ nuqtalar orqali n ta teng qismiy kesmalarga ajratamiz. Funksiyaning x_i nuqtalaridagi $y_i = f(x_i)$ qiymatlarini hisoblaymiz $(i = 1, n)$. $[x_{i-1}, x_i]$ qismiy kesmalarning uzunligi $\frac{(b-a)}{n}$ kattalik integrallash qadami deyiladi.

Bo‘linish nuqtalaridan $y_0,\ y_1,\ y_2, ...,\ y_n$ ordinatlarni o‘tkazamiz. Ordinatlar oxirlarini to‘g’ri chiziqlar bilan tutashtirib trapesiyalar hosil qilamiz.

Aniq integralning taqribiy qiymati uchun, hosil bo‘lgan trapesiyalar yuzlarining yig’indisini olamiz. Bu holda

$$S=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\cdot\frac{b-a}{n}+\frac{y_1+y_2}{2}\cdot\frac{b-a}{n}+$$

$$+\frac{y_2+y_3}{2}\cdot\frac{b-a}{n}+.....+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$$

Shunday qilib, natijada

$$S=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+y_3+....y_{n-1}\right] \qquad (1)$$

formulani olamiz. (1) formulaga ***trapesiyalar formulasi*** deb ataladi. Bu formulada egri chiziqli trapesiyalarning yuzlarini to‘g’ri chiziqli trapesiyalar yuzlari bilan taqriban almashtirdik. n o‘sib borishi bilan to‘g’ri chiziqli trapesiyalarning yuzi egri chiziqli trapesiyalar yuzlariga cheksiz yaqinlashib boradi.

Bu taqribiy hisoblashda yo‘l qo‘yilgan ***absolyut xato*** .

$$M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

ifodadan katta emasligini ko‘rsatish mumkin, bunda M_2, $|f''(x)|$ ning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

2. Simpson formulasi. $[a,b]$ kesmani $n=2m$ ta juft miqdordagi teng qismlarga bo‘lamiz. Uchta (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2) nuqtalar olib ulardan parabola o‘tkazamiz. Bu parabola bilan $y=f(x)$ funksiyaning $[x_0,x_2]$ kesmadagi grafigini almashtiramiz. Xuddi shunga o‘xshash $y=f(x)$ funksiyaning grafigini $[x_2,x_4]$, $[x_4,x_6]$ va boshqa kesmalarda ham almashtiramiz.

Shunday qilib, bu usulda berilgan $y=f(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan trapesiyaning yuzini $[x_0,x_2]$, $[x_2,x_4]$, $[x_4,x_6]$,..... kesmalarda parabolalar bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiyalar

yuzlarining yig'indisi bilan almashtiriladi. Bunday egri chiziqli trapesiya ***parabolik trapesiya*** deyiladi.

Parabolik trapesiyalar yuzlarini qo'shib,

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})\right]$$

(2)

Bu formula ***Simpson (parabolalar) formulasi*** deyiladi. Simpson formulasining ***absolyut xatosi*** $M_4 \frac{(b-a)^5}{2880n^4}$ dan katta bo'lmaydi, bunda M_4, $\left|f^5(x)\right|$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati. Xatolarni baholash ifodalaridan ma'lumki n^4 kattalik n^2 kattalikka nisbatan tezroq o'sgani uchun Simpson formulasining xatoligi trapesiyalar formulasi xatosiga nisbatan ancha tez kamayadi.

1-misol. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ aniq integral trapesiyalar va Simpson formulalaridan foydalanib taqribiy hisoblansin.

Yechish. $[0,1]$kesmani $x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,$ $x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1$ nuqtalar yordamida 5 ta teng bo'lakka bo'lamiz. Keyin $f(x) = e^{-x^2}$ funksiyaning shu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz.

$$f(x_0) = f(0) = e^0 = 1, \qquad f(x_1) = f(0.2) \approx 0.96079,$$

$$f(x_2) = f(0.4) \approx 0.85214, \qquad f(x_3) = f(0.6) \approx 0.69768,$$

$$f(x_4) = f(0.8) \approx 0.52729, \qquad f(x_5) = f(2) \approx 0.36788.$$

Trapesiyalar formulasi bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{5}\left[\frac{1+0.36788}{2} + 0.96079 + 0.85214 + 0.69769 + 0.52729\right] = 0.74805.$$

Simpson formulasi bo‘yicha, hisoblash uchun $[0,1]$ kesmani $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1$ nuqtalar orqali 4 ta teng bo‘laklarga ajratamiz va bu nuqtalarda funksiyaning qiymatlari

$$y_0 = 1, \quad y_1 = (0.25) \approx 0.9394, \quad y_2 = (0.5) \approx 0.7788,$$

$$y_3 = (0.75) \approx 0.5698, \quad y_4 = (1) \approx 0.3679$$

bo‘ladi.

Simpson formulasiga asosan:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{12}\left[1 + 0.3679 + 4(0.9394 + 0.5698) + 2 \cdot 0.7788\right] \approx 0.7469$$

bo‘ladi.

3.9.3.Aniq integralning tatbiqlari

1. Aniq integral yordamida yassi figuralar yuzlarini hisoblash

$y = f(x)$ funksiya grafigi, $x = a,\ x = b$ ikkita to‘g’ri chiziqlar va OX o‘qi bilan chegaralangan figuraga ***egri chiziqli trapesiya*** deyiladi. Bunday egri chiziqli trapesiyaning yuzi

$$S = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx \qquad (1)$$

formula bilan hisoblanadi (1-chizma)

Umumiy hol, ya’ni $y_1 = f_1(x),\ y_2 = f_2(x),\ f_2(x) \geq f_1(x)$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx \qquad (2)$$

aniq integralga teng bo‘ladi .

$x = \varphi(y),\ y = c,\ y = d,\ x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza

$$S_2 = \int_c^d x\,dy = \int_c^d \varphi(y)\,dy \qquad (3)$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Egri chiziq parametrik

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

tenglama bilan berilgan bo‘lsa, yuza

$$S = \int_{t_2}^{t_2} y(t)x(t)dt$$

(4)

formula bo‘yicha hisoblanadi.

4-misol. $xy = 8,\ x = 1,\ x = e,\ y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani hisoblang

Yechish. $y = 8/x$ bo‘lib, (3) formulaga asosan,

$$S_1 = \int y dx = \int \frac{8}{x} dx = 8\ln x\Big| = 8(\ln e - \ln 1) = 8.$$

5-misol. $y = x^2, y^2 = x$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani toping.

Yechish: $\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x \end{cases}$

tenglamalar sistemasidan $x^4 = x, x^4 - x = 0,\ x_1 = 0; x_2 = 1$ kesishish nuqtalarining abssissalari bo‘lib, bu yuza

$$S = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right]dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1 \quad -\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{3}$$

bo‘ladi.

6-misol. Ellipsning

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

parametrik tenglamasidan foydalanib uning yuzini toping.

Yechish. Ellips koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrikligidan foydalanib, hamda $x = 3\cos t$ tenglamada $x = o, x = 3$ bo‘lganda

$t_1 = \pi/2$, $t_2 = 0$ bo‘lganligini hisobgaolib,

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y dx = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t(-3\sin t)dt = 24\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 24\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt =$$

$$= 12t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{12}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} 12\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - 6(\sin\pi - \sin 0) = 6\pi.$$

2. **Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash.** To‘g’ri burchakli koordinatlar sistemasida $y = f(x)$ $[a,b]$ kesmada silliq (ya’ni $y = f(x)$ hosila uzluksiz) bo‘lsa, bu egri chiziq yoyining uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \qquad (5)$$

formula yordamida hisoblanadi.

Egri chiziq parametrik tenglama

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

bilan berilgan bo‘lsa, yoy uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Silliq egri chiziq qutb koordinatalarida $r = r(\varphi),\ (\alpha \le \varphi \le \beta)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, yoy uzunligi

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi \qquad (6)$$

formula bilan hisoblanadi.

7-misol. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

astroida yoyining uzunligini toping.

Yechish: Astroida koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lganligi uchun 1/4 yoy uzunligini topamiz.

Oshkormas funksiya hosilasiga asosan

$\frac{2}{3x^{-\frac{1}{3}}} + \frac{2}{3y^{-\frac{1}{3}}} y' = 0$ bundan, $y' = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$. Yoy uzunligi formulasiga asosan,

$$l = 4\int_0^a \sqrt{1+(y')^2}\,dx = 4\int_0^a \sqrt{1+\left(\sqrt[3]{y}/\sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx =$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx = 4\int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx = 4\sqrt[3]{a}\int_0^a x^{-\frac{1}{3}}dx = 4\sqrt[3]{a}\,\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_0^a = 4\frac{3}{2}\sqrt[3]{a}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}-0\right) = 6a.$$

3. Aylanma jism hajmini hisoblash

$y = f(x),\ x = a,\ x = b,\ y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmi

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

(7)

aniq integral bilan hisoblanadi.

$x = \varphi(y),\ y = c,\ y = d,\ x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmi

$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$$

(8)

formula bilan hisoblanadi.

8-misol. $y^2 = 2x$ parabola, $x = 3$ to‘g’ri chiziq va OX o‘qi bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmini hisoblang.

Yechish. Masala shartiga ko‘ra x o dan 3 gacha o‘zgaradi. Demak,

$$V_x = \pi\int_0^3 y^2 dx = \pi\int_0^3 2xdx = \pi x^2\Big|_0^3 = \pi(3^2 - 0^2) = 9\pi\ .$$

9-misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

Yechish. Bunday jismga aylanma ellipsoid deyiladi. Ellips tenglamasidan

$x^2 = a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$ bo‘lib, integralning chegaralari $c=-b,\ d=b$ bo‘ladi. (8) formulaga asosan,

$$V_y = \pi\int_{-b}^{b} a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy = \pi a^2\int_{-b}^{b} dy - \frac{\pi a^2}{b^2}\int_{-b}^{b} y^2dy = \pi a^2 y\Big|_{-b}^{b} - \pi\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{-b}^{b} =$$

$$= \pi a^2\left[b-(-b)\right] - \pi\frac{a^2}{3b^2}\left[b^3-(-b)^3\right] = 2\pi a^2 b - \frac{2}{3}\pi a^2 b = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Demak, $a=b=R$ bo‘lsa, shar hosil bo‘lib $V_{sh} = \frac{4}{3}\pi R^3$ bo‘ladi.

3.9.4. Aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlari

Endi aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlarini qaraymiz.

1). Ma’lumki, ***mehnat unumdorligi*** ish kuni mobaynida o‘zgaruvchi miqdordir. Mehnat unumdorligi $y=f(x)$ funksiya bilan ifodalansin, bunda x ish kunining boshlanishidan hisoblangan vaqt oralig’i, $f(x)$ esa vaqtning shu onidagi (momentidagi) ***mehnat unumdorligini*** bildiradi. Mehnat unumdorligining ish kunining 4-soatidagi hajmini hisoblash masalasi qo‘yilgan bo‘lsin.

Vaqtning (3,4) oralig’ini eng kattasining uzunligi Δx bo‘lgan oraliqlarga bo‘lamiz va $f(x)$ funksiya bu kichik oraliqlarda o‘zgarmas desak ishlab chiqarish mehnt unumdorligini $f(x)\,\Delta x$ ko‘paytmaga teng bo‘ladi. Shunday qilib, ish kunining 4-soatidagi ishlab chiqarish mehnat unumdorligi

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{3}^{4} f(x)\,\Delta x = \int_{3}^{4} f(x)dx$$

tenglik bilan ifodalanadi.

2). Mahsulotlar omboriga vaqt birligida keltiriladigan ***mahsulot miqdorini*** $f(x)$ va mahsulot omborga kelib tushushidan boshlangan vaqt birligi x bo‘lsa, x dan $x+\Delta x$ vaqt oralig’idagi omborga $f(x)\,\Delta x$ birlik

mahsulot keladi. Demak, omborga mahsulot uzluksiz kelib tursa, undagi ***tovarning zahirasi***

$$\int_0^x f(x)dx$$

bilan ifodalanadi.

3). Mashinasozlik sanoati biror xildagi stanoklarni ishlab chiqaradi va yillik ishlab chiqarishi o‘zgarmas a ga teng bo‘lib, x shu stanoklar ishlab chiqarilgan yillar bo‘lsin.

Vaqtning t onidagi (momentidagi) stanoklar soni (ular ishdan chiqmagan deb olinadi).

$$\int_0^t adx = [ax]_0^t = at$$

bo‘ladi. Agar ***mahsulot ishlab chiqarish hajmi*** arifmetik progressiya bo‘yicha o‘suvchi ya’ni

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

bo‘lsa, stanoklar soni

$$\int_0^t (a_0 + a_1 x)dx = \left[a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} \right]_0^t = a_0 t + \frac{a_1 t^2}{2}$$

tashkil etadi.

4). Yillik *daromad t vaqtning funksiyasi* $D = f(x)$ *bo‘lsin*. Prosent (foiz) me’yori ulushi i bo‘lib, foizlar ustiga qo‘shib uzluksiz hisoblanadi. Daromadning t yilga hisoblangan diskontli hajmini toping. Diskont deb oxiri jami mablag’ bilan boshlang’ich mablag’ orasidagi farqqa aytiladi.

Bu miqdorni hisoblash uchun, vaqt oralig’i t ni n ta teng bo‘laklarga ajratamiz. Vaqtning juda ham kichik Δt oralig’ida daromadni o‘zgarmas deb $f(t)\,\Delta t$ ga teng qilib olish mumkin. Uzluksiz ustiga qo‘shib hisoblangan foizlarda diskontli daromad quyidagicha hisoblanadi:

$$\frac{f(t)\Delta t}{e^{it}} = f(t)\Delta t e^{-it}.$$

$(0,t)$ vaqt oralig’idagi diskontli daromad miqdori

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{0}^{t} f(t)e^{-it}\Delta t = \int_{0}^{t} f(t)e^{-it}dt$$

bo‘ladi.

Xususiy holda, yillik daromad o‘zgarmas bo‘lsa, ya’ni $f(x) = a$ bo‘lsa, diskontli daromad

$$d = \int_{0}^{t} ae^{-it}dt = a\int_{0}^{t} fe^{-it}dt = a\left[-\frac{1}{i}e^{-it}\right]_{0}^{t} = \frac{a}{i}\left(1 - e^{-it}\right)$$

bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar.

Yuzalarni hisoblash, egri chiziqli trapesiya, egri chiziq yoyining aylanma jism hajmi, o‘zgaruvchan kuchning bajargan ishi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday masalalar aniq intgralga keltiriladi?
2. Integral yig’indi qanday tuziladi?
3. Aniq integral deb nimaga aytiladi?
4. Aniq integral qanday belgilanadi?
5. Funksiya integrallanuvchi bo‘lishi uchun qanday xossaga ega bo‘lishi kerak?
6. Aniq integralning asosiy xossalari nimalardan iborat?
7. Nyuton-Leybnis formulasini yozing?
8. Aniq integralni bo‘laklab integrallash nimadan iborat?
1. Aniq integral yordamida qanday yuzalarni hisoblash mumkin?
2. Egri chiziq yoyining uzunligi qanday formula yordamida hisoblanadi?
3. Aylanma jism hajmini hisoblash formulasi nimadan iborat?
4. O‘zgaruvchan kuchning bajargan ishi aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?
5. Mehnat unumdorligi funksiyasi nima?
6. Ishlab chiqarish mehnat unumdorligini aniq integral yordamida hisoblash mumkinmi va qanday?
7. Omborga keltirilgan mahsulotlar miqdorini aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?

8. Mahsulot ishlab chiqarish arifmetik progressiya bo‘yicha o‘suvchi bo‘lsa, uning hajmi aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?

9. Yillik daromad funksiyasi nima?

10. Diskontli daromad nima va u aniq integral yordamida qanday hisoblanadi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Aniq integralni hisoblang

1. $\int_2^4 (x^3 + x)\,dx$. 2. $\int_1^e \frac{1}{x}dx$. 3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 a}$. 4. $\int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

5. $\int_{-5}^{2} \frac{dx}{x^2 + 4x - 21}$. 6. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}$. 7. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$. 8. $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx$.

9. $\int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}\,dx$. 10. $\int_{\pi}^{0} x\cos x\,dx$.

1. Qo‘yidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning yuzlarini hisoblang.

1) $y = x^2 - 6x + 8,\ \ y = 0$; 2) $x = 4 - y^2,\ \ x = 0$; 3) $y = \ln x,\ \ x = e,\ \ y = 0$;

4) $y = \frac{x^2}{2}$ parabola, $x = 1,\ x = 3$ to‘g’ri chiziqlar va OX o‘qi bilan chegaralangan;

5) $x = 2 - y^2 - y^2,\ \ x = 0$; 6) $y = 2 - x^2,\ \ y = x^2$;

7) $y = x^2 + 4x,\ y = x + 4$; 8) $x = 3t^2,\ \ y = \sqrt[3]{t} - t^3$.

2. $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

3. 1) $y^2 = (x+4)^3$ *va* $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

2) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

IV BOB. BIRINCHI TARTIBLI VA IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

4.1-§. Birinchi tartibli va ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

4.1.1.Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

***1. Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar*.**

1-ta'rif. Erkli o'zgaruvchi, noma'lum funksiya hamda uning hosilalari yoki differensiallari orasidagi munosabatga *differensial tenglama* deyiladi.

Noma'lum funksiya faqat bitta o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglamaga *oddiy differensial tenglama deyiladi*.

Noma'lum funksiya ikki yoki undan ko'p o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglamalarga, *xususiy hosilali differensial tenglamalar* deyiladi.

2-ta'rif. Differensial tenglamaga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibiga *differensial tenglamaning tartibi* deyiladi.

$y'' = 3x^2$, $y''' = \cos x$ tenglamalar mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli tenglamalarga misol bo'ladi.

Umumiy holda n-tartibli differensial tenglama

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

ko'rinishda belgilanadi.

3-ta'rif. *Differensial tenglamaning yechimi* yoki *integrali* deb tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday differensiallanuvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Differensial tenglama yechimining grafigiga *integral chiziq* deyiladi. Masalan, $\frac{dy}{dx} = 2x,\ \ y = x^2$ bu berilgan differensial tenglamaning yechimi bo'lib, bu holda integral chiziq paraboladan iborat bo'ladi.

Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalasi berilgan tenglamaning barcha yechimlarini topish va bu yechimlarning hossalarini o‘rganishdan iborat.

Algebraik tenglamalardagidek hamma differensial tenglamalarni yechish mumkin bo‘ladigan umumiy usullar yo‘q. Differensial tenglamalarning har bir turiga xos yechish usulidan foydalaniladi.

***2. Birinchi tartibli tenglamalar*.** Birinchi tartibli tenglama umumiy holda

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

ko‘rinishda yoziladi. (1) tenglamani y ga nisbatan yechsak

$$y' = f(x, y) \quad yoki \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2)$$

bo‘ladi. (2) tenglamaning o‘ng tomoni faqat x ning funksiyasi bo‘lsa, tenglama

$$y' = f(x) \qquad (3)$$

ko‘rinishida bo‘lib, oxirgi tenglikdan bevosita ko‘rish mumkinki, bunday tenglamaning yechimini topish $f(x)$ funksiyaning boshlang’ich funksiyasini topishdan iborat bo‘ladi, ya’ni $y = F(x) + C, \quad [F(x)]' = f(x)$. Shunday qilib, (3) ko‘rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglamaning yechimi cheksiz ko‘p yechimlar to‘plamidan iborat bo‘ladi.

4-ta’rif. $y = \varphi(x, C)$ x ning funksiyasi har bir C ixtiyoriy o‘zgarmas bo‘lganda (2) tenglamani qanoatlantirsa, uning ***umumiy yechimi*** deyiladi.

5-ta’rif. C ixtiyoriy o‘zgarmasning muayyan qiymatida umumiy yechimdan olinadigan yechimga ***xususiy yechim*** deyiladi.

Umumiy yechimdan yagona yechimni olish uchun ko‘pincha qo‘shimcha

$$y(x_0) = y_0 \qquad (4)$$

shartdan foydalaniladi, bu yerda x_0, y_0 lar berilgan sonlar bo‘lib, bu shartga boshlang’ich shart deb ataladi.

6-ta'rif. $y' = f(x, y)$ differensial tenglamaning (4) boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga ***Koshi masalasi*** deyiladi.

1-misol. $y' = \frac{5}{\cos^2 x}$, differensial tenglama uchun $y(0) = 3$ bo‘ladigan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi Koshi masalasini yeching.

Yechish. Oldin berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = \int \frac{5}{\cos^2 x} dx = 5tgx + C$$

Endi boshlang'ich shartdan foydalanib, $5tg0 + C = 3,$ bundan $C = 3$ kelib chiqadi. Demak, Koshi masalasining yechimi $y = 5tgx + 3$ bo‘ladi.

3. ***O‘zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan birinchi tartibli tenglamalar***

7-ta'rif. $M(x)dx + N(y)dy = 0$ ko‘rinishdagi tenglamaga *o‘zgaruvchilari ajralgan* differensial tenglama deyiladi.

Bunday differensial tenglamani bevosita, tenglikni integrallab uning umumiy yechimi topiladi, ya'ni

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

bo‘ladi.

2-misol. $xdx + ydy = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani bevosita integrallab

$$\int xdx + \int ydy = C, \qquad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \quad yoki \quad x^2 + y^2 = C_1,$$

umumiy yechim bo‘ladi .

8-ta'rif. $y' = f_1(x) f_2(y)$ *yoki* $\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$

ko‘rinishdagi tenglamaga *o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama* deyiladi.

Bunday differensial tenglamani $f_2(y)$ ga bo‘lib, dx ga ko‘paytirib

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaga keltirish bilan yechimi topiladi.

3-misol. $\frac{dy}{dx} = x(1+y^2)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. O‘zgrauvchilarini ajratib $\frac{dy}{1+y^2} = xdx$ tenglamani hosil qilamiz. Oxirgi tenglamani bevosita integrallab,

$$arctg\ y = \frac{x^2}{2} + C$$

likka ega bo‘lamiz. Oxirgi tenglikdan

$$y = tg(\frac{x^2}{2} + C)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

4. Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar. $f(x,y)$ funksiya uchun $f(kx,ky) = k^\alpha f(x,y)$ tenglik bajarilsa, $f(x,y)$ funksiyaga α tartibli bir jinsli funksiya deyiladi, bunda α biror son. Masalan, $f(x,y) = xy - y^2$ funksiya uchun $f(kx,ky) = kx \cdot ky - (ky)^2 = k^2(xy - y^2)$ bo‘lib, $f(x,y) = xy - y^2$ funksiya $\alpha = 2$ tartibli bir jinsli funksiya bo‘ladi. $f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}, \alpha = 0$ tartibli bir jinsli funksiyadir(buni tekshirib ko‘ring).

9-ta’rif. $y' = f(x,y)$ differesial tenglamada $f(x,y)$ funksiya no‘linchi tartibli bir jinsli funksiya bo‘lsa, bunday differensial tenglamaga ***birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama*** deyiladi.

Bir jinsli, tenglama $y = xv(x)$ almashtirish bilan o‘zgaruvchilari ajraladigan

$$xv' = f(1,v) - v$$

differensial tenglamaga keltiriladi.

4-misol. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y = x \cdot v$ almashtirish olib, $y' = x'v + xv'$ ekanligini hisobga olsak, berilgan tenglamadan

$$v + xv' = \frac{x \cdot xv + x^2v^2}{x^2}$$

bo‘lib, $v + xv' = v + v^2$ yoki $xv' = v^2$, $\frac{xdv}{dx} = v^2$

bo‘ladi. Oxirgi tenglamada o‘zgaruvchilarini ajratsak,

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x};$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$-\frac{1}{v} = \ln|x| + \ln c,$$

bo‘lib,

$$\ln|cx| = -\frac{1}{v}, \quad v = \frac{y}{x}$$

bo‘lganligi uchun

$$\ln|cx| = -\frac{x}{y}, \quad yoki \quad y = -\frac{x}{\ln|cx|}$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

5. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Bunday tenglama

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

ko‘rinishda bo‘lib, $p(x)$ *va* $g(x)$ lar berilgan funksiyalar. Bunday tenglamani yechish uchun $z = u(x)y$ almashtirish olib

$$\frac{dz}{dx} + \left[p(x) - \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \right] z = g(x)u(x) \qquad (1)$$

tenglamani hosil qilamiz. $u(x)$ funksiyani shunday tanlaymizki,

$$p(x) - \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = 0$$

bo‘lsin. Bundan $u(x) = e^{\int p(x)dx}$ bo‘lib, bu holda (1) tenglama

$$\frac{dz}{dx} = g(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bevosita integrallasak

$$z = \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

hosil bo‘ladi.

Endi izlanayotgan y funksiyaga qaytib

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx\right] \qquad (2)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

1-misol. $y' + xy = x$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama birinchi tartibli chiziqli tenglama bo‘lib $p(x) = x, \quad g(x) = x$ ligini hisobga olib (2) formulaga asosan,

$$y = e^{-\int xdx}\left[C + \int x \cdot e^{\int xdx}dx\right] = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C + \int x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}\,dx\right] = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C + \int \cdot e^{\frac{x^2}{2}}d(\frac{x^2}{2})\right] =$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}} + C). \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}} + C).$$

umumiy yechim bo‘ladi.

Tayanch iboralar

Differensial tenglama, oddiy differensial tenglama, xususiy hosilali differensial tenglama, differensial tenglamaning tartibi, differensial tenglama yechimi, integral chiziq, birinchi tartibli differensial tenglama, Koshi masalasi, boshlang’ich shartlar, o‘zgaruvchilari ajralgan, o‘zgaruvchilari ajraladigan, birinchi tartibli bir jinsli, birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar, Bernulli tenglamasi, Rikkati tenglamasi, to‘la differensialli tenglama, integrallovchi ko‘paytuvchi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Oddiy differensial tenglama qanday tenglama?
3. Xususiy xosilali differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
4. Differensial tenglamaning tartibi nima?

5. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb nimaga aytiladi?

6. Umumiy va xususiy yechimlar qanday yechimlar?

7. Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalasi nimadan iborat?

8. Boshlan□ich shart deb nimaga aytiladi?

9. Qanday masalaga Koshi masalasi deyiladi?

10. Qanday tenglamaga o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama deyiladi?

11. Birinchi tartibli bir jinsli tenglama deb nimaga aytiladi?6.

Mustaqil bajarish uchun misollar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

$$1)\ (1+y)dy-(1-x)dx=0; \qquad 2)\ (xy^2+x)dx=(y-x^2y)dy;$$

$$3)\ x^2dy+(y-1)dx=0; \qquad 4)\ 2(xy+y)dx=xdy.$$

2. Quyidagi differensial tenglamalarning berilgan boshlang’ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini toping:

$$1)\ x^2dx+ydy=0,\ \ x=0\ \ da\ \ y=1;$$

$$2)\ (1+x^2)dy-2x(y+3)dx=0,\ \ x=0\ bo'\lg anda\ \ y=-1;$$

$$3)\ (1+x)ydx=(y-1)xdy,\ \ x=1\ da\ \ y=1.$$

3. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

$$1)\frac{dy}{dx}=\frac{(x-y)y}{x^2}\ ;\ \ 2)\ x^2y'=y^2-xy+x^2;$$

$$3)\ (x^2-2xy)dy=(xy-y^2)dx.$$

4. Boshlang’ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarni toping:

$$1)\ \ xy^2-y'=x^3+y^3,\quad x=1\quad bo'\lg anda\quad y=3;$$

$$2)\ (x-y)dx+xdy=0,\quad x=1\quad bo'\lg anda\quad y=0;$$

$$3)\ \ y^2dx+(x^2-xy)dy=0,\quad x=1\quad da\quad y=1.$$

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

1) $y' - \frac{y}{x} = -1$; 2) $y' + y = e^{-x}$; 3) $x^2y' - 2xy = 3$; 4) $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2$;

5) $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$; 6) $(2x+1)y' + y = x$; 7) $y' - ytgx = ctgx$;

8) $y' + y\cos x = \sin 2x$.

2. Quyidagi differensial tenglamalarning xususiy yechimlarini toping:

1) $xy' + y = 3,\ x = 1\ da\ \ y = 1$; 2) $(1 + x^2)y' - xy = 2x,\ x = 0\ \ bo'lg\ anda\ \ y = 0$;

3) $xy' + y = x + 1,\ \ x = 2\ \ bo'lg\ anda\ \ y = 3$.

3. 1) $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning $x = -1$ bo‘lganda $y = 1$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

2) $y' + \frac{y}{3} = \frac{x+1}{3y^3}$ tenglama uchun $x = 1$ bo‘lganda $y = -1$ boshlang’ich shart bajariladigan Koshi masalasini yeching.

4.1.2. O‘zgarmas koeffisentli yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

1. ***Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar.*** Fizika, mexanika, texnika va iqtisodning juda ko‘p masalalarini yechish ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarga keltiriladi.

Differensial tenglamada noma’lum funksiya va uning hosilalari birinchi darajada qatnashsa bunday tenglamaga chiziqli deyiladi. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x) \qquad (1)$$

bu yerda y noma’lum funksiya, $p(x)$, $g(x)$, $f(x)$ lar biror (a,b) oraliqda berilgan uzluksiz funksiyalar, $f(x) = 0$ bo‘lsa, (1) tenglamaga **bir jinsli chiziqli differensial tenglama** deyiladi. $f(x) \neq 0$ **bo‘lsa bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglama** deyiladi.

Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar yechimini topishda chiziqli bog’langan va chiziqli bog’lanmagan funksiyalar tushunchasidan foydalaniladi.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar biror $[a,b]$ kesmada berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Shunday α_1, α_2 o‘zgarmas sonlar topilsaki, ulardan hyech bo‘lmaganda bittasi no‘ldan farqli bo‘lganda

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \qquad (2)$$

ayniyat o‘rinli bo‘lsa, $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalarga **chiziqli bog’langan funksiyalar** deyiladi.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli bog’langan bo‘lsa, ular proporsianal bo‘ladi, ya’ni, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ bo‘lib, $\alpha_1 \neq 0$ bo‘lsa,

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \ \ yoki \ \ \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{-\alpha_2}{-\alpha_1}, \ \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = const$$

bo‘ladi.

Masalan, $y_1(x) = 4x^2$ *va* $y_2 = x^2$ funksiyalar chiziqli bog’langan, chunki $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{4x^2}{x^2} = 4.$

2-ta’rif. (2) tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bo‘lgandagina bajarilsa, $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalarga **chiziqli bog’lanmagan funksiyalar** deyiladi.

Funksiyalarning chiziqli bog’langan yoki chiziqli bog’lanmaganligini

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2{}' - y_2 y_1{}'$$

Vronskiy determinanti yordamida tekshirish mumkin. $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda chiziqli bog’langan bo‘lsa, ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no‘lga teng bo‘ladi. Bu funksiyalar uchun (a,b) oraliqda tuzilgan Vronskiy determinanti no‘ldan farqli bo‘lsa ular chiziqli bog’lanmagan bo‘ladi.

2. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar. Fan va texnika hamda iqtisodning ko‘p

masalalari (1) tenglamada $p(x)$ va $g(x)$ funksiyalar o‘zgarmas sonlar bo‘lgan holdagi tenglamalarga keltiriladi. Shuning uchun bu funksiyalar o‘zgarmas koeffisiyentlar bo‘lgan holni alohida qaraymiz. Bu holda bir jinsli tenglama

$$y'' + py' + gy = 0 \qquad (3)$$

ko‘rinishda bo‘lib p, g lar o‘zgarmas koeffisiyentlar. Bunday ko‘rinishdagi tenglamaga ***ikkinchi tartibli, o‘zgarmas koeffisiyentli, chiziqli, bir jinsli differensial tenglama*** deyiladi. (3) ko‘rinishdagi tenglamaning yechimini topish bilan qiziqamiz.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (3) tenglamaning (a,b) oraliqda chiziqli bog’lanmagan yechimlari bo‘lsa,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (4)$$

funksiya uning umumiy yechimi bo‘ladi, bu yerda c_1 va c_2 ixtiyoriy o‘zgarmaslar. Bu funksiyani (3) tenglamaga bevosita qo‘yib ko‘rsatish mumkin (buni bajarib ko‘ring).

1-misol. $y'' - y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bevosita qo‘yish bilan tekshirib ko‘rish mumkinki,

$y_1(x) = e^x$ va $y_2(x) = e^{-x}$ berilgan tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Bu yechimlar chiziqli bog’lanmagan yechimlar bo‘ladi, chunki Vronskiy determinanti

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x e^{-x} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Demak, (4) formulaga asosan, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ funksiya berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

Shunday qilib, (3) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topish uchun, uning ikkita chiziqli bog’lanmagan xususiy yechimini topish kifoya.

(3) tenglamaning yechimini $y = e^{rx}$, ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda $r -$ noma’lum son. $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$, bo‘lib,(3) tenglamadan

$$r^2 e^{rx} + pre^{rx} + ge^{rx} = 0 \quad yoki \quad r^2 + pr + g = 0, \ (e^{rx} \neq 0) \qquad (5)$$

bo‘ladi. (5) tenglik bajarilsa $y = e^{rx}$ funksiya (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

(5) tenglamaga (3) differensial tenglamaning ***xarakteristik tenglamasi*** deyiladi. Xarakteristik tenglamaning yechimlari

$$r_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - g} \quad va \quad r_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - g}$$

bo‘lib, bunda quyidagi uchta hol bo‘lishi mumkin:

1) r_1 va r_2 lar haqiqiy va har xil, ya’ni $r_1 \neq r_2$;

2) r_1 va r_2 haqiqiy va teng (karrali), ya’ni $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$;

3) r_1 va r_2 kompleks sonlar, ya’ni $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, bunda;

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Har bir holni alohida qaraymiz:

1) bu holda $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$ funksiyalar chiziqli bog’lanmagan xususiy yechimlar bo‘lib, umumiy yechim

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \qquad (6)$$

bo‘ladi.

2-misol. $y'' - 5y' + 6y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Xarakteristik tenglamaning ildizlari

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad r_1 = 2; \qquad r_2 = 3$$

bo‘lib, umumiy yechim (6) formulaga asosan

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

bo‘ladi.

2) Ikkinchi holda, xarakteristik tenglamaning ildizlari teng

$r_1 = r_2$ *va* $y_1(x) = e^{r_1 x}$ bitta xususiy yechim bo‘ladi. Ikkinchi xususiy yechimni $y_2(x) = xe^{r_1 x}$ ko‘rinishda tanlaymiz. Bu funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi, haqiqatan ham

$$y_2(x) = xe^{r_1 x}, \quad y_2' = e^{r_1 x}(1 + r_1 x), \quad y_2''(x) = e^{r_1 x}(r_1^{\,2} + 2r_1)$$

ifodalarni (3) tenglamaga qo‘yib

$$x(r_1^{\,2} + pr_1 + g) + (2r_1 + p) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. r_1 xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lganligi uchun oxirgi tenglikdagi birinchi qavs aynan no‘lga teng, $r_1 = r_2 = -\dfrac{p}{2}$ bo‘lganligi uchun ikkinchi qavs ham aynan no‘lga teng.

Demak, $y_2(x) = xe^{r_1 x}$ funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi, hamda $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ yechimlar chiziqli bog’lanmagan (tekshirib ko‘ring). Shunday qilib,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 xe^{r_1 x} \qquad (7)$$

umumiy yechim bo‘ladi.

3-misol. $y'' + 6y' + 9y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

bo‘lib, ildizlari $r_1 = r_2 = -3$ bo‘ladi (tenglamani yechib ko‘rsating). Xarakteristik tenglamaning ildizlari o‘zaro teng, (7) formulaga asosan $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 xe^{-3x}$ funksiya berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

3) Xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks, qo‘shma:

$r_1 = \alpha + i\beta, \; r_2 = \alpha - i\beta$ bo‘lganda xususiy yechimlarni

$y_1(x) = e^{r_1 x} = e^{(\alpha+\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta x}$

$y_2(x) = e^{r_2 x} = e^{(\alpha-\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta x}$

ko‘rinishda olish mumkin. Bu ifodalarga

$e^{\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$

Eyler formulasini tatbiq etsak,

$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$

tengliklar hosil bo‘ladi. Ma’lumki, bu funksiyalarning chiziqli kombinasiyasi ham bir jinsli tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Shuning uchun

$$y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad va \quad y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

funksiyalar ham (3) tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Bu yechimlar chiziqli bog’lanmagan, chunki ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no‘ldan farqli (tekshirib ko‘ring).

Demak,

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) \qquad (8)$$

(3) tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

4-misol. $y'' + 6y' + 13y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamaning ildizlari:

$$r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 13}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2};$$

$r_1 = -3 + 2i, \quad r_2 = -3 - 2i$ bo‘ladi. Bu ildizlar kompleks qo‘shma bo‘lib uchinchi holga mos keladi. $\alpha = -3, \ \beta = 2$ ekanligini hisobga olib (8) formulaga asosan umumiy yechim,

$$y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$$

bo‘ladi.

Endi ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli bir jinsli tenglama uchun berilgan boshlang’ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topishni, ya’ni Koshi masalasini qaraymiz.

5-misol. $y'' - y' - 2y = 0$ differensial tenglamaning $x = 0$ bo‘lganda $y = 8, \quad y' = 7$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli, bir jinsli, chiziqli tenglamadir. Unga mos xarakteristik tenglama

$$r^2 - r - 2 = 0$$

bo‘lib, $r_1 = -1, \ r_2 = 2$ uning ildizlari bo‘ladi. Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan hosila olsak,

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$$

bo‘lib , $x = 0$ bo‘lganda $y = 8,\ \ y' = 7$ boshlang’ich shartlarga asosan,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -C_1 + 2C_2 = 7 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglamalar sistemasidan $C_1 = 3,\ \ C_2 = 5$ larni aniqlaymiz. Shunday qilib, izlanayotgan xususiy yechim

$$y(x) = 3e^{-x} + 5e^{2x}$$

bo‘ladi.

4.1.3.Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar

1. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar . Bunday tenglama

$$y'' + py' + gy = f(x) \qquad (1)$$

ko‘rinishda bo‘lib, bu yerda p, g o‘zgarmas koeffitsiyentlar, $f(x)$ berilgan uzluksiz funksiya.

Chiziqli **bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi,** bunday tenglamaning birorta xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig‘indisidan iborat bo‘ladi, ya’ni $\overline{y}$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi y_1 bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimi bo‘lsa, umumiy yechim

$$y(x) = \overline{y}(x) + y_1(x) \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu fikrga (2) echimni (1) tenglamaga qo‘yib ko‘rish bilan ishonish mumkin (buni bajarib ko‘ring).

2.Bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimini topish usullari.

(1) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\overline{y(x)}$ ni topishni yuqorida o‘rgandik. Endigi vazifa bir jinsli bo‘lmagan

tenglamaning birorta xususiy yechimini topishdan iborat bo‘ladi. (1) tenglamada $f(x)$ funksiya:

1) $f(x)=e^{\alpha x}P(x),$ bu yerda $P_n(x)$ $n-$ darajali ko‘p had;

2) $f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$

ko‘rinishda bo‘lganda xususiy yechimni topish masalasini qaraymiz.

Birinchi holda xususiy yechimni

$$y_1(x)=x^k e^{\alpha x}Q_n(x)$$

ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda k harakteristik tenglama ildizlarining α ga teng bo‘lganlari soni (0,1,2 bo‘lishi mumkin), $Q_n(x)$, $P_n(x)$ bilan bir xil darajali, lekin aniqmas koeffitsiyentli ko‘phad. Bu holga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $y''+2y'-3y=e^{2x}(25x^2-47)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz: bir jinsli tenglama $y''+2y'-3y=0$ bo‘lib, uning harakteristik tenglamasi $r^2+2r-3=0$ bo‘ladi. Uning ildizlari

$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 3}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2},\qquad r_1=-3,\quad r_2=1$$

bo‘lib, birjinsli tenglamaning umumiy yechimi $\overline{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$ bo‘ladi.

Endi berilgan birjinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimini topamiz: Uni e^{2x} funksiya va berilgan ko‘phad darajasi bilan bir xil ko‘phad, lekin aniqmas koeffitsiyentli ko‘phad ko‘paytmasi ko‘rinishida izlaymiz. Shunday qilib, xususiy yechim

$$y_1(x)=e^{2x}(Ax^2+Bx+C)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Endi ***aniqmas*** A,B *va* C ***koeffitsiyentlarni*** topish lozim. Shartga ko‘ra $y_1(x)$ berilgan tenglamani qanoatlantirishi kerak. Buning uchun

$$y_1(x)=e^{2x}(Ax^2+Bx+C),\quad y_1'(x)=2e^{2x}(Ax^2+Bx+C)+e^{2x}(2Ax+B),$$

$$y''(x)=4e^{2x}(Ax^2+Bx+C)+2e^{2x}(2Ax+B)+e^{2x}\cdot 2A$$

larni berilgan tenglamaga qo‘yib,

$$e^{2x}\left[2A+6(2Ax+B)+5(Ax^2+Bx+C)\right]=e^{2x}(25x^2-47)$$

tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikni e^{2x} ga bo‘lsak,

$$5Ax^2+(12A+5B)x+2A+6B+5C=25x^2-47$$

bo‘ladi.

$y_1(x)=e^{2x}(Ax^2+Bx+C)$ berilgan tenglamaning yechimi bo‘lishi uchun oxirgi tenglamadagi bir xil darajali x lar koeffitsiyentlari o‘zaro teng bo‘lishi kerak, ya’ni

$$\begin{cases}5A=25,\\12A+5B=0,\\2A+6B+5C=47.\end{cases}$$

Uchta noma’lum koeffitsiyentlarga nisbatan, uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu sistemani yechsak, $A=5,\ B=-12,\ C=3$ bo‘ladi (buni bajarib ko‘ring). Demak, $y_1(x)=e^{2x}(5x^2-12x+3)$ funksiya berilgan tenglamaning xususiy yechimi bo‘ladi.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi (2) formulaga asosan,

$$y=\bar{y}+y_1=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}+e^{2x}(5x^2-12x+3)$$

bo‘ladi.

Yuqoridagidek xususiy yechimni topishga ***aniqmas koeffitsiyentlar usuli*** deyiladi.

2-misol. $y''-4y'=3x^2$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

$r^2-4r=0$ bo‘lib, $r_1=0;\ r_2=4$ uning ildizlari bo‘ladi va bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}(x)=C_1e^{0x}+C^2e^{4x}=C_1+C_2e^{4x}$$

bo‘ladi. Berilgan tenglamaning o‘ng tomoni $3e^{0x}x^2$ bo‘lib, $\alpha=0$ va no‘l harakteristik tenglamaning ildizi bo‘lganligi uchun xususiy yechim

$$y_1(x)=e^{0x}x(Ax^2+Bx+C)=Ax^3+Bx^2+Cx$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

$$y_1'(x)=3Ax^2+2Bx+C,\quad y''_1=6Ax+2B$$

bularni berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$-12Ax^2+(6A-8B)x+2B-4C=3x^2$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bir xil darajali x lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib,

$$\begin{cases} -12A = 3, \\ 6A - 8B = 0, \\ 2B - 4C = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini olamiz. Bundan

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{3}{16}, \quad C = -\frac{3}{32}$$

bo‘ladi. Shunday qilib, xususiy yechim

$$y_1(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{32}x$$

bo‘lib, umumiy yechim

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{4}(x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x)$$

bo‘ladi.

2) $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$ bo‘lganda xususiy yechim $y_1(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)x^k$ ko‘rinishda bo‘lib, k harakteristik tenglama ildizlarining $i\beta$ ga teng bo‘lganlarining soni.

3-misol. $y'' + y = \sin x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Harakteristik tenglama $r^2 + 1 = 0$ bo‘lib, ildizlari $r_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$ bo‘ladi. $\beta = 1;\ i\beta = i$ bo‘lganligi uchun $k = 1$, ya’ni xususiy yechimni

$$y_1(x) = (A\cos x + B\sin x)x^1$$

ko‘rinishda izlaymiz. A va B aniqmas koeffitsiyentlar. Bu funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topsak,

$y_1'(x) = (A\cos x + B\sin x)x + A\cos x + B\sin x = (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x$

$y_1''(x) = B\cos x - A\sin x - Bx\sin x - A\sin x + B\cos x - Ax\cos x = (2B - Ax)\cos x +$

$+ (-2A - Bx)\sin x$

bo‘ladi, bularni berilgan tenglamaga qo‘ysak

$(2B - Ax)\cos x + (2A - Bx)\sin + Ax\cos x + Bx\sin x = \sin x$ *yoki*

$2B\cos x + (-2A)\sin x = \sin x$

hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan

$$\begin{cases} 2B = 0, \\ -2A = 1 \end{cases}$$

va $B = 0,\ \ A = -\frac{1}{2}$ bo‘lib, xususiy yechim

$$y_1(x) = -\frac{x}{2}\cos x$$

bo‘ladi.

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

bo‘lganligi uchun, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2}\cos x$$

bo‘ladi.

4-misol. $y'' + 4y' + 5y = 2\cos x - \sin x$ differensial tenglamaning $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $y'' + 4y' + 5y = 0$ tenglamaning harakteristik tenglamasi $r^2 + 4r + 5 = 0$ bo‘lib, uning ildizlari $r_1 = -2 - i;\ \ r_2 = -2 + i$ bo‘ladi. Bir jinsli tenglama umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

bo‘ladi.

Endi berilgan tenglamaning biror xususiy yechimini topamiz: uni

$$y_1(x) = A\cos x + B\sin x$$

ko‘rinishda izlaymiz. $y'(x),\ \ y''(x)$ hosilalarni topib, berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$(4A + 4B)\cos x + (4B - 4A)\sin x = 2\cos x - \sin x$$

bo‘lib, $\cos x$ va $\sin x$ lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib.

$$\begin{cases} 4A + 4B = 2, \\ 4B - 4A = -1 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan $A = \frac{3}{8},\ \ B = \frac{1}{8}$ ekanligini aniqlab, xususiy yechimni topamiz.

$$y_1(x) = \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$$

bo‘ladi.

Endi berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni aniqlaymiz, ya’ni boshlang‘ich shartlar berilganda Koshi masalasining yechimini topamiz: umumiy yechimdan hosila

$$y'(x) = -2e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x) - \frac{3}{8}\sin x + \frac{1}{8}\cos x$$

bo‘ladi, boshlang‘ich shartlardan foydalanib,

$$1 = \frac{3}{8} + C_1, \quad 2 = \frac{1}{8} - 2C_1 + C_2$$

C_1 *va* C_2 noma’lumlarga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan $C_1 = \frac{5}{8}, \quad C_2 = \frac{25}{8}$ bo‘ladi.

Shunday qilib, berilgan tenglamaga qo‘yilgan Koshi masalasining yechimi

$$y(x) = e^{-2x}(\frac{5}{8}\cos x + \frac{25}{8}\sin x) + \frac{3}{8}\cos x + \frac{1}{8}\sin x$$

bo‘ladi.

4.1.4. Differensial tenglamalarning iqtisodiyotga tatbiqlari

Differensial tenglamalarning iqtisodiyotdagi tatbiqlariga bir necha misollar keltiramiz.

1. ***Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda (tabiiy) o‘sish modeli.*** Biror turdagi mahsulot ishlab chiqarilib u tayin (belgilangan) P narxda sotilayotgan bo‘lsin. $Q(t)$ vaqtning t onida (momentida) realizatsiya qilingan mahsulot miqdori bo‘lsin. Bu holda mahsulotni realizatsiya qilishdan olingan daromad

$$PQ(t)$$

model bilan ifodalanadi. Bu daromadning bir qismi albatta ishlab chiqarish $J(t)$ investitsiyasiga sarflanadi, ya’ni

$$J(t) = mPQ(t) \qquad (1)$$

bo‘lsin, bunda m investitsiya me’yori bo‘lib o‘zgarmas son, hamda $0 < m < 1$.

Ishlab chiqarilayotgan mahsulot to‘liq realizatsiya qilinayotgan bo‘lsa, ishlab chiqarishni kengaytirish natijasida daromadning o‘sishi ta’minlanib, bu daromadning bir qismi yana mahsulot ishlab chiqarishni kengaytirishga sarflanadi. Bu hol ishlab chiqarish tezligining o‘sishi (akseleratsiya)ga olib keladi, hamda ishlab chiqarish tezligi investitsiyaga proporsional bo‘ladi, ya’ni

$$Q'(t) = eJ(t), \qquad (2)$$

bunda $\frac{1}{e}$ akseleratsiya me’yori. (1) va (2) tengliklardan

$$Q'(t) = emPQ \quad yoki \quad Q'(t) = kQ(t) \qquad (3)$$

kelib chiqadi, bunda $k = emP$.

(3) differensial tenglama birinchi tartibli, o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo‘lib, uning umumiy yechimi

$$\frac{dQ}{dt} = KQ, \quad \frac{d\theta}{Q} = kdt, \quad \ln Q = kt + \ln C \quad yoki \quad Q = Ce^{kt}$$

bo‘ladi, bunda C ixtiyoriy o‘zgarmas.

Vaqtning $t = t_0$ momentida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Q_0 bo‘lsin.

Bu shartda

$$Q_0 = Ce^{kt_0} \quad yoki \quad C = Q_0 e^{-kt_0}$$

bo‘ladi. (3) tenglama uchun, Koshi masalasining yechimi

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \qquad (4)$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, ishlab chiqarishning tabiiy o‘sishi modeli eksponensial bo‘lar ekan (tabiiy o‘sish deganimizda raqobat yo‘qligi tushuniladi).

Matematik modellar **umumiylik xossasiga ega.** Buning misoli sifatida quyidagi holni keltirish mumkin. Biologik kuzatishlardan ma’lumki bakteriyalarning ko‘payish jarayoni ham (3) differensial tenglama bilan ifodalanadi. Bundan tashqari radioaktiv parchalanish:

radioaktiv modda massasining kamayishi jarayoni qonuni ham (4) formulaga mos keladi.

2. ***Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o‘sishi modeli.*** Oldingi misolda ishlab chiqarilayotgan mahsulot to‘liq realizatsiya bo‘ladigan sharoitni qaradik. Endi raqobatli, ya’ni bozorga bu mahsulotni boshqalar ham realizatsiya qiladigan sharoitni qaraymiz. Bunday sharoitda mahsulot ishlab chiqarish miqdorini ko‘paytirish bilan bozorda uning narxi kamayadi. $P = P(Q)$ funksiya (P mahsulot narxi, Q mahsulot miqdori) kamayuvchi bo‘lib,

$$\frac{dP}{dQ} < 0$$

bo‘ladi. Endi (1)-(3) formulalardagidek,

$$Q' = \alpha P(Q)Q \qquad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz, bunda $\alpha = em.$ (5) tenglamaning o‘ng tomonidagi ko‘paytuvchilar hammasi musbat ishorali, demak $Q' > 0$ bo‘ladi, ya’ni $Q(t)$ o‘suvchi funksiya ekanligi kelib chiqadi.

Oddiylik uchun $P(Q)$ funksional bog‘lanish chiziqli, ya’ni

$$P(Q) = a - bQ, \;\; a >, \; b > 0$$

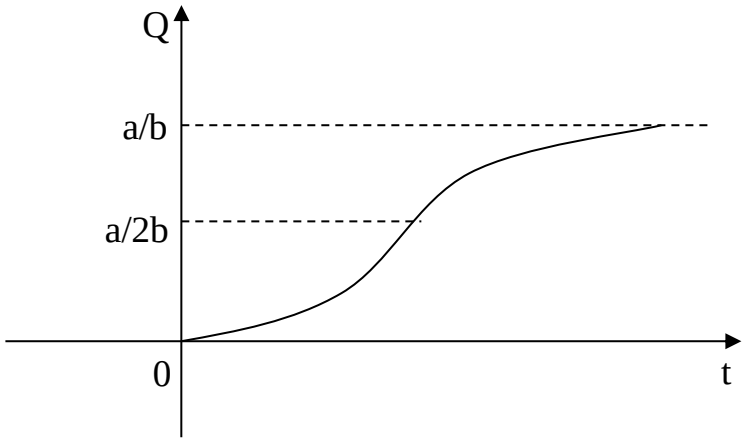
bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda (5) tenglama

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \qquad (6)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. (6) tenglikni differensiallasak,

$$Q'' = (\alpha aQ - \alpha bQ^2)' = \alpha aQ' - 2\alpha bQQ' \;\; yoki \;\; Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ) \quad (7)$$

tenglama hosil bo‘ladi. (6)-(7) tenglamalardan $Q = 0$ *va* $Q = \frac{a}{b}$ bo‘lganda, $Q' = 0,$ $Q < \frac{a}{2b}$ bo‘lganda, $Q'' > 0$ hamda $Q > \frac{a}{2b}$ bo‘lsa $Q'' < 0$ kelib chiqadi. Bulardan $\frac{a}{2b}$ nuqtadan o‘tishda Q ishorasini o‘zgartirganligi uchun, bu nuqta $Q = Q(t)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘ladi. Bu funksiya grafigi, ya’ni (6) differensial tenglama integral chiziqlaridan biri, 4.1-chizmada tasvirlangan bo‘lib, bu egri chiziqqa iqtisodda ***logistik chiziq*** deb ataladi.



. 4.1-chizma.

3. ***Talab va taklifni tahlil qilish*****.** Ma’lumki, bozor modelida mahsulotga talab va taklif mavjud holatlarda narxning o‘zgarish sur’ati bilan bog‘liq bo‘ladi. Bunday sur’at t vaqtning $P(t)$ narx funksiyasi birinchi va ikkinchi tartibli hosilasi bilan harakterlanadi.

Quyidagi misolni qaraymiz. Talab D va taklif S P narxning funksiyasi bo‘lib, ushbu tengliklar bilan ifodalansin:

$$D(t) = p'' - 2p' - 6p + 36, \quad S(t) = 2p'' + 4p' + 4p + 6. \qquad (1)$$

Bunday bog‘liqlik haqiqatda mavjud holatlarga mos keladi. Haqiqatan ham, narx sur’ati oshsa, bozorning mahsulotga qiziqishi ortadi, ya’ni $p'' > 0$ bo‘ladi. Narxning tez o‘sishi haridorni cho‘chitib talabning pasayishiga olib keladi. Shuning uchun, p' birinchi tenglikda manfiy ishora bilan ifodalanadi. Ikkinchidan, narx sur’atining ortishi bilan taklif yana kuchayadi, shuning uchun p'' ning koeffitsiyenti talab funksiyasidagiga nisbatan katta, narxning o‘sishi tezligi taklifning ham o‘sishiga olib keladi, ya’ni p' taklif funksiyasida musbat ishorali bo‘ladi.

Narx funksiyasi va vaqt o‘zgarishi orasidagi bog‘lanishni tahlil qilaylik. Ma’lumki, bozor holati $D = S$ muvozanat bilan ifodalanadi. Bu holda (1) tenglikdan

$$p'' + 6p' + 10 = 30 \qquad (2)$$

ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglama kelib chiqadi.

Bizga ma’lumki, bunday tenglamaning umumiy yechimi bu tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va (2) bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimi yig‘indisidan iborat. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{p}(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

bo‘ladi, bunda C_1 va C_2 lar ixtiyoriy o‘zgarmaslar.

Bir jinsli bo‘lmagan (2) tenglama xususiy yechimi $p_1(t) = A$ o‘zgarmas, hamda buni (3) tenglamaga qo‘yib, $A = 3$ ekanligini aniqlash mumkin. Demak, $p_1(t) = 3$ bo‘ladi.

Shunday qilib (2) bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning umumiy yechimi

$$p(t) = \overline{p(t)} + p_1(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 3 \qquad (3)$$

bo‘ladi.

Bu yechimdan $t \to \infty$ *da* $p(t) \to 3$ bo‘ladi, ya’ni hamma narxlar qaror topgan narxga yaqinlashadi.

Ushbu Koshi masalasini qaraymiz: $t = 0$ bo‘lganda, narx $p(0) = 4$ va o‘sish mayli (tendensiyasi) $p'(0) = 1$ bo‘lsin. $t = 0$ bo‘lganda $p(0) = 4$ bo‘lganligi uchun, (3) dan $C_1 = 1$ kelib chiqadi. (3) tenglikdan hosila olib va t=0 bo‘lganda $p(0) = 1$ shartdan foydalansak, C_2=4 kelib chiqadi, demak Koshi masalasining yechimi

$$p(t) = 3 + e^{-3t}(\cos t + 4\sin t)$$

bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar, ikkinchi tartibli bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar, chiziqli bog’langan va chiziqli bog’lanmagan funksiyalar, Vronskiy determinanti, ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar, xarakteristik tenglama, Eyler formulasi. Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi, birorta xususiy yechim, birorta xususiy yechimni tenglamaning o‘ng tomoni ko‘phad bo‘lganda

topish, sinus va kosinus funksiyalar yig‘indisi bo‘lganda topish, aniqmas koeffitsiyentlar usuli.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Yuqori tartibli differensial tenglamalarning qanday xillari bor?

2. Qanday differensial tenglamalarning tartibini pasaytirish bilan yechish mumkin?

3. Qanday differensial tenglamalarga chiziqli deyiladi?

4. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

5. Xarakteristik tenglama nimadan iborat?

6. Xarakteristik tenglama ildizlariga qarab umumiy yechimni yozish mumkinmi?

7. Xarakteristik tenglama ildizlari kompleks qo‘shma bo‘lganda yechim qanday yoziladi?

8. Xarakteristik tenglama ildizlari karrali, haqiqiy va har xil bo‘lganda umumiy yechim qanday yoziladi?

9. Eyler formulasi qanday bo‘ladi?

1. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalarning umumiy yechimi qanday topiladi?

2. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalarning birorta xususiy yechimi qanday topiladi?

3. Aniqmas koeffisiyentlar usuli nimadan iborat?

1. Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda o‘sish modeli qanday bo‘ladi?

2. Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o‘sishi modeli nima?

3. Logistik chiziq deb nimaga aytiladi?

4. Talab va taklifni differensial tenglama yordamida qanday tahlil qilinadi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $y''' = \frac{6}{x^3}$ tenglamaning $x = 1$ bo‘lganda $y = 2,\ y' = 1,\ y'' = 1$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

2. Quyidagi tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$; 2) $yy'' + y'^2 = 0$; 3) $y'' + 2y(y')^3 = 0$; 4) $y''y^3 = 1$;

5) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$; 6) $y'' + y'tgx = \sin 2x$; 7) $y'' + 2y'^2 = 0$;

8) $xy'' - y'tgx = e^x x^2$; 9) $2yy'' = (y^1)^2$; 10) $t\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + t = 0.$

3. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

1) $y'' + 3y' - 4y = 0$; 2) $y'' - 2y' - 5y = 0$; 3) $y'' - y = 0$;

4) $4y'' - 12y' + 9y = 0$; 5) $y'' + 2\sqrt{2}y + 2y = 0$; 6) $y'' - 2y' + 50y = 0$;

7) $y'' - 4y' + 7y = 0$; 8) $y'' + 6y' = 0$.

4. $y'' + 10y' + 25y = 0$ tenglamaning $x = 1$ bo‘lganda, $y = e^{-5}$, $y' = 3e^{-5}$bo‘ladigan boshlang’ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

5.Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

1) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$; 2) $y'' + y' + 7y = 8\sin 2x$;

3) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$;

4) $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$; 5) $y'' + 9y = (43 + 10x - 26x^2)e^{2x}$;

6) $y'' + 6y' + 10y = 9\cos x + 27\sin x$; 7) $y'' - 6y' + 9y = 2\sin 2x$

$y'' + 16y = \sin 4x$ tenglamaning $x = 0$ bo‘lganda, $y = 1,\ y' = \frac{7}{8}$ bo‘ladigan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Sh.Sharahmetov, O.Qurbanov, Iqtisodchilar uchun matematika, ISBN 978-9943-07-554-2, O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti, 2017.

2. A.Soliyev, S.Nosirova, Ya. Muxtarov, T.Bo‘riyev. Matematika. Iqtisodchilar uchun amaliy mashg’ulotlar. O‘quv qo‘llanma – Samarqand: SamDU nashri 2021-200 bet.

3. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 1,2,3 jild. - T: O‘qituvchi, 1992, 1994, 1996.

4. Н.Ш.Кремер. Высшая математика для экономистов. Москва “Банки и биржи”, Издательское объединение “ЮНИТИ”. 1998.

8. Xashimov A.R., Ochilova N.K., Axmedov M.I, Sotvoldiyev A.I. Iqtisodiy matematika. O‘quv qo‘llanma. T.: “Fan va texnologiya”. 2018. 352 b.

9. Xashimov A.R., Xujaniyazova G.S. Iqtisodchilar uchun matematika (mustaqil ta’lim bo‘yicha praktikum). O‘quv qo‘llanma. T.:“Iqtisod-moliya”. 2019. 400 b.

10. Sharaxmetov Sh., Qurbanov O.T. Iqtisodchilar uchun matematika. Darslik. T.: O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti. 2017. 384 b.

11. Бабаджанов Ш.Ш. Сборник задач по дисциплине «Математика для экономистов». Методическое пособие. Т.: ТФИ. 2017. 296 с.

12. Бабаджанов Ш.Ш. Финансовая математика. Учебное пособие. Т.: Издательство Национального общества философов Узбекистана 2019. 192 с.

13. Mamurov I.N., Abdikarimov R.A. Moliya matematikasi. O‘quv qo‘llanma. T.: “Iqtisod-moliya”. 2018. 188 b.

M U N D A R I J A

KIRISH 3
I BOB. CHIZIQLI ALGEBRA ASOSLARI VA ULARNING TADBIQLARI 5
1.1-§. Matritsalar va ular ustida amallar 5
1.2-§. Determinantlar nazariyasi 10
1.3-§. Teskari matritsa va matritsa rangi.....19
1.4-§. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari .27
1.4.1. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish. 36
1.4.2.Tenglamalar sistemani Gauss-Jordan usulda yechish. 38
1.5-§.Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsalar usuli. Kramer qoidasi 41
1.5.1.Chiziqli tenglamalar sistemasini matrisalar yordamida yechish. .41
1.5.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi yordamida yechish.....44
1.6-§. Chiziqli operatorlar va ularning xossalari.....49
1.6.1. Chiziqli operator va uning matritsasi 51
1.6.2. Chiziqli operatorni obrazlari va yadrosi.....53
1.6.3. Chiziqli operatorni maxsus qiymatlari va maxsus vektori.....54
1.6.4. Operatorlar ustida amallar.....56
1.7-§. Kvadratik formalar.....58
1.7.1. Kvadratik formaning ta’rifi 58
1.7.2. Kvadratik formalarni kanonik ko‘rinishga keltirish.....59
1.7.3. Inersiya qonuni.....64
1.7.4. Musbat aniqlangan formalar.....69
1.7.5. Kvadratik formalarga ta’luqli misol va masalalar.....72
II-BOB. ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI HAMDA ULARNING TADBIQLARI 79
2.1-§. Analitik geometriya elementlari 79
2.1.1.Koordinatlar usuli va sodda masalalar 79
2.1.2. Tekislikda to‘g’ri chiziq va uning tenglamalari 82
2.1.3. To‘g’ri chiziqlarga doir asosiy masalalar.....88

2.1.4. Ikkinchi tartibli chiziqlar 95
III BOB. MATEMATIK ANALIZ ASOSLARI VA UNING TATBIQLARI 106
3.1-§. R^n fazoda nuqtalarning o‘zaro joylashishi. Nuqtalar ketma-ketligi va uning limiti 106
3.1.1. To‘plamlar va ular haqida asosiy tushunchalar. 106
3.1.2. Sonli ketma-ketliklar 115
3.1.3.Cheksiz kichik ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega. 119
3.1.4. Sonli ketma-ketlikning limiti va uning xossalari 120
3.1.5.Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega 122
3.2-§. Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar va ularning iqtisodiy jarayonlardagi o‘rni. Kobb-Duglas funksiyasi 126
3.2.1. Funksiyaning ayrim hollari 129
3.2.2. Iqtisodiyotda qo‘llaniladiga ayrim asosiy funksiyalar 130
3.3-§. Funksiya limiti va uzluksizligi 134
3.3.1. Funksiyaning limiti va uning asosiy xossalari 134
3.3.2.Funksiya limitining asosiy xossalari: 135
3.3.3. Aniqmasliklar va ularni ochish 136
3.3.4. Funksiyaning uzluksizligi va uzilishi 142
3.4-§. Bir o‘zgaruvchili funksiya hosilasi va differensiali 149
3.4.1. Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida 149
3.4.2. Funksiya hosilasining ta’rifi. 151
3.4.3. Murakkab funksiya hosilasi va hosilalar jadvali 153
3.5-§. Differensiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremalar. Hosilaning ba’zi tatbiqlari 158
3.5.1.Funksiyaning differensiali va uning taqribiy hisoblashdagi tatbiqi 158
3.5.2. Funksiyaning differensialining taqribiy hisoblashga tatbiqi. 160
3.5.3.Differensial hisobning asosiy teoremalari 161
3.5.4. Differensial hisob yordamida funksiya dinamikasini tekshirish 165

3.6 -§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya differensiali. Xususiy hosila va yuqori tartibli differensiallar 192
3.6.1.Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar haqida asosiy tushunchalar 192
3.6.2.Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar.....201
3.7-§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ekstremumi 204
3.7.1.Ikki o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasining tatbiqlari. Ikki argumentli funksiya ekstremumi.....204
3.7.2.Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi yeng katta va yeng kichik qiymatlarini topish. 207
3.8-§. Aniqmas integral.....210
3.8.1. Boshlang’ich funksiya.....210
3.8.2. Aniqmas integralda integrallash usullari.....214
3.8.3.Rasional va irrasional funksiyalarni integrallash 218
3.8.4. To‘g’ri kasr rasional funsiyalarni sodda kasrlar ko‘rinishida ifodalash. 222
3.8.5. Ayrim irrasional funksiyalarni integrallash.....226
3.9-§.Aniq integral 230
3.9.1 Aniq integral va uning asosiy xossalari 230
3.9.2. Aniq integralni taqribiy hisoblash 235
3.9.3.Aniq integralning tatbiqlari 238
3.9.4. Aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlari 242
IV BOB. BIRINCHI TARTIBLI VA IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR 247
4.1-§. Birinchi tartibli va ikkinchi tartibli differensial tenglamalar 247
4.1.1.Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar. Birinchi tartibli differensial tenglamalar 247
4.1.2. O‘zgarmas koeffisentli yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar. 254
4.1.3.Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar.....260
4.1.4. Differensial tenglamalarning iqtisodiyotga tatbiqlari 265
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR 272

X.Q.QARSHIBOYEV, I.E.SHODMONOV,
I.A.SHUKUROV

AMALIY MATEMATIKA 1

o‘quv qo‘llanma

Muharrir: Z. Meliyev
Musahhih: J. Shodmonov
Texnik muharrir: Z.N. Bobodustov

O‘quv qo‘llanma Samarqand iqtisodiyot va servis instituti Kengashining 2023 – yil 10 - noyabragi 4 - sonli qaroriga muvofiq o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan.

© «FAN BULOG’I» nashriyoti, Samarqand - 2023

ISBN: 978-9910-753-45-9

Nashriyot lisenziyasi:
№ 4341-5160-642c-944b-ab74-5062-3969
Bosishga ruxsat etildi: 10.11.2023 y.
© «FAN BULOG’I» nashriyoti, Samarqand sh.
S.Buhoriy ko’chasi, 1-11 uy.

Qog‘oz bichimi A5, 60x84 1/16, Ofset qog‘ozi.
“Times New Roman” garniturasi.
Nashr bosma tabog`i 17,25
Buyurtma № 0182A/23 Adadi 100 nusxa

Samarqand iqtisodiyot va servis institutining matbaa bo`limida chop etildi.
LICENSE № 025316.
REESTR № X-119112.
Manzil: Samarqand shahar, Shoxrux ko`chasi 60-uy.