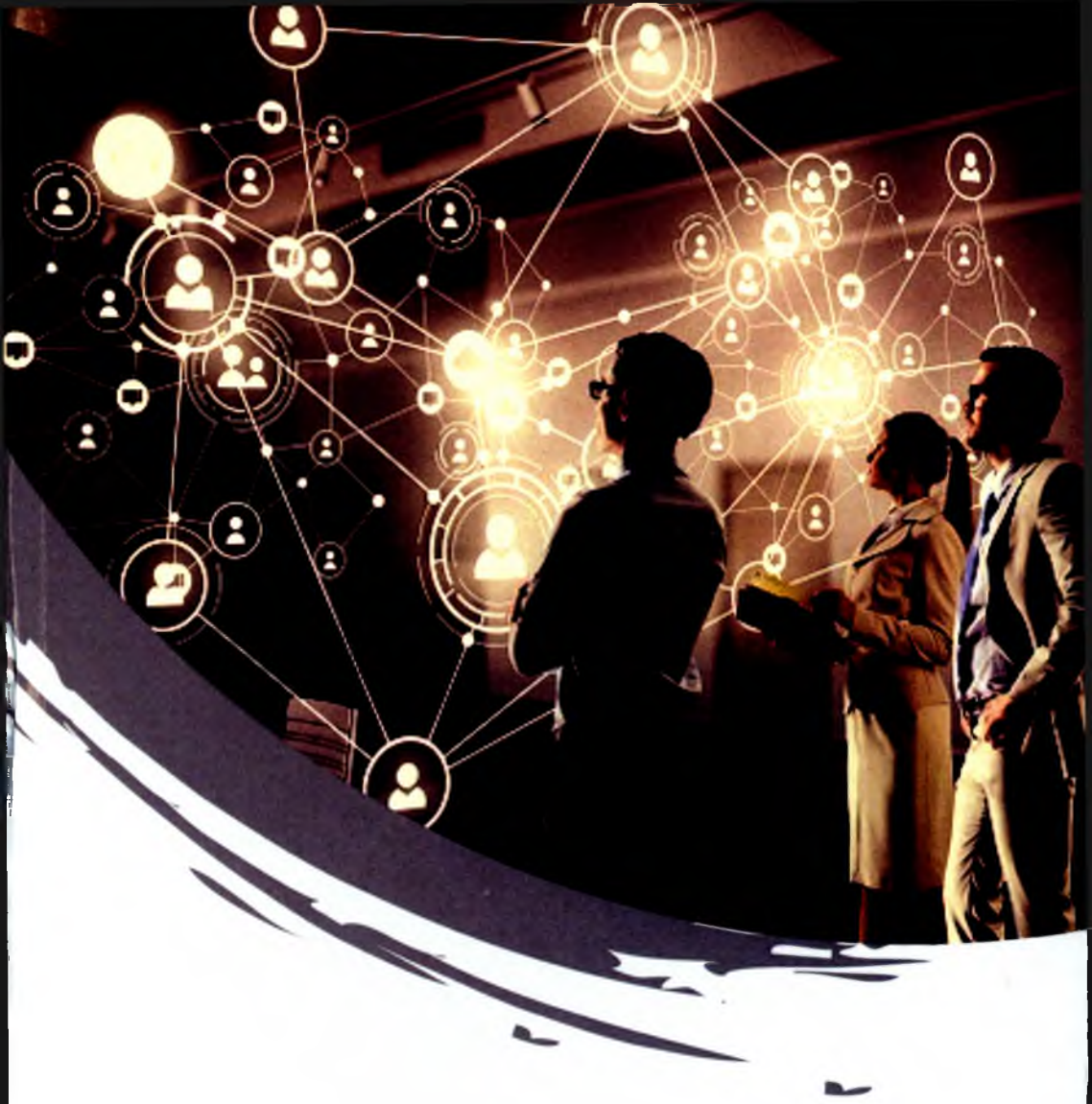


Ж.А.УСАРОВ

# БИЗНЕС МАТЕМАТИКА

330.116(07)
У-74

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСЩЕГО И СРЕДНОГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Ж.А.УСАРОВ**

# БИЗНЕС МАТЕМАТИКА

*(На основе кредитно модульной системы)*

*Рекомендовано Министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан в качестве учебника для студентов*



TDIU
kutubxonasi
h/v 8165

**Ташкент –2022**

**УДК: 330.43 (07.58)**
**ББК 65.012.2уа7**
**У 85**
**Ж.А.Усаров. Бизнес математика. (Учебник). – Т.: «Innovatsion rivojlanish nashriyot-matbaa uyi», 2022 – 264 b.**

**ISBN 978-9943-8748-4-8**

В учебнике представлены основные разделы дисциплины «Бизнес математика», необходимой для успешного усвоения дальнейших глав математики, а также общетеоретических специальных дисциплин в области Экономика (по отраслям и сферам), Эконометрика, Региональная экономика, Экономическая безопасность, Цифровая экономика (по отраслям и сферам), Бизнес, менеджмент и право, Бухгалтерский учет и аудит (по отраслям), Налоги и налогообложение (по видам деятельности), Финансы и финансовые технологии, Банковское дело и аудит, Страховое дело, Бюджетный контроль и казначейство, Статистика (по отраслям и секторам), Менеджмент (по отраслям и секторам), Менеджмент: управление туристическим бизнесом, Управление человеческими ресурсами, Корпоративное управление, Логистика (по маршрутам), Мировая экономика и международные экономические отношения (по регионам и видам деятельности), Маркетинг (реклама), Маркетинг (по отраслям и отраслям), Торговое дело (по видам), Туризм (по видам деятельности), Информационные и коммуникационные технологий.

**УДК: 330.43 (07.58)**
**ББК 65.012.2уа7**

**Рецензент: М.Нуриллаев** – доктор философии по физика-математическим наукам (PHD), доцент, Заведующий кафедры «Общая математика» ТГПУ.

**ISBN 978-9943-8748-4-8**

**© «Инновацион ривожланиш нашрёт-матбаа уйи», 2022.**

# ВВЕДЕНИЕ

Основная задача данного учебника состоит в том, чтобы помочь студентам, изучающим математическое программирование и финансовой математики, овладеть основными принципами и формулами при решении соответствующих задач.

При решении многочисленных проблем управления и планирования производства, при проектировании и перспективном планировании в разных областях практической деятельности человека возникают многовариантные задачи. Среди множества возможных способов их решения приходится отыскивать наилучшие в некотором смысле при ограничениях, налагаемых на природные, экономические, технологические и другие возможности. В рамках современных масштабов производства неудачный выбор варианта решения может привести к значительным потерям. В связи с этим возникла необходимость применять для анализа и синтеза экономических ситуаций и систем математические методы и современную вычислительную технику. Однако непосредственное применение здесь классических методов, основанных на аппарате дифференциального исчисления, наталкивается на серьезные вычислительные трудности, что делает соответствующий аппарат неэффективным. Мощным инструментом разрешения подобного рода задач стали специальные методы поиска экстремума, составляющие содержание раздела математики, который называется математическим программированием. Математическое программирование – раздел высшей математики, разрабатывающий теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т. е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Финансовая математика охватывает определенный круг методов вычислений, необходимость в которых возникает всякий

раз, когда в условиях сделки или финансово-банковской операции оговариваются конкретные значения 3 видов параметров, а именно:

– стоимостные характеристики (размеры платежей, договорных обязательств, кредитов);

– временные данные (даты, сроки выплат); – специфический параметр – процентная ставка. Эти параметры в рамках одной операции равноправны. Между ними существуют функциональные зависимости.

1) Предмет финансовой математики – изучение функциональных зависимостей между данными параметрами и разработка на их основе методов решения финансовых задач определенного класса. Финансовая математика позволяет решать многие задачи, которые явно или неявно присутствуют в любой финансово-банковской операции или коммерческой сделке.

2) Время как фактор в финансовых результатах: В финансовых и коммерческих операциях суммы денег обязательно связываются с моментами времени – сроки, дата, периодичность поступлений средств или выплат денег. Фактор времени играет не меньшую роль, чем сами денежные суммы. Необходимость учета этого фактора определяется сущностью самого процесса финансирования и кредитования и выражается в виде принципа неравноценности денег, относящихся разным моментам времени. Данная концепция неравноценности денежных средств, относящихся к различным моментам времени использует 2 метода – метод наращивания и метод дисконтирования стоимости.

3) Основные категории в финансовой математике:

– Процентные деньги (проценты) – абсолютная величина дохода от представления денег в долг, в любой ее форме;

– Процентная ставка – относительная величина дохода (темп прироста) за фиксированный отрезок времени к первоначальной сумме долга;

– Период начисления – временной интервал, к которому приурочена процентная ставка.

– Интервал начисления – минимальный период, по прошествии которого происходит начисление процентов;

– Наращение (рост) – процесс увеличения суммы денег в связи с присоединением процентов (компаундинг) - Наращенная сумма – сумма первоначального долга с начисленными на него процентами. Относительно момента выплаты или начисления дохода за пользование предоставленными денежными средствами проценты подразделяются на обычные и авансовые. Обычные (декурсивные) начисляются в конце периода относительно исходной величины средств. Доход на процент выплачивается в конце периодов финансовой операции. Если же доход, определяемый процентами, выплачивается в момент предоставления кредита, то такая форма расчетов называется авансовый или учетом, а применяемые проценты авансовыми (антисипативными), которые начисляются в начале периода относительно конечной суммы денег. Учетная ставка – относительная величина снижения дохода (темп снижения) за фиксированный отрезок времени к наращенной сумме долга. Дисконтирование – процесс определения любой стоимостной величины на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит некоторую фиксированную сумму денег. Современная (приведенная) сумма – величина, найдена дисконтирование наращенной суммы.

# ГЛАВА I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

## 1.1. Экономико-математические модели

Одна из важных задач экономики – наиболее полное использование материальных и трудовых ресурсов. Этой цели служат методы математического программирования, составляющие часть методов наследования операций.

Под моделью будем понимать условный образ какого-либо объекта, приближенно воссоздающий этот объект с помощью некоторого языка. В экономико-математических моделях таким объектом является экономический процесс (например, использование ресурсов, распределение изделий между различными типами оборудования и т.п.), а языкам – классические и специально разработанные математические методы.

**Экономико-математическая модель** – математическое описание исследуемого экономического процесса или объекта. Эта модель выражает закономерности экономического процесса в абстрактном виде с помощью математических соотношений. Использование математического моделирования в экономике позволяет углубить количественный экономический анализ, расширить область экономической информации, интенсифицировать экономические расчеты.

В процессе исследования объекта часто бывает нецелесообразно или даже невозможно иметь дело непосредственно с этим объектом. Удобнее бывает заменить его другим объектом, подобным данному в тех аспектах, которые важны в данном исследовании. В общем виде *модель* можно определить как условный образ реального объекта (процессов), который создается для более глубокого изучения действительности. Метод исследования, базирующийся на разработке и использовании моделей, называется моделированием. Необходимость модели-

рования обусловлена сложностью, а порой и невозможностью прямого изучения реального объекта (процессов). Значительно доступнее создавать и изучать прообразы реальных объектов (процессов), т.е. модели. Можно сказать, что теоретическое знание о чем-либо, как правило, представляет собой совокупность различных моделей. Эти модели отражают существенные свойства реального объекта (процессов), хотя на самом деле действительность значительно содержательнее и богаче.

*Модель* – это мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение дает новую информацию об этом объекте.

На сегодняшний день общепризнанной единой классификации моделей не существует. Однако из множества моделей можно выделить словесные, графические, физические, экономико-математические и некоторые другие типы моделей.

*Экономико-математические модели* – это модели экономических объектов или процессов, при описании которых используются математические средства. Цели их создания разнообразны: они строятся для анализа тех или иных предпосылок и положений экономической теории, логического обоснования экономических закономерностей, обработки и приведения в систему эмпирических данных. В практическом плане экономико-математические модели используются как инструмент прогноза, планирования, управления и совершенствования различных сторон экономической деятельности общества.

Экономико-математические модели отражают наиболее существенные свойства реального объекта или процесса с помощью системы уравнений. Единой классификации экономико-математических моделей не существует, хотя можно выделить наиболее значимые их группы в зависимости от признака классификации.

*По целевому назначению* модели делятся на:

· теоретико-аналитические (используются в исследовании общих свойств и закономерностей экономических процессов);

· прикладные (применяются в решении конкретных экономических задач, таких как задачи экономического анализа, прогнозирования, управления).

*По учету фактора времени* модели подразделяются на:

· динамические (описывают экономическую систему в развитии);

· статистические (экономическая система описана в статистике, применительно к одному определенному моменту времени; это как бы снимок, срез, фрагмент динамической системы в какой-то момент времени).

*По длительности рассматриваемого периода времени* различают модели:

· краткосрочного прогнозирования или планирования (до года);

· среднесрочного прогнозирования или планирования (до 5 лет);

· долгосрочного прогнозирования или планирования (более 5 лет).

*По цели создания и применения* различают модели:

· балансовые;

· эконометрические;

· оптимизационные;

· сетевые;

· систем массового обслуживания;

· имитационные (экспертные).

В *балансовых* моделях отражается требование соответствия наличия ресурсов и их использования.

Параметры *эконометрических* моделей оцениваются с помощью методов математической статистики. Наиболее распространены модели, представляющие собой системы

регрессионных уравнений. В данных уравнениях отражается зависимость эндогенных (зависимых) переменных от экзогенных (независимых) переменных. Данная зависимость в основном выражается через тренд (длительную тенденцию) основных показателей моделируемой экономической системы. Эконометрические модели используются для анализа и прогнозирования конкретных экономических процессов с использованием реальной статистической информации.

*Оптимизационные* модели позволяют найти из множества возможных (альтернативных) вариантов наилучший вариант производства, распределения или потребления. Ограниченные ресурсы при этом будут использованы наилучшим образом для достижения поставленной цели.

*Сетевые* модели наиболее широко используются в управлении проектами. Сетевая модель отображает комплекс работ (операций) и событий, и их взаимосвязь во времени. Обычно сетевая модель предназначена для выполнения работ в такой последовательности, чтобы сроки выполнения проекта были минимальными. В этом случае ставится задача нахождения критического пути. Однако существуют и такие сетевые модели, которые ориентированы не на критерий времени, а, например, на минимизацию стоимости работ.

Модели *систем массового обслуживания* создаются для минимизации затрат времени на ожидание в очереди и времени простоев каналов обслуживания.

*Имитационная* модель, наряду с машинными решениями, содержит блоки, где решения принимаются человеком (экспертом). Вместо непосредственного участия человека в принятии решений может выступать база знаний. В этом случае персональный компьютер, специализированное программное обеспечение, база данных и база знаний образуют экспертную систему. *Экспертная* система предназначена для решения одной

или ряда задач методом имитации действий человека, эксперта в данной области.

*По учету фактора неопределенности* модели подразделяются на:

· детерминированные (с однозначно определенными результатами);

· стохастические (вероятностные; с различными, вероятностными результатами).

*По типу математического аппарата* различают модели:

· линейного программирования (оптимальный план достигается в крайней точке области изменения переменных величин системы ограничений);

· нелинейного программирования (оптимальных значений целевой функции может быть несколько);

· корреляционно-регрессионные;

· матричные;

· сетевые;

· теории игр;

· теории массового обслуживания и т.д.

С развитием экономико-математических исследований проблема классификации применяемых моделей усложняется. Наряду с появлением новых типов моделей и новых признаков их классификации, осуществляется процесс интеграции моделей разных типов в более сложные модельные конструкции.

Ниже рассматриваются примеры экономико-математических моделей.

1. Задача об использовании ресурсов (задача планирования производства).

Пример 1. Для изготовления двух видов продукции $P_1$ и $P_2$ используют четыре вида ресурсов $S_1, S_2, S_3$ и $S_4$. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в табл. 1.1. (цифры условные).

Таблица 1.1.

| Вид ресурса | Запас ресурса | Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции | |
|---|---|---|---|
| | | $P_1$ | $P_2$ |
| $S_1$ | 18 | 1 | 3 |
| $S_2$ | 16 | 2 | 1 |
| $S_3$ | 5 | - | 1 |
| $S_4$ | 21 | 3 | - |

Прибыль, получаемая от единицы продукции $P_1$ и $P_2$ – соответственно 2 и 3 сум.

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение. Составим экономико-математическую модель задачи.

Обозначим $x_1$ и $x_2$ – число единиц продукции соответственно $P_1$ и $P_2$, запланированных к производству. Для их изготовления (см. табл. 1.1) потребуется $(1\cdot x_1+3x_2)$ единиц ресурса $S_1\cdot(2x_1+1\cdot x_2)$ единиц ресурса $S_2,(1\cdot x_2)$ единиц ресурса $S_3$ и $3x_1$ единиц ресурса $S_4$. Так как потребление ресурсов $S_1,S_2,S_3$ и $S_4$ не должно превышать их запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21 ед., то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств

$$\begin{cases} x_1+3x_2 \le 18, \\ 2x_1+x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ 3x_1 \le 21 \end{cases} \qquad (1.1)$$

По смыслу задачи переменные

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \qquad (1.2)$$

Суммарная прибыль $F$ составит $2x_1$ сум. от реализации продукции $P_1$ и $3x_2$ сум. - от реализации продукции $P_2$ т.е.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \qquad (1.3)$$

Итак, экономико-математическая модель задачи: найти такой план выпуска продукции $X = (x_1, x_2)$, удовлетворяющий системе (1.1) и условию (1.2), при котором функция (1.3) принимает максимальное значение.

Задача легко обобщается на случай выпуска $n$ видов продукции с использованием $m$ видов ресурсов.

Обозначим $x_j (j = 1,2,...,n)$ – число единиц продукции $P_j$ запланированной к производству; $b_i (i = 1,2,...,m)$ – запас ресурсов $S_i$; $a_{ij}$ – число единиц ресурса $S_i$ затрачиваемого на изготовление единицы продукции $P_j$ (числа $a_{ij}$ часто называют технологическими коэффициентами); $c_j$ - прибыль от реализации единицы продукции $P_j$.

Тогда экономико-математическая модель задачи об использовании ресурсов в общей постановке примет вид: найти такой план $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ выпуска продукции, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{12}0x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \qquad (9.4)$$

и условию $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$ (9.5)

при котором функция

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad (9.6)$$

принимает максимальное значение.

## 1.2. Математические модели простых экономических задач

В экономике оптимизационные задачи возникают в связи с многочисленностью возможных вариантов функционирования конкретного экономического объекта, когда возникает ситуация выбора варианта, наилучшего по некоторому правилу, критерию, характеризуемому соответствующей целевой функцией (например, иметь минимум затрат, максимум продукции). Оптимизационные модели отражают в математической форме смысл экономической задачи. Отличительной особенностью этих моделей является наличие условия нахождения оптимального решения (критерия оптимальности), которое записывается в виде функционала. Эти модели при определенных исходных данных задачи позволяют получить множество решений, удовлетворяющих условиям задачи, и обеспечивают выбор оптимального решения, отвечающего критерию оптимальности. В общем виде математическая постановка задачи математического программирования состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условиях $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i (i = 1,2,\ldots,m)$, где $f$ и $g_i$ – заданные функции, а $b_i$ – некоторые действительные числа. Задачи математического программирования делятся на задачи линейного и нелинейного программирования. Если все функции $f$ и $g_i$ – линейные, то соответствующая задача является задачей линейного программирования. Если хотя бы одна из указанных Функций – нелинейная, то соответствующая задача является задачей нелинейного программирования.

Линейное программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач

нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т.е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные. К задачам линейного программирования сводится широкий круг вопросов планирования экономических процессов, где ставится задача поиска наилучшего (оптимального) решения.

Среди задач нелинейного программирования наиболее глубоко изучены задачи выпуклого программирования. Это задачи, в результате решения которых определяется минимум выпуклой (или максимум вогнутой) функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве.

В свою очередь, среди задач выпуклого программирования более подробно исследованы задачи квадратичного программирования. В результате решения таких задач требуется в общем случае найти максимум (или минимум) квадратичной функции при условии, что ее переменные удовлетворяют некоторой системе линейных неравенств или линейных уравнений либо некоторой системе, содержащей как линейные неравенства, так и линейные уравнения.

Отдельными классами задач математического программирования являются задачи целочисленного, параметрического и дробно-линейного программирования.

В общем виде задача линейного программирования (ЗЛП) ставится следующим образом:

найти вектор $\overline{X}=(x_1,x_2,...,x_n)$, максимизирующий линейную форму

$$f(\overline{X})=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j \to \max \qquad (1.1)$$

и удовлетворяющий условиям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \qquad (1.2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,n \qquad (1.3)$$

Линейная функция $f(\overline{X})$ называется целевой функцией задачи. Условия (1.2) называются функциональными, а (1.3) — прямыми ограничениями задачи.

Вектор $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, компоненты которого удовлетворяют функциональным и прямым ограничениям задачи, будем называть планом, или допустимым решением ЗЛП.

Все допустимые решения образуют область определения задачи линейного программирования, или область допустимых решений. Допустимое решение, максимизирующее целевую функцию $f(\overline{X})$, называется оптимальным планом задачи

$f(\overline{X}^*) = \max f(\overline{X})$, где $\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ – оптимальное решение ЗЛП.

На практике хорошо зарекомендовали себя следующие модели, относящиеся к оптимизационным: определения оптимальной производственной программы; оптимального смешивания компонентов; оптимального раскроя; оптимального размещения предприятий некоторой отрасли на определенной территории; формирования оптимального портфеля ценных бумаг; транспортной задачи.

Для решения ЗЛП существует универсальный метод – метод последовательного улучшения плана, или симплекс-метод, который состоит из двух вычислительных процедур: симплекс-метода с естественным базисом и симплекс-метода с искусственным базисом (М-метод).

Выбор конкретной вычислительной процедуры осуществляется после приведения исходной задачи к каноническому виду задачи линейного программирования (КЗЛП):

$$\max f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum c_j x_j,$$
$$\sum a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m,$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\ldots,n; \; b_i \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

Будем считать, что ЗЛП записана в канонической форме, если ее целевая функция максимизируется, ограничения имеют вид равенств с неотрицательной правой частью и все переменные неотрицательные. В теории линейного программирования показано, что оптимальное решение ЗЛП связано с угловыми (крайними) точками многогранника решений, которым отвечают опорные планы (неотрицательные базисные решения системы уравнений КЗЛП). Каждый из опорных планов определяется системой $m$ линейно независимых векторов, содержащихся в данной системе из $n$ векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Верхняя граница количества опорных планов, содержащихся в данной задаче, определяется числом сочетаний $C_m^n$.

Рассмотрим несколько примеров задач линейного программирования.

В планируемом периоде предприятию необходимо обеспечить производство 300 тыс. однородных новых изделий, которые могут выпускать четыре филиала. Для освоения этого нового вида изделий выделены капитальные вложения в размере 18 млн сум. Разработанные для каждого филиала предприятия проекты освоения нового вида изделия характеризуются величинами удельных капитальных вложений и себестоимостью единицы продукции в соответствии с табл. 1.2.

**Таблица 1.2**

| Показатели | Филиалы предприятия | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Себестоимость производства изделия. сум. | 83 | 89 | 95 | 98 |
| Удельные капиталовложения, сум. | 120 | 80 | 90 | 40 |

Себестоимость производства и удельные капиталовложения для каждого из филиалов условно приняты постоянными, т.е. потребность в капитальных вложениях и общие издержки будут изменяться пропорционально изменению объемов производства изделий.

Необходимо найти такой вариант распределения объемов производства продукции и капитальных вложений по филиалам, при котором суммарная стоимость изделий будет минимальной.

### Экономико-математическая модель задачи

Введем следующие обозначения:

$i$ – номер филиала ($i=1,\ldots,n;\ n=4$);

$x_i$ – объем выпускаемой продукции в филиале $i$;

$T$ – суммарная потребность в изделиях ($T=300$ тыс. шт.);

$K$ – выделяемые капиталовложения ($K$=18 млн. сум.);

$c_i$ – себестоимость производства продукции в филиале $i$;

$k_i$ – удельные капитальные вложения на единицу продукции в филиале $i$.

Экономико-математическая модель задачи будет иметь вид:

$$f(\overline{X})=\sum_{i=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq T;$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i x_i \leq K;$$

$$x_i \geq 0;\ i=1,\ldots,n$$

Подставляя исходные данные, имеем:

$f(\overline{X})=83x_1+89x_2+95x_3+98x_4 \to \min$,

ограничения

$x_1+x_2+x_3+x_4 \geq 300$ (тыс. шт.),



TDIU
kutubxonasi
hn 8155

$120x_1 + 80x_2 + 50x_3 + 40x_4 \le 18$ (млн. сум.),

$x_{1,2,3,4} \ge 0$

## 1.3. Графическое решение задач линейного программирования

Наиболее простым и наглядным методом линейного программирования (ЛП) является графический метод. Он применяется для решения задач ЛП с двумя переменными. Рассмотрим задачу ЛП в стандартной форме:

$$\max f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \ge 0; \quad j = 1,2,\ldots,n$$

Положим $n=2$ и будем рассматривать задачу на плоскости. Пусть система неравенств совместна (имеет хотя бы одно решение).

Каждое неравенство этой системы геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i, \ i = 1,2,\ldots,m$. Условия не отрицательности определяют полуплоскости с граничными прямыми $x_1 = 0, x_2 = 0$ соответственно. Система совместна, поэтому полуплоскости, как выпуклые множества, пересекаясь, образуют общую часть, которая является выпуклым множеством и представляет собой совокупность точек, где координаты каждой точки являются решением данной системы. Совокупность этих точек называют многоугольником решении. Он может быть точкой, отрезком, лучом, ограниченным и неограниченным многоугольником.

Таким образом, геометрически ЗЛП представляет собой отыскание такой точки многоугольника решений, координаты

которой доставляют линейной функции цели максимальное (минимальное) значение, причем допустимыми решениями являются все точки многоугольника решений.

Линейное уравнение описывает множество точек, лежащих на одной прямой. Линейное неравенство описывает некоторую область на плоскости. Определим, какую часть плоскости описывает неравенство $2x_1 + 3x_2 \leq 12$.

Во-первых, построим прямую $2x_1 + 3x_2 = 12$. Она проходит через точки (6;0) и (0; 4). Для того чтобы определить, какая полуплоскость удовлетворяет неравенству, необходимо выбрать любую точку на графике, не принадлежащую прямой, и подставить ее координаты в неравенство. Если неравенство будет выполняться, то данная точка является допустимым решением, и полуплоскость, содержащая точку, удовлетворяет неравенству. Для подстановки в неравенство удобно использовать точку начала координат. Подставим $x_1 = x_2 = 0$ в неравенство $2x_1 + 3x_2 \leq 12$. Получим $2 \times 0 + 3 \times 0 \leq 12$. Данное утверждение является верным, следовательно, неравенству $2x_1 + 3x_2 \leq 12$ соответствует нижняя полуплоскость, содержащая точку (0; 0). Это отражено на графике, изображенном на рис. 1.1.

Аналогично графически можно изобразить все ограничения задачи ЛП.

Решением каждого неравенства системы ограничений ЗЛП является полуплоскость, содержащая граничную прямую и расположенная по одну сторону от нее. Пересечение полуплоскостей, каждая из которых определяется соответствующим неравенством системы, называется областью

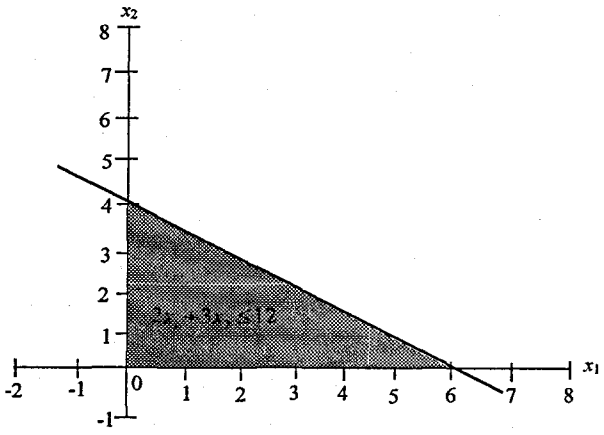



**Рис. 1.1. Неравенству $2x_1 + 3x_2 \le 12$ соответствует нижняя полуплоскость.**

допустимых решений, или областью определения. Необходимо помнить, что область допустимых решений удовлетворяет условиям неотрицательности $(x_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n)$. Координаты любой точки, принадлежащей области определения, являются допустимым решением задачи.

Для нахождения экстремального значения целевой функции при графическом решении задач ЛП используют вектор-градиент, координаты которого являются частными производными целевой функции, т.е.

$$\nabla = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1,\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2 \right)$$

Этот вектор показывает направление наискорейшего изменения целевой функции. Прямая $c_1 x_1 + c_2 x_2 = f(x_0)$, перпендикулярная

вектору-градиенту, является линией уровня целевой функции. В любой точке линии уровня целевая функция принимает одно и то же значение. Приравняем целевую функцию постоянной величине «*a*». Меняя значение «*a*», получим семейство параллельный прямых, каждая из которых является линией уровня целевой функции.

Важное свойство линии уровня линейной функции состоит в том, что при параллельном смещении линии в одну сторону уровень только возрастает, а при смещении в другую сторону – только убывает.

С геометрической точки зрения в задаче линейного программирования

ищется такая угловая точка или набор точек из допустимого множества решений, на котором достигается самая верхняя (нижняя) линия уровня, расположенная дальше (ближе) остальных в направлении наискорейшего роста.

Графический метод решения ЗЛП состоит из следующих этапов.

1. Строится многоугольная область допустимых решений (ОДР) ЗЛП.

2. Строится вектор-градиент целевой функции (ЦФ) в какой-нибудь точке $x_0$, принадлежащей ОДР:

$\nabla = (c_1, c_2)$.

3. Линия уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = a$ ($a$ – постоянная величина) – прямая, перпендикулярная вектору-градиенту $\nabla$, – передвигается в направлении этого вектора в случае максимизации $f(x_1, x_2)$ до тех пор, пока не покинет пределов ОДР. Предельная точка (или точки) области при этом движении и является точкой максимума $f(x_1, x_2)$.

4. Для нахождения координат точки максимума достаточно решить два уравнения прямых, получаемых из соответствующих

ограничений и дающих в пересечении точку максимума. Значение $f(x_1, x_2)$, найденное в получаемой точке, является максимальным.

При минимизации (максимизации) функции $f(x_1, x_2)$ линия уровня перемещается в направлении, противоположном вектору-градиенту. Если прямая, соответствующая линии уровня, при своем движении не покидает ОДР, то минимум (максимум) функции $f(x_1, x_2)$ не существует.

Если линия уровня параллельна какому-либо функциональному ограничению задачи, то оптимальное значение ЦФ будет достигаться в любой точке этого ограничения, лежащей между двумя оптимальными угловыми точками, и, соответственно, любая из этих точек является оптимальным решением ЗЛП. Возможные ситуации графического решения задач ЛП представлены в табл. 1.3.

Рассмотрим графическое решение задач линейного программирования на следующем примере.

Пример 1.1. Планирование выпуска продукции пошивочного предприятия (задача о костюмах).

Намечается выпуск двух видов костюмов – мужских и женских. На женский костюм требуется 1 м шерсти, 2 м лавсана и 1 чел./день трудозатрат. На мужской костюм – 3,5 м шерсти, 0,5 м лавсана и 1 чел./день трудозатрат. Всего имеется 350 м шерсти, 240 м лавсана и 150 чел./дней трудозатрат. Требуется определить, сколько костюмов каждого вида необходимо сшить, чтобы обеспечить максимальную прибыль, если прибыль от реализации женского костюма составляет 10 денежных единиц, а от мужского – 20 денежных единиц. При этом следует иметь в виду, что необходимо сшить не менее 60 мужских костюмов.

Таблица 1.3

**Возможные ситуации графического решения задач ЛП**

| № | Вид ОДР | Вид оптимального решения |
|---|---|---|
| 1. | Ограниченная | Единственное решение |
| | | Бесконечное множество решений |
| 2. | Неограниченная | ЦФ не ограничена снизу |
| | | ЦФ не ограничена сверху |
| | | Единственное решение |
| | | Бесконечное множество решений |
| 3. | Отрезок | Единственное решение |
| | | Бесконечное множество решени |

### Экономико-математическая модель задачи

Введем следующие обозначения: $x_1$ – число женских костюмов; $x_2$ – число мужских костюмов. Прибыль от реализации женских костюмов составляет $10x_1$, а от реализации мужских – $20x_2$, т.е. необходимо максимизировать целевую функцию:

$$f(\bar{x}) = 10x_1 + 20x_2 \to \max$$

Ограничения задачи имеют вид:

$$x_1 + x_2 \le 150,$$
$$2x_1 + 0{,}5x_2 \le 240,$$
$$x_1 + 3{,}5x_2 \le 350,$$
$$x_2 \ge 60$$
$$x_1 \ge 0$$

Первое ограничение по труду $x_1 + x_2 \le 150$. Прямая $x_1 + x_2 = 150$ проходит через точки (150; 0) и (0; 150) (рис. 1.2).

Второе ограничение по лавсану $2x_1 + 0{,}5x_2 \le 240$. Прямая $2x_1 + 0{,}5x_2 = 240$ проходит через точки (120; 0) и (0; 480). Третье ограничение по шерсти $x_1 + 3{,}5x_2 \le 350$. Добавим четвертое ограничение по количеству мужских костюмов $x_2 \ge 60$. Решением этого неравенства является полуплоскость, лежащая выше прямой $x_2 = 60$. На рис. 1.3 заштрихована область допустимых решений. Для определения направления движения к оптимуму построим вектор-градиент $\nabla$, координаты которого являются частными производными целевой функции, т.е.

$$\nabla = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2 \right) = (10;20)$$

Чтобы построить такой вектор, нужно соединить точку (10; 20) с началом координат. При максимизации целевой функции необходимо двигаться в направлении вектора-градиента, а при минимизации – в противоположном направлении. Для удобства можно строить вектор, пропорциональный вектору $\nabla$. Так, на рис. 1.4 изображен вектор-градиент

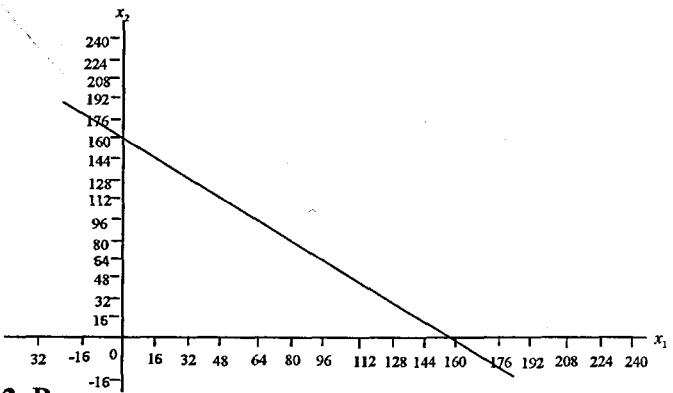



**Рис. 1.2. Решением первого неравенства является нижняя полуплоскость.**

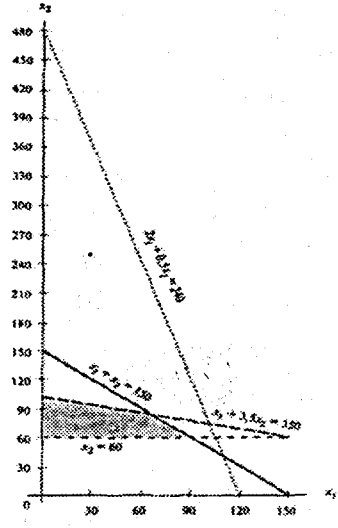


**Рис. 1.3. Заштрихована область допустимых решений.**

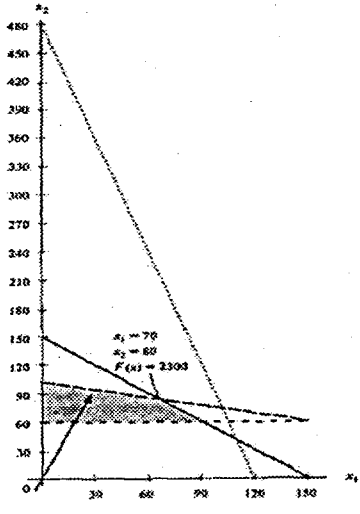


**Рис. 1.4. Максимум целевой функции достигается в точке (70; 80).**

В наше случае движение линии уровня будем осуществлять до ее выхода из области допустимых решений. В крайней, угловой, точке достигается максимум целевой функции. Для нахождения координат этой точки достаточно решить два уравнения прямых, получаемых из соответствующих ограничений и дающих в пересечении точки максимума:

$$x_1 + 3{,}5x_2 = 350,$$
$$x_1 + x_2 = 150$$

Отсюда легко записать решение исходной ЗЛП: $\max f(x) = 2300$ и достигается при $x_1 = 70$ и $x_2 = 80$ (см. рис. 1.4).

# ГЛАВА II. АЛГОРИТМ СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДА ДЛЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

## 2.1. Нахождение неотрицательных решений систем линейных уравнений

***Симплекс метод*** – это метод последовательного перехода от одного базисного решения (вершины многогранника решений) системы ограничений задачи линейного программирования к другому базисному решению до тех пор, пока функция цели не примет оптимального значения (максимума или минимума).

Симплекс-метод является универсальным методом, которым можно решить любую задачу линейного программирования, в то время, как графический метод пригоден лишь для системы ограничений с двумя переменными.

Симплекс метод был предложен американским математиком Р.Данцигом в 1947 году, с тех пор для нужд промышленности этим методом нередко решаются задачи линейного программирования с тысячами переменных и ограничений.

Перед тем, как перейти к алгоритму симплекс метода, несколько определений.

Всякое неотрицательное решение системы ограничений называется *допустимым решением*.

Пусть имеется система $m$ ограничений с $n$ переменными $(m < n)$.

Допустимым базисным решением является решение, содержащее m неотрицательных основных (базисных) переменных и $n-m$ неосновных. (небазисных, или свободных) переменных. Неосновные переменные в базисном решении равны нулю, основные же переменные, как правило, отличны от нуля, то есть являются положительными числами.

Любые m переменных системы m линейных уравнений с n переменными называются основными, если определитель из коэффициентов при них отличен от нуля. Тогда остальные n - m переменных называются неосновными (или свободными).

**Алгоритм симплекс метода**

- **Шаг 1.** Привести задачу линейного программирования к канонической форме. Для этого перенести свободные члены в правые части (если среди этих свободных членов окажутся отрицательные, то соответствующее уравнение или неравенство умножить на – 1) и в каждое ограничение ввести дополнительные переменные (со знаком «плюс», если в исходном неравенстве знак «меньше или равно», и со знаком «минус», если «больше или равно»).
- **Шаг 2.** Если в полученной системе *m* уравнений, то *m* переменных принять за основные, выразить основные переменные через неосновные и найти соответствующее базисное решение. Если найденное базисное решение окажется допустимым, перейти к допустимому базисному решению.
- **Шаг 3.** Выразить функцию цели через неосновные переменные допустимого базисного решения. Если отыскивается максимум (минимум) линейной формы и в её выражении нет неосновных переменных с отрицательными (положительными) коэффициентами, то критерий оптимальности выполнен и полученное базисное решение является оптимальным - решение окончено. Если при нахождении максимума (минимума) линейной формы в её выражении имеется одна или несколько неосновных переменных с отрицательными (положительными) коэффициентами, перейти к новому базисному решению.
- **Шаг 4.** Из неосновных переменных, входящих в линейную форму с отрицательными (положительными) коэффициентами, выбирают ту, которой соответствует наибольший (по

модулю) коэффициент, и переводят ее в основные. Переход к шагу 2.

**Важные условия**

- Если допустимое базисное решение дает оптимум линейной формы (критерий оптимальности выполнен), а в выражении линейной формы через неосновные переменные отсутствует хотя бы одна из них, то полученное оптимальное решение - не единственное.
- Если в выражении линейной формы имеется неосновная переменная с отрицательным коэффициентом в случае ее максимизации (с положительным – в случае минимизации), а во все уравнения системы ограничений этого шага указанная переменная входит также с отрицательными коэффициентами или отсутствует, то линейная форма не ограничена при данной системе ограничений. В этом случае ее максимальное (минимальное) значение записывают в виде $F_{\max} = \infty$ $\left(F_{\min} = -\infty\right)$.

## Симплекс метод с симплексными таблицами

Путем построения симплексных таблиц решить задачу линейного программирования намного проще, чем путем алгебраических преобразований, который показан в следующем параграфе. Симплексные таблицы очень наглядны. Существует несколько разновидностей правил работы с симплексными таблицами. Мы разберём правило, которое чаще всего называется правилом ведущего столбца и ведущей строки.

Будет нелишним открыть в новом окне пособие Действия с дробями: их, дробей в задачах на симплекс-метод, мягко говоря, хватает.

**Пример.** Найти максимум функции $F = x_1 + 2x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0$$

**Решение.** Вводим добавочные неотрицательные переменные $x_3, x_4, x_5, x_6$ и сводим данную систему неравенств к эквивалентной ей системе уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_2 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 6).$$

Это было сделано с соблюдением следующего правила: если в первоначальном ограничении знак «меньше или равно», то добавочную переменную нужно прибавлять, а если «больше или равно», то добавочную переменную нужно отнимать.

Введённые добавочные переменные принимаем за основные (базисные). Тогда $x_1$ и $x_2$ – неосновные (свободные) переменные.

Выразив основные (базисные) переменные через неосновные (свободные), получим

$$\begin{cases} x_3 = -2 - (x_1 - 2x_2) \\ x_4 = -4 - (-x_1 - x_2) \\ x_5 = 2 - (x_1 - x_2) \\ x_6 = 6 - (x_2) \end{cases}$$

Функцию цели также выразим через неосновные (свободные) переменные:

$$F = 0 - (-x_1 - 2x_2)$$

Из коэффициентов при переменных (неизвестных) построим первую симплексную таблицу.

**Таблица 2. 1**

| Базисные неизвестные | Свободные члены | Свободные неизвестные | | Вспомогательные коэффициенты |
|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_1$ | |
| $x_3$ | –2 | 1 | –2 | |
| $x_4$ | –4 | –1 | –1 | |
| $x_5$ | 2 | 1 | –1 | |
| $x_6$ | 6 | 0 | 1 | |
| $F$ | 0 | –1 | –2 | |

Последнюю строку таблицы, в которой записаны функция цели и коэффициенты при свободных переменных в ней, будем называть в индексной строкой.

Полученное решение не оптимально, так как в индексной строке коэффициенты при свободных переменных отрицательны. То есть оптимальным будет то решение, в котором коэффициенты при свободных переменных в индексной строке будут больше или равны нулю.

Для перехода к следующей таблице найдём наибольшее (по модулю) из чисел $|-1|$ и $|-2|$. Это число 2. Поэтому ведущий столбец - тот столбец, в котором записано $x_2$.

Для определения ведущей строки находим минимум отношений свободных членов к элементам ведущего столбца, причем, если в числителе положительное число, а в знаменателе отрицательное, отношение считается равным бесконечности.

Итак, $\min\{2,4,\infty,6\}=2$.

Поэтому ведущая строка – та, в которой записано $x_3$

Ведущим элементом, таким образом, является –2.

Составляем вторую симплексную таблицу.

Новый базисный элемент $x_2$ вписываем первой строкой, а столбец, в котором стояло $x_2$, вписываем новую свободную переменную $x_3$.

Заполняем первую строку. Для этого все числа, стоящие в ведущей строке таблицы 1, делим на ведущий элемент и записываем в соответствующий столбец первой строки таблицы 2, кроме числа, стоящего в ведущем столбце, куда записывается величина, обратная ведущему элементу (то есть, единица, делённая на ведущий элемент).

Заполняем столбец вспомогательных коэффициентов. Для этого числа ведущего столбца таблицы 2.1, кроме ведущего элемента, записываем с противоположными знаками в графу вспомогательных коэффициентов таблицы 2.2.

**Таблица 2.2**

| Базисные неизвестные | Свободные члены | Свободные неизвестные | | Вспомогательные коэффициенты |
|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_3$ | |
| $x_2$ | 1 | –1/2 | –1/2 | |
| $x_4$ | –3 | –3/2 | –1/2 | 1 |
| $x_5$ | 3 | ½ | –1/2 | 1 |
| $x_6$ | 5 | ½ | ½ | –1 |
| $F$ | 2 | -2 | -1 | 2 |

Кто ещё не открыл в новом окне пособие Действия с дробями, может сделать это сейчас, поскольку самое время.

Для получения остальных строк таблицы 2 числа, уже стоящие в первой строке этой таблицы, умножаем на вспомогательный коэффициент, стоящий в заполняемой строке, и к результату прибавляем число из таблицы 1, стоящее в той же строке при соответствующей переменной.

Например, для получения свободного члена второй строки число 1 умножаем на 1 и прибавляем из таблицы 1 число –4. Получаем –3. Коэффициент при $x_1$ во второй строке находим так же: $-\frac{1}{2}\cdot 1-1=-\frac{3}{2}$. Так как в предыдущей таблице отсутствует столбец с новой свободной переменной $x_3$, то коэффициент второй строки в столбце новой свободной переменной $x_3$ будет $-\frac{1}{2}\cdot 1+0=-\frac{1}{2}$ (то есть из таблицы 1 прибавляем 0, так как в таблице 1 столбец с $x_3$ отсутствует).

Так же заполняется и индексная строка:

$$1\cdot 2+0=2$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 2-1=-2$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 2+0=-1$$

Полученное таким образом решение вновь не оптимально, так как в индексной строке коэффициенты при свободных переменных вновь отрицательны.

Для перехода к следующей симплексной таблице найдём наибольшее (по модулю) из чисел $|-2|$ и $|-1|$, то есть, модулей коэффициентов в индексной строке. Это число 2. Поэтому ведущий столбец – тот столбец, в котором записано $x_1$.

Для поиска ведущей строки найдём минимум отношений свободных членов к элементам ведущей строки. Получаем:

$$\min\{\infty,2,6,10\}=2$$

Следовательно, ведущая строка – та, в которой записано $x_4$, а ведущим элементом является -3/2.

Составляем третью симплексную таблицу

Новую базисную переменную $x_1$ записываем первой строкой. В столбец, в котором было $x_1$, вписываем новую свободную переменную $x_4$.

Первая строка:

$$-3:\left(-\frac{3}{2}\right)=2$$

$$1:\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{2}{3}$$

$$-\frac{2}{2}:\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3}.$$

Вспомогательные коэффициенты:

$$\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ 2$$

**Таблица 2.3**

| Базисные неизвестные | Свободные члены | Свободные неизвестные | | Вспомогательные коэффициенты |
|---|---|---|---|---|
| | | $x_4$ | $x_3$ | |
| $x_1$ | 2 | –2/3 | 1/3 | |
| $x_2$ | 2 | –1/3 | –1/3 | 1/3 |
| $x_5$ | 2 | 1/3 | –2/3 | –1/2 |
| $x_6$ | 4 | 1/3 | 1/3 | –1/2 |
| $F$ | 6 | –4/3 | –1/3 | 2 |

Вычисление остальных строк на примере второй строки:

$$2\cdot\frac{1}{2}+1=2$$

$$-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+0=-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$$

Полученное решение вновь не оптимальное, поскольку коэффициенты при свободных неизвестных в индексной строке вновь отрицательные.

Для перехода к четвёртой симплексной таблице найдём наибольшее из чисел $\left|-\frac{4}{3}\right|$ и $\left|-\frac{1}{3}\right|$. Это число $\frac{4}{3}$.

Следовательно, ведущий столбец – тот, в котором записано $x_4$.

Для нахождения ведущей строки найдём минимум модулей отношений свободных членов к элементам ведущего столбца:

$\min\{\infty, \infty, 6, 12\} = 6$.

Поэтому ведущая строка – та, в которой записано $x_5$, а ведущий элемент 1/3.

В четвертой симплексной таблице новую базисную переменную $x_4$ записываем первой строкой. В столбец, где было $x_4$, записываем новую свободную переменную $x_5$.

Первая строка:

$$2 : \frac{1}{3} = 6$$

$$1 : \frac{1}{3} = 3$$

$$-\frac{2}{3} : \frac{1}{3} = -2.$$

Вспомогательные коэффициенты:

$$\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{3};\ \frac{4}{3}.$$

**Таблица 2.4**

| Базисные неизвестные | Свободные члены | Свободные неизвестные | | Вспомогательные коэффициенты |
|---|---|---|---|---|
| | | $x_5$ | $x_3$ | |
| $x_4$ | 6 | 3 | -2 | 2/3 |
| $x_1$ | 6 | 2 | -1 | 2/3 |
| $x_2$ | 4 | 1 | -1 | 1/3 |
| $x_6$ | 2 | -1 | 1 | -1/3 |
| $F$ | 14 | 4 | -3 | 4/3 |

Вычисление остальных строк на примере второй строки:

$$6 \cdot \frac{2}{3} + 2 = 6$$

$$3 \cdot \frac{2}{3} + 0 = 2$$

$$-2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -1$$

Полученное решение так же не оптимально, но оно уже лучше предыдущих, так как один из коэффициентов при свободных переменных в индексной строке неотрицателено.

Для улучшения плана перейдём к следующей симплексной таблице.

Найдём наибольшее из чисел 4 и $|-3|$. Это число 4. Следовательно, ведущий столбец $x_5$.

Для нахождения ведущей строки найдем

$\min\{2,3,4,\infty\} = 2$.

Следовательно, ведущая строка – та, в которой записано $x_4$. Но $x_3$ и $x_4$ уже были вместе среди свободных переменных. Поэтому для перевода очередной переменной из свободных в базисные выбираем другой ведущий столбец – тот, в котором записано $x_5$.

Для нахождения ведущей строки найдём

$\min\{\infty,\infty,\infty,2\} = 2$.

Следовательно, ключевая строка – та, в которой записано $x_6$, а ведущий элемент 1.

В пятой симплексной таблице новую базисную переменную $x_3$ записываем первой строкой. В столбец, где было $x_3$, записываем новую свободную переменную $x_6$.

Первая строка:

$$\frac{2}{1}=2$$

$$-\frac{1}{1}=-1$$

$$\frac{1}{1}=1.$$

Вспомогательные коэффициенты:

$$2;\ 1;\ 1;\ 3.$$

**Таблица 2.5**

| Базисные неизвестные | Свободные члены | Свободные неизвестные | | Вспомогательные коэффициенты |
|---|---|---|---|---|
| | | $x_5$ | $x_6$ | |
| $x_3$ | 2 | –1 | 1 | |
| $x_4$ | 10 | | | 2 |
| $x_1$ | 8 | | | 1 |
| $x_2$ | 6 | | | 1 |
| $F$ | 20 | 1 | 3 | 3 |

Попробуем сразу узнать, не является ли решение оптимальным. Поэтому для остальных строк вычислим только свободные члены (чтобы узнать значения базисных переменных при равенстве свободных переменных нулю) и коэффициенты при свободных переменных в индексной строке.

Свободные члены:

– во второй строке $2\cdot2+6=10$;

– в третьей строке $2\cdot1+6=8$;

– в четвертой строке $2\cdot1+4=6$.

Индексная строка:

$2\cdot3+14=20$

$-1\cdot3+4=1$

$1\cdot3+0=3$

Смотрим в симплексную таблицу 5. Видим, что получено оптимальное решение, так как коэффициенты при свободных неизвестных в индексной строке неотрицательны.

Ответ:

$F_{\max} = 8 + 2 \cdot 6 = 20$

$x_1 - 8$

$x_2 = 6$

## 2.2. Решение задач стандартного вида симплексным методом

Решим алгебраическими преобразованиями тот же пример, что и в предыдущем параграфе. Следует отметить, что при решении этой разновидностью симплекс метода лучше не записывать функцию цели в виде $F = 0 - (-x_1 - 2x_2)$, так как при этом легко запутаться в знаках. Но в этом случае пункт алгоритма, определяющий критерий оптимальности, будет модифицирован следующим образом.

Если отыскивается максимум (минимум) линейной формы и в её выражении нет неосновных переменных с положительными (отрицательными) коэффициентами, то критерий оптимальности выполнен и полученное базисное решение является оптимальным – решение окончено. Если при нахождении максимума (минимума) линейной формы в ее выражении имеется одна или несколько неосновных переменных с положительными (отрицательными) коэффициентами, перейти к новому базисному решению.

**Пример.** Найти максимум функции $F = x_1 + 2x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \leq 0$$

**Решение.**

Шаг I. Вводим добавочные неотрицательные переменные $x_3, x_4, x_5, x_6$ и сводим данную систему неравенств к эквивалентной ей системе уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_2 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1,\ 2,\ldots,\ 6).$$

Введённые добавочные переменные принимаем за основные, так как в этом случае базисное решение системы легко находится. Тогда $x_1$ и $x_2$ – неосновные переменные.

Выразив основные переменные через неосновные, получим

$$\begin{cases} \boxed{x_3 = -2 - x_1 + 2x_2} \\ x_4 = -4 + x_1 + x_2 \\ x_5 = 2 - x_1 + x_2 \\ x_6 = 6 - x_2 \end{cases}$$

Следовательно, данному разбиению переменных на основные и неосновные соответствует базисное решение $(0;0;-2;-4;2;6)$, которое является недопустимым (две переменные отрицательны), а поэтому оно не оптимальное. От этого базисного решения перейдем к улучшенному.

Чтобы решить, какую переменную следует перевести из неосновных в основные, рассмотрим любое из двух имеющихся уравнений последней системы с отрицательными свободными членами, например второе. Оно показывает, что в основные переменные можно перевести $x_1$ и $x_2$, так как в этом уравнении они имеют положительные коэффициенты (следовательно, при их

увеличении, а это произойдет, если переведем любую из них в основные переменные, переменная $x_4$ увеличится).

Попробуем перевести в основные переменную $x_1$. Чтобы установить, какую переменную следует перевести из основные в неосновные, найдем абсолютную величину наименьшего отношения свободных членов системы к коэффициентам при $x_1$. Имеем $x_1 = \min\{\infty; 4/1; 2/1; \infty\} = 2$. Оно получено из третьего уравнения, показывающего, что в неосновные нужно перевести переменную $x_5$, которая в исходном базисном решении положительна. Следовательно, полученное базисное решение, как и исходное, содержит две отрицательные компоненты, т. е. при переходе к такому базисному решению улучшения не произойдёт.

Если же перевести в основные переменную $x_2$, то наименьшее отношение свободных членов к коэффициентам при $x_2$ составит $x_2 = \min\{2/2; 4/1; \infty; 6/1\} = 1$. Оно получено из первого уравнения, в котором свободный член отрицателен. Следовательно, переводя $x_2$ в основные, а $x_3$ в неосновные переменные, мы получим базисное решение, в котором число отрицательных компонент на единицу меньше, чем в исходном. Поэтому остановимся на этой возможности: переводим $x_2$ в основные, а $x_3$ в неосновные переменные. Поэтому в приведенной выше системе уравнений выделенным оказалось первое уравнение.

Шаг II.

Основные переменные $x_2, x_4, x_5, x_6$, неосновные переменные $x_1, x_3$.

Выразим новые основные переменные через новые неосновные, начиная с выделенного на шаге I уравнения. В результате получим

$$\begin{cases} x_2 = 1 + 0,5x_1 + 0,5x_3 \\ \boxed{x_4 = -3 + 1,5x_1 + 0,5x_3} \\ x_5 = 3 - 0,5x_1 + 0,5x_3 \\ x_6 = 5 - 0,5x_1 - 0,5x_3 \end{cases}$$

Следовательно, имеем новое базисное решение $(0; 1; 0; -3; 3; 5)$, которое также является недопустимым, а поэтому не оптимальным. Но в нем, как мы и предвидели, только одна переменная отрицательна (а именно $x_4$).

От полученного базисного решения необходимо перейти к другому. Рассмотрим уравнение с отрицательным свободным членом, т. е. второе уравнение. Оно показывает, что в основные переменные можно перевести $x_1$ и $x_3$. Переведём в основные переменные $x_1$. Найдем наименьшее из абсолютных величин отношений свободных членов системы к коэффициентам при $x_1$. Имеем $x_1 = \min\{\infty; 3/15; 3/0,5; 5/0,5\} = 2$. Значит, в неосновные переменные нужно перенести $x_4$. *Так как наименьшее отношение* получено из второго уравнения, то его выделяем. В новом базисном решении уже не окажется отрицательных компонент, т.е. оно является допустимым.

В особых случаях решение завершается на II шаге: это, например, случаи, когда максимум целевой функции – бесконечность и когда система не имеет ни одного решения.

Шаг III.

Основные переменные: $x_1, x_2, x_5, x_6$, неосновные переменные: $x_3, x_4$. Выразив основные переменные через неосновные, получим

$$\begin{cases} x_1 = 2 - (1/3)x_3 + (2/3)x_4 \\ x_2 = 2 + (1/3)x_3 + (1/3)x_4 \\ \boxed{x_5 = 2 + (2/3)x_3 - (1/3)x_4} \\ x_6 = 4 - (1/3)x_3 - (1/3)x_4 \end{cases}$$

Новое базисное решение имеет вид $(2;2;0;0;2;4)$. Является ли оно оптимальным, можно установить, если выразить линейную форму через неосновные переменные рассматриваемого базисного решения. Сделав это, получим $F=6+(1/3)x_3+(4/3)x_4$. Так как мы ищем максимум линейной формы, а нашли лишь одно допустимое решение, то продолжим перебор.

Переводим в число основных переменную $x_4$, имеющую больший положительный коэффициент. Находим $x_4=\min\{\infty;\infty;2/(1/3);4/(1/3)\}=6$. Это наименьшее отношение получено из третьего уравнения системы, поэтому его выделяем. Оно показывает, что при $x_4=6$ переменная $x_5=0$ и поэтому перейдёт в число неосновных.

В некотором особом случае решение завершается на III шаге: это случай, когда оптимальное решение - не единственное.

Шаг IV.

Основные переменные: $x_1,x_2,x_4,x_6$, неосновные переменные: $x_3,x_5$. Выразив основные переменные через неосновные, получим

$$\begin{cases} x_1=6+x_3-2x_5 \\ x_2=4+x_3-x_5 \\ x_4=6+2x_3-3x_5 \\ \boxed{x_6=2-x_3+x_5} \end{cases}$$

Линейная форма, выраженная через те же неосновные переменные, примет вид $F=14+3x_3-4x_4$. Продолжим перебор для поиска максимума.

Увеличение линейной формы возможно при переходе к новому базисному решению, в котором переменная $x_3$ является основной. Находим $x_3=\min\{\infty;\infty;\infty;2/1\}=2$. Это наименьшее отношение получено из четвёртого уравнения системы и показывает, что при $x_3=2$ переменная $x_6=0$ и переходит в число неосновных.

Шаг V.

Основные переменные: $x_1, x_2, x_3, x_4$, неосновные переменные: $x_5, x_6$. Выразив основные переменные через неосновные, получим

$$\begin{cases} x_1 = 8 - x_5 - x_6 \\ x_2 = 6 \quad - x_6 \\ x_3 = 2 + x_5 - x_6 \\ x_4 = 10 - x_5 - 2x_6 \end{cases}$$

Линейная форма, выраженная через неосновные переменные нового базисного решения, имеет вид $F = 20 - x_5 - 3x_6$. Критерий оптимальности для случая максимизации линейной формы выполнен. Следовательно, базисное решение $(8; 6; 2; 10; 0; 0)$ является оптимальным, а максимум линейной формы $F_{\max} = 20$.

## 2.3. Метод искусственного базиса

Многие практические задачи линейного программирования не содержат линейно независимой системы единичных векторов $P_j$, которую можно выбрать в качестве первого базиса задачи. В этом случае в задачу вводят дополнительно $k$ единичных векторов $P_{n+1}, \ldots, P_{n+k}$, образующих базис.

Пусть задана следующая основная задача линейного программирования:

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max \qquad (2.1)$$

при линейных ограничениях

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \ldots + a_{kn} x_n = b_k \\ x_j \geq 0, \; j = \overline{1, n} \end{cases} \qquad (2.2)$$

**1-й метод.** Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\tilde{z} = -x_{n+1} - x_{n+2} - \ldots - x_{n+k} \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n + x_{n+k} = b_k \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1, n+k} \end{cases}$$

Переменные $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ называются искусственными, а связанная с ними система векторов $P_{n+1}, \ldots, P_{n+k}$ - искусственным базисом вспомогательной задачи. Следует здесь заметить, что если среди векторов $P_j$ есть векторы, которые могут быть элементами базиса, то в соответствующие равенства исходной системы ограничений нет смысла вводить искусственные переменные.

Теперь к вспомогательной задаче можно применить симплекс-метод и найти ее решение.

**Теорема 1.** Вспомогательная задача всегда разрешима. При этом $\max \tilde{z} \leq 0$. Если $\max \tilde{z} = 0$ и достигается на плане $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, \tilde{x}_{n+1}, \ldots, \tilde{x}_{n+k})$, то вектор $x = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ является опорным планом исходной задачи (2.1), (2.2). Если $\max \tilde{z} < 0$, то система условий (1.10) несовместна.

Продолжая итерации симплекс-метода для модифицированной последней симплекс-таблицы вспомогательной задачи, найдем решение исходной задачи. Модификация симплекс-таблицы состоит в удалении искусственных переменных и замене коэффициентов целевой функции вспомогательной задачи на соответствующие коэффициенты целевой функции (2.1).

**2-й метод.** Рассмотрим следующую расширенную задачу, часто называемую *M-задачей:*

$$z^* = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \ldots - Mx_{n+k} \to \max \qquad (2.3)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n + x_{n+k} = b_k \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1, n+k} \end{cases} \qquad (2.4)$$

где $M$ – некоторое достаточно большое положительное число, конкретное значение которого обычно не задается.

Переменные $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ также называют *искусственными,* а связанная с ними система векторов $P_{n+1}, \ldots, P_{n+k}$ – *искусственным базисом* расширенной задачи.

**Теорема 2.** Если в оптимальном плане расширенной задачи (2.3), (2.4) все искусственные переменные равны нулю, то полученное оптимальное решение является решением исходной задачи (2.1), (2.2). Если в оптимальном плане расширенной задачи (2.3), (2.4) хотя бы одна искусственная переменная отлична от нуля, то исходная задача (2.1), (2.2) решения не имеет.

В этом методе, искусственного базиса исходные данные расширенной задачи заносятся в таблицу, которая содержит на одну строку больше, чем обычная симплекс-таблица. Это связано с тем, что разности: $\Delta_j\left(\Delta_j - d + eM\right)$ состоят из двух частей, одна из которых зависит от $M$, а другая – нет. В $(k+2)$-ю строку помещаются коэффициенты при $M$, а в $(k+1)$-ю – слагаемые, не содержащие $M$.

При переходе от одного опорного плана к другому в базис вводят переменную, соответствующую наименьшему отрицательному числу $(k+2)$-й строки. Искусственная переменная, исключенная из базиса в результате некоторой итерации, в дальнейшем не вводится ни в один из последующих базисов, и

преобразование столбца симплексной таблицы, соответствующего этой переменной, не производится.

Пересчет симплекс-таблиц при переходе от одного опорного плана к другому производится по общим правилам симплекс-метода. Итерационный процесс по $(k+2)$-й строке ведут до тех пор, пока:

1) либо все искусственны е переменные не будут исключены из базиса;

2) либо не все искусственны е переменные исключены из базиса, но $(k+2)$-я строка не содержит больше отрицательных элементов в столбцах векторов $P_1,\ldots,P_{n+k}$:

В первом случае базис отвечает некоторому опорному плану исходной задачи, и определение ее оптимального плана продолжают по $(k+1)$-й строке симплекс-таблицы.

Во втором случае, если элемент, стоящий в $(k+2)$-й строке столбца вектора $P_0$, отрицателен, то исходная задача не имеет решения; если же он равен нулю, то найденный опорный план исходной задачи является вырожденным и базис содержит по крайней мере один из векторов искусственного базиса.

# ГЛАВА III. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

## 3.1. Основные теоремы теории двойственности и их экономический смысл

Для каждой задачи линейного программирования по определённым правилам можно составить соответствующую задачу, называемую двойственной задачей.

Рассмотрим прямую задачу линейного программирования и двойственную задачу.

**Прямая задача**

**Двойственнаязадача**

Максимизировать функция

$$F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Минимизировать функция

$$Z = b_1y_1 + \ldots + b_my_m$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m \le c_1 \\ a_{12}y_1 + \ldots + a_{m2}y_m \le c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m \le c_n \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

Эти задачи обладают следующими свойствами:

1. В прямой задаче ищется максимум функции цели (линейной формы), а в двойственной задаче – минимум.

2. Коэффициенты при переменных в функции цели прямой задачи являются свободными членами системы ограничений двойственной задачи, и наоборот, свободные члены системы ограничений прямой задачи – коэффициентами при переменных в функции цели двойственной задачи.

3. В каждой задаче система ограничений задается в виде неравенств, причем все они одного смысла, а именно: при нахождении максимума функции цели (прямая задача) эти неравенства записываются со знаком «меньше или равно», а при нахождении минимума (двойственная задача) - со знаком «больше или равно».

4. Коэффициенты при переменных в системах ограничений описываются матрицами

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

которые являются транспонированными относительно друг друга.

5. Число неравенств в системе ограничений прямой задачи совпадает с числом переменных двойственной задачи.

6. Условия неотрицательности переменных сохраняются как в прямой, так и в двойственной задаче.

Две задачи линейного программирования, удовлетворяющие указанным выше условиям, называются симметричными взаимно-двойственными задачами.

Мы обусловимся называть их просто взаимно-двойственными задачами.

Прямая и двойственная ей задача, взятые вместе, образуют пару взаимно двойственных задач, причём любую из них можно рассматривать как исходную, тогда другая окажется двойственной ей.

Итак мы рассмотрели соответствие между прямой и двойственной задачей линейного программирования, правда, пока только для задач, записанных в канонической форме. Сформулируем пока правила составления задачи, двойственной по

отношению к исходной для канонической задачи (а позже перейдём к задаче, записанной в общей форме):

1. Приводят все неравенства системы ограничений исходной задачи к неравенствам одного смысла (то есть с одним и тем же знаком): если в исходной задаче ищется максимум функции цели (линейной формы) – они записываются со знаком «меньше или равно», если же минимум – со знаком «больше или равно». Для этого неравенства, в которых это требование не выполняется, умножают на минус единицу.

2. Выписывают матрицу $A$ коэффициентов при переменных исходной задачи, полученных после преобразований, описанных в предыдущем пункте, и составляют матрицу $A'$, транспонированную относительно матрицы $A$.

3. Составляют систему ограничений двойственной задачи, взяв в качестве коэффициентов при переменных элементы матрицы $A'$, а в качестве свободных членов – коэффициенты при переменных в функции цели исходной задачи и записывают неравенства противоположного смысла (то есть меняют знак) по сравнению с неравенствами.

4. Составляют функцию цели (линейную форму) двойственной задачи, приняв за коэффициенты при переменных свободные члены системы ограничений исходной задачи.

5. Указывают, что необходимо найти при решении двойственной задачи, а именно: минимум функции цели, если в исходной задаче ищется максимум, и максимум, если в исходной задаче ищется минимум.

6. Записывают условие неотрицательности переменных двойственной задачи.

Пример 1. Составить задачу, двойственную следующей: найти максимум функции $F = 3x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Решение. Третье неравенство системы исходной задачи не удовлетворяет пункту 1 правил составления двойственной задачи. Поэтому умножим его на минус единицу:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 - x_2 \le -1 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Для облегчения составления двойственной задачи лучше пользоваться расширенной матрицей $B$, в которую наряду с коэффициентами при переменных системы ограничений исходной задачи запишем, свободные члены и коэффициенты при переменных в функции цели, выделив для этой цели дополнительные столбец (отделён чертой) и строку (выделена красным цветом). Матрицу $B$ транспонируем и, используя транспонированную матрицу $B'$, составляем задачу, двойственную исходной. Матрицы $B$ и $B'$ имеют вид

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 1 & F \end{array}\right),$$

$$B' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 5 & Z \end{array}\right)$$

Таким образом, двойственная задача линейного программирования сводится к нахождению минимума функции $Z = 2y_1 + 2y_2 - y_3 + 5y_4$ при ограничениях

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \geq 3 \\ -2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \geq 1 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0$$

Перейдём теперь к случаю составления двойственной задачи, когда прямая задача записана в общей форме (в системе ограничений могут быть неравенства с разными знаками, а также уравнения, условие не отрицательности переменных не обязательно). Для таких задач правила следующие:

1. Свободные члены в прямой задаче – коэффициенты функции цели в двойственной задаче.

2. Коэффициенты функции цели в прямой задаче – свободные члены в двойственной задаче.

3. Расширенная матрица в прямой задаче – транспонированная расширенная матрица в двойственной задаче.

4. *j*-й неизвестный в прямой задаче неотрицательный – *j*-е неравенство в двойственной задаче со знаком «больше или равно».

5. *j*-й неизвестный в прямой задаче без ограничения знака – *j*-е ограничение в двойственной задаче в виде уравнения.

6. *j*-й неизвестный в прямой задаче неположительный - *j*-е неравенство в двойственной задаче со знаком «меньше или равно».

7. *i*-е неравенство в прямой задаче со знаком «меньше или равно» – *i*-е неизвестный в двойственной задаче неотрицательный.

8. *i*-е ограничение в прямой задаче в виде уравнения - *i*-й неизвестный в двойственной задаче без ограничения знака.

9. *i*-е неравенство в прямой задаче со знаком «больше или равно» – *i*-й неизвестный в двойственной задаче неположительный.

Пример 2. Составить задачу, двойственную следующей: найти минимум функции $F = 5x_1 + 4x_2 + x_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$,

$x_2$ – без ограничения знака,

$x_3 \leq 0$.

Решение. Как видим, прямая задача записана в общей форме. Это будем учитывать при расстановке знаков в условиях двойственной задачи. А пока, как и в предыдущем примере, произведём универсальное действие - составим матрицу $B$ прямой задачи и транспонированную матрицу $B'$ двойственной задачи:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 6 & 6 \\ 5 & 4 & 1 & F & \end{array}\right), \qquad B' = \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 6 & Z \end{array}\right)$$

Таким образом, двойственная задача линейного программирования сводится к нахождению максимума функции $Z = y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 \leq 5$ при ограничениях

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \le 5 \\ 3y_1 - y_2 + 3y_3 - y_4 = 4 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 \ge 1 \end{cases}$$

$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,$

$y_3$ – без ограничения знака,

$y_4 \le 0.$

## Основные теоремы двойственности

Теория двойственности в линейном программировании строится на двух основных теоремах.

**Теорема 1.** Для прямой и двойственной задач в силе одно и только одно из следующих утверждений.

1. Если одна из задач линейного программирования имеет конечный оптимум, то и двойственная к ней задача также имеет конечный оптимум, причём оптимальные значения линейных форм обеих задач совпадают, т. е.

$$F_{\max} = Z_{\min} \quad \text{или} \quad F_{\min} = Z_{\max}$$

2. Если линейная форма одной из двойственных задач не ограничена, то условия другой задачи противоречивы.

3. Обе задачи не имеют решения, так как системы ограничений противоречивы.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, установим соответствия между переменными в исходной и двойственной задачах.

При решении симплекс-методом исходной задачи для сведения системы неравенств к эквивалентной ей системе уравнений нужно ввести $m$ добавочных неотрицательных переменных (по числу неравенств в системе ограничений) $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+i}, \ldots, x_{n+m}$ где $i = 1, 2, ..., m$ означает номер неравенства, в которое была введена добавочная переменная $x_{n+i}$.

Система ограничений двойственной задачи состоит из $n$ неравенств, содержащих $m$ переменных. Если решать эту задачу симплекс-методом, то следует ввести $n$ добавочных неотрицательных переменных $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+j}, \ldots, y_{m+j}, \ldots, y_{m+n}$, где $j = 1, 2, \ldots, n$ означает номер неравенства системы ограничений двойственной задачи, в которое была введена добавочная переменная $y_{m+j}$.

Всё вышесказанное было приведено для того, чтобы установить следующее соответствие между переменными в исходной и двойственной задачах линейного программирования:

$$x_1 \leftrightarrow y_{m+1}, \quad x_2 \leftrightarrow y_{m+2}$$

$$\ldots, \quad x_j \leftrightarrow y_{m+j} \quad \ldots, \quad x_n \leftrightarrow y_{m+n}, \quad x_{n+1} \leftrightarrow y_1,$$

$$x_{n+2} \leftrightarrow y_2 \ldots, \quad x_{n+i} \leftrightarrow y_i, \quad \ldots \quad x_{n+m} \leftrightarrow y_m,$$

То есть, основные переменные исходной задачи, в порядке их следования, соответствуют добавочным переменным двойственной задачи, тоже в порядке их следования. В свою очередь добавочные переменные исходной задачи, в порядке их следования, соответствуют основным переменным двойственной задачи, также в порядке их следования.

Иными словами, каждой первоначальной переменной исходной задачи $x_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ ставится в соответствие добавочная переменная $y_{m+j}$, введённая в $j$-е неравенство двойственной задачи, а каждой добавочной переменной $x_{n+i}$ исходной задачи ($i = 1, 2, \ldots, m$), введенной в $i$-е неравенство исходной задачи, – первоначальная переменная $y_i$ двойственной задачи.

Всё вышесказанное, как уже было отмечено, станет более понятным из примера 2, который будет вскоре после Теоремы 2.

**Теорема 2.** Компоненты оптимального решения одной из задач (прямой или двойственной) равны абсолютным величинам

коэффициентов при соответствующих переменных в выражении функции цели (линейной формы) другой задачи (двойственной или прямой) при достижении ею оптимума и при условии, что полученное оптимальное решение не является вырожденным.

Из теорем 1 и 2 следует, что если решить одну из взаимно двойственных задач линейного программирования, то есть найти её оптимальное решение и оптимум функции цели, то можно записать оптимальное решение и оптимум функции цели другой задачи. Теперь пример, который поможет разложить всё вышеизложенное по полочкам.

**Пример 3.** На основании решений прямой и двойственной задач линейного программирования из примера 1 убедиться в справедливости теорем 1 и 2.

В примере 1 была дана исходная задача: найти максимум функции $F = 3x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Мы составили двойственную ей задачу: найти минимум функции $Z = 2y_1 + 2y_2 - y_3 + 5y_4$ при ограничениях

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \ge 3 \\ -2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \ge 1 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0$$

Для решения прямой задачи симплекс-методом система ограничений-неравенств сводится к системе уравнений путём введения добавочных неотрицательных переменных $x_3, x_4, x_5, x_6$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 5 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 6)$$

Читатель может проверить, решив задачу симплекс-методом, что она имеет следующие решения:

$$x_1 = 4;$$
$$x_2 = 1;$$
$$x_3 = 0;$$
$$x_4 = 5;$$
$$x_5 = 4;$$
$$x_6 = 0,$$

а максимум целевой функции $F_{\max} = 13$, при этом сама целевая функция выражается как

$$F = 13 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_6$$

Система ограничений двойственной задачи сводится к системе уравнений путём введения добавочных переменных $y_5, y_6$:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 + y_4 - y_5 = 3 \\ -2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_6 = 1 \end{cases}$$
$$y_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 6)$$

Решение двойственной задачи симплекс-методом дает следующий ответ:

$$y_1 = \frac{2}{3};$$
$$y_2 = 0;$$
$$y_3 = 0;$$
$$y_4 = \frac{7}{3};$$
$$y_5 = 0;$$
$$y_6 = 0,$$

а минимум целевой функции $Z_{\min} = 13$, при этом сама целевая функция выражается как

$$Z = 13 + 5y_2 + 4y_3 + 4y_5 + y_6.$$

Решив двойственную задачу, убеждаемся в справедливости первой части теоремы 1: двойственная задача тоже имеет конечный оптимум, причём $Z_{\min} = F_{\max} = 13$.

Убедимся, что справедливо также и утверждение теоремы 2. Для этого запишем переменные прямой и двойственной задачи, соблюдая их соответствие:

$x_1 \leftrightarrow y_5$

$x_2 \leftrightarrow y_6$

$x_3 \leftrightarrow y_1$

$x_4 \leftrightarrow y_2$

$x_5 \leftrightarrow y_3$

$x_6 \leftrightarrow y_4$

Как видим, основные переменные исходной задачи, в порядке их следования, соответствуют добавочным переменным двойственной задачи, тоже в порядке их следования. В свою очередь добавочные переменные исходной задачи, в порядке их

следования, соответствуют основным переменным двойственной задачи, также в порядке их следования.

Функцию цели, полученную на последнем шаге решения двойственной задачи, выразим через все переменные этой задачи:

$$Z = 13 + 0y_1 + 5y_2 + 4y_3 + 0y_4 + 4y_5 + y_6$$

Рассматривая коэффициенты при переменных $y_j$ в этой функции цели и учитывая их соответствие коэффициентам при переменных $x_i$, получим решение (4; 1; 0; 5; 4; 0), совпадающее с решением прямой задачи.

**Замечание.** Решив прямую задачу, можно сразу получить решение двойственной задачи линейного программирования. Если выразить функцию цели, полученную при решении прямой задачи, через все переменные задачи, то получим

$$F = 13 + 0x_1 + 0x_2 - \frac{2}{3}x_3 + 0x_4 + 0x_5 - \frac{7}{3}x_6$$

На основании теоремы 2, учитывая соответствие между переменными в прямой и двойственной задачах и взяв абсолютную величину коэффициентов при переменных, найдём оптимальное решение двойственной задачи (2/3; 0; 0; 7/3; 0; 0). При этом $Z_{\min} = F_{\max} = 13$.

**Пример 4.** Убедиться в том, что системы ограничений прямой задачи

$$F = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

и двойственной задачи

$$Z = y_1 + 2y_2 \to \min$$
$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 2 \\ -y_1 - y_2 \geq 1 \\ y_1 - y_2 \geq 2 \end{cases}$$

несовместны.

**Решение.** Вычтем из второго уравнения системы ограничений прямой задачи первое уравнение той же системы. Получим $-2x_3 = 1$. Это уравнение не имеет решения, так как $x_3 \geq 0$. Таким образом, система ограничений прямой задачи несовместна.

Сложим первые два неравенства системы ограничений двойственной задачи. Получим $0 \geq 3$, что невозможно. Таким образом, системы ограничений и прямой, и двойственной задачи несовместны. Согласно части 3 теоремы 1 двойственности, обе задачи не имеют решений.

### 3.2. Анализ решения экономических задач

Посмотрим ещё раз на прямую задачу линейного программирования и двойственную задачу рядом.

| Прямая задача. | Двойственная задача. |
|---|---|
| Максимизировать функцию | Минимизировать функцию |
| $F = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$ | $Z = b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m$ |
| при ограничениях | при ограничениях |
| $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$ | $\begin{cases} a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \ldots \\ a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n \end{cases}$ |

$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)$ $y_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m)$

В этих задачах $a$ – расходы сырья определённого вида на производство одного вида продукции, $b$ – запасы сырья определённого вида, $c$ – прибыль от реализации единицы продукции определённого вида. В прямой задаче $x$ – количество единиц выпускаемой продукции определённого вида. А в двойственной задаче $b$ – цены сырья соответствующего вида. А целевая функция $Z$ – общие затраты на приобретение сырья, которые требуется минимизировать.

Предположим, мастерская выпускает столы и шкафы, расходую на эти цели определенные виды сырья (древесины). Допустим, мастерская решила не производить продукцию, а продать сырье – древесину, желая при этом получить выручку, не меньшую максимальной прибыли от реализации продукции. По каким ценам нужно продавать каждый вид древесины?

Максимальную прибыль определяет решение прямой задачи. Путём же решения двойственной задачи линейного программирования находятся цены $y$, точнее говоря, объективно обусловленные оценки. Они являются компонентами оптимального решения двойственной задачи линейного программирования.

### 3.3. Двойственный симплексный метод

Из результатов предыдущих пунктов следует, что для получения решения исходной задачи можно перейти к двойственной и, используя оценки ее оптимального плана, определить оптимальное решение исходной задачи.

Переход к двойственной задаче не обязателен, так как если рассмотреть первую симплексную таблицу с единичным дополнительным базисом, то легко заметить, что в столбцах записана исходная задача, а в строках –двойственная.

Как было показано, при решении прямой задачи на любой итерации разность $z_j - c_j$, т.е. величина $z-$ коэффициента при переменной $x_j$, равна разности между правой и левой частями соответствующего ограничения двойственной задачи. Если при решении прямой задачи с максимизируемой целевой функцией итерация не приводит к оптимальному решению, то по крайней мере для одной переменной $z_j - c_j < 0$ и только в оптимуме для всех $j$ разность $z_j - c_j \geq 0$.

Рассматривая это условие с учетом двойственности, можно записать

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$$

Таким образом, если $z_j - c_j < 0$, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i < c_j$. Это означает, что, когда решение прямой задачи неоптимальное, решение двойственной задачи недопустимое. С другой стороны $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$ при $z_j - c_j \geq 0$. Отсюда следует, что оптимальному решению прямой задачи соответствует допустимое решение двойственной задачи.

Это позволило разработать новый метод решения задач линейного программирования, при использовании которого сначала получается недопустимое, но «лучшее, чем оптимальное» решение (в обычном симплекс-методе сначала находится допустимое, но неоптимальное решение).

Новый метод, получивший название двойственного симплекс-метода, обеспечивает выполнение условия оптимальности решения и систематическое «приближение» его к области допустимых решений. Когда полученное решение оказывается допустимым, итерационный процесс вычислений заканчивается, так как это решение является и оптимальным.

Двойственный симплекс-метод позволяет решать задачи линейного программирования, системы ограничений которых при положительном базисе содержат свободные члены любого знака. Этот метод позволяет уменьшить количество преобразований системы ограничений, а также размера симплексной таблицы. Рассмотрим применение двойственного симплекс-метода на примере.

**Пример.** Найти минимум функции $z(x) = 2x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 3, \end{array}\right\}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Перейдем к канонической форме:

$$z(x) = 2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \min$$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{rrrr} -3x_1 - x_2 + x_3 & & & = -3, \\ -4x_1 - 3x_2 & + x_4 & & = -6, \\ x_1 + 2x_2 & & + x_5 & = 3, \end{array}\right\}$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,5$$

Начальная симплекс-таблица имеет вид

| Базисные переменные | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Решение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | –3 | –1 | 1 | 0 | 0 | –3 |
| $x_4$ | –4 | –3 | 0 | 1 | 0 | –6 |
| $x_5$ | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| $\Delta_j = z_j - c_j$ | –2 | –1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Начальное базисное решение

$X_0 = (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = -3, x_4 = -6, x_5 = 3)$ оптимальное, но не допустимое.

Как и обычный симплексный метод, рассматриваемый метод решения основан на использовании условий допустимости и оптимальности.

**Условие допустимости.** В качестве исключаемой переменной выбирается наибольшая по абсолютной величине отрицательная базисная переменная (при наличии альтернатив выбор делается произвольно). Если все базисные переменные неотрицательные, процесс вычислений заканчивается, так как полученное решение допустимое и оптимальное.

**Условие оптимальности.** Включаемая в базис переменная выбирается из числа небазисных переменных следующим образом. Вычисляются отношения коэффициентов левой части $z$ - уравнения к соответствующим коэффициентам уравнения, ассоциированного с исключаемой переменной. Отношения с положительным или нулевым значением знаменателя не учитываются. В задаче минимизации вводимой переменной должно соответствовать наименьшее из указанных отношений, а в задаче максимизации – отношение, наименьшее по абсолютной величине (при наличии альтернатив выбор делается произвольно). Если знаменатели всех отношений равны нулю или положительные, задача не имеет допустимых решений.

После выбора включаемой в базис и исключаемой переменных для получения следующего решения осуществляется обычная операция преобразования строк симплекс-таблицы.

В рассматриваемом примере исключаемой переменной является $x_4 = -6$. Отношения, вычисленные для определения новой базисной переменной, приведены в следующей таблице:

| Переменные | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ – уравнение | –2 | –1 | 0 | 0 | 0 |
| $x_4$ – уравнение | –4 | –3 | 0 | 1 | 0 |
| Отношение | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | – | – | – |

В качестве включаемой переменной выбирается $x_2$. Последующее преобразование строк приводит к новой симплекс-таблице:

| Базисные переменные | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Решение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | -5/3 | 0 | 1 | –1/3 | 0 | –1 |
| $x_2$ | 4/3 | 1 | 0 | 1/3 | 0 | 2 |
| $x_5$ | – 5/3 | 0 | 0 | 2/3 | 1 | –1 |
| $\Delta_j = z_j - c_j$ | – 2/3 | 0 | 0 | –1/3 | 0 | 2 |

Новое решение $X_1 = (x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = 0, x_5 = -1)$ также оптимальное, но все еще недопустимое. В качестве новой исключаемой переменной выберем (произвольно) $x_3$. Определим включаемую переменную.

| Переменные | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$–уравнение | – 2/3 | 0 | 0 | –1/3 | 0 |
| $x_4$–уравнение | – 5/3 | 0 | 1 | –1/3 | 0 |
| отношение | 2/5 | – | – | 1 | – |

Вводимой в базис переменной является $x_1$ и в результате получим следующую симплекс-таблицу:

| Базисные переменные | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | Решение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | **−3/5** | **1/5** | 0 | **3/5** |
| $x_2$ | 0 | 1 | **4/5** | **−3/5** | 0 | **6/5** |
| $x_5$ | 0 | 0 | −1 | 1 | 1 | 0 |
| $\Delta_j = z_j - c_j$ | 0 | 0 | **−2/5** | **−1/5** | 0 | **12/5** |

Полученное решение $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{6}{5}$ является оптимальным и допустимым.

Двойственный симплекс-метод удобен тем, что его можно применять в том случае, когда решается не одна, а несколько задач линейного программирования с возрастающим количеством дополнительных ограничений.

# ГЛАВА IV. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

## 4.1. Задача целочисленного программирования

Обычно в задачах линейного программирования не требуется, чтобы координаты плана были целыми числами. Однако в практике часто приходится сталкиваться с задачами, в которых координаты оптимальных планов должны быть целыми числами, и такие задачи называются задачами ***целочисленного программирования***. При решении задач линейного программирования графическим методом и симплекс-методом нет гарантий, что координаты оптимального плана будут целыми числами.

В некоторых случаях допускается округление результатов. Например, если в оптимальном плане предусмотрено, что следует произвести 499683,3 автомашины, то экономически обосновано округление результата до 499683 или даже до 500000.

Существуют однако задачи, в которых подобное округление может создать большую ошибку. Например, если в оптимальном плане предусмотрено, что следует построить 0,67 заводов, то формальное округление до 0 или 1 недопустимо.

Поэтому большое практическое значение имеют методы решения задач линейного программирования, с помощью которых можно найти оптимальный план, координаты которого-целые числа. Задачи ***целочисленного программирования*** решаются именно такими методами.

Если задача целочисленного программирования задана в канонической форме, она формулируется следующим образом:

найти максимум функции цели (линейной формы)

$$C = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

при системе ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \\ x_j (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) - \text{целые числа} \end{cases}$$

Таким образом, задача целочисленного программирования и соответствующая задача линейного программирования отличаются только условием целочисленности неизвестных.

Как и в задачах линейного программирования, в задачах целочисленного программирования требуется, чтобы оптимальный план максимизировал функцию цели (линейную форму).

## 4.2. Метод отсечения плоскостей. Метод Гомори

Метод Гомори является универсальным методом решения задач целочисленного программирования, с помощью которого после конечного числа итераций можно найти оптимальный план или убедиться в том, что задача не имеет решений. Однако практическая ценность метода Гомори весьма ограничена, так как при решении задач нужно выполнить довольно много итераций.

При решении задач целочисленного программирования методом Гомори из множества оптимальных планов задачи линейного программирования постепенно удаляются подмножества, которые не содержат целочисленных планов.

На первой итерации симплекс-методом нужно решить задачу линейного программирования. Если найденные неизвестные удовлетворяют требованию целочисленности, то задача целочисленного программирования решена. Если же среди найденных неизвестных хотя бы одна является дробным числом, то тогда следует составить дополнительное условие (как его составлять – об этом чуть ниже) и присоединить его к системе ограничений

задачи целочисленного программирования. Таким образом, из множества планов удаляется подмножество, не содержащее целочисленных планов. Если оптимальный план дополненной таким образом задачи является целочисленным, то задача целочисленного программирования решена. Процесс решения продолжается то тех пор, пока на какой-либо итерации не будет найден целочисленный оптимальный план или можно убедиться, что задача не имеет решения.

Теперь о том, как составлять упомянутое дополнительное условие. Оно, дополнительное условие, получается из одного из уравнений системы ограничений из коэффициентов при неизвестных и самих неизвестных по формуле

$\{b_i'\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{a_{ij}'\} \le 0$, где в фигурных скобках – дробные части соответственно свободного члена и коэффициентов при неизвестных.

Например, из симплексной таблицы получаем такое уравнение:

$$\frac{19}{7} = x_1 + \frac{4}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4.$$

Дробную часть свободного члена получаем, вычитая из самого числа его целую часть следующим образом:

$$\frac{19}{7} - \frac{19}{7} = \frac{5}{7}$$

Аналогично получаем дробные части коэффициентов при неизвестных:

$$0 - \frac{4}{7} = -\frac{4}{7} \quad (\text{при } x_3), \quad -1 - \left(-\frac{1}{7}\right) = -\frac{6}{7} \quad (\text{при } x_4).$$

А общее правило нахождения дробных частей таково: целой частью вещественного числа $a$ называется самое большое целое число $[a]$, не превышающее $a$; дробной частью вещественного числа $a$ называется разность $\{a\} = a - [a]$ самого числа $a$ и его целой части $[a]$.

Далее следует преобразовать полученное неравенство в уравнение путём введения дополнительной неизвестной $x_{n+1} \geq 0$:

$$-\{b_i'\} = -\sum_{j=m+1}^{n} \{a_{ij}'\} x_j + x_{n+1}.$$

В нашем примере по приведённой выше формуле получается следующее уравнение:

$$-\frac{5}{7} = -\frac{4}{7}x_3 - \frac{6}{7}x_4 + x_5.$$

**Пример 1.** Решить методом Гомори следующую задачу целочисленного программирования. Найти максимум целевой функции

$$C = 3x_1 + 2x_2$$

при системе ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4)$$

$$x_j (j = 1,2,3,4) - \text{целые числа}$$

**Решение.** Решаем задачу симплекс-методом. Поскольку у нас есть урок по решению задач линейного программирования симплекс-методом, сам метод объясняться здесь не будет, а будут приведены лишь симплексные таблицы.

Дополнительные неизвестные $x_3$ и $x_4$ примем за базисные. Выразим базисные неизвестные и функцию цели через неосновные переменные:

$$\begin{cases} x_3 = 6 - (2x_1 + x_2) \\ x_4 = 5 - (x_1 + 4x_2) \end{cases}$$

$$c = 0 - (-3x_1 - 2x_2)$$

Из коэффициентов составим симплексную таблицу:

**Таблица 1**

| Базисные неизвестные | Свободные члены | Свободные неизвестные | | Вспомогательные коэффициенты |
|---|---|---|---|---|
| | | $x_1$ | $x_2$ | |
| $x_3$ | 6 | 2 | 1 | |
| $x_4$ | 5 | 1 | 4 | |
| C | 0 | –3 | –2 | |

Составляем следующие таблицы до получения оптимального плана:

**Таблица 2**

| Базисные неизвестные | Свободные члены | Свободные неизвестные | | Вспомогательные коэффициенты |
|---|---|---|---|---|
| | | $x_3$ | $x_2$ | |
| $x_1$ | 3 | ½ | ½ | |
| $x_4$ | 2 | –1/2 | 7/2 | –1 |
| C | 9 | 3/2 | –1/2 | 3 |

**Таблица 3**

| Базисные неизвестные | Свободные члены | Свободные неизвестные | | Вспомогательные коэффициенты |
|---|---|---|---|---|
| | | $x_3$ | $x_4$ | |
| $x_1$ | 19/7 | 4/7 | –1/7 | –1/2 |
| $x_2$ | 4/7 | –1/7 | 2/7 | |
| C | 65/7 | 10/7 | 1/7 | 1/2 |

Из таблицы 3 находим оптимальный план $x=\left(\frac{19}{7};\frac{4}{7};0;0\right)$.

Поскольку этот оптимальный план не удовлетворяет условию целочисленности, нам нужно составить дополнительное условие.

Дробной частью координаты $x_1 = \frac{19}{7}$ является число $\frac{5}{7}$, а дробной частью координаты $x_2 = \frac{4}{7}$ – число $\frac{4}{7}$.

Первое уравнение на основании таблицы запишется так:

$$\frac{19}{7} = x_1 + \frac{4}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4.$$

Определив дробные части коэффициентов при неизвестных и свободных членов, получаем следующее дополнительное условие:

$$\frac{5}{7} - \left(\frac{4}{7}x_3 + \frac{6}{7}x_4\right) \le 0$$

или, введя добавочную переменную $x_5 \ge 0$, $-\frac{5}{7} = -\frac{4}{7}x_3 - \frac{6}{7}x_4 + x_5$.

Получаем новую строку в симплексной таблице, полученной из таблицы 3 и добавления коэффициентов из только что полученного уравнения:

**Таблица 4**

| Базисные неизвестные | Свободные члены | Свободные неизвестные | | Вспомогательные коэффициенты |
|---|---|---|---|---|
| | | $x_3$ | $x_4$ | |
| $x_1$ | 19/7 | 4/7 | –1/7 | –1/2 |
| $x_2$ | 4/7 | –1/7 | 2/7 | |
| $x_5$ | -5/7 | –4/7 | –6/7 | |
| C | 65/7 | 10/7 | 1/7 | 1/2 |

Совершаем шаг симплекс-метода и получаем таблицу:

**Таблица 5**

| Базисные неизвестные | Свободные члены | Свободные неизвестные | | Вспомогательные коэффициенты |
|---|---|---|---|---|
| | | $x_3$ | $x_4$ | |
| $x_1$ | 17/6 | 2/3 | –1/6 | 1/7 |
| $x_2$ | 1/3 | –1/3 | 1/3 | –2/7 |
| $x_4$ | 5/6 | 2/3 | –7/6 | |
| C | 55/6 | 4/3 | 1/6 | –1/7 |

Получили оптимальный план $x=\left(\frac{17}{6};\frac{1}{3};0;\frac{5}{6};0\right)$. Этот план, как и предыдущий, не удовлетворяет условию целочисленности. Поэтому вновь требуется составить дополнительное условие. В данном случае можно использовать первое или третье уравнение. Получится следующее дополнительное условие:

$$-\frac{5}{6}=-\frac{2}{3}x_3-\frac{5}{6}x_5+x_6.$$

Составляем следующую таблицу:

**Таблица 6**

| Базисные неизвестные | Свободные члены | Свободные неизвестные | | Вспомогательны е коэффициенты |
|---|---|---|---|---|
| | | $x_3$ | $x_4$ | |
| $x_1$ | 17/6 | 2/3 | –1/6 | 1/7 |
| $x_2$ | 1/3 | –1/3 | 1/3 | –2/7 |
| $x_4$ | 5/6 | 2/3 | –7/6 | |
| $x_6$ | –5/6 | –2/3 | –5/6 | |
| C | 55/6 | 4/3 | 1/6 | –1/7 |

Оптимальный план $x=(3;0;0;2;1;0)$ получаем из следующей, завершающей таблицы:

**Таблица 7**

| Базисные неизвестные | Свободные члены | Свободные неизвестные | | Вспомогательные коэффициенты |
|---|---|---|---|---|
| | | $x_3$ | $x_6$ | |
| $x_1$ | 3 | 4/5 | –1/5 | 1/6 |
| $x_2$ | 0 | –3/5 | 2/5 | –1/3 |
| $x_4$ | 2 | 8/5 | –7/5 | 7/6 |
| $x_5$ | 1 | 4/5 | –6/5 | |
| C | 9 | 6/5 | 1/5 | –1/6 |

Так как найденный оптимальный план удовлетворяет условию целочисленности, задача целочисленного программирования решена. Координаты $x_5$ и $x_6$ можно не учитывать, так как начальные условия задачи содержит лишь четыре неизвестные. Поэтому окончательный оптимальный план запишется так:

$$x = (3;\ 0;\ 0;\ 2),$$

а максимум функции цели равен 9.

## 4.3. Понятие о граничном методе

Методом ветвей и границ удобно решать такие задачи целочисленного программирования, в которых число неизвестных невелико либо требования целочисленности относятся не ко всем неизвестным. Суть метода ветвей и границ состоит в том, что для тех неизвестных, к которым относится требование целочисленности, нужно определить границы, в которых могут находиться значения этих неизвестных. Затем решаются соответствующие задачи линейного программирования.

Задание границ, в которых должны находиться значения неизвестных в задаче целочисленного программирования, можно записать так:

$$\alpha_j \le x_j \le \beta_j .$$

На практике во многих случаях границы значений неизвестных уже включены в систему ограничений задачи целочисленного программирования или же их можно определить исходя из экономического содержания задачи. Иначе можно принять, что нижняя граница $\alpha_j = 0$, а верхняя граница $\beta_j = M$, где $M$ – достаточно большое положительное число.

Как метод ветвей и границ позволяет уточнить границы допустимых значений неизвестных?

Сначала решается, допустим, симплекс-методом задача линейного программирования, соответствующая задаче целочисленного программирования. Пусть найден оптимальный план в этой задаче и значением какой-либо его координаты $x_k$ является дробное число. Тогда потребуется составить две новые задачи линейного программирования. Как это сделать?

Обозначим целую часть координаты $x_k$ в виде $[x_k]$. В одной из новых задач линейного программирования нижней границей значения координаты $x_k$ будет число $[x_k]+1$, то есть целая часть значения координаты, увеличенная на единицу. Это запишется следующим образом:

$$[x_k]+1 \le x_k \le \beta_k .$$

В другой новой задаче линейного программирования верхней границей значения координаты $x_k$ будет сама целая часть $[x_k]+1$ значения координаты $x_k$. Это запишется так:

$$\alpha_k \le x_k \le [x_k]$$

Таким образом, от первой задачи линейного программирования «ответвились» две новые задачи, в которых в которых

изменились границы допустимых значений одной неизвестной. При решении каждой из этих задач возможны три случая:

- оптимальный план не является целочисленным,
- оптимальный план является целочисленным,
- задача не имеет решений.

Лишь в первом случае возможно «ответвление» новых задач способом, показанным выше. Во втором и третьем случае «ветвление» прекращается.

На каждой итерации решения задачи целочисленного программирования решается одна задача. Введем понятие: список решаемых задач линейного программирования. Из списка следует выбрать задачу, решаемую на соответствующей итерации. На дальнейших итерациях список меняется, так как решённые задачи в него уже не входят, а вместо них в список включаются новые задачи, которые «ответвились» от предыдущих задач.

Для того, чтобы ограничить «ветвления», то есть уменьшить число решаемых задач, на каждой итерации следует определить нижнюю границу максимального значения целевой функции. Это делается следующим образом:

- если задача задана в нормальной форме, то перед её решением нижняя граница имеет значение нуль (то есть $c_1 = 0$);
- если на некоторой итерации (назовем ее $p$-й) найденный план не является целочисленным и максимальное значение целевой функции больше ранее установленной нижней границы, то на следующей итерации нижняя граница максимального значения целевой функции остаётся прежней (как на предыдущей итерации, то есть $c_{p+1} = c_p$);
- если на некоторой итерации найденный план $x_p$ является целочисленным и максимальное значение целевой функции, найденное вместе с этим планом $(c(x_p))$, больше ранее установленной нижней границы, то для следующей итерации

устанавливается новая нижняя граница, то есть $c(x_p)$ переходит на следующую итерацию;

- если на некоторой итерации максимальное значение целевой функции, найденное вместе с этим планом ( $c(x_p)$), меньше ранее установленной нижней границы, то нижняя граница остаётся прежней.

Согласно алгоритму решения задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ, на каждой $p$-й итерации требуется сделать 4 шага.

- **Шаг 1.** Если в списке решаемых задач нет ни одной задачи, то задача целочисленного программирования решена. Максимальное значение значение функции цели - то, которое было найдено на предыдущей итерации, оптимальный план - целочисленный план, найденный на предыдущей итерации. В противном случае следует выбрать одну из задач, имеющихся в списке.

- **Шаг 2.** Решается выбранная из списка задача линейного программирования. Если задача не имеет решения или для полученного на этом шаге оптимального плана $x_p$ значение функции цели $c(x_p) \le c_p$ , то следует принять $c_{p+1} = c_p$ и выполнить шаг 1. В противном случае выполнять шаг 3.

- **Шаг 3.** Если найденный оптимальный план $x_p$ является целочисленным, то следует принять, что $c_{p+1} = c(x_p)$ и выполнить шаг 1. В противном случае выполнить шаг 4.

- **Шаг 4.** Выбрать любую дробную координату оптимального плана $x_p$. Определить целую часть координаты, составить две новые задачи линейного программирования и включить их в список решаемых задач. Новые задачи отличаются от задачи, выбранной на шаге 1 только границами допустимых значений выбранной координаты. Принять, что $c(x_p)$ и выполнить шаг 1.

**Пример 2.** Решить методом ветвей и границ следующую задачу целочисленного программирования. Найти максимум целевой функции

$$c = 20x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

при системе ограничений

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 6 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3)$$

$$x_j \quad (j = 1,2,3) \text{ - целые числа}$$

**Решение.** Допустим, что заданы или определены следующие границы оптимальных значений неизвестных:

$$0 \le x_j \le 4 (j = 1,2,3).$$

Так как задача задана в нормальной форме, она имеет целочисленный план $x = (0;0;0)$ и нижнюю границу максимального значения целевой функции $c_1 = c(x) = 0$.

В списке решаемых задач – 1-я задача:

$$c = 20x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 6 \end{cases}$$

$$0 \le x_j \le 4 \quad (j = 1,2,3)$$

**Итерация 1.**

**Шаг 1.** С помощью симплекс-метода получено решение 1-й задачи:

$$x_1 = (1,2;\ 0;\ 0),\ c(x_1) = 23 > z_1 = 0.$$

Так как найденный план не является целочисленным, следует шаг 4.

**Шаг 4.** Так как оптимальный план $x_1$ имеет дробную координату 1,2, то $[x_1] = 1$ и $[x_1] + 1 = 2$. Применяя границы значений неизвестных 1-й задачи, получаем новые задачи. Во 2-й задаче

нижней границей для $x_1$ является $[x_1]+1=2$, а в 3-й задаче верхней границей для $x_1$ является $[x_1]=1$.

Итак, следует решить 2-ю задачу:

$$c = 20x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 6 \end{cases}$$
$$2 \le x_1 \le 4,\ \ 0 \le x_2 \le 4,\ \ 0 \le x_3 \le 4$$

и 3-ю задачу:

$$c = 20x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 6 \end{cases}$$
$$0 \le x_1 \le 1,\ \ 0 \le x_2 \le 4,\ \ 0 \le x_3 \le 4$$

Нижняя граница максимального значения целевой функции $c_2 = c_1 = 0$.

**Итерация 2.**

**Шаг 1.** Из списка решаемых задач выбираем 2-ю задачу.

**Шаг 2.** Констатируем, что 2-я задача не имеет решения, так как её система ограничений несовместна. Тогда $c_3 = c_2 = 0$ и следует следующая итерация.

**Итерация 3.**

**Шаг 1.** В списке имеется только одна – 3-я задача.

**Шаг 2.** Применяя симплекс-метод, получаем решение 3-й задачи:

$$x_3 = (1;\ 0{,}5;\ 0{,}5),\ \ c(x_3) = 22 > c_3 = 0.$$

Так как это решение не является целочисленным, следует шаг 4.

**Шаг 4.** Выбираем дробную координату $x_2 = 0{,}5$. Тогда $[x_2]=0$ и $[x_2]+1=1$. Применяя границы значений неизвестных из 3-й задачи, получаем две новых задачи.

4-я задача:

$$c = 20x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 6 \end{cases}$$
$$0 \le x_1 \le 1,\ 1 \le x_2 \le 4,\ 0 \le x_3 \le 4$$

5-я задача:

$$c = 20x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 6 \end{cases}$$
$$0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 0,\ 0 \le x_3 \le 4$$

Нижняя граница максимального значения функции цели $c_4 = c_3 = 0$.

**Итерация 4.**

**Шаг 1.** Из списка решаемых задач, в котором имеются 4-я и 5-я задачи, выбираем 4-ю задачу.

**Шаг 2.** Применяя симплекс-метод, получаем решение 4-й задачи:

$$x_4 = (0{,}8;\ 1;\ 1),\ c(x_4) = 20 > c_4 = 0.$$

Так как полученное решение не является целочисленным, следует шаг 4.

**Шаг 4.** Выбираем дробную координату $x_1 = 0{,}8$ и получаем $[x_1] = 0$ и $[x_1] + 1 = 1$. Применяя границы значений переменной $x_1$, получаем две новые задачи линейного программирования.

6-я задача:

$$c = 20x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 6 \end{cases}$$
$$1 \le x_1 \le 1,\ 1 \le x_2 \le 4,\ 0 \le x_3 \le 4$$

7-я задача:

$$c = 20x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 6 \end{cases}$$
$$0 \le x_1 \le 0,\ 1 \le x_2 \le 4,\ 0 \le x_3 \le 4$$

Итак, в списке решаемых задач имеются 5-я, 6-я и 7-я задачи, а нижняя граница максимального значения функции цели $c_5 = c_4 = 0$.

**Итерация 5.**

**Шаг 1.** Из списка выбираем 5-ю задачу.

**Шаг 2.** Применяя симплекс-метод, получаем решение 5-й задачи:

$$x_5 = (1;\ 0;\ 0{,}25),\ c(x_5) = 20{,}5 > c_5 = 0.$$

Так как найденный план не является целочисленным, следует шаг 4.

**Шаг 4.** Выбираем дробную координату $x_3 = 0{,}25$ и получаем $[x_3] = 0$ и $[x_3]+1 = 1$. Применяя границы значений неизвестной $x_3$ 5-й задачи, получаем две новые задачи.

8-я задача:

$$c = 20x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 6 \end{cases}$$
$$0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 0,\ 1 \le x_3 \le 4$$

9-я задача:

$$c = 20x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 6 \end{cases}$$
$$0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 0,\ 0 \le x_3 \le 0$$

В списке решаемых задач имеются 6-я, 7-я, 8-я и 9-я задачи, а нижняя граница максимального значения функции цели $c_6 = c_5 = 0$.

**Итерация 6.**

**Шаг 1.** Из списка решаемых задач выбираем 6-ю задачу.

**Шаг 2.** Констатируем, что 6-я задача не имеет решения. Поэтому нижняя граница максимального значения функции цели $c_7 = c_6 = 0$ и следует следующая итерация.

**Итерация 7.**

**Шаг 1.** Из списка решаемых задач выбираем 7-ю задачу.

**Шаг 2.** Применяя симплекс-метод, получаем решение 7-й задачи:

$$x_7 = (0;\ 3;\ 3),\ c(x_7) = 12 > c_7 = 0.$$

**Шаг 3.** Так как полученное решение является целочисленным, то нижняя граница максимального значения функции цели $c_8 = c(x_1) = 12$ и далее следует итерация 8.

**Итерация 8.**

**Шаг 1.** Из списка решаемых задач выбираем 8-ю задачу.

**Шаг 2.** Применяя симплекс-метод, получаем решение 8-й задачи:

$$x_8 = (0{,}4;\ 0;\ 1),\ c(x_8) = 10 < c_8 = 12.$$

Нижняя граница максимального значения функции цели $c_9 = c_8 = 12$, далее – следующая итерация.

**Итерация 9.**

**Шаг 1.** В списке решаемых задач имеется лишь 9-я задача.

**Шаг 2.** Применяем симплекс-метод и получаем решение 9-й задачи:

$$x_9 = (1;\ 0;\ 0),\ c(x_9) = 20 > c_9 = 12.$$

**Шаг 3.** Так как полученное решение является целочисленным, нижняя граница максимального значения функции цели $c_{10} = c(x_9) = 20$ и переходим к следующей итерации.

**Итерация 10.**

**Шаг 1.** В списке решаемых задач нет ни одной задачи. Таким образом, решение данной задачи целочисленного программирования следующее:

$$x = (1;\ 0;\ 0),\ \max c = 20.$$

# ГЛАВА V. ТЕОРИЯ ИГР

## 5.1. Основные понятия теории игр и их модели

В практической деятельности часто приходится принимать решения в условиях противодействия другой стороны, которая может преследовать противоположные или иные цели, препятствовать теми или иными действиями или состояниями внешней среды достижению намеченной цели. Причем, эти воздействия противоположной стороны могут носить пассивный или активный характер. В таких случаях приходится учитывать возможные варианты поведения противоположной стороны, ответные действия и их возможные последствия.

Возможные варианты поведения обеих сторон и их исходов для каждого сочетания вариантов и состояний часто представляют в виде математической модели, которую называют игрой.

Если в качестве противодействующей стороны выступает неактивная, пассивная сторона, которая сознательно не противодействует достижению намеченной цели, то такую игру называют игрой с «природой». Под природой понимают обычно совокупность обстоятельств, в которых приходится принимать решения (неясность погодных условий, неизвестность поведения клиентов в коммерческой деятельности, неопределенность реакции населения на новые виды товаров и услуг и т. д.)

В других ситуациях противоположная сторона активно, сознательно противостоит достижению намеченной цели. В подобных случаях происходит столкновение противоположных интересов, мнений, идей. Такие ситуации называются конфликтными, а принятие решений в конфликтной ситуации затрудняется из-за неопределенности поведения противника. Известно, что противник сознательно стремится предпринять наименее выгодные для вас действия, чтобы обеспечить себе наибольший успех. Неизвестно, в какой мере противник умеет оценить обстановку и

возможные последствия, как он оценивает ваши возможности и намерения. Обе стороны не могут предсказать взаимные действия. Несмотря на такую неопределенность, принимать решение приходится каждой стороне конфликта

В экономике конфликтные ситуации встречаются очень часто и имеют многообразный характер. К ним относятся, например, взаимоотношения между поставщиком и потребителем, покупателем и продавцом, банком и клиентом и т. д. Во всех этих примерах конфликтная ситуация порождается различием интересов партнеров и стремлением каждого из них принимать оптимальные решения. При этом каждому приходится считаться не только со своими целями, но и с целями партнера и учитывать неизвестные заранее его возможные действия.

Необходимость обоснования оптимальных решений в конфликтных ситуациях привела к возникновению теории игр.

Теория игр – это математическая теория конфликтных ситуаций. Исходными положениями этой теории являются предположение о полной «идеальной» разумности противника и принятие при разрешении конфликта наиболее осторожного решения.

Конфликтующие стороны называются игроками, одна реализация игры – партией, исход игры – выигрышем или проигрышем. Любое возможное для игрока действие (в рамках заданных правил игры) называется его стратегией.

Смысл игры состоит в том, что каждый из игроков в рамках заданных правил игры стремится применить оптимальную для него стратегию, то есть стратегию, которая приведет к наилучшему для него исходу. Одним из принципов оптимального (целесообразного) поведения является достижение равновесной ситуации, в нарушении которой не заинтересован ни один из игроков.

Именно ситуация равновесия может быть предметом устойчивых договоров между игроками. Кроме того, ситуации равновесия являются выгодными для каждого игрока: в равновесной ситуации каждый игрок получает наибольший выигрыш, в той мере, в какой это от него зависит.

Математическая модель конфликтной ситуации называется игрой, стороны, участвующие в конфликте, называются игроками.

Для каждой формализованной игры вводятся правила. В общем случае правилами игры устанавливаются варианты действий игроков; объем информации каждого игрока о поведении партнеров; выигрыш, к которому приводит каждая совокупность действий.

Развитие игры во времени происходит последовательно, по этапам или ходам. Ходом в теории игр называют выбор одного из предусмотренных правилами игры действия и его реализацию. Ходы бывают личные и случайные. Личным ходом называют сознательный выбор игроком одного из возможных вариантов действия и его осуществление. Случайным ходом называют выбор, осуществляемый не волевым решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание монеты, пасовка, сдача карт и т. д.).

В зависимости от причин, вызывающих неопределенность исходов, игры можно разделить на следующие основные группы:

Комбинированные игры, в которых правила дают в принципе возможность каждому игроку проанализировать все разнообразные варианты своего поведения и, сравнив эти варианты, избрать тот из них, который ведет к наилучшему для этого игрока исходу. Неопределенность исхода связана обычно с тем, что количество возможных вариантов поведения (ходов) слишком велико и игрок практически не в состоянии их всех перебрать и проанализировать.

Азартные игры, в которых исход оказывается неопределенным в силу влияния различных случайных факторов. Азартные игры состоят только из случайных ходов, при анализе которых применяется теория вероятностей. Азартными играми математическая теория игр не занимается.

Стратегические игры, в которых полная неопределенность выбора обоснована тем, что каждый из игроков, принимая решение о выборе предстоящего хода, не знает, какой стратегии будут придерживаться другие участники игры, причем незнание игрока о поведении и намерениях партнеров носит принципиальный характер, так как отсутствует информация о последующих действиях противника (партнера).

Существуют игры, сочетающие в себе свойства комбинированных и азартных игр, стратегичность игр может сочетаться с комбинаторностью и т. д.

В зависимости от числа участников игры подразделяются на парные и множественные. В парной игре число участников равно двум, во множественной игре число участников более двух. Участники множественной игры могут образовывать коалиции. В этом случае игры называют коалиционными. Множественная игра обращается в парную, если ее участники образуют две постоянные коалиции.

Одним из основных понятий теории игр является стратегия. Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе этого игрока в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

Оптимальной стратегией игрока называется такая стратегия, которая при многократном повторении игры, содержащей личные и случайные ходы, обеспечивает игроку

максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный проигрыш независимо от поведения противника.

Игра называется конечной, если число стратегий игроков конечно, и бесконечной, если хотя бы у одного из игроков число стратегий является бесконечным.

В многоходовых задачах теории игр понятия «стратегия» и «вариант возможных действий» существенно отличаются друг от друга. В простых (одноходовых) игровых задачах, когда в каждой партии игры каждый игрок может сделать по одному ходу, эти понятия совпадают, а, следовательно, совокупность стратегий игрока охватывает все возможные действия, которые он может предпринять в любой возможной ситуации и при любой возможной фактической информации.

Различают игры и по сумме выигрыша. Игра называется игрой с нулевой суммой, если каждый игрок выигрывает за счет других, а сумма выигрыша одной стороны равна сумме проигрыша другой. В парной игре с нулевой суммой интересы игроков прямо противоположны. Парная игра с нулевой суммой называется антагонистической игрой.

Игры, в которых выигрыш одного игрока и проигрыш другого не равны между собой, называются играми с ненулевой суммой.

Существует два способа описания игр: позиционный и нормальный. Позиционный способ связан с развернутой формой игры и сводится к графу последовательных шагов (дереву игры). Нормальный способ заключается в явном представлении совокупности стратегий игроков и платежной функции. Платежная функция в игре определяет для каждой совокупности выбранных игроками стратегий выигрыш каждой из сторон.

## Матричные игры

Парную игру с нулевой суммой удобно исследовать, если она описана в виде так называемой платежной матрицы (таблица 1). Такую игру называют матричной.

В парной игре с ненулевой суммой выигрыш каждого игрока задается своей платежной матрицей. Поэтому такие игры называют биматричными.

Рассмотрим игру, в которой участвуют два игрока, причем каждый из них имеет конечное число стратегий.

Обозначим для удобства одного игрока через $A$, а другого – через $B$.

Предположим, что игрок А имеет т стратегий: $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а игрок $B$ - $n$ стратегий: $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Пусть игрок $A$ выбрал стратегию $A_i$, а игрок $B$ – стратегию $B_k$.

Будем считать, что выбор игроками стратегий $A_i$ и $B_k$ однозначно определяет исход игры – выигрыш $a_{ik}$ и выигрыш $b_{ik}$ игрока В, причем эти выигрыши связаны равенством

$$b_{ik} = -a_{ik}$$

Последнее условие показывает, что в рассматриваемых обстоятельствах выигрыш одного из игроков равен выигрышу другого, взятому с противоположным знаком. Поэтому при анализе такой игры можно рассматривать выигрыши только одного из игроков. Пусть это будут, например, выигрыши игрока $A$.

Если нам известны значения $a_{ik}$ выигрыша при каждой паре стратегий (в каждой ситуации) $\{A_i, B_k\}$ $\left(i = \overline{1,m};\ k = \overline{1,n}\right)$, то их удобно записывать в виде прямоугольной таблицы, строки которой соответствуют стратегиям игрока $A$, а столбцы – игрока $B$,

**Таблица 1**

| $B_k$ / $A_i$, | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ |
| … | … | … | … | … |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ |

или матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Полученная матрица имеет размер $m \times n$ и называется матрицей игры или платежной матрицей.

Рассматриваемую игру часто называют игрой $m \times n$ или $m \times n$ - игрой.

Матричные игры относятся к разряду антагонистических игр.

**Пример 1.** Каждый из двух игроков $A$ и $B$ одновременно и независимо друг от друга записывают на листе бумаги любое целое число. Если записанные числа имеют одинаковую четность, то игрок $A$ получает от игрока $B$ 10 рублей, а если разную, то, наоборот, игрок $A$ платит 10 рублей игроку $B$.

У игрока $A$ две стратегии: $A_1$ – записать четное число и $A_2$ – записать нечетное число.

У игрока $B$ также две стратегии: $B_1$ – записать четное число и $B_2$ – записать нечетное число.

Выбор игроками соответственно стратегий $A_i$ и $B_k$ однозначно определяет исход игры: $a_{ik}$ – выигрыш игрока $A$.

Матрица этой 2×2-игры имеет следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Строки этой матрицы соответствуют стратегиям игрока $A$, а столбцы – стратегиям игрока В.

## 5.2. Решение игры в смешанных стратегиях

Среди конечных игр, имеющих практическое значение, сравнительно редко встречаются игры с седловой точкой; более типичным является случай, когда нижняя и верхняя цена игры различны. Анализируя матрицы таких игр, приходим к заключению, что если каждому игроку предоставлен выбор одной-единственной стратегии, то в расчете на разумно действующего противника этот выбора должен определяться принципом минимакса. Придерживаясь своей максиминной стратегии, мы при любом поведении противника заведомо гарантируем себе выигрыш, равный нижней цене игры $a$. Возникает естественный вопрос: нельзя ли гарантировать себе средний выигрыш, больший $a$, если применять не одну-единственную «чистую» стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий?

Такие комбинированные стратегии, состоящие в применении нескольких чистых стратегий, чередующихся по случайному закону с определенным соотношением частот, в теории игр называются ***смешанными стратегиями***

Смешанной стратегией $S_A$ игрока $A$ называется применение чистых стратегий $A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_m$ с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_m$, причем сумма вероятностей равна $1: \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Смешанные стратегии игрока $A$ записываются в виде матрицы

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_m \end{pmatrix},$$

или в виде строки $S_A = (p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_m)$.

Аналогично смешанные стратегии игрока $B$ обозначаются:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_j & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_j & \dots & q_n \end{pmatrix}, \text{ или } S_B = (q_1, q_2, ..., q_j, ..., q_n),$$

где сумма вероятностей появления стратегий равна 1: $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Очевидно, каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной, в которой все стратегии, кроме одной, применяются с нулевыми частотами (вероятностями), а данная – с частотой (вероятностью) 1.

Оказывается, что, применяя не только чистые, но и смешанные стратегии, можно для каждой конечной игры получить решение, т. е. пару таких (в общем случае смешанных) стратегий, что при применений их обоими игроками выигрыш будет равен цене игры, а при любом одностороннем отклонении от оптимальной стратегии выигрыш может измениться только в сторону, невыгодную для отклоняющегося. Итак, на основании принципа минимакса определяется ***оптимальное решение*** (или *решение)* игры: это пара оптимальных стратегий $S_A^*, S_B^*$ в общем случае смешанных, обладающих следующим свойством: если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то другому не может быть выгодно, отступать от своей. Выигрыш, соответствующий оптимальному решению, называется ***ценой игры*** $v$. Цена игры удовлетворяет неравенству: $\alpha \le v \le \beta$, где $\alpha$ и $\beta$ – нижняя и верхняя цены игры.

Высказанное утверждение составляет содержание так называемой *основной теоремы теории игр.* Эта теорема была впервые доказана Джоном фон Нейманом в 1928 г. Известные доказательства теоремы сравнительно сложны; поэтому приведем только ее формулировку.

Каждая конечная игра имеет, по крайней мере одно оптимальное решение, возможно среди смешанных стратегий.

Из основной теоремы следует, что каждая конечная игра имеет цену.

Пусть $S_A^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_m^*)$ и $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_n^*)$ – пара оптимальных стратегий. Если чистая стратегия входит в оптимальную смешанную стратегию с отличной от нуля вероятностью, то она называется активной (полезной).

Справедлива теорема об активных стратегиях: если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры v, если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

Игрок может пользоваться любой из своих активных стратегий в чистом виде, а также может смешивать их в любых пропорциях.

Эта теорема имеет большое практическое значение – она дает конкретные модели нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки.

Рассмотрим **игру размера 2x2**, которая является простейшим случаем конечной игры. Если такая игра имеет седловую точку, то оптимальное решение – это пара чистых стратегий, соответствующих этой точке.

Игра, в которой отсутствует седловая точка, в соответствии с основной теоремой теории игр *оптимальное решение существует и определяется парой смешанных стратегий* $S_A^* = (p_1^*, p_2^*)$ и $S_B^* = (q_1^*, q_2^*)$.

Для того чтобы их найти, воспользуемся теоремой об активных стратегиях. Если игрок $A$ придерживается своей оптимальной стратегии $S_A^*$, то его средний выигрыш будет равен цене игры $v$, какой бы активной стратегией ни пользовался

игрок *B*. Для игры 2x2 любая чистая стратегия противника является активной, если отсутствует седловая точка. Выигрыш игрока *A* (проигрыш игрока *B)* – случайная величина, математическое ожидание (среднее значение) которой является ценой игры. Поэтому средний выигрыш игрока *A* (оптимальная стратегия) будет равен $v$ и для 1-й, и для 2-й стратегии противника.

Пусть игра задана платежной матрицей

$$p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Средний выигрыш игрока *A*, если он использует оптимальную смешанную стратегию

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1^* & p_2^* \end{pmatrix},$$

а игрок $B$ – чистую стратегию $B_1$ (это соответствует 1-му столбцу платежной матрицы *P),* равен цене игры $v$: $a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v$.

Тот же средний выигрыш получает игрок *A*, если 2-й игрок применяет стратегию $B_2$, т.е. $a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v$. Учитывая, что $p_1^* + p_2^* = 1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии $S_A^*$ и цены игры $v$:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v, \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v, \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases}$$

Решая эту систему, получим оптимальную стратегию

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

и цену игры

$$v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Применяя теорему об активных стратегиях при отыскании $S_B^*$ – оптимальной стратегии игрока $B$, получаем, что при любой чистой стратегии игрока $A$ ($A_1$ или $A_2$) средний проигрыш игрока $B$ равен цене игры $v$, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* = v, \\ a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* = v, \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases}$$

Тогда оптимальная стратегия $S_B^*(q_1^*, q_2^*)$ определяется формулами:

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Задача решения игры, если ее матрица не содержит седловой точки, тем сложней, чем больше значения $m$ и $n$. Поэтому в теории матричных игр рассматриваются способы, с помощью которых решение одних игр сводится к решению других, более простых, в частности, с помощью сокращения размерности матрицы. Сократить размерность матрицы можно, исключая ***дублирующие*** и заведомо ***невыгодные*** стратегии.

***Дублирующими*** называются стратегии, которым соответствуют одинаковые значения элементов в платежной матрице, т.е. матрица содержит одинаковые строки (столбцы).

Если все элементы $i$-ой строки матрицы меньше соответствующих элементов $k$-ой строки, то $i$-ая стратегия для игрока $A$ невыгодная (выигрыш меньше).

Если все элементы $r$-го столбца матрицы больше соответствующих элементов $j$-го столбца, то для игрока $B$ $r$-ая стратегия невыгодная (проигрыш больше).

Процедура вычеркивания дублирующих и заведомо невыгодных стратегий всегда должна предшествовать решению игры.

## 5.3. Приведение матричных игр к задачам линейного программирования

Пусть игра $m \times n$ задана платежной матрицей $P = (a_{ij}), i = 1,2,...,m, j = 1,2,...,n$ Игрок $A$ обладает стратегиями $A_1, A_2, ..., A_m$, игрок $B$ – стратегиями $B_1, B_2, ..., B_n$. Необходимо определить оптимальные стратегии $S_A^* = (p_1^*, p_2^*, ... p_m^*)$ и $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, ... q_n^*)$ где $p_i, q_i$ - вероятности применения соответствующих чистых стратегий $A_i$ и $B_j$, $\sum p_i = 1, p_i \geq 0, p_i \geq 0, (i = 1,2,...,m)$; $\sum q_i = 1, q_i \geq 0, (i = 1,2,...,n)$.

Оптимальная стратегия $S_A^*$ удовлетворяет следующему требованию. Она обеспечивает игроку $A$ средний выигрыш, не меньший, чем цена игры $v$, при любой стратегии игрока $B$ и выигрыш, равный цене игры $v$, при оптимальной стратегии игрока $B$. Без ограничения общности полагаем $v > 0$: этого можно добиться, сделав все элементы $a_{ij} \geq 0$. Если игрок $A$ применяет смешанную стратегию $S_A^* = (p_1^*, p_2^*, ... p_m^*)$ против любой чистой стратегии $B_j$ игрока $B$, то он получает средний выигрыш, или математическое ожидание выигрыша $a_j = a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + ... + a_{mj} p_m$, $j = 1,2,...,n$ (т.е. элементы $j$-го столбца платежной матрицы почтенно умножаются на соответствующие вероятности стратегий $A_1, A_2, ..., A_m$ и результаты складываются).

Для оптимальной стратегии $S_A^*$ все средние выигрыши не меньше цены игры $v$, поэтому получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \geq v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{m2}p_m \geq v \\ ..... \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_m \geq v \end{cases}$$

Каждое из неравенств можно разделить на число $v > 0$. Введем новые переменные:

$$x_1 = p_1 / v, \quad x_2 = p_2 / v, ...., x_m = p_m / v$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}p_m \geq 1 \\ ..... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq 1 \end{cases}$$

Цель игрока $A$ - максимизировать свой гарантированный выигрыш, т.е. цену игры v.

Разделив на $v \neq 0$ равенство $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$, получаем, что переменные $x_i (i = 1,2,...,m)$ удовлетворяют условию: $x_1 + x_2 + ... + x_m = 1/v$. Максимизация цены игры $v$ эквивалентна минимизации величины $1/v$, поэтому задача может быть сформулирована следующим образом: определить значения $x_i \geq 0 \, (i = 1,2,...,m)$, так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям и при этом линейная функция $Z = x_1 + x_2 + ... + x_m$ обращалась в минимум. Это задача линейного программирования.

Решая задачу, получаем оптимальное решение $p_1^*, p_2^*, ... p_m^*$ и оптимальную стратегию $S_A^*$. Для определения оптимальной стратегии $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, ... q_n^*)$ следует учесть, что игрок $B$ стремится минимизировать гарантированный выигрыш, т.е. найти $\max 1/v$. Переменные $q_1, q_2, ... q_n$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + ... + a_{1n}q_n \geq v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + ... + a_{2n}q_{nm} \geq v \\ ..... \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + ... + a_{mn}q_m \geq v \end{cases}$$

которые следуют из того, что средний проигрыш игрока $B$ не превосходит цены игры, какую бы чистую стратегию не применял игрок $A$.

Если обозначить $y_i = q_i / v, \; j = 1,2,...,n$ то получим систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \le 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \le 1 \\ ..... \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n \le 1 \end{cases}$$

Переменные $y_j, (j = 1,2,...,n)$ удовлетворяют условию $y_1 + y_2 + ... + y_n = 1/v$.

Игра свелась к следующей задаче.

Определить значения переменных $y_j \ge 0, (j = 1,2,...,n)$, которые удовлетворяют системе неравенств и максимизируют линейную функцию $Z' = y_1 + y_2 + ... + y_n$.

Решение задачи линейного программирования определяет оптимальную стратегию $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, ... q_n^*)$. При этом цена игры $v = 1/\max,\ Z' = 1/\min Z$.

Приведем примеры экономических задач, которые описываются игровыми моделями $m \times n$ и могут быть решены методами линейного программирования.

**Пример 1**. Предприятие может выпускать три вида продукции ($A_1, A_2$ *и* $A_3$), получая при этом прибыль, зависящую от спроса, который может быть в одном из четырех состояний ($B_1, B_2, B_3, B_4$). Дана матрица (табл.1), ее элементы $a_{ij}$ характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске *i*-й продукции с *j*-м состоянием спроса.

Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, гарантирующие среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, считая его неопределенным.

**Таблица 1**

| $A_i$ $B_j$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 3 | 6 | 8 |
| $A_2$ | 9 | 10 | 4 | 2 |
| $A_3$ | 7 | 7 | 5 | 4 |

Задача сводится к игровой модели, в которой игра предприятия А против спроса В задана платежной матрицей (см.табл.1). Прежде чем решать задачу, можно попытаться упростить игру, проведя анализ платежной матрицы и отбросив стратегии, заведомо невыгодные или дублирующие. Так, вторая стратегия (второй столбец матрицы (см. табл. 1) является явно невыгодной для игрока В по сравнению с первой (элементы второго столбца больше элементов первого столбца), так как цель игрока $B$ – уменьшить выигрыш игрока $A$. Поэтому второй столбец можно отбросить. Получим матрицу $P$ размера 3x3:

$$P=\begin{pmatrix}3 & 6 & 8\\ 9 & 4 & 2\\ 7 & 5 & 4\end{pmatrix}_{3\times3}$$

**Таблица 2**

| $A_i$ $B_j$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $\alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 6 | 8 | 3 |
| $A_2$ | 9 | 4 | 2 | 2 |
| $A_3$ | 7 | 5 | 4 | 4 |
| $\beta_j$ | 9 | 6 | 8 | $\alpha=4\setminus\beta=6$ |

Определим нижнюю и верхнюю цены игры в табл. 2.

Так как $\alpha \neq \beta$, то седловая точка отсутствует и оптимальное решение следует искать в смешанных стратегиях игроков:

$S_A^* = (p_1, p_2, p_3)$ и $S_B^* = (q_1, q_2, q_3)$.

Обозначив $x_i = p_i / v, i = 1,2,3$ и $y_j / v, y = 1,2,3$, составим две взаимнодвойственные задачи линейного программирования.

**Пример 2.** Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию, которую может сразу отправить потребителю (стратегия $A_1$), отправить на склад для хранения (стратегия $A_2$) или подвергнуть дополнительной обработке (стратегия $A_3$) для длительного хранения.

Потребитель может приобрести продукцию: немедленно (стратегия $B_1$), в течение небольшого времени ($B_2$), после длительного периода времени ($B_3$).

В случае стратегий $A_2$ и $A_3$ предприятие несет дополнительные затраты на хранение и обработку продукции, которые не требуются для $A_1$, однако при $A_2$ следует учесть возможные убытки из-за порчи продукции, если потребитель выберет стратегии $B_2$ или $B_3$.

Определить оптимальные пропорции продукции для применения стратегий $A_1, A_2$ и $A_3$ руководствуясь "минимаксным критерием" (гарантированный средний уровень убытка) при матрице затрат, представленной табл. 3.

**Таблица 3**

| $A_i$ $B_j$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 3 | 3 | 6 | 8 |
| $A_2$ | 9 | 10 | 4 | 2 |
| $A_3$ | 7 | 7 | 5 | 4 |

Получаем игру с платежной матрицей

$$P=\begin{pmatrix}2 & 5 & 8\\ 7 & 6 & 10\\ 12 & 10 & 8\end{pmatrix}_{3\times 3}$$

В этой матрице первую строку можно отбросить как невыгодную (ее элементы меньше соответствующих элементов второй строки). Матрица примет вид

$$P=\begin{pmatrix}7 & 6 & 10\\ 12 & 10 & 8\end{pmatrix}$$

Элементы первого столбца больше соответствующих элементов второго столбца, поэтому его можно отбросить.

Игра упростилась:

$$P=\begin{pmatrix}6 & 10\\ 10 & 8\end{pmatrix}$$

Находим, что

$$p^*_1=\frac{8-10}{6+8-10-10}=\frac{1}{3};\ p^*_2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3};\ v=\frac{6\cdot 1}{3}+\frac{10\cdot 2}{3}=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}.$$

Вывод: оптимальная стратегия производителя продукции $S_A^*=(0;1/3;2/3)$ т.е. стратегия $A_1$ не принимается, 1/3 продукции отправляется на склад (стратегия $A_2$), 2/3 продукции дополнительно обрабатывается (стратегия $A_3$), при этом цена игры $v=8\frac{2}{3}$.

# ГЛАВА VI. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

## 6.1. Постановка задачи нелинейного программирования и их виды

Математическая модель задачи нелинейного программирования в общем виде формулируется следующим образом: найти вектор $\bar{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений

$$\begin{cases} g_i(x_1,x_2,...,x_n)=b_i,\ i=\overline{1,m}; \\ g_i(x_1,x_2,...,x_n)\geq b_i,\ i=\overline{1,m=1,m_2}; \\ g_i(x_1,x_2,...,x_n)\leq b_i,\ i=\overline{m_2+1,m} \end{cases}$$

и доставляющий экстремум целевой функции

$$L=f(x_1,x_2,...,x_n),$$

где $x_j$ переменные, $j=\overline{1,n}; L, f, q_i$ – заданные функции от $n$ переменных, $b_i$ – фиксированные значения.

Для задачи нелинейного программирования в отличие от линейных задач нет единого метода решения. В зависимости от вида целевой функции и системы ограничений разработаны специальные методы решения, к которым относятся методы множителей Лагранжа, квадратичное и выпуклое программирование, градиентные методы, приближённые методы решения, графический метод.

### Графический метод

Рассмотрим примеры решение задач нелинейного программирования с двумя переменными, причём их целевые функции и системы ограничений могут быть заданы в линейном и нелинейном виде. Так же как и в задачах линейного программирования, они могут быть решены графически.

Задача с линейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений

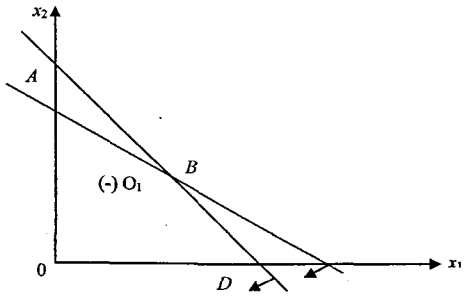
**Пример.** Найти глобальные экстремумы функции

$$L=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 12, \\ x_1+x_2\le 9, \\ x_{1,2}\ge 0 \end{cases}$$

**Ответ.** Глобальный максимум, равный 58, достигается в точке D(9, 0), глобальный минимум, равный нулю, – в точке $O_1(2,3)$.




## 6.2. Условный экстремум

Для начала рассмотрим случай функции двух переменных. Условным экстремумом функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные $x$ и $y$ в окрестности данной точки удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x,y)=0$.

Название «условный» экстремум связано с тем, что на переменные наложено дополнительное условие $\varphi(x,y)=0$. Если из уравнения связи можно выразить одну переменную через другую,

то задача определения условного экстремума сводится к задаче на обычный экстремум функции одной переменной. Например, если из уравнения связи следует $y=\psi(x)$, то подставив $y=\psi(x)$ в $z=f(x,y)$, получим функцию одной переменной $z=f(x,\psi(x))$. В общем случае, однако, такой метод малопригоден, поэтому требуется введение нового алгоритма.

**Метод множителей Лагранжа для функций двух переменных.**

Метод множителей Лагранжа состоит в том, что для отыскания условного экстремума составляют функцию Лагранжа: $F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ (параметр $\lambda$ называют множителем Лагранжа). Необходимые условия экстремума задаются системой уравнений, из которой определяются стационарные точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=0; \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

Достаточным условием, из которого можно выяснить характер экстремума, служит знак $d^2F=F''_{xx}dyx^2+2F''_{xy}dxdy+F''_{yy}dy^2$. Если в стационарной точке $d_2F>0$, то функция $z=f(x,y)$ имеет в данной точке условный минимум, если же $d_2F>0$, то условный максимум.

Есть и другой способ для определения характера экстремума. Из уравнения связи получаем: $\varphi'_x dx+\varphi'_y dy=0$, $dy=\dfrac{\varphi'_x}{\varphi'_x}dx$, поэтому в любой стационарной точке имеем:

$$d_2F=F''_{xx}dx^2+2F''_{xy}dxdy+F''_{yy}dy^2=F''_{xx}dx^2+F''_{xy}dx\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}dx\right)+F''_{yy}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}dx\right)^2=$$

$$=-\frac{dx^2}{\left(\varphi'_y\right)^2}\cdot\left(-\left(\varphi'_y\right)^2F''_{xx}+2\varphi'_x\varphi'_yF''_{xy}-\left(\varphi'_x\right)^2F''_{yy}\right)$$

Второй сомножитель (расположенный в скобке) можно представить в такой форме:

$$H=\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}$$

Красным цветом выделены элементы определителя $\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}$, который является гессианом функции Лагранжа. Если $H>0$, то $d^2F<0$, что указывает на условный максимум. Аналогично, при $H<0$ имеем $d^2F<0$, т.е. имеем условный минимум функции $z=f(x,y)$.

**Первый способ (метод множителей Лагранжа)**

Обозначив $\varphi(x,y)=x+y$ составим функцию Лагранжа:

$$F(x,y)=z(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=3y^2+4x^2-xy+\lambda(x+y).$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=8x-y+\lambda;\ \frac{\partial F}{\partial y}=9y^2-x+\lambda.$$

$$\begin{cases} 8x-y+\lambda=0 \\ 9y^2-x+\lambda=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

Решив систему, получим: $x_1=0, y_1=0, \lambda_1=0$ и $x_2=\frac{10}{9}$, $y_2=-\frac{10}{9}$. Имеем две стационарные точки: $M_1(0;0)$ и $M_2\left(\frac{10}{9};-\frac{10}{9}\right)$. Выясним характер экстремума в каждой стационарной точке с использованием определителя $H$.

$$H=\begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ \varphi'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \\ 1 & -1 & 18y \end{vmatrix}=-10-18y$$

В точке $M_1(0;0)$ $H=-10-18\cdot=-10<0$, поэтому $M_1(0;0)$ есть точка условного минимума функции $z(x,y)=3y^3+4x^2-xy$, $z_{\min}=0$. В точке $M_2\left(\frac{10}{9};-\frac{10}{9}\right)$ $H=10>0$, посему в данной точке функция имеет условный максимум, $z_{\max}\approx 500243$.

Исследуем характер экстремума в каждой из точек иным методом, основываясь на знаке $d^2F$:

$$d^2F=F''_{xx}dx^2+2F''_{xy}dxdy+F''_{yy}dy^2=8dx^2-2dxdx+18ydy^2$$

Из уравнения связи $x+y=0$ имеем: $d(x+y)=0$, $dx+dy=0$, $dy=-dx$.

$$d^2F=8dx^2-2dxdy+18ydy^2=8dx^2-2dx(-dx)+18y(-dx)^2=(10+18y)dx^2$$

Так как $d^2F\big|_{M_1}=10dx^2>0$, то $M_1(0;0)$ является точкой условного минимума функции $z(x,y)=3y^3+4x^2-xy$. Аналогично, $d^2F\big|_{M_2}=10dx^2<0$, т.е. $M_2\left(\frac{10}{9};-\frac{10}{9}\right)$ – точка условного максимума.

## Второй способ

Из уравнения связи $x+y=0$ получим: $y=-x$. Подставив $y=-x$ в функцию $z(x,y)=3y^3+4x^2-xy$, получим некоторую функцию переменной $x$. Обозначим эту функцию как $u(x)$:

$$u(x)=z(x,-x)=3\cdot(-x)^3+4x^2-x\cdot(-x)=-3x^3+5x^2$$

Таким образом задачу о нахождении условного экстремума функции двух переменных мы свели к задаче определения экстремума функции одной переменной.

$$u'_x=-9x^2+10x;$$
$$-9x^2+10x=0;\ x\cdot(-9x+10)=0;$$
$$x_1=0;\ y_1=-x_1=0;$$
$$x_2=\frac{10}{9};\ y_2=-x_2=-\frac{10}{9}.$$

Получили точки $M_1(0;0)$ и $M_2\left(\frac{10}{9};-\frac{10}{9}\right)$. Дальнейшее исследование известно из курса дифференциального исчисления функций одной переменой. Исследуя знак $u''_{xx}$ в каждой стационарной точке или проверяя смену знака $u'_x$ в найденных точках, получим те же выводы, что и при решении первым способом. Например, проверим знак $u''_{xx}$:

$$u''_{xx}=-18x+10;$$
$$u''_{xx}(M_1)=10;\ u''_{xx}(M_2)=-10.$$

Так как $u''_{xx}(M_1)>0$, то $M_1$ – точка минимума функции $u(x)$, при этом $u_{\min}=u(0)=0$. Так как $u''_{xx}(M_2)<0$, то $M_2$ – точка максимума функции $u(x)$, причём $u_{\max}=u\left(\frac{10}{9}\right)=\frac{500}{243}$.

Значения функции $u(x)$ при заданном условии связи совпадают с значениями функции $z(x,y)$, т.е. найденные экстремумы функции $u(x)$ и есть искомые условные экстремумы функции $z(x,y)$.

**Ответ:** в точке $(0;0)$ функция имеет условный минимум, $z_{\min}=0$. В точке $\left(\frac{10}{9};-\frac{10}{9}\right)$ функция имеет условный максимум, $z_{\max}=\frac{500}{243}$.

Рассмотрим еще один пример, в котором характер экстремума выясним посредством определения знака $d^2F$.

## 6.3. Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим частный случай общей задачи нелинейного программирования (6.3.1) – (6.3.2), предполагая, что система ограничений (6.3.2) содержит только уравнения, отсутствуют условия неотрицательности переменных,

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ – функции, непрерывные вместе со своими частными производными. Ограничения в задаче заданы уравнениями, поэтому для ее решения можно воспользоваться классическим методом отыскания условного экстремума функций нескольких переменных. Вводят набор переменных $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, называемых **множителями Лагранжа**, и составляют **функцию Лагранжа**

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[ b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \right],$$

находят частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(j = \overline{1,n}\right), \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}\left(j = \overline{1,m}\right)$$

и рассматривают систему $n+m$ уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \; j = \overline{1,n} \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = \overline{1,m} \end{cases} \qquad (6.3.3)$$

с $n+m$ неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Решив систему уравнений (6.3.3), получают все точки, в которых функция (6.3.1) может иметь экстремальные значения. Дальнейшее исследование найденных точек проводят так же, как и в случае безусловного экстремума. Метод множителей Лагранжа имеет ограниченное применение, так как система (6.3.3), как правило, имеет несколько решений.

**Пример.** Найти точку условного экстремума функции $f(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \lambda_1 (x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2 (x_2 + x_3 - 2)$$

Продифференцируем ее по переменным $x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2$. Приравнивая полученные выражения к нулю, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + \lambda_1 = 0 \\ x_1 + x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x_2 + \lambda_2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2 = 0 \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = -x_2$; тогда

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Решив данную систему, получим:

$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1$ и $f(x^*) = 2$

# ГЛАВА VII. ВЫПУКЛОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

## 7.1. Производная и градиент по направлению

Производной $\frac{\partial F}{\partial l}$ функции $F(X)=(x_1,...,x_n)$ по направлению $I$ в точке $X$ называется предел

$$\frac{\partial F}{\partial l}=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{F(X+\lambda l)-F(X)}{\lambda}$$

Направление $l$ обычно задается вектором $l=(l_1,...,l_n)$

Если функция $F$ дифференцируема в точке $X$, то она имеет в этой точке производную по любому направлению $l$, которая выражается через частные производные по формуле

$$\frac{\partial F}{\partial l}=\frac{1}{|l|}\sum_{i=1}^{n}l_i\cdot\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (7.1.1)$$

где $|l|$ – длина вектора $l$, т.е. $|l|=\sqrt{l_1^2+...+l_n^2}$

Абсолютная величина производной по направлению дает скорость изменения функции в этом направлении, а знак показывает характер изменения функции (возрастание или убывание).

Градиентом $VF$ функции $F(X)=F(x_1,...,x_n)$ называется вектор, проекциями которого на координатные оси служат соответствующие частные производные, т.е.

$$\nabla F=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1},\frac{\partial F}{\partial x_2},...,\frac{\partial F}{\partial x_n}\right).$$

Можно показать, что $\max\left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)$ достигается тогда, когда направление $I$ совпадает с направлением $\nabla F$. По формуле (7.1.1) производная функции $F$ по направлению градиента $W$ равна

$$\frac{\partial F}{\partial(\nabla F)}=\frac{1}{|\nabla F|}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i\cdot\partial x_i}=|\nabla F|$$

Таким образом, в каждой точке $X$ направление градиента является направлением наибольшего возрастания функции, а длина градиента равна наибольшей скорости возрастания функции в этой точке.

**Пример.** Найти наибольшую скорость возрастания функции $F = x_1x_2x_3 + 2x_3$ в точке $B(0; 1; 2)$ и определить характер изменения этой функции в точке $A$ в направлении $l = (1; -2; 2)$.

**Решение.** Так как то $\nabla F = (x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2 + 2)$ и $\nabla F|_A = (2;0;2)$. Таким образом, наибольшая скорость возрастания функции в точке $A$ равна $\nabla F|_A = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}$. Далее $|l| = \sqrt{1+4+4} = 3$ и $\left.\frac{\partial F}{\partial l}\right|_A = \frac{1}{3}(1\cdot 2 + (-2)\cdot 0 + 2\cdot 2) = \frac{6}{3} = 2$. Так как, функция $F$ в точке $A$ в направлении $l$ возрастает. ▶ $\left.\frac{\partial F}{\partial l}\right|_A > 0$.

Напомним, что множество точек называется *выпуклым,* если оно вместе с любыми своими двумя точками содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки. Если $[a,b]$ – отрезок на числовой прямой и $x \in [a,b]$.

$$x = \alpha_1 a + \alpha_2 b,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ \alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0 \qquad (7.1.2)$$

Нетрудно видеть и обратное: если выполняется (7.1.2), то $x \in [a,b]$. Таким образом, отрезок $[a,b]$ можно определить как множество всех точек $x$, удовлетворяющих условию (7.1.2). Тогда выпуклое множество – это множество, которое вместе с любой парой своих точек $a$, $b$ содержит и все точки $X$, для которых выполняется (7.1.2). Эти определения отрезка и выпуклого множества сохраняются для случая, когда $a,b,x$–точки «-мерного *пространства*».

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2x_3,\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1x_3,\ \frac{\partial F}{\partial x_3} = x_1x_2 + 2$$

Исходя из равенства (7.1.2) по индукции можно показать, что если $M$ – выпуклое пространство, то для любых точек $X_1,...,X_r \in M$ и любых действительных чисел $t_j > 0$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{r} t_j = 1$.

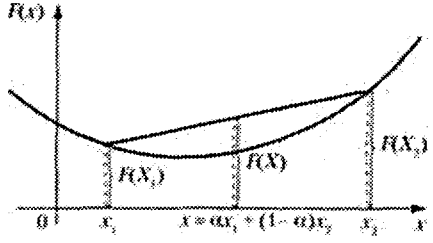
Функция $F(X) = F(x_1,...,x_n)$, определенная на выпуклом множестве $M$ $n$-мерного пространства, называется выпуклой на этом множестве, если

$$F(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2) \le \alpha F(X_1) + (1-\alpha)F(X_2) \qquad (7.1.3)$$

для любых точек $X_1, X_2 \in M$ и любого числа $\alpha \in [0,1]$.

Если в условии (7.1.2) изменить знак неравенства < на >, то получим определение вогнутой функции. Если же в условии (7.1.3) неравенство выполняется как строгое, то функция называется строго выпуклой (или строго вогнутой).

На рис. 7.1.1 изображен график функции одной переменной, выпуклой на всей числовой прямой.




Для любой пары $X_1, X_2$ значений аргумента произвольную точку $X \in [X_1, X_2]$ (см. (7.1.2)) можно задать в виде $X = \alpha X_1 + (1-\alpha)X_2$. Как видно из рис. 7.1.1, неравенство (7.1.3) означает, что отрезок, соединяющий точки $(X_1; F(X_1))$ и $(X_2; F(X_2))$, расположен не ниже графика функции на этом участке (для строго выпуклой функции этот отрезок лежит выше графика). Таким образом, выпуклость или вогнутость функции одной переменной сразу же видна по ее графику.

Алгебраические и аналитические свойства выпуклых функций.

1. Если функция $F(x)$ выпукла, то функция $-F(x)$ вогнута.

2. Функция $F(x)=C$ и линейная функция $F(x)=ax+b$ являются всюду выпуклыми всюду вогнутыми.

3. Если функции $F_i(x),(i=\overline{1,m})$ выпуклы, то при любых действительных числах $a_i \geq 0$ функция так же является выпуклой.

4. Если функция $F(x)$ выпукла, то для любого числа а область решений неравенства $F(x)<\alpha$ является либо выпуклым множеством, либо пустым.

Отметим следствия свойства 4 и теоремы о пересечении выпуклых множеств.

5. Если функции $\varphi_i(x)$ выпуклые при всех неотрицательных значениях переменных, то область решений системы неравенств $\varphi_i(x)\leq b_i, i=\overline{1,m}$ является выпуклым множеством (если она не пуста).

6. Выпуклая (вогнутая) функция, определенная на выпуклом множестве *M*, непрерывна в каждой внутренней точке этого множества.

7. Всякая дифференцируемая строго выпуклая (вогнутая) функция имеет не более одной стационарной точки (т.е. точки, в которой равны нулю все частные производные).

## 7.2. Проверка выпуклости методом Сильвестра

Дважды дифференцируемая функция $F(x)=F(x_1,...,x_n)$ является выпуклой в том и только в том случае, когда

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \cdot \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j \geq 0 \qquad (7.2.1)$$

для любых не обращающихся в нуль одновременно. $X \in M$ и $\Delta x_i, \Delta x_j$.

Чтобы использовать это условие для определения выпуклости конкретной функции, часто бывает полезен критерий Сильвестра: условие (7.2.1) выполняется тогда и только тогда, когда неотрицательны все главные миноры $\Delta_k$ матрицы вторых частных производных, т.е. определители

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad a_{ij} = \frac{\partial F(x)}{\partial x_i \cdot \partial x_j}, \quad k = \overline{1,n} \tag{7.2.2}$$

Если все $\Delta_k > 0$, то неравенство (7.2.1) выполняется как строгое, и тогда функция $F$ будет строго выпуклой.

Показать, что следующие функции являются выпуклыми:

а) $F = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + 5x_1 - 6x_2 + 8$

б) $G = -\sqrt{x_1x_2}$

Решение, а) Находим частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 4x_1 - x_2 + 5, \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - x_1 - 6, \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 4, \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = -1, \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 2$$

Матрица вторых частных производных имеет вид $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ее главные миноры $\Delta_1 = |4| = 4 > 0, \Delta_2 = \det A = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 > 0$.

Значит, на основании свойства функция $F$ является строго выпуклой при всех $X$.

б) Здесь

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = -\frac{x_2}{2\sqrt{x_1x_2}}, \frac{\partial G}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{2\sqrt{x_1x_2}},$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}}, \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} = \frac{-x_2}{2}\left[(x_1x_2)^{-\frac{1}{2}}\right]'_{x_1} = \frac{x_2^2}{4(x_1x_2)^{3/2}} = \frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}, \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} = \frac{1}{4x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$$

Матрица вторых частных производных имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & \frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}} \\ \frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}} & \frac{1}{4x_2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \end{pmatrix};$$

$$\Delta_1=\frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}, \qquad \Delta_2=|A|=\frac{1}{16x_1x_2}-\frac{1}{16x_1x_2}=0$$

Таким образом, $G$ является выпуклой, но не строго выпуклой функцией при $x_1>0, x_2>0$.

## 7.3. Геометрическая интерпретация задачи выпуклого программирования

Пусть дана система неравенств вида

$$\varphi_i(x_1,x_2,...,x_n)\geq b_i,\ i=1,2,...,m \qquad (7.3.1)$$

и функция $Z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ (7.3.2) причем все функции $\varphi_i(x)$ являются выпуклыми на некотором выпуклом множестве $M$, а функция $Z$ либо выпукла на множестве $M$, либо вогнута.

Задача выпуклого программирования (ВП) состоит в отыскании такого решения системы ограничений (7.3.1), при котором целевая функция $Z$ достигает минимального значения или вогнутая функция $Z$ достигает максимального значения. Условия неотрицательности переменных можно считать включенными в систему (7.3.1).

Ввиду свойства 3 всякая задача линейного программирования является частным случаем задачи ВП. В общем случае задачи ВП являются задачами нелинейного программирования. Выделение задач ВП в специальный класс объясняется экстремальными свойствами выпуклых функций: всякий локальный минимум выпуклой функции (локальный максимум вогнутой функции) является одновременно и глобальным; кроме того,

ввиду свойства 2 выпуклая (вогнутая) функция, заданная на замкнутом ограниченном множестве, достигает на этом множестве глобального максимума и глобального минимума. Отсюда вытекает, что если целевая функция Z является строго выпуклой (строго вогнутой) и если область решений системы ограничений не пуста и ограничена, то задача ВП всегда имеет единственное решение. В этом случае минимум выпуклой (максимум вогнутой) функции достигается внутри области решений, если там имеется стационарная точка, или на границе этой области, если внутри нее нет стационарной точки. В общем случае можно утверждать лишь, что множество оптимальных решений любой задачи ВП является выпуклым множеством.

**Пример.** Геометрически решить следующую задачу ВП: найти минимум функции $Z = 2 + (x_1 - 1)^2 + (x_2 - x_1)^2$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 4, \\ x_1 \le 2x_2, \\ x_2 \le 2x_1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

**Решение.** Строим область допустимых решений данной задачи:

а) $x_1^2 + x_2^2 = 4$ – окружность с центром в начале координат и радиусом $R = 2$ (рис. 7.3.1). Область решений неравенства $x_1^2 + x_2^2 \le 4$ состоит из точек, лежащих внутри этой окружности и на ней самой;

б) $x_1 = 2x_2$ – прямая, которую можно построить, например, по точкам (0; 0) и (2; 1). Область решений неравенства – $x_1 \le 2x_2$ полуплоскость, лежащая над этой прямой, включая и саму прямую;

в) $x_2 = 2x_1$ – прямая, которая строится, например, по точкам (0; 0) и (1; 2). Область решений неравенства

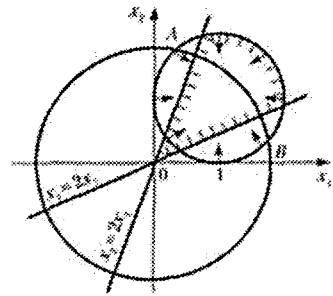


**Рис. 7.3.1.**

$x_2 \le 2x_1$ – полуплоскость, лежащая под этой прямой, включая и саму прямую. Таким образом, с учетом условий неотрицательности переменных, областью допустимых решений данной задачи является замкнутый сектор $OAB$ (см. рис. 6.3.1).

Теперь построим линию уровня функции $Z$ и определим направление убывания $Z$. Все линии уровня имеют уравнение

$Z = C$, т.е. $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2 = C-2$. При $C=3$ получаем линию уровня $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=1$– это окружность с центром в точке $O_1(1;1)$ и радиусом $R = 1$. Ясно, что в любой точке этой линии уровня при перемещении от центра окружности $O_1$ функция $Z$ возрастает, а при перемещении к центру убывает. Таким образом, минимум $Z$ достигается в точке (1; 1), $Z_{min}=2$ (нетрудно убедиться, что точка (1; 1) является стационарной точкой функции Z).

# ГЛАВА VIII. ПРОЦЕНТЫ

## 8.1. Наращение в простых, сложных и непрерывных процентах

Под процентными деньгами или процентами, понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой его форме: выдача ссуды, продажа товара в кредит, помещение денег на депозитный счет, учет векселя, покупка сберегательного сертификата или облигации и т.д. Под процентной ставкой понимается относительная величина дохода за фиксированный отрезок времени – отношение дохода (процентных денег) к сумме долга. Она измеряется в виде десятичной или обыкновенной дроби или в процентах. При выполнении расчетов процентные ставки обычно измеряются в десятичных дробях. В финансовом анализе процентная ставка применяется как измеритель степени доходности (эффективности) любой финансовой, кредитной, инвестиционной или коммерческо-хозяйственной деятельности вне зависимости от того, имел место или нет факт непосредственного инвестирования денежных средств и процесс их наращения. Временной интервал, к которому приурочена процентная ставка, называют периодом начисления. В качестве такого периода принимают год, полугодие, квартал, месяц или даже день. Чаще всего на практике имеют дело с годовыми ставками. Проценты согласно договоренности между кредитором и заемщиком выплачиваются по мере их начисления или присоединяются к основной сумме долга (капитализация процентов). Процесс увеличения суммы денег во времени в связи с присоединением процентов называют наращением, или ростом, этой суммы. В этом случае процентные ставки называют ставками наращения. При дисконтировании (сокращении) сумма денег, относящаяся к будущему, уменьшается на величину соответствующего дисконта (скидки).

Соответственно говорят, что применяют дисконтные, или учетные ставки. В финансовой литературе проценты, полученные по ставке наращения, принято называть декурсивными, по учетной ставке – антисипативными. Декурсивные проценты в большинстве случаев называют просто процентами. Для начисления простых процентов применяют постоянную базу начисления. Когда за базу принимается сумма, полученная на предыдущем этапе на ращения или дисконтирования, используют сложные процентные ставки. В этом случае база начисления последовательно изменяется, то есть проценты начисляются на проценты. Процентные ставки могут быть фиксированными (в контракте указываются их размеры) или плавающими. В последнем случае указывается не сама ставка, а изменяющаяся во времени база (базовая ставка) и размер надбавки к ней – маржи. Размер маржи определяется рядом условий, финансовым положением заемщика, сроком кредита и т.д. Она может быть постоянной или переменной на протяжении срока ссудной операции. При последовательном погашении задолженности возможны два способа начисления процентов. Согласно первому процентная ставка (простая или сложная) применяется к фактической сумме долга. При втором способе, который применяется в потребительском кредите, простые проценты начисляются сразу на всю сумму долга без учета последовательного его погашения. В практических расчетах применяют дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за фиксированные интервалы времени (год, полугодие и т.д.). Если наращение или дисконтирование производится непрерывно, за бесконечно малые промежутки времени, применяют непрерывные проценты. Они используются в аналитических и теоретических финансовых расчетах.

Под наращенной суммой ссуды (долга, депозита, других видов выданных в долг или инвестированных денег) понимают

первоначальную ее сумму с начисленными процентами к концу срока начисления.

Обозначим:

$I$ – проценты за весь срок ссуды;

$P$ – первоначальная сумма долга;

$S$ – наращенная сумма, т. е. сумма в конце срока;

$i$ – ставка наращения процентов в виде десятичной дроби;

$n$ – срок ссуды.

Начисленные за весь срок проценты составят

$$I = Pni$$

Наращенная сумма представляет собой сумму первоначальной суммы и наращенных процентов:

$$S = P + I = P + Pni = P(1 + ni) \qquad (8.1.1)$$

Выражение (1.1) называют формулой простых процентов.

Выражение $(1+ni)$ называется множителем наращения простых процентов, который показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной. График роста по простым процентам представлен на рис. 1.

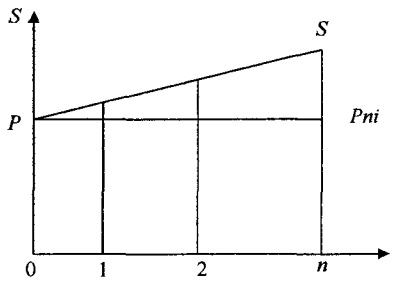



**Рис. 1. График роста по простым процентам.**

**Пример 1**. Определим проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 500 тыс.руб., срок 3 года, проценты простые по ставке 10% годовых ($i = 0{,}1$):

$$I = 500 \times 5 \times 0{,}1 = 250 \text{ тыс. сум.},$$

$$S = 500 + 250 = 750 \text{ тыс. сум.}$$

Рассмотрим случай, когда срок ссуды величина дробная. Срок $n$ можно представить в виде дроби:

$$n = \frac{t}{K},$$

где $t$ – число дней ссуды, $K$ – число дней в году, или временная база начисления процентов.

При расчете процентов применяют две временные базы. Если $K = 360$ дней, то получают обыкновенные или коммерческие проценты, а при использовании действительной продолжительности года (365, 366 дней) рассчитывают точные проценты. Число дней ссуды берут приближенно и точно. При приближенном числе дней число дней в месяце берут равным 30 дням. Точное число дней ссуды определяется путем подсчета числа дней между датой выдачи ссуды и датой ее погашения.

На практике применяются три варианта расчета простых процентов.

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды (обозначается 365/365). Применяется центральными банками и крупными коммерческими банками.

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (365/360). Этот метод, иногда называемый банковским, распространен в межстрановых ссудных операциях коммерческих банков.

3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360).

**Пример 2**. Ссуда в размере 1 млн сум. выдана 02.02.20 до 15.11.20 включительно под 10% годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при начислении простых процентов?

Определим число дней ссуды: точное – 285, приближенное - 282, исключая 02.02.20 и 15.11.20.

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365):

$$S = 1000000\left(1+\frac{285}{365}0{,}1\right) = 1078082{,}19\,сум.$$

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (360/365):

$$S = 1000000\left(1+\frac{285}{360}0{,}1\right) = 1079166{,}7\,сум.$$

3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360):

$$S = 1000000\left(1+\frac{282}{360}0{,}1\right) = 1078333{,}3\,сум.$$

Если по вкладу проводились какие либо операции: снятие части средств или внесение дополнительной суммы, то проценты вычисляются несколько сложнее.

**Пример 3**. Ссуда в размере 1 млн. сум. выдана 02.02.20 до 15.11.20 включительно под 10% годовых. Однако вкладчик 25.05.20 снял со своего счета 500 тыс. сум., а 02.09.20 внес дополнительно 700 тыс. руб. Какой будет сумма вклада при закрытии счета, при условии начисления обыкновенных процентов с точным числом дней ссуды?

В течение всего рассматриваемого периода основной вклад менял свою величину. В течение 03.02.–24.05.20 (110 дней) он составлял 1 млн сум., в течение 25.05.–01.09.20 (99 дней) он составлял 500 тыс. сум. и с 2.09 по 14.11.20 (73 дня) – 1200 тыс. сум.

Рассчитаем проценты двумя способами.

1. Найдем средневзвешенный остаток вклада

$$\frac{1\times 110+0,5\times 99+1,2\times 73}{285}=0,8670175\ млн.сум.$$

Находим проценты за 285 дней с этой суммы:

$$1=8670175\times\frac{285}{365}0,1=67698,63\ сум.$$

2. Вычислим отдельно проценты за каждый из трех периодов и сложим их:

$$1=1\times\frac{110}{365}0,1+0,5\times\frac{99}{365}0,1+1,2\times\frac{73}{365}0,1=67698,63\ сум.$$

Как видно, получили один и тот же результат. Наращенная сумма в этом случае составит:

$$S=1200000+67698,63=1267698,63 сум.$$

В кредитных соглашениях иногда предусматриваются изменяющиеся во времени процентные ставки. Если это простые ставки, то наращенная на конец срока сумма определяется:

$$S=P\left(1+n_1i_1+n_2i_2+...+n_mi_m\right)=P\left(1+\sum_i n_ii_i\right)$$

где $i_i$ - ставка простых процентов в периоде $t$, $n_i$ - продолжительность периода с постоянной ставкой, $n=\sum_i n_i$.

**Пример 4.** Контракт предусматривает начисление процентов в первый год 10%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Найти множитель наращения за 2 года.

$$1+\sum_i n_ii_i=1+1\times 0,1+0,5\times 0,11+0,5\times 0,12=1,215$$

В практике при инвестировании средств в краткосрочные депозиты иногда прибегают к неоднократному последовательному повторению наращения по простым процентам в пределах заданного общего срока, то есть происходит реинвестирование

средств, полученных на каждом этапе наращения, с помощью постоянной или переменной ставок. Наращенная сумма для всего срока составит

$$S = P(1+n_1 i_1)(1+n_2 i_2)...+(1+n_t i_t)...,$$

где $i_1, i_2, ..., i_t$ – размер ставок, по которым производится реинвестирование.

Если промежуточные сроки начисления и ставки не изменяются во времени, то вместо (1.2) имеем

$$S = p(1+ni)^m,$$

где $m$ - количество повторений реинвестирования.

**Пример 5.** 1 млн. сум. положен 1-го января на месячный депозит под 10% годовых. Какова наращенная сумма, если операция повторяется 3 раза?

Если начислять точные проценты (365/365), то

$$S = 1\left(1+\frac{31}{365}0{,}1\right)\left(1+\frac{28}{365}0{,}1\right)\left(1+\frac{31}{365}0{,}1\right) = 1{,}024856 \text{ сум.}$$

Начисление обыкновенных процентов (360/360) при реинвестировании дает

$$S = 1\left(1+\frac{30}{360}0{,}1\right)^3 = 1{,}03375 \text{ млн.сум.}$$

## Дисконтирование по простым процентным ставкам

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной наращению процентов: по заданной сумме $S$, которую следует уплатить через некоторое время $n$, необходимо определить сумму полученной ссуды $P$. Расчет $P$ по $S$ необходим и тогда, когда проценты с суммы $S$ удерживаются вперед, т.е. непосредственно при выдаче кредита, ссуды. В этих случаях

говорят, что сумма $S$ дисконтируется или учитывается, сам процесс начисления процентов и их удержание называют учетом, а удержанные проценты, т.е. разность $D=S-P$ – дисконтом или скидкой. Необходимость дисконтирования возникает, например, при покупке векселей и других краткосрочных обязательств.

Дисконтирование можно рассматривать как определение любой стоимостной величины, относящейся к будущему, на более ранний момент времени.

Этот прием называют приведением стоимостного показателя к некоторому, обычно начальному, моменту времени.

Величину $P$, найденную с помощью дисконтирования, называют современной стоимостью, или современной величиной будущего платежа $S$, а иногда - текущей, или капитализированной, стоимостью.

В зависимости от вида процентной ставки применяют два метода дисконтирования – математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет. В первом случае применяется ставка наращения, во втором - учетная ставка.

Математическое дисконтирование представляет собой нахождение первоначальной суммы по наращенной. То есть из формулы

$$S = P(1+ni)$$

находим $P$

$$P = \frac{S}{1+ni}. \qquad (8.1.2)$$

Установленная таким путем величина $P$ является современной величиной суммы $S$, которая будет выплачена спустя $n$ лет.

Дробь $\frac{1}{(1+ni)}$ называют дисконтным, или дисконтирующим, множителем. Этот множитель показывает, какую долю составляет первоначальная величина долга в окончательной его сумме.

**Пример 6.** Через 180 дней после подписания договора должник уплатит 1 млн. сум. Кредит выдан под 10% годовых. Какова первоначальная сумма долга при условии, что временная база равна 360 дням?

По формуле (8.1.2) находим

$$P = \frac{1}{1+0,5\times 0,1} = 0,952380 \text{ млн.сум.}$$

Дисконт составляет $D = S - P = 1 - 0,95238 = 0,047619 \text{ млн.сум.}$

При банковском учете банк или другое финансовое учреждение до наступления срока платежа по векселю или иному платежному обязательству приобретает его у владельца по цене, которая меньше суммы, указанной на векселе, т.е. покупает (учитывает) его с дисконтом. Получив при наступлении срока векселя деньги, банк реализует процентный доход в виде дисконта. Владелец векселя с помощью его учета имеет возможность получить деньги ранее указанного на нем срока. Вексель – это ценная бумага, представляющая собой долговую расписку, выполненную в соответствии с требованиями законодательства, то есть на бланке, содержащем наименование, указание срока платежа, места, в котором должен быть совершен платеж, наименование того, кому платеж должен быть совершен, дата и место составления векселя, подпись векселедателя. Выделяют два основных вида векселя – простые и переводные.

Простой вексель – это документ, удостоверяющий безусловное денежное обязательство векселедателя уплатить по

наступлению срока обязательства определенную сумму владельцу векселя.

Переводной вексель (тратта) – документ, который выписывается заемщиком (векселедателем) и представляет собой особый приказ непосредственному плательщику (обычно банку) об уплате в указанный срок суммы денег третьему лицу (векселедержателю).

При учете векселя применяется банковский, или коммерческий, учет. Согласно этому методу проценты за пользование ссудой в виде дисконта начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока. При этом применяется учетная ставка *d*.

Размер дисконта, или суммы учета, равен *Snd*; если *d* - годовая учетная ставка, то n измеряется в годах. Таким образом,

$$P = S - Snd = S(1 - nd),$$

где $n$ – срок от момента учета до даты погашения векселя.

Дисконтный множитель равен $(-1nd)$. Учет посредством учетной ставки чаще всего осуществляется при временной базе $K = 360$ дней, число дней ссуды обычно берется точным, ACT/360.

**Пример 7.** Вексель выдан на сумму 1 млн сум. с уплатой 17.11.2020. Владелец векселя учел его в банке 23.09.2020 по учетной ставке 10% (ACT/360). Оставшийся до конца срока период равен 55 дням. Полученная при учете сумма (без уплаты комиссионных) равна

$$P = 1\left(1 - \frac{55}{360}0{,}1\right) = 984722{,}2\,сум$$

Дисконт составит $100000 - 984722{,}2 = 15277{,}8\,сум.$ 100000-984722,2=15277,8 руб.

## Наращение процентов в потребительском кредите

В потребительском кредите проценты, как правило, начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу уже в момент открытия кредита.

Погашение долга с процентами производится частями, обычно равными суммами на протяжении всего срока кредита.

Таким образом, наращенная сумма на весь срок равна

$$S = P(1+ni)$$

величина разового погасительного платежа составит

$$R = \frac{S}{nm}, \qquad (8.1.3)$$

где $n$ – срок кредита в годах, $m$ – число платежей в году.

В связи с тем, что проценты здесь начисляются на первоначальную сумму долга, а его фактическая величина систематически уменьшается во времени, действительная стоимость кредита заметно превышает договорную процентную ставку.

**Пример 8.** Кредит для покупки товара на сумму 1млн. сум. открыт на 4 года, процентная ставка – 10% годовых, выплаты в конце каждого месяца. Сумма долга с процентами

$$S = 1(1+4\times 0,1) = 1,4\ млн.сум$$

Ежемесячные платежи:

$$R = \frac{1400}{4\times 12} = 29,17\ тыс.сум.$$

## Начисление сложных годовых процентов

Если проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга, применяют сложные проценты. Присоединение начисленных процентов к сумме базы начисления называют капитализацией процентов.

Применим те же обозначения, что и в формуле наращения по простым процентам.

В конце первого года проценты равны величине $Pi$, а наращенная сумма составит $P+Pi=P(1+i)$. К концу второго года она достигнет величины $P(1+i)+P(1+i)i=P(1+i)^2$ и т.д. В конце $n$-го года наращенная сумма будет равна

$$S=P(1+i)^n \qquad (8.1.4)$$

Проценты за этот срок:

$$I=S-P=P\left[(1+i)^n-1\right]$$

Величину $(1+i)^n$ называют множителем наращения по сложным процентам. Значения этого множителя для целых чисел $n$ приводятся в таблицах сложных процентов.

Время при наращении по сложной ставке обычно измеряется как АСТ/АСТ.

**Пример 9**. Какой величины достигнет долг, равный 1 млн.сум. через 3 года при росте по сложной ставке 10% годовых?

По формуле (8.1.4) находим

$$S=1(1+0,1)^3=1,331 млн.сум.$$

Если в контракте ставка процентов изменяется, то применяют формулу:

$$S=P(1+i_1)^{n_1}P(1+i_2)^{n_2}...(1+i_k)^{n_k}$$

где $i_1,i_2,...,i_k$ – последовательные значения ставок; $n_1,n_2,...n_k$ - периоды для соответствующих ставок.

**Пример 10.** Срок ссуды – 3 года, базовая процентная ставка - 10% годовых плюс маржа 1% в оставшиеся годы. Множитель наращения в этом случае составит

$$q=(1+0,1)^1(0+0,1)^2=1,4641$$

Часто для начисления процентов срок не является целым числом. Применяют три метода начисления процентов.

1. Наращенная сумма находится по формуле:

$$S = P(1+i)^{n_a}(1+i)^{n_b},$$

где $n_a$ – целая часть периода начисления, $n_b$ – дробная часть периода начисления.

2. Предполагает начисление процентов за целое число лет по формуле сложных процентов и за дробную часть срока по формуле простых процентов:

$$S = P(1+i)^{n_a}(1+n_b i).$$

3. В правилах ряда коммерческих банков для некоторых операций про центы начисляются только за целое число лет или других периодов начисления. Дробная часть периода отбрасывается:

$$S = P(1+i)^{n_a}.$$

**Пример 11.** Кредит в размере 1 млн сум. выдан на 2 года и 180 дней под 10% сложных годовых.

Найдем сумму долга на конец срока определим тремя методами:

1. $S = 1 \times 1,1^{2,5} = 1,269058706$ *млн.сум.*
2. $S = 1 \times 1,1^2 \times (1+0,5 \times 0,1) = 1,2705$ *млн.сум.*
3. $S = 1 \times 1,1^2 = 1,21$ *млн.сум.*

Для того чтобы сопоставить результаты наращения по разным процентным ставкам, достаточно сравнить соответствующие множители наращения. При одинаковых уровнях процентных ставок соотношения этих множителей существенно зависят от срока. При $n > 1$ с увеличением срока различие в простых и сложных процентов увеличивается. Соотношение множителей наращения представлено на рис. 2.

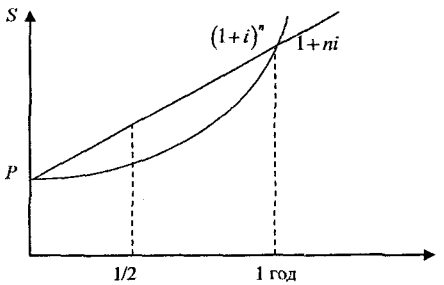



**Рис. 3. Соотношение множителей наращения по простым и сложным процентам.**

## Формулы удвоения

На основе формул для простых и сложных процентов

$$S = P + I = P + Pni = P(1+ni),$$
$$S = P(1+i)^n$$

получим следующие формулы удвоения:

- удвоение по простым процентам:

$$2 = 1 + ni \Rightarrow n = \frac{1}{i}$$

- удвоение по сложным процентам:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)} = \frac{0,69315}{\ln(1+i)}.$$

В общем случае для увеличения первоначальной суммы в $N$ раз:

- по простым процентам:

$$N = 1 + ni \Rightarrow n = \frac{N-1}{i},$$

- удвоение по сложным процентам:

$$N = (1+i)^n \Rightarrow n = \frac{\ln N}{\ln(1+i)}.$$

**Пример 12.** Годовая ставка сложных процентов равна 8%. Через сколько лет начальная сумма удвоится?

Надо решить неравенство $(1+0,08)^n \geq 2$. Логарифмируем по основанию натуральных логарифмов и $n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1,08)} = \frac{0,693}{0,076} = 9$.

Через 9 лет начальная сумма удвоится.

## 8.2. Учетная ставка и эквивалентность учетной ставки

В принципе соотношения эквивалентности можно найти для любой пары ставок различного вида – простых и сложных. Формулы эквивалентности во всех случаях получают исходя из равенства множителей наращения, взятых попарно.

В качестве примера определим соотношение эквивалентности между простой и сложной ставками. Приравняем множители наращения:

$$(1+ni_s)=(1+i)^n,$$

где $i_s$ и $i$ – ставки простых и сложных процентов.

Приведенное равенство предполагает, что начальные и наращенные суммы при применении двух видов ставок идентичны (см. рис. 4).

Решая приведенное выше равенство, получим соотношения эквивалентности:

$$i_s = \frac{(1+i)^n}{n} - 1, \qquad (8.2.1)$$

$$i = \sqrt[n]{1+ni_s} - 1. \qquad (8.2.2)$$

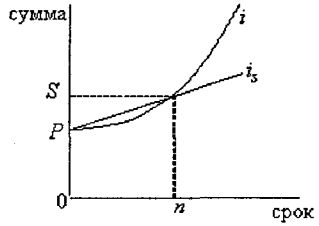



Рис. 4.

**Эквивалентность простых процентных ставок**

При выводе соотношений между ставкой процента и учетной ставкой, следует иметь в виду, что при применении этих ставок используется временная база $K = 360$ или $K = 365$ дней. Если временны*е* базы одинаковые, то из равенства соответствующих множителей наращения следует:

$$i_s = \frac{d_s}{1 - nd_s}, \qquad (8.2.3)$$

$$d_s = \frac{i_s}{1 + ni_s}, \qquad (8.2.4)$$

где $n$ – срок в годах, $i_s$ – ставка простых процентов, $d_s$ – простая учетная ставка.

**Пример 1.** Вексель учтен за год до даты его погашения по учетной ставке 15 %. Какова доходность учетной операции в виде процентной ставки?

По формуле (8.2.3) находим

$i_s = \frac{0{,}15}{1 - 0{,}15} = 0{,}17647$, или 17,647 %.

Иначе говоря, операция учета по учетной ставке 15 % за год дает тот же доход, что и наращение по ставке 17,647 %.

Отношения между ставками $i_s$ и $d_s$ существенно зависят от срока операции. Например, для $d$=10% получим следующие размеры эквивалентных ставок:

| $n$ (в годах) | 0,1 | 0,5 | 1 | 2 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i_s$ (%%) | 10,1 | 10,5 | 11,1 | 12,5 | 20 | $\infty$ |

Пусть срок ссуды измеряется в днях, тогда, подставив в (8.2.3)

и (8.2.4) $n = t/K$ ($t$ – срок ссуды в днях, $K$ – временная база), получим:

а) временные базы одинаковы и равны 360 дням:

$$i_s = \frac{360}{360 - td_s}, \qquad (8.2.5)$$

$$d_s = \frac{360 i_s}{360 + t \cdot i_s}. \qquad (8.2.6)$$

б) если при начислении процентов принята база $K$ = 365, а для учетной ставки $K$ = 360, то

$$i_s = \frac{365 d_s}{360 - td_s}, \qquad (8.2.7)$$

$$d_s = \frac{360 i_s}{365 + t \cdot i_s}. \qquad (8.2.8)$$

**Пример 2.** Необходимо найти величину учетной ставки, эквивалентной годовой процентной ставке 40 % ($K$ = 365) при условии, что срок учета равен 255 дням.

Находим по формуле (8.2.8)

$$d = \frac{360 \cdot 0{,}4}{365 + 255 \cdot 0{,}4} = 0{,}30835, \text{ или } 30{,}835\ \%$$

## Эквивалентность простых и сложных ставок

Рассмотрим соотношения эквивалентности простых ставок $i_s$ и $d_s$, с одной стороны, и сложных ставок $i$ и $j$ – с другой стороны. Сложную учетную ставку рассматривать не будем. Попарно приравняв друг к другу соответствующие множители наращивания, получим искомое соотношения.

Эквивалентность $i_s$ и $i$: см. формулы (8.2.1) и (8.2.2).

Эквивалентность $i_s$ и $j$:

$$i_s = \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{n}, \qquad (8.2.9)$$

$$j = m\cdot\left(\sqrt[mn]{1+ni_s}-1\right), \qquad (8.2.10)$$

Эквивалентность $d_s$ и $i$:

$$d_s = \frac{1-(1+i)^n}{n}, \qquad (8.2.11)$$

$$i = \sqrt[n]{1-nd_s}-1, \qquad (8.2.12)$$

Эквивалентность $d_s$ и $j$:

$$d_s = \frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}{n}, \qquad (8.2.13)$$

$$j = m\cdot\left(\sqrt[mn]{1-nd_s}-1\right). \qquad (8.2.14)$$

**Пример 3.** Какой сложной годовой ставкой можно заменить в контракте простую ставку 18 % ($K$ = 365), не изменяя финансовых последствий? Срок операции 580 дней.

По (8.2.2) получим эквивалентную сложную ставку:

$$i = \sqrt[580/365]{1+\frac{580}{365}\cdot 0{,}18} - 1 = 0{,}17153,$$ или 17,153 %

### Эквивалентность сложных ставок

Рассмотрим только соотношение эквивалентности для ставок $i, j$ и $d$. Имеем

$$i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1, \qquad (8.2.15)$$

$$j = m\cdot\left(\sqrt[m]{1+i} - 1\right). \qquad (8.2.15)$$

Эквивалентность $i$ и $d$:

$$i = \frac{d}{1-d}, \qquad (8.2.16)$$

$$d = \frac{i}{1+i}. \qquad (8.2.17)$$

Приведем еще ряд полезных соотношений, которые можно получить на основе приведенных выше формул с учетом того, что $v = \frac{1}{1+i}$:

$$d = iv, \qquad (8.2.18)$$

$$v = 1-d, \qquad (8.2.19)$$

$$i - d = id. \qquad (8.2.20)$$

**Пример 4.** При разработке условий контракта стороны договорились о том, что доходность кредита должна составлять 24 % годовых. Каков должен быть размер номинальной ставки при начислении процентов ежемесячно и поквартально?

$$j = 12\cdot\left(\sqrt[12]{1{,}24} - 1\right) = 0{,}21705;\ j = 4\cdot\left(\sqrt[4]{1{,}24} - 1\right) = 0{,}22100$$

## 8.3. Наращение в переменных процентах

**Пример 1.** Ссуда размером 50 тыс. рублей предоставлена на 9 месяцев под 10% годовых с единовременной выплатой долга с процентами в конце операции. После первых трех месяцев плата по ссуде выросла до 10,5%. Исчислите подлежащую возврату сумму.

**РЕШЕНИЕ:** Наращенная на конец срока сумма при изменяющейся во времени процентной ставке определяется по формуле:

$$FV = PV \cdot \left(1 + \sum \frac{tk}{Y} \cdot i_k\right)$$

где FV – наращенная сумма,

PV – размер ссуды,

$i_k$ – ставка простых процентов в периоде k,

$tk$ – продолжительность начисления $i_k$ ставки.

Находим:

$$FV = 50 \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot 0{,}1 + \frac{6}{12} \cdot 0{,}105\right) = 53{,}875 \text{ тыс.сум.}$$

**Пример 2.** Текущая сумма денег 100 д. е. Определите будущую стоимость денег через 4 периода, если ставка наращения (простая ставка процентов) составляет 10 % за период.

**РЕШЕНИЕ:** Наращение суммы денег за счёт начисления простых процентов для $n$ периодов может быть выражено так:

$$FV = PV \cdot (1 + n \cdot i) = 100 \cdot (1 + 4 \cdot 0{,}1) = 140 \text{ д. е.}$$

где FV – будущая стоимость денег,

PV – настоящая стоимость денег,

$n$ – число процентных периодов,

$i$ – ставка процентов за период.

**Пример 3.** Во вклад до востребования размещены 100 тыс.сум. Определите наращенную сумму через 2 месяца, если ставка 10% годовых.

**Решение:** Наращенную сумму денег рассчитаем по формуле:

$$FV = PV * (1 + \frac{t}{Y} * i)$$

FV – наращенная (будущая – future value) сумма денег через определенный период, PV – исходная (современная – present value) стоимость денег,

t – срок операции,

Y – продолжительность года,

i – ставка процентов за период.

$$FV = 100 \cdot \left(1 + \frac{2}{12} \cdot 0{,}1\right) = 101{,}66667 \text{ тыс.сум.}$$

# ГЛАВА IX. ПЛАТЕЖНЫЙ ПОТОК

## 9.1. Арендная плата и их накопление

Современные финансово-банковские операции часто предполагают не отдельные или разовые платежи, а некоторую их последовательность во времени. Например, погашение задолженности в рассрочку, периодическое поступление доходов от инвестиций, накопление пенсионного фонда или выплата пенсий и т.д. Такую последовательность, или ряд платежей называют потоком платежей, а отдельный элемент этого ряда – членом потока.

Члены потока платежей могут быть как положительными (поступления), так и отрицательными величинами (выплаты).

Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы, называют финансовой рентой или просто рентой, или аннуитетом, независимо от назначения или происхождения платежей. Например, рентой является последовательность получения процентов по облигациям, платежи по потребительскому кредиту, выплата в рассрочку страховых премий и т.п.

Во всех приведенных случаях выплата или получение денег производится через равные промежутки времени.

Рента характеризуется следующими параметрами:

- член ренты – размер отдельного платежа;
- период ренты – временной интервал между двумя последовательными платежами;
- срок ренты – время от начала первого периода ренты до конца последнего периода;
- процентная ставка.

Купонные выплаты по облигациям типа ОФЗ полностью подпадают под определение срочных уплат и рассчитываются по формулам финансовых рент.

## Классификация финансовых рент

Ренты могут быть классифицированы по следующим признакам:

- По количеству выплат членов ренты на протяжении года, ренты делятся на годовые (выплата раз в году) и *p*-срочные (*p* - количество выплат в году).

В финансовой практике встречаются и с такими последовательностями платежей, которые производятся столь часто, что их практически можно рассматривать как *непрерывные.*

- По количеству начислений процентов на протяжении года различают: ренты с *ежегодным начислением* (чаще всего по годовой ставке сложных процентов), с *начислением несколько раз в году* (*m*-раз в году), с *непрерывным начислением.*
- По величине своих членов ренты делятся на *постоянные* (с одинаковыми платежами) и *переменные.*
- По моменту выплат платежей в пределах периода. Если платежи осуществляются в конце периодов, то соответствующие ренты называют *обыкновенными* или *постнумерандо,* если же платежи производятся *в начале* периодов, то их называют *пренумерандо.*
- По вероятности выплат ренты делятся на *верные* (подлежат безусловной уплате) и *условные* (выплата ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события).
- По количеству членов различают ренты с конечным числом членов, то есть *ограниченные по срокам* ренты (их срок заранее оговорен), и *бесконечные,* или *вечные*, ренты.

**Пример.** Фирма принимает платежи от клиента в уплату долга в конце каждого полугодия равными частями в течение фиксированного числа лет. Банк, обслуживающий компанию, начисляет проценты в конце каждого года. Таким образом, предусматривается постоянная, срочная полугодовая, верная, с

начислением процентов на платежи один раз в год, ограниченная рента постнумерандо.

**Обобщающие параметры потоков платежей.** В подавляющем числе практических случаев анализ потока платежей предполагает расчет одной из двух обобщающих характеристик: нара щенной суммы или современной стоимости потока. Наращенная сумма (amount of cash flows) - сумма всех членов потока платежей с начисленными на них к концу срока процентами. Под современной стоимостью потока платежей {present value of cash flows) понимают сумму всех его членов, дисконтированных на начало срока ренты или некоторый упреждающий момент времени. Конкретный смысл этих характеристик определяется содержанием его членов или их происхождением. Наращенная сумма может представлять собой общую сумму накопленной задолженности к концу срока, итоговый объем инвестиций, накопленный денежный резерв и т. д. В свою очередь современная стоимость характеризует приведенные к началу осуществления проекта инвестиционные затраты, суммарный капитализированный доход или чистую приведенную прибыль от реализации проекта и т. п.

Обобщающие поток платежей характеристики, особенно его современная стоимость, широко применяются в различных финансовых расчетах. Так, без них, например, невозможно разработать план последовательного погашения задолженности, измерить финансовую эффективность проекта, осуществить сравнение или безубыточное изменение условий контрактов, решать многие другие практические задачи. В связи со сказанным основное внимание в данной главе уделено методам расчета наращенных сумм и современных стоимостей постоянных финансовых рент. Однако, до этого необходимо обсудить более общие подходы, применяемые при определении упомянутых параметров в анализе любых видов потоков платежей.

**Прямой метод расчета наращенной суммы и современной стоимости потока платежей.** Рассмотрим общую постановку задачи. Допустим, имеется ряд платежей $R_t$, выплачиваемых спустя время $n_t$ после некоторого начального момента времени. Общий срок выплат $n$ лет. Необходимо определить наращенную на конец срока потока платежей сумму. Если проценты начисляются раз в году по сложной ставке $i$, то, обозначив искомую величину через $S$, получим по определению

$$S = \sum_t R_t (1+i)^{n-n_t} \qquad (9.1.1)$$

Современную стоимость такого потока также находим прямым счетом как сумму дисконтированных платежей:

$$A = \sum_t R_t v^{n_t} \qquad (9.1.2)$$

где $A$ – современная стоимость потока платежей, $v^{n_t}$ – дисконтный множитель по ставке $i$. Как уже отмечено выше, современная стоимость потока платежей представляет собой обобщающую оценку, приуроченную к некоторому предшествующему моменту времени (у немедленной ренты – к началу срока). Наращенная сумма также является обобщением всех членов потока в виде одного числа, однако эта оценка приурочена к концу срока. Нетрудно обнаружить, что между величинами $A$ и $S$ существует функциональная зависимость. В самом деле, дисконтируем сумму $S$ с помощью дисконтного множителя $v^n$, получим

$$Sv^n = \sum_t R_t (1+i)^{n-n_t} \times v^n = \sum_t R_t v^{n_t} = A$$

Наращивая сумму $A$ по той же ставке, получим

$$A(1+i)^n = S \qquad (9.1.2)$$

**Годовая рента.** Начнем с наиболее простого случая – годовой ренты постнумерандо. Пусть в течение $n$ лет в банк в конце каждого года вносится по $R$ рублей. На взносы начисляются сложные проценты по ставке $i$ % годовых. Таким образом, имеется рента, член которой равен $R$ , а срок – $n$. Все члены ренты, кроме последнего, приносят проценты – на первый член проценты начисляются $n-1$ год, на второй $n-2$ и т.д. На последний взнос проценты не начисляются (напомним, что рента постнумерандо). Наращенная к концу срока каждого взноса сумма составит:

$$R(1+i)^{n-1}, R(1+i)^{n-2}, ..., R(1+i), R.$$

Перепишем этот ряд в обратном порядке. Нетрудно убедиться в том, что он представляет собой геометрическую профессию со знаменателем $(1+i)$ и первым членом $R$. Число членов профессии равно $n$. Искомая величина очевидно равна сумме членов этой прогрессии.

Откуда

$$S = R\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)-1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (9.1.3)$$

Обозначим множитель, на который умножается $R$, через нижний индекс $n;i$ указывает на продолжительность ренты и величину процентной ставки. В дальнейшем этот множитель будем называть коэффициентом наращения ренты. Данный коэффициент представляет собой наращенную сумму ренты, член которой равен 1:

$$S_{n;i} = \sum_{y=0}^{n-1} (1+i)^t = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (9.1.4)$$

Таким образом,

$$S = Rs_{n;i} \qquad (9.1.5)$$

Как видим, коэффициент наращения ренты зависит только от срока (числа членов ренты) и процентной ставки. С увеличением значения каждого из этих параметров его величина растет. При $i = 0$ имеем $S = Rn$.

**Пример 1.** Для обеспечения некоторых будущих расходов создается фонд. Средства в фонд поступают в виде постоянной годовой ренты постнумерандо в течение 5 лет. Размер разового платежа 4 млн сум . Н а поступившие взносы начисляются проценты по ставке 18,5 % годовых. Поскольку в таблице коэффициентов наращения Приложения нет такого значения ставки, то необходимую величину определим по формуле (9.1.3). Величина фонда на конец срока составит

$$S = 4 \times s_{5;18,5} = 4 \times \frac{(1+0,185)^5 - 1}{0,185} \approx 28,9 \text{ млн.сум.}$$

## 9.2. Арендная плата с одинаковой абсолютной изменчивостью во времени

Пусть размер платежей изменяется с постоянным приростом $a$ (положительным или отрицательным). Если рента годовая постнумерандо, то размеры последовательных платежей составят $R, R+a, R+2a, \ldots, R+(n+1)a$. Величина $t$ -го члена равна $R_t = R+(t-1)a$.

Определим наращенную сумму такой ренты. Для ренты годовой постнумерандо получим

$$A = \left(R + \frac{a}{i}\right) a_{n;i} - \frac{nav^n}{i}, \qquad (9.2.1)$$

где $v$ – дисконтный множитель по ставке $i$.

Напомним, что $a_{n;i}$ – современная стоимость постоянной ренты постнумерандо с членом, равным 1. Нетрудно видеть, что в приведенной записи результат представляет собой современную стоимость постоянной ренты с членом $(R+a/i)$ за вычетом поправочной величины $nav^n/i$.

Наращенную сумму ренты легко получить, умножив формулу (9.2.1) на $(1+i)^n$. После чего

$$S=\left(R+\frac{a}{i}\right)s_{n;i}-\frac{na}{i} \qquad (9.2.2)$$

Определим теперь влияния на современную стоимость ренты абсолютно прироста платежей. Для этого преобразуем (9.2.1):

$$A=Ra_{n;i}+\frac{a_{n;i}-nv^n}{i}a \qquad (9.2.3)$$

Данная формула показывает, что $A$ линейно зависит от $a$. Аналогичным образом на основе (9.2.2) поучим линейную зависимость для $S$:

$$S=Rs_{n;i}+\frac{(s_{n;i})}{i}a \qquad (9.2.4)$$

Формулы (9.2.1) и (9.2.2) и их преобразования (9.2.3) и (9.2.4) получены для рент постнумерандо. В свою очередь для рент пренумерандо находим

$$A=\left[\left(R+\frac{a}{i}\right)a_{n;i}-\frac{nav^n}{i}\right](1+i)=\left(R+\frac{a}{i}\right)a_{n;i}-\frac{nav^{n-1}}{i}, \qquad (9.2.5)$$

$$S=\left(R+\frac{a}{i}\right)s_{n;i}-\frac{na}{i}(1+i) \qquad (9.2.6)$$

Напомним, что $a_{n;i}, s_{n;i}$ – коэффициенты приведения и наращения дискретной постоянной ренты пренумерандо.

**Пример 2**. Платежи постнумерандо образуют регулярный во времени поток, первый член которого равен 15 млн. сум. Последующие платежи увеличиваются каждый раз на 2 млн сум.

Начисление процентов производится по 20 % годовых. Срок выплат – 10 лет.

По условиям задачи $R=15, i=20\%, n=10$. Табличные значения коэффициентов $a_{10;20}=4,192472$, $v^{10}=0,161505$.

Применив (9.2.1), получим

$$A=\left(15+\frac{2}{0,2}\right)4,192472-\frac{10\times 2\times 0,161505}{0,2}=88,661 \text{ млн.сум.}$$

Используя взаимозависимость $A$ и $S$, находим

$$S=88,661\times 1,2^{10}=548,965 \text{ млн.сум.}$$

Или применяя (9.2.3) и (9.2.4):

$$A=15a_{10;20}+\frac{a_{10;20}-10\times 1,2^{-10}}{0,2}2=62,887+25,774=88,661 \text{ млн.сум.}$$

$$S=15s_{10;20}+\frac{s_{10;20}-10}{0,2}2=389,380+159,585=548,965 \text{ млн.сум.}$$

Влияние динамики платежей здесь очевидно. Например, постоянная рента с $R=15$ дает накопление в сумм е около 390 млн. сум., «вклад» прироста платежей в наращенную сумму составил почти 160 млн. сум., или примерно 20 % .

Продолжим пример. Пусть теперь рента пред полагает сокращение платежей по 1 млн. в год . Тогда

$$A=15a_{10;20}+\frac{a_{10;20}-10\times 1,2^{-10}}{0,2}(-1)=62,887-12,887=50 \text{ млн.сум.}$$

$$S=15s_{10;20}+\frac{s_{10;20}}{0,2}(-1)=389,380-79,793=309,557 \text{ млн.сум.}$$

Иногда при анализе переменных рент может возникнуть об ратная задача: определение первого члена ренты $R$ или ее при роста $a$ по всем остальным заданным параметрам ренты. На пример, когда известна сумма, которую нужно аккумулировать за $n$ лет, и необходимо разработать конкретный план реализации этой задачи. Получив $R$ из (9.2.1) и (9.2.2), находим для годовых рент постнумерандо:

$$R = \frac{A + \frac{nav^n}{i}}{a_{n;i}} - \frac{a}{i}, \qquad (9.2.7)$$

$$R = \frac{S + \frac{na}{i}}{s_{n;i}} - \frac{a}{i}, \qquad (9.2.8)$$

В свою очередь, если определяется размер прироста при заданном $R$, то

$$a = \frac{\left(A - Ra_{n;i}\right)}{a_{n;i} - nv^n}, \qquad (9.2.9)$$

$$a = \frac{\left(S - Rs_{n;i}\right)i}{s_{n;i} - n} \qquad (9.2.10)$$

Переменная $p$-срочная рента с постоянным абсолютным приростом. Пусть $R$ – базовая величина разовой выплаты, $a$ - годовой прирост выплат. В этом случае последовательные выплаты равны

$$R,\ R + \frac{a}{p},\ R + 2\frac{a}{p},\ldots,R + \left(pn - 1\right)\frac{a}{p}.$$

Отдельный член этого ряда находится как

$$R_t = R + \left(t - 1\right)\frac{a}{p},\ t = 1,\ldots,pn.$$

По определению для ренты постнумерандо при начислении процентов $p$ раз в году получим

$$A = \sum_{t=1}^{pn}\left(R + \frac{at}{p}\right)v^{t/p}, \qquad (9.2.14)$$

$$S = \sum_{t=1}^{pn}\left[R + \frac{at}{p}\left(t - 1\right)\right]\left(1 + i\right)^{n - t/p} \qquad (9.2.15)$$

**Пример 3.** Ожидается, что сбыт продукции будет увеличиваться в течение двух лет - каждый квартал на 25 млн сум. Первоначальный объем сбыта за квартал 500 млн сум. Определим

наращенную сумму к концу срока при условии, что деньги за продукцию поступают постнумерандо.

По условиям задачи $r=500,\ a/p=25,\ i=20\%,\ n=2,\ pn=8.$ Наращенная сумма к концу двух лет составит

$$S=\sum_{t=1}^{8}\left[500+25(t-1)\right]\times 1,2^{2-t/4}=4865\ млн.сум.$$

## 9.3. Фиксированная непрерывная аренда. Аренда конверсии

Во всех рассмотренных выше рентах предполагалось, что члены потока платежей поступают дискретно через фиксированные интервалы времени (периоды ренты). Вместе с тем иногда более адекватное описание потока платежей достигается, когда он воспринимается как непрерывный процесс. Например, когда отдача от инвестиций происходит так часто, что в целом этот поток можно рассматривать как непрерывный. Предположение о непрерывности в определенных условиях увеличивает возможности количественного анализа, особенно при анализе сложных производственных долгосрочных инвестиций.

Обсудим методы расчета наращенной суммы и современной стоимости, а также некоторых параметров, характеризующих постоянную непрерывную ренту, при условии, что применяется годовая дискретная процентная ставка. По определению у непрерывной ренты $p\to\infty$. Найдем коэффициент приведения такой ренты, обозначим его как $\bar{a}_{n,i}$. Для этого необходимо найти предел коэффициента приведения $p$-срочной ренты при $p\to\infty$:

$$\bar{a}_{n,i}=\lim_{p\to\infty}a_{n,i}^{(p)}=\lim\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}.$$

Непосредственная подстановка $p=\infty$ знаменатель приводит к неопределенности:

$$\frac{1}{\infty\left[(1+i)^{1/\infty}-1\right]}.$$

Раскроем неопределенность, применив правило Лопиталя. Получим

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}=\frac{1}{\ln(1+i)}.$$

Таким образом,

$$\bar{a}_{n;i}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)}. \qquad (9.2.16)$$

Аналогичным путем получим коэффициент наращения непрерывной ренты

$$\bar{s}_{n;i}=\frac{(1+i)^{-n}-1}{\ln(1+i)}. \qquad (9.2.17)$$

Очевидно, что переход от дискретных платежей постнумерандо к непрерывным увеличивает коэффициенты приведения и наращения в $i/\ln(1+i)$ раз. Таким образом,

$$\bar{a}_{n;i}=\frac{i}{\ln(1+i)}a_{n;i};\quad \bar{s}_{n;i}=\frac{i}{\ln(1+i)^{s_{n;i}}}$$

**Пример 4.** Ожидается, что доходы от эксплуатации месторождения полезных ископаемых составят 1 млрд сум. в год, продолжительность разработки 10 лет, отгрузка и реализация продукции непрерывны и равномерны.

Капитализированная стоимость дохода при дисконтировании по ставке 10% составит:

$$A=1000\frac{1-1,1^{-10}}{\ln 1,1}=6446,91\,млн.сум.$$

## Непрерывные переменные потоки платежей

Если поток платежей непрерывен и описывается некоторой функцией $R_t=f(t)$, то общая сумма поступлений за время $n$ равна

$\int_0^n f(t)dt$. В этом случае наращенная сумма (при начислении о процентов используется процентная ставка в виде силы роста $\delta$) находится как

$$S = \int_0^n f(t)e^{\delta(n-t)}dt$$

Современная стоимость такого потока определяется как

$$A = \int_0^n f(t)e^{-\delta \times t}dt$$

Для того чтобы рассчитать величины $A$ и $S$, необходимо определить конкретный вид функции изменения платежей и значения ее параметров. Ниже рассматриваются методы расчета современных стоимостей для двух видов функций - линейной и экспоненциальной. Наращенные суммы таких потоков легко определить, исходя из соотношения

$$S = Ae^{\delta \times n}. \qquad (9.2.18)$$

**Линейно изменяющийся непрерывный поток платежей**

Функция потока:

$$R_t = R_0 + at, \qquad (9.2.19)$$

где $R_0$ – начальный размер платежа, выплачиваемого в единицу времени, в котором измеряется срок ренты.

Современная стоимость получена с помощью интегрирования функции потока платежей:

$$A = \int_0^n (R_0 + at)e^{-\delta \times t}dt = R_0 \int_0^n e^{-\delta \times t}dt + a\int_0^n te^{-\delta \times t} = R_0 \bar{a}_{n;\delta} + \frac{1}{\delta}\left(\bar{a}_{n;\delta} - ne^{-\delta \times n}\right)a = \left(R_0 + \frac{a}{\delta}\right)\bar{a}_{n;\delta} - \frac{a}{\delta}ne^{-\delta \times n} \qquad (9.2.20)$$

где $\bar{a}_{n;\delta}$ – коэффициент приведения постоянной непрерывной ренты.

В последней записи наглядно представлено влияние начального размера платежа и приростов.

**Пример 5.** Намечается в течение трех лет увеличивать выпуск продукции на 1 млн сум. ежегодно. Базовый уровень выпуска – 10 млн сум. Необходимо определить суммарный объем выпуска с начисленными процентами. Сила роста 8%.

Определим коэффициент приведения

$$\bar{a}_{3;8} = \frac{1 - e^{-0,08 \times 3}}{0,08} = 2,66715.$$

Современная стоимость ренты

$$A = \left(10 + \frac{1}{0,08}\right) 2,66715 - \frac{1}{0,08} 3^{e^{0,08 \times 3}} = 30,5 \, млн.сум.$$

Искомая наращенная сумма $S = 30,5 \times 1,08^3 = 38,4$ млн.сум.

**Экспоненциальный рост платежей.** Функция потока платежей

$$R_t = \mathrm{Re}^{qt}, \qquad (9.2.21)$$

где $q$ – непрерывный темп прироста платежей.

Современная величина такой ренты определяется следующим образом:

$$A = \int_0^n e^{qt} e^{-\delta t} dt = R \int_0^n e^{(q-\delta)t} dt = R \frac{e^{(q-\delta)n}}{q-\delta}\Bigg|_0^n = R \frac{e^{(q-\delta)n} - 1}{q-\delta} \qquad (9.2.22)$$

Разность $q - \delta$ определим следующим образом:

$$q - \delta = \ln \frac{1+k}{1+i},$$

где $k$ - дискретный темп прироста.

**Пример 6.** Ожидается, что прирост доходов составит 5% в год. Какова современная стоимость и наращенная сумма потока доходов, если $R = 100$, $i = 7\%$, $n = 3$ года. Из условий задачи следует:

$$q - \delta = \ln \frac{1+0,05}{1+1,007} = -0,01887.$$

Таким образом,

$$A = 100\frac{e^{-0,01887\times 3}-1}{-0,01887} = 291,5$$

$$S = A(1+i)^3 = 291,5\times 1,07^3 = 357,1$$

## Конверсии рент

**Виды конверсий.** В практике иногда сталкиваются со случаями, когда на этапе разработки условий контракта или даже в ходе его выполнения необходимо в силу каких-либо причин изменить условия выплаты ренты. Иначе говоря, речь идет о конвертировании условий, предусматриваемых при выплате финансовой ренты. Простейшими случаями конверсии являются: замена ренты разовым платежом (выкуп ренты), или наоборот, замена разового платежа рентой {рассрочка платежа). К более сложному случаю относится объединение нескольких рент с разными характеристиками в одну – консолидация рент. Общий случай конверсии – замена ренты с одними условиями на ренту с другими условиями, например, немедленной ренты на отложенную, годовой – на ежеквартальную и т.д. Ясно, что все перечисленные изменения не могут быть произвольными. Если предполагается, что конверсия не должна приводить к изменению финансовых последствий для каждой из участвующих сторон, то конверсия должна основываться на принципе финансовой эквивалентности.

Конверсия рент широко применяется при реструктурировании задолженности. Как известно, при этом нередко условия погашения долга смягчаются, однако принцип эквивалентности соблюдается и в этих случаях, обычно, правда, в урезанном, если так можно сказать, виде. Здесь же обсудим несколько основных случаев конверсии рент.

**Выкуп ренты.** Этот вид конверсии сводится к замене ренты единовременным платежом. Решение проблемы здесь очень

простое. Искомый размер выкупа должен быть равен современной стоимости выкупаемой ренты. Для решения задачи в зависимости от условий погашения задолженности выбирается та или иная формула расчета современной стоимости потока платежей. Естественно, что применяемая при расчете современной стоимости процентная ставка должна удовлетворять обе участвующие стороны.

**Рассрочка платежей.** Обсудим теперь задачу, обратную выкупу ренты. Если есть обязательство уплатить некоторую крупную сумму и стороны согласились, что задолженность будет погашена частями – в рассрочку, то последнюю удобно осуществить в виде выплаты постоянной ренты. Для решения задачи приравниваем современную стоимость ренты, с помощью которой производится рассрочка, сумме долга. Задача обычно заключается в определении одного из параметров этой ренты – члена ренты или ее срока – при условии, что остальные параметры заданы.

**Объединение (консолидация) рент.** Объединение рент, очевидно, заключается в замене нескольких рент одной, параметры которой необходимо определить. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности следует равенство современных стоимостей заменяющей и заменяемых (консолидированных) рент, что соответствует равенству

$$A = \sum_q A_q, \qquad (9.2.23)$$

где $A$ – современная стоимость заменяющей ренты, $A_q$ – современная стоимость $q$-й заменяемой ренты.

Объединяемые ренты могут быть любыми: немедленными и отсроченными, годовыми и $p$ – срочными и т.д. Что касается заменяющей ренты, то следует четко определить ее вид и все параметры, кроме одного. Далее, для получения строгого баланса условий, необходимо рассчитать размер неизвестного параметра

исходя из равенства (9.2.23). Обычно в качестве неизвестного параметра принимается член ренты или ее срок. Так, если заменяющая рента постнумерандо является немедленной и задан ее срок *n*, то из (9.2.23) следует

$$R = \frac{\sum A_q}{a_{n;i}} \qquad (9.2.24)$$

В свою очередь, если задается сумма платежа (размер члена заменяющей ренты) и его периодичность, то отыскивается срок новой ренты. Обычно задача сводится к расчету *n* по заданному значению $a_{n;i}$. Необходимая для расчета величина коэффициента приведения определяется условиями задачи. Для немедленной ренты постнумерандо имеем:

$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{\sum\limits_q A_q}{R} \qquad (9.2.25)$$

Если $\sum\limits_q A_q$ известно, то, определив на основе (9.2.25) величину *n*, получим

$$n = \frac{-\ln\left(1-\frac{\sum A_q}{R}i\right)}{\ln(1+i)} \qquad (9.2.26)$$

Как видим, для того чтобы задача имела решение, необходимо соблюдать условие:

$$\frac{i\sum A_q}{R} < 1.$$

**Пример 7.** Три ренты постнумерандо - немедленные, годовые – заменяются одной отложенной на три года рентой постнумерандо. Согласно договоренности заменяющая рента имеет срок 10 лет, включая отсрочку. Характеристики заменяемых рент: $R_q = 100; 120; 300$ тыс. сум., сроки этих рент: 6; 11 и 8 лет. Если в расчете принять ставку сложных процентов, равную 20%, то

сумма современных стоимостей этих рент составит немного более 2002,9 тыс. сум. (см. табл. 1 ).

Размер члена заменяющей ренты равен

$$R = \frac{2000{,}946}{a_{7;20}v^3} = \frac{2002{,}946}{3{,}60459 \times 1{,}2^{-3}} = 960{,}189 тыс.сум$$

Если бы заменяющая рента была немедленной, то

$$R = \frac{2002{,}946}{3{,}60459} = 555{,}665 тыс.сум$$

**Таблица 1.**

**Определение члена заменяющей ренты**

| **Рента** $(q)$ | $R_q$ | $n_q$ | $I$ | $a_{nqi20}$ | $Ra_{nqi20}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 6 | 20 | 3,32551 | 332,551 |
| 2 | 120 | 11 | 20 | 4,32706 | 519,472 |
| 3 | 300 | 8 | 20 | 3,83716 | 1151,148 |
| **Итого** | 520 | | | | 2002,946 |

Продолжим пример. Пусть теперь заданным является не срок, а сумма годового платежа, скажем 1500 тыс., и необходимо найти срок заменяющей ренты. Ход решения: определяется современная стоимость немедленной ренты, затем рассчитывается ее срок.

$$A = 2002{,}946 \times 1{,}2^3 = 3461{,}091 \ тыс.сум$$

По формуле (9.2.26) получим

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{3461{,}091}{1500}0{,}2\right)}{\ln 1{,}2} = 3{,}395 \text{ года.}$$

Округляем ответ до 3 или 4 лет и компенсируем нехватку покрытия долга или излишки при определении срока ренты.

Рассмотрим один частный случай. Пусть член заменяющей ренты равен сумме членов заменяемых рент: $R = \sum_q R_q$. Все ренты годовые, постнумерандо. Если процентная ставка у всех рент одинаковая, то в силу (9.2.23) получим

$$R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}=\frac{\sum R_q(1+i)^{-n_q}}{\ln(1+i)}. \qquad (9.2.24)$$

**Пример 8.** Консолидируются ренты, предусматривающие годовые платежи в суммах 0,5; 1,5 и 3 тыс. сум.; сроки этих рент 10, 15 и 12 лет, процентная ставка у заменяющей ренты 5% годовых. Если выплаты определены в размере $R = 5$ тыс. сум., то

$$n=\frac{\ln 5-\ln\left(0{,}5\times 1{,}05^{-10}+1{,}5\times 1{,}05^{-15}+3\times 1{,}05^{-12}\right)}{\ln 1{,}05}=12{,}64 \text{ года}$$

Рассмотренные варианты объединения рент, естественно, не охватывают все возможные случаи, с которыми можно столкнуться на практике. Да в этом и нет необходимости. Отправляясь от равенства современных стоимостей консолидируемых и заменяющей рент, легко вывести соответствующую формулу для решения конкретной задачи.

# ГЛАВА X. КРЕДИТНЫЙ СЧЕТ

## 10.1. Общий метод погашения задолженности. Погашения задолженности путем создания фонда с высокими процентными ставками

Заем, кредит, ссуда – древнейшие финансовые операции. По-латыни «creditum» означает «ссуда»; в слове «кредит» ударение на втором слоге («кредит» с ударением на первом слоге - это правая часть бухгалтерских проводок).

Все три слова – «заем», «кредит», «ссуда» – означают одно и то же – предоставление денег или товаров в долг на условиях возвратности и, как правило, с уплатой процентов. Тот, кто выдает деньги или товары в кредит, называется заимодавец (кредитор), кто берет – заемщик (или дебитор). Условия выдачи и погашения кредитов (займов, ссуд) весьма разнообразны. Здесь рассмотрены лишь самые простые и наиболее распространенные способы погашения займов.

### Погашение займа одним платежом в конце

Пусть заем $D$ выдан на $n$ лет под $i$ сложных годовых процентов. К концу $n$-го года наращенная его величина станет $D(1+i)^n$. Если предполагается отдать заем одним платежом, то это и есть размер данного платежа. Для облегчения расчетов можно использовать таблицу мультиплицирующих множителей.

**Пример 1.** Заем величиной 20 000 сум. был выдан на 8 лет под 10% годовых. Если отдать этот заем одним платежом, каков размер этого платежа?

**Решение.** По таблице мультиплицирующих множителей находим

$M(8, 10) = 2{,}144$. Значит, искомый платеж равен 42 880 руб.

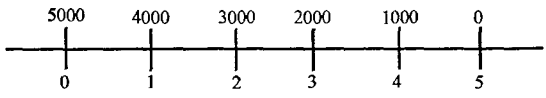
### Погашение основного долга одним платежом в конце

Сам заем называется основным долгом, а наращиваемый добавок – процентными деньгами. Пусть заем $D$ выдан на $n$ лет под $i$ сложных годовых процентов. За 1-й год процентные деньги составят $iD$. Если их выплатить, то останется снова только основной долг в размере $D$. И так будем выплачивать в конце каждого года наращенные за этот год процентные деньги $iD$. В конце $n$-го, последнего, года выплаты составят величину $iD+D$ - процентные деньги за последний год и основной долг.

### Погашение основного долга равными годовыми выплатами

Пусть заем $D$ выдан на $n$ лет под $i$ сложных годовых процентов. При рассматриваемом способе его выплаты в конце каждого года выплачивается $n$-я доля основного долга, т.е. величина $D/n$. В конце 1-го года, кроме того, платятся проценты с суммы $D$, которой пользовались в течение этого года, т.е. еще $iD$. Весь платеж в конце 1-го года равен $R_1 = D/n+iD$. В конце 2-го года выплата составит $R_2 = D/n+i(D-D/n)$ и т.д., так что в конце $(k+1)$-го года платеж $R_{k+1} = D/n+i(D-kD/n)$. Легко видеть, что платежи $R_1, R_2 \ldots$ образуют убывающую арифметическую прогрессию с разностью $iD/n$, первым членом $R_1 = D/n+iD$ и последним $R_n = D/n+iD/n$.

**Пример 2.** Пусть $D$ = 5000, $n$ = 5, $i$ = 10%. Выплаты показаны на рисунке внизу, а остатки в конце-начале года - вверху.




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 | 1000 |
| | 500 | 400 | 300 | 200 | 100 |
| | 1500 | 1400 | 1300 | 1200 | 1100 |

### Погашение займа равными годовыми выплатами

Пусть заем $D$ выдан на $n$ лет под $i$ сложных годовых процентов. При рассматриваемом способе его выплаты в конце каждого года выплачивается одинаковая сумма $R$. Найти ее просто: эти выплаты можно рассматривать как годовую ренту длительности $n$ лет и годовым платежом $R$. Приравняем современную величину этой ренты величине займа $D$. Получим уравнение $D = R \cdot a(n,i)$. Значит, $R = D/a(n,i)$.

**Пример 3.** Пусть $D$ = 5000, $n$ = 5, $i$ = 10%. Из таблицы коэффициентов приведения ренты находим $a(5,10) = 3{,}791$. Значит, $R$ = 5000/3,791 = 1319.

### Погашение займа равными выплатами несколько раз в год

Пусть выплаты размером y производятся т раз в году, всего выплат пт. На эти выплаты начисляются проценты также т раз в году по ставке i/m (можно считать, что выплаты идут в тот же банк, который дал заем, и там начисляют на них проценты). Эти выплаты образуют соответствующую ренту, наращенная величина которой есть $S = y \cdot s(nm/im)$. Наращенная величина займа есть $D(1+i/m)^{nm}$ и, приравнивая, получим уравнение для определения $y$:

$$D(1+i/m)^{nm} = y \cdot s(nm, i/m),$$

откуда

$$y = D \cdot (1+i/m)^{nm} / s(nm, i/m)$$

### Общий метод погашения займа

Пусть заем величиной $D$ выдан на $n$ лет под $i$ сложных годовых процентов. В общем случае погашающие платежи - это сумма платежей $D_k$, идущих на выплату основного долга $D$, и платежей $I_k$, идущих на выплату процентных денег, начисляемых на остаток основного долга после предыдущего платежа.

Указанное свойство сначала продемонстрируем на частном случае.

Пусть заем выдан сроком на 2 года. В конце первого года было выплачено в счет оплаты основного долга $D_1$ и на весь долг $D$, которым пользовались в течение года, начисленные проценты $I_1 = iD$ тоже были выплачены, так что в конце первого года суммарный платеж составил $D_1 + iD$. В конце второго года был выплачен остаток основного долга $D_2 = D - D_1$ и проценты за этот год, равные $iD_2$, так что суммарный платеж составил $D - D_1 + i(D - D_1)$. Деньги $D_1 + iD$, выплаченные в конце первого года, за второй год выросли до $(D_1 + iD)(1+i)$. В итоге за оба года было выплачено с учетом процентов, начисленных за платеж в конце первого года,

$(D_1 + iD)(1+i) + (D - D_1)(1+i) = (1+i)(D_1 + iD + D - D_1) = D(1+i)^2$, что совпадает с наращенной суммой займа за два года.

Докажем теперь рассматриваемое свойство потока погашающих платежей в общем виде. Пусть $D_1, \ldots, D_n$ – платежи, идущие на выплату основного долга $D, I_1, \ldots, I_n$ – платежи, идущие на выплату процентных денег, начисляемых на остающийся основной долг. Выделим в потоке погашающих платежей две части: по завершающему платежу $D_n$ и процентных выплат по нему:

$$iD_n(1+i)^{n-1} + iD_n(1+i)^{n-2} + \ldots + iD_n + D_n =$$
$$iD_n\left[(1+i)^{n-1} + \ldots + 1\right] + D_n = iD_n\left[(1+i)^n - 1\right]/i + D_n = D_n(1+i).$$

Для второй части, т.е. для последовательности долговых уплат $\{D_k, k = 1, \ldots, n-1\}$ в силу индукции эквивалентная ей на момент $(n-1)$ наращенная сумма равна $(D - D_n)(1+i)^{n-1}$, и в конце $n$-го года нарастет до величины $(D - D_n)(1+i)^n$. Складывая обе наращенные суммы, получим

$D_n(1+i)^n+(D-D_n)(1+i)^n=D(1+i)^n$, что совпадает с наращенной величиной займа.

## 10.2. Потребительский кредит. Льготные кредиты. Абсолютный и относитульный грант-элемент

**Потребительский кредит.** В потребительском кредите на всю сумму кредита начисляются простые проценты, которые прибавляются к величине самого кредита, и сумма всех погашающих выплат должна быть равна этой величине. При равных выплатах величина одного платежа получается делением этой суммы на их число. Реальная цена кредита для покупателя определяется ставкой сложного процента, для которой современная величина выплат по кредиту равна основному долгу.

**Равномерное погашение потребительского кредита.** Пусть кредит размером $D$ взят на $n$ лет под годовую ставку простых процентов $i$. Следовательно, сумма долга с процентами составит:

$$S=D(1+ni).$$

Если в год предусмотрено (договором о кредите) p выплат, то одна выплата $Y$ равна:

$$S/pn=D(1+ni)/pn.$$

Величина $Y$ в принятых выше терминах представляет собой срочную уплату.

Возникает вопрос, как расчленить $Y$ на погашение процентов и основного долга. Для этого применяется правило деления некоторого числа на части пропорционально данным числам. В качестве исходных данных, позволяющих получить требуемое соотношение пропорциональности, началу каждого периода

ставится в соответствие число, равное количеству оставшихся выплат:

$$(1; pn), (2; pn-1),...,(k; pn-(k-1)),...,(pn-1) \qquad (10.2.1)$$

Тогда правило определения последовательных процентных погашений $I_1, I_2,..., I_k,..., I_{pn}$ сводится к делению всей суммы процентов $I = Dni$ пропорционально числу оставшихся относительно начала каждого периода срочных уплат:

$$I_k = \frac{pn-k+1}{1+2+...+pn} \cdot Dni = \frac{pn-k+1}{pn(pn+1)/2} \cdot Dni, \; k = 1,2,..., pn \qquad (10.2.2)$$

Соответственно сумма погашения долга: $D_k = Y - I_k$.

Отсюда для частного случая, когда кредит выдается на один год с помесячным погашением, получим так называемое правило числа 78. Знаменатель формулы (10.2.1), как легко понять, равен сумме порядковых номеров всех выплат. В рассматриваемом варианте эта сумма равна 78:

$$\sum_{k=1}^{12} k = 78$$

отсюда и название правила.

Обозначим ставку сложного процента, под которую выдается потребительский кредит, через $j$ и допустим, что число начислений процентов т в течение года совпадает с числом выплат по кредиту $p(m = p)$. Ставка $j$ определяется из условия равенства современной величины выплат по кредиту его номинальной величине:

$$\left[D(1+ni)/pn\right]\alpha(pn, j/m) = D, \; m = p \qquad (10.2.3)$$

Данное уравнение можно записать в виде многочлена от неизвестной ставки. Для определения его корня можно

воспользоваться функцией Excel для расчета внутренней ставки доходности.

Разумеется, что в зависимости от возможностей участников кредитного договора величина $m$ не обязана совпадать с $p$, например, заемщик может начислять процент один раз в году. Тогда для определения кредитной ставки ему следует решить то же уравнение (10.2.3) при условии, что $m=1$.

**Льготные кредиты**. Льготный кредит выдают по льготной ставке, меньшей обычной ставки. Фактически тем самым заемщик получает субсидию, которую рассчитывают как разницу соответствующих современных сумм.

Пусть кредит размером $D$ выдан на $n$ лет по льготной ставке $g$, меньшей обычной ставки $i$, и будет погашаться равными вы платами. Эти выплаты образуют годовую ренту. Обозначим размер одной выплаты $y$, тогда современная величина этой ренты равна $y \cdot a(n,g)$. Отсюда найдем: $y = D/a(n,g)$. А если бы выплаты шли по обычной ставке $i/$, то размер каждой выплаты был бы $z = D/a(n,i)$. Разность $z - y = D/a(n,i) - D/a(n,g)$ – это ежегодные потери кредитора, а современная величина ренты этих потерь по действующей ставке $i$, т.е.

$$(z-y)\cdot a(n,i) = \left[D/a(n,i) - D/a(n,g)\right]a(n,i) = D\left[1 - a(n,i)/a(n,g)\right]$$

и есть субсидия кредитора заемщику. Эта субсидия называется еще абсолютным грант элементом, а величина $1 - a(n,i)/a(n,g)$- относительным грант элементом. Наращенная сумма абсолютного грант-элемента или, что то же самое, наращенная сумма субсидии называется общими потерями кредитора.

**Пример 3.** Пусть $D = 1000, n = 8, i = 8\%, g = 5\%$. Находим выплаты по обычной ставке из уравнения: $y \cdot a(8,8) = 1000$, по таблице коэффициентов приведения ренты находим: $a(8,8) = 5,747$; отсюда $y = 174$. Выплаты по льготной ставке находим из уравнения:

$z \cdot a(8,5) = 1000$, по той же таблице находим: $y \cdot a(8,5) = 6,463$; отсюда $z = 155$. Следовательно, ежегодные потери кредитора равны 19. Подсчитаем относительный и абсолютный грант-элементы (последний, напоминаем, есть субсидия кредитора заемщику): $1 - a(n,i)/a(/n,g) = 1 - 5,747/6,463 = 0,108; 1000 \cdot 0,108 = 108$. Наконец, общие потери кредитора $108 \cdot (1+0,08)^8$, по таблице мультиплицирующих множителей находим (1 + 0,08)8 = 1,851. Следовательно, общие потери кредитора равны 200.

**Грант - элемент**. Предмет обсуждения в данном параграфе также связан с долгосрочными займами. Однако здесь они рассматриваются под другим углом зрения. Дело в том, что в ряде случаев долгосрочные займы и кредиты выдаются по тем или иным причинам (иногда политическим) под льготные для заемщика условия. Низкая (относительно ставки на рынке кредитов) процентная ставка в сочетании с большим его сроком и льготным периодом дают должнику существенную выгоду, которую можно рассматривать как субсидию. Кредитор в этих условиях несет некоторые потери, так как он мог бы инвестировать деньги на более выгодных условиях.

Проблема определения размера такого рода помощи обсуждалась в международных организациях и экономической литературе главным образом с позиции межстрановых сопоставлений – для сравнения размеров финансовой помощи, оказываемой ряду развивающихся стран. Однако проблема оценки последствий выдачи льготных займов имеет более общее значение, так как льготные займы предоставляют и внутри страны.

Грант-элемент (grant-element) – это условная потеря заимодавца, которая связана с применением более низкой процентной ставки, чем существующие ставки кредитного рынка.

Грант-элемент определяется в двух видах: в виде абсолютной и относительной величин.

Абсолютный грант-элемент рассчитывается как разность номинальной суммы займа и современной величины платежей по погашению займов, рассчитанной по рыночной ставке. Проблема, как видим, сводится к выбору надлежащей ставки процента для расчета современной величины. Рекомендации по выбору конкретного значения этой ставки весьма расплывчаты. Обычно используют превалирующую на рынке долгосрочных кредитов ставку.

Размер абсолютного грант-элемента находим следующим образом:

$$W = D - G \qquad (10.2.4)$$

где $W$ – абсолютный грант-элемент, $D$ – сумма займа, $G$ – современная величина платежей, поступающих в счет погашения займа, рассчитанная по реальной ставке кредитного рынка.

Относительный грант-элемент характеризует отношение абсолютного грант-элемента к сумме займа:

$$w - \frac{W}{D} = 1 - \frac{G}{D}, \qquad (10.2.5)$$

$w$ – относительный грант-элемент.

Как видим, все переменные приведенных формул определяются условиями выдачи и погашения займа.

Выведем рабочие формулы для расчета $W$ и $w$ при условии, что долг и проценты выплачиваются в виде постоянных срочных уплат. Для анализа последствий выдачи льготных займов этого достаточно.

Пусть заем выдан на $n$ лет и предусматривает выплату процентов по льготной ставке $g$. На денежном рынке аналогичные по сроку и величине займы выдаются по ставке $i$. В этом случае при отсутствии льготного периода срочная уплата составит:

$$Y = \frac{D}{a_{n;g}}, \qquad (10.2.6)$$

а современная величина всех выплат должника очевидно равна $Ya_{n;i}$. В итоге

$$W = D - Ya_{n;i} = D\left(1 - \frac{a_{n;i}}{a_{n;g}}\right), \qquad (10.2.7)$$

$$w = 1 - \frac{a_{n;i}}{a_{n;g}}, \qquad (10.2.8)$$

где $a_{n;i}$, $a_{n;g}$ – коэффициенты приведения постоянных годовых рент постнумерандо, определенные для процентных ставок $i$ и $g, i > g$.

Грант-элемент, как было продемонстрировано выше, – условная обобщающая характеристика льготности займа (потерь заимодавца и выигрыша должника). Сумма, которая равна грант-элементу, существенно зависит от принятой при ее определении процентной ставки. График зависимости относительных потерь от соотношения процентных ставок показан на рис. 10.1 для сроков займа 5 и 10 лет без льготного периода, $g = 5\%$.

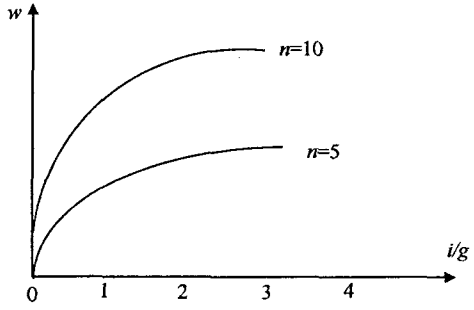



**Рис. 10.1.**

Предельным случаем льготного займа является беспроцентный заем. Выдача такого займа связана с потерями, которые определим, полагая, что соответствующие средства можно было бы разместить под проценты по рыночной ставке $i$. Например, уже при пятнадцатилетием сроке беспроцентного займа и рыночной ставке 10% кредитор теряет почти 50% от суммы долга.

### 10.3. Ипотечный кредит. Консолидация и обмен долга

Ссуды под залог недвижимости или ипотеки (mortgage) получили широкое распространение в странах с развитой рыночной экономикой как один из важных источников долгосрочного финансирования. В такой сделке владелец имущества (mortgagor) получает ссуду у залогодержателя (mortgagee) и в качестве обеспечения возврата долга передает последнему право на пре имущественное удовлетворение своего требования из стоимости заложенного имущества в случае отказа от погашения или не полного погашения задолженности. Сумма ссуды обычно несколько меньше оценочной стоимости закладываемого имущества. Наиболее распространенными объектами залога являются жилые дома, фермы, земля, другие виды недвижимости. Характерной особенностью ипотечных ссуд является длительный срок погашения.

Существует несколько видов ипотечных ссуд, различающихся в основном методами погашения задолженности. Большинство видов являются вариантами стандартной или типовой ипотечной ссуды. Суть ее сводится к следующему. Заемщик получает от залогодержателя (кредитора) некоторую сумму под залог недвижимости (например, при покупке или строительстве дома). Далее он погашает долг вместе с процентами равными, обычно ежемесячными, взносами.

Модификации стандартной схемы ипотеки нацелены на повышении ее гибкости в учете потребностей, как должника, так и кредитора. Так, некоторые из них имеет целью снизить расходы должника на начальных этапах погашения долга, перенося основную их тяжесть на более поздние этапы. Такие ипотеки привлекают тех клиентов, которые ожидают рост своих доходов в будущем, например, начинающих предпринимателей и фермеров. Привлекательна такая ипотека и для молодых семей при строительстве или покупке жилья. В других схемах тем или иным путем в большей мере учитывается процентный риск. Кратко охарактеризуем некоторые схемы ипотек.

*Ссуды с ростом платежей (graduated mortgage, GPM).* Данный вид ссуды предусматривает постоянный рост расходов по обслуживанию долга в первые годы. В оставшееся время погашение производится постоянными взносами. Вариантом такой ипотеки является ссуда, погашение которой происходит по согласованному графику: каждые 3 – 5 лет увеличивается сумма взносов.

*Ссуда с льготным периодом.* В условиях ипотеки предполагается наличие льготного периода, в течение которого выплачиваются только проценты по долгу. Такая схема в наибольшей мере сдвигает во времени финансовую нагрузку должника.

В последние два десятилетия в практику вошли и более сложные схемы погашения долга по ипотеке, преследующие в конечном счете те же цели – быть более гибкими и удобными для клиентов.

Как уже отмечалось, ипотечные ссуды выдаются на длительные сроки. Даже в стабильной экономике это связано с определенным риском, в частности, риском изменения процентной ставки на рынке кредитов. Некоторую страховку от такого риска обеспечивают условия ссуд, относящиеся к уровню процентной ставки. К таким ипотекам относятся следующие.

*Ссуды с периодическим изменением процентной ставки (rollover mortgage, RM).* Схема этой ссуды предполагает, что стороны каждые 3 – 5 лет пересматривают уровень процентной ставки. Таким образом, происходит периодически возобновляемое среднесрочное кредитование при долгосрочном погашении всей задолженности. Этим самым создается возможность для некоторой, конечно неполной, адаптации к изменяющимся условиям рынка.

*Ипотека с переменной процентной ставкой (variable-rate mortgage, VRM).* Уровень ставки здесь «привязывается» к какому либо распространенному финансовому показателю или индексу. Пересмотр ставки обычно осуществляется по полугодиям. Чтобы изменения ставок не были очень резкими, предусматриваются верхняя и нижняя границы разовых коррективов (например, не более 2%).

Основной задачей при анализе ипотек является разработка планов погашения долга. Важно также уметь определить сумму остатка задолженности на любой момент процесса погашения. Ниже обсуждаются методы решения этих проблем для трех ипотечных схем.

## Расчеты по ипотечным ссудам

Наиболее распространенной является ипотечная ссуда, условия которой предполагают равные взносы должника, взносы ежемесячные постнумерандо или пренумерандо. В договоре обычно устанавливается ежемесячная ставка процента, реже годовая номинальная.

В осуществлении ипотеки при покупке (строительстве) объекта залога участвует три агента: продавец, покупатель (должник), заимодавец (кредитор). Взаимосвязи между ними показаны на блок-схеме (см. рис. 10.2).

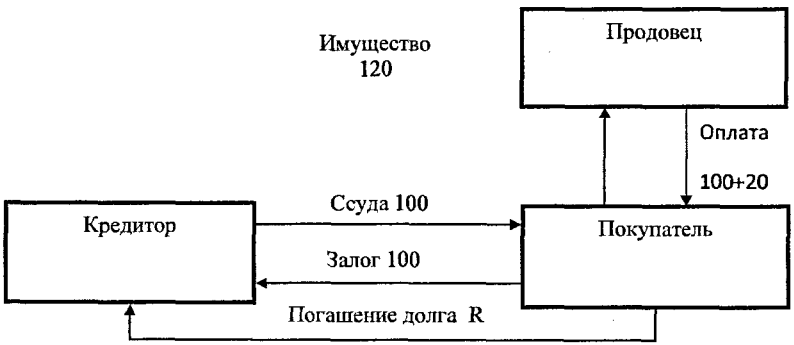



**Рис. 10.2.**

Продавец получает от покупателя за некоторое имущество полную его стоимость (120). Для этого покупатель получает ссуду под залог этого имущества (100) и добавляет собственные средства (20). Задача заключается в определении размера ежемесячных погасительных платежей R и остатка задолженности на момент очередного ее погашения вплоть до полной оплаты долга.

Поскольку погасительные платежи (взносы) представляют собой постоянную ренту, при решении поставленной задачи применим тот же принцип, что и при разработке плана погашения долгосрочного долга равными срочными уплатами. Для этого приравняем современную величину срочных уплат сумме ссуды. Для месячных взносов постнумерандо находим:

$$D = Ra_{N;i},$$

где $D$ – сумма ссуды; $N$ – общее число платежей, $N = 12n$ ($n$ – срок погашения в годах); $i$ – месячная ставка процента; R – месячная сумма взносов; $a_{N|i}$ - коэффициент приведения постоянной ренты.

Искомая величина взноса составит

$$R = \frac{D}{a_{N;i}} = Dc \qquad (10.3.1)$$

В рамках решаемой проблемы величину $c = 1/a_{N;i}$ можно назвать коэффициентом рассрочки. Для рент пренумерандо получим

$$R = \frac{D}{a_{N|i}}(1+i) \qquad (10.3.2)$$

Найденная по формуле (10.3.1) или (10.3.2) величина срочной уплаты является базой для разработки плана погашения долга. Согласно общепринятому правилу из этой суммы прежде всего выплачиваются проценты, а *остаток идет на погашение* долга.

**Пример 4.** Под залог недвижимости выдана на 10 лет ссуда в размере 100 млн. сум. Погашение ежемесячное постнумерандо, на долг начисляются проценты по номинальной годовой ставке 12%. Таким образом, $N = 120, i = 0{,}01$; находим: $a_{120;1} = 69{,}70052$. Для этих условий ежемесячные расходы должника равны $R = \frac{100000}{69{,}70052} = 1434{,}709$ тыс.сум

Проценты за первый месяц равны $100000 \times 0{,}01 = 1000$ тыс. сум., на погашение долга остается. 1434,71-1000 = 434,71 тыс. сум. План погашения долга представлен в таблице.

Как показано в таблице, в первом месяце расходы на выплату процентов и погашение основного долга соотносятся как 1000: 434,71; в последнем месяце – уже как 14,21 :1420,5.

| Месяц | Остаток долга на начало месяца | Взнос | Проценты | Погашение долга |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 100000,00 | 1434,71 | 1000,00 | 434,71 |
| 2 | 99565,29 | 1434,71 | 995,65 | 439,06 |
| 3 | 99126,23 | 1434,71 | 991,26 | 443,45 |
| ... | | | | |
| 37 | 81274,07 | 1434,71 | 812,74 | 621,97 |
| 38 | 80652,10 | 1434,71 | 806,52 | 628,19 |
| 39 | 80017,63 | 1434,71 | 800,24 | 634,47 |
| ... | | | | |
| 118 | 4219,35 | 1434,71 | 42,20 | 1392,5 |
| 119 | 2826,94 | 1434,71 | 28,27 | 1406,44 |
| 120 | 1420,50 | 1434,71 | 14,21 | 1420,50 |

Перейдем к другой проблеме. При выдаче ссуды под залог для обеих сторон важно знать сумму погашенного долга и его остаток на любой промежуточный момент (необходимость в этом возникает, например, при прекращении договора или его пересмотре). С этой проблемой мы уже встречались выше при обсуждении метода погашения долга равными срочными уплатами. Применительно к условиям стандартной ипотеки находим следующие соотношения:

$$d_t = d_{t-1}(1+i) = d_1(1+i)^{t-1}$$

где $d_t$ – сумма погашения долга, $t$ - порядковый номер месяца, $i$ – месячная ставка процента.

Остаток долга на начало месяца

$$D_{t+1} = D_t - d_t, \qquad t = 1,...,12n$$

Последовательные суммы погашения долга представляют собой геометрическую профессию с первым членом $d_1$ и знаменателем $(1+i)$, причем

$$d_1 = R - Di \qquad (10.3.3)$$

Сумму членов этой профессии от начала погашения до $t$ включительно найдем следующим образом:

$$W_t = d_1 S_{t|i} \qquad (10.3.4)$$

где $S_{t|i}$ – коэффициент наращения постоянной ренты постнумерандо. Остаток долга на начало месяца находим как разность

$$D_{t+1} = D_1 - W_t \qquad (10.3.5)$$

**Стандартная ипотека с неполным погашением задолженности и выплатой в конце срока остатка долга (balloon mortgage).** Условия такой ипотеки позволяют уменьшить размеры периодических взносов и (или) сократить срок ссуды. Срочные уплаты рассчитываются таким образом, что они не покрывают всей задолженности, остаток (balloon), обозначим его как $B$, выплачивается в конце срока. Уравнение, балансирующее условия ипотеки, имеет вид

$$D = R a_{N|i} + B v^N$$

Баланс достигается одним из следующих способов:

а) задается размер срочных уплат, определяется величина $B$:

$$B = (1+i)^N \cdot (D - R\, a_{N|i}$$

б) задается $B$, определяется размер срочных уплат:

$$R = \frac{D_1 - B v^N}{a_{N|i}}$$

**Ссуда с периодическим увеличением взносов.** В этом варианте ипотеки задается последовательность размеров взносов. Пусть увеличение взносов происходит через равные интервалы времени $m$. В пределах каждого интервала взносы постоянны. Очевидно, что для полной сбалансированности схемы размер

последнего взноса не задается, он определяется по сумме остатка задолженности.

Пусть $R_1,\ldots,R_k$ – размеры взносов. Определим размер последнего взноса. Для этого найдем на начало операции сумму современных стоимостей взносов от первого до $k-1$. Обозначим ее как $Q$:

$$Q=\sum_{1}^{k-1} R_t\, a_{m|i} v^{(t-1)m}$$

Современная стоимость непокрытой взносами задолженности на начало последнего периода

$$W=D-Q$$

откуда размер взносов в последнем периоде ипотеки

$$R_k = \frac{W}{a_{m|i}\, v^{(k-1)m}}$$

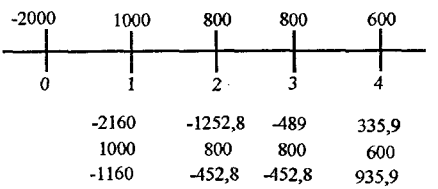
# ГЛАВА XI. АНАЛИЗ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

## 11.1. Расчет характеристик проектов с ограниченными начальными инвестициями и фиксированным доходом

В нормальной экономике вращение внутри самой финансовой сферы не может принести большого дохода. Только выход в реальный сектор экономики путем инвестирования позволит нарастить капитал. Но для этого надо уметь анализировать инвестиционные процессы. Такие процессы – это потоки платежей, в которых инвестиции отрицательны, доходы положительны.

**Пример детального анализа инвестиционного проекта**

Пусть в начале года вложены инвестиции размером $Inv = 2000$, а затем в течение 4 лет получены доходы $R_1 = 1000,\ RL2 = 800,\ R_3 = 800, R_4 = 600$. Ставка процента 8% в год.




Поясним рисунок. Наверху указаны размеры инвестиций (отрицательные) и получаемые доходы (положительные). Допустим, доходы вкладываются в тот же банк, который дал инвестиции, и на доходы начисляются те же сложные проценты, под которые банк выдал кредит-инвестиции. Самая верхняя строка под линией – размер счета в банке до внесения очередного платежа-дохода. Следующая строка – этот самый платеж-доход,

еще ниже – итоговый размер счета в банке. Итак, -2160 - это наращенная за один год сумма выданных в кредит инвестиций, добавим 1000, получим – 1160 – это долг заемщика банку. В конце 2-го года счет в банке еще отрицателен, но в конце 3-го года уже положителен – 311. Значит, за 3 года инвестиции окупились, так что срок окупаемости проекта равен 3 годам. К концу 4-го года счет в банке положителен – это наращенная величина чистого дохода. Если эту величину дисконтировать к моменту 0 по ставке 8%, то получим

$$935{,}9/(1+0{,}08)^4 = 935{,}9/1{,}360 = 688{,}2$$

Эта величина называется *приведенным чистым доходом проекта.* Если ее поделить на абсолютную величину инвестиций, то получим *доходность проекта* (иногда эту величину называют *рентабельностью проекта):*

688,2/2000 = 0,344, в процентах – 34,4%.

### Общие понятия и обозначения

Рассмотрим некоторые общие понятия. Пусть $\{(R_k, t_k)\}$- инвестиционный процесс – поток платежей $R_k$ в момент $t_k$, знак платежа $R_k$ имеет значение: если он положителен – это доход, отрицателен – затраты или инвестиции. Все платежи производятся на стыке лет и только в неотрицательные номера лет. Процесс называется конечным, если в нем имеется последний платеж, иначе - бесконечным.

Приведенным чистым доходом NPV (Net Present Value) называется сумма (алгебраическая) всех платежей, дисконтированных к моменту 0 по действующей ставке процента *i*,

$$NVP = \sum_k R_k / (1+i)^{t_k}.$$

Для конечного процесса можно определить наращенный чистый доход – NFV (Net Future Value) – это сумма

(алгебраическая) всех платежей, дисконтированных к моменту $t_n$ последнего платежа по ставке процента $i$,

$$NFV = \sum_k R_k / (1+i)^{t_k - t_n}$$

Ясно, что $NFV = NPV(1+i)^{t_n}$.

Процесс называется окупающимся, если $NPV > 0$. Впрочем, легко понять, что процесс окупается, если положительна сумма (алгебраическая) всех платежей, дисконтированных к какому-либо моменту времени, так как все такие суммы связаны с *NPV* или *NFV* очевидными соотношениями. Доходность процесса можно определить так: надо дисконтировать по ставке $i$ к какому-нибудь моменту все платежи процесса и найти отношение дохода к затратам. Ясно, что если процесс окупается, то его доходность положительна, верно и обратное.

Далее будем рассматривать только процессы, у которых инвестиции в момент 0, а все остальные платежи положительны, т.е. это доходы. Для таких процессов интересной характеристикой является внутренняя доходность процесса $q$ – такое наименьшее положительное число, что сумма (алгебраическая) всех платежей, дисконтированных к моменту 0 по ставке $q$, т.е. $\sum_k R_k / (1+q)^{t_k}$, равна 0. Ясно, к что если процесс окупающийся, то $i \le q$. Внутренняя норма доходности показывает предельный уровень ставки процента, при котором взятые по этой ставке инвестиции окупаются доходами процесса (наращиваемыми по той же ставке).

## Расчет характеристик конечного проекта с начальными инвестициями и постоянными доходами

Решим задачу. На строительство магазина надо затратить в течение месяца около \$10 000, а затем в течение 10 лет магазин будет давать доход \$3000 в год. Найти характеристики данного проекта, если ставка процента 8% в год.

Решение в общем виде: пусть *Inv* – размеры инвестиции, *R* – последующий годовой доход в течение *n* лет, *i* - ставка процента для инвестиций и доходов. Определить характеристики проекта.

Поток доходов есть конечная годовая рента с годовым платежом *R*, длительностью *n* лет. Современная величина этой ренты $A = R \cdot a(n,i)$, где $a(n,i)$– коэффициент приведения ренты. Значит, приведенный чистый доход проекта есть $NPV = \ln v + R \times a(n,i)$, доходность проекта $d = NPV/(-\ln v)$. Как определить срок окупаемости?

Если *s* - срок окупаемости, то *s* должен быть минимальным из всех таких чисел $r$, что $\ln v + R \cdot a(r,i) \geq 0$ или $a(r,i) \geq -\ln v / R$. Но $a(r,i) = \left[1-(1+i)^{-r}\right]/i$. Решение соответствующего неравенства дает: $r \geq -\ln(1+i \cdot \ln v / R)/\ln(1+i)$. Внутренняя доходность проекта $q$ должна удовлетворять уравнению $Lnv + R \cdot a(n,q) = 0$. Если это уравнение имеет несколько корней, то берут наименьший. С помощью компьютера приближенно решить это уравнение несложно.

Если $-Lnv \geq nR$, то указанное выше уравнение решений не имеет, ибо

$$R \cdot a(n,q) = R/(1+q) + R/(1+q)^2 + \ldots + R/(1+q)^n < nR \leq -\ln v$$

Поэтому пусть $-\ln v < nR$. Но теперь ясно, что искомое $q$ существует и его можно найти итеративным процессом, увеличивая q с малым шагом до тех пор, когда неравенство $-\ln v < R/(1+q) + R/(1+q)^2 + \ldots + R/(1+q)^n$ станет неверным.

**Пример 1.** Решим задачу, сформулированную в начале этого параграфа. Так как $a(10,8) = 6{,}710$, то современная величина потока до ходов есть 3000 • 6,710 = 20 130, значит, приведенный чистый доход есть $NPV = 20130 - 10000 = 10310$, доходность проекта есть $10310/10000 = 1{,}031$ – это доля, в процентах 103,1%. Для нахождения внутренней доходности найдем такое $q$, что $a(10,q) = 10000/3000 = 3{,}33$.

По таблице коэффициентов приведения ренты I подбираем $q$, получаем $q = 27\%$.

### Расчет характеристик бесконечного проекта с начальными инвестициями

Решим задачу. На строительство магазина надо затратить в течение месяца около \$10 000, а затем он неограниченно долго будет давать доход \$2000 в год. Найти характеристики данного проекта, если ставка процента 8% в год.

Решение. В общем виде решение задачи таково: пусть $Inv, R, i$ – размеры инвестиций, последующего годового дохода и ставка процента. Тогда $NPV = \ln v + R/i$, а $d = NPV/(-\ln v)$ – доходность проекта. Действительно, поток ежегодных доходов есть вечная рента, ее современная величина – $R/i$. Отсюда и вытекают формулы, приведенные выше для *NPV* и *d*. Итак, $Inv = -10000 + 2000/0,08 = 15000, d = 15000/10000 = 1,5$, или 150%. Найдем внутреннюю доходность проекта: подберем так $q$, чтобы $R/q = -\ln v$ или $q = R/(-\ln v) = 2000/10000 = 20\%$.

## 11.2.Определение срока погашения задолженности

Акционерной компанией разрабатывается инвестиционный проект. Акционеры согласились с предлагаемой длительностью $n$ проекта и с необходимым размером инвестиций *Inv*, но требуют обеспечить большую доходность $j$ вложения этих инвестиций, чем просто общепринятая ставка процента $i$. Какой для этого нужно обеспечить минимальный ежегодный доход R?

Решение. Ясно, что ежегодный доход должен удовлетворять уравнению $-\ln v = R \cdot a(n, j)$, тем самым $-\ln v = R \cdot \left[1 - (1+j)^{-n}\right]/j$ откуда $R = (-j \cdot \ln v)/\left[(1+j)^{-n}\right]$.

## 11.3. Определение суммы инвестиции. Зависимость характеристик процесса от процентной ставки

Рассмотрим процесс со следующими данными: $\ln v, R, n$. Напомним, что современная величина потока доходов $A = R \cdot a(n,i)$, где $a(n,i) = 1/(1+i) + 1/(1+i)^2 + ... + 1/(1+i)^n$. Видно, что при увеличении $i$ эта сумма, т.е. $a(n,i)$, уменьшается. Поэтому можно сделать вывод: при увеличении ставки процента приведенный чистый доход $NPV = -\ln v + R \cdot a(n,i)$ уменьшается, следовательно, уменьшается доходность процесса, а срок окупаемости увеличивается. Внутренняя доходность процесса не зависит от ставки процента, так как определяется исключительно размером инвестиций и потоком доходов. Таким образом, вполне может быть так, что инвестиционный проект окупается при одной ставке процента и не окупается при большей ставке.

# ГЛАВА XII. РЫНОК ЦЕННЫХ БУМАГ

## 12.1. Облигации и их курс

***Облигация*** – это эмиссионная ценная бумага, закрепляющая право ее владельца на получение от эмитента облигации в предусмотренный ею срок номинальной стоимости облигации и процента от нее либо иного имущественного эквивалента.

Облигация – одна из самых распространенных ценных бумаг. Эмитентами облигаций могут быть как юридические лица – предприятия, фирмы, банки, учрежденные в любой организационно-правовой форме (акционерное общество, иное хозяйственное общество с ограниченной ответственностью, даже в определенных законом случаях – некоммерческие организации), так и государство в лице органов государственной власти и управления разного уровня.

Облигация – это долговая ценная бумага, поэтому она обладает приоритетом по сравнению с акциями с точки зрения очередности выполнения обязательств по ценным бумагам. Проценты по облигациям и погашение самих облигаций всегда осуществляется до выплаты дивидендов по привилегированным и обыкновенным акциям. В случае невыполнения эмитентом обязательств по облигациям, инвесторы могут инициировать законные процедуры взыскания задолженности, вплоть до банкротства эмитента. Однако облигации никогда не дают право на участие в управлении эмитентом.

По форме выпуска облигации могут быть выпущены как в документарной, так и в бездокументарной форме. По форме владения облигации могут быть как именными, так и на предъявителя. В случае выпуска именных облигаций эмитент обязан обеспечить ведение реестра собственников облигаций в установленном законом порядке (кроме государственных облигаций, по ним реестр владельцев не ведется).

Облигации могут погашаться:

деньгами. Погашение осуществляется всегда по номиналу;

товарами.

услугами.

Ценными бумагами. В условиях выпуска может быть определено, что при погашении инвестору выдаются другие, заранее определенные ценные бумаги. Например, в случае конвертируемых облигаций они в момент погашения, как правило, конвертируются в обыкновенные акции.

**Облигации** – это ценные бумаги, обычно на предъявителя. Облигации имеют номинальную стоимость, или номинал $N$, который присваивают облигации в момент ее эмиссии. С течением времени цена облигации может меняться, но обычно говорят не о цене облигации $P$, а об отношении цены к номиналу и это отношение, выраженное в процентах, называют *курсом облигации* $K$. Итак, курс облигации $K = P/N$ или $P = KN$, а в процентах – $K = 100P/N$, $P = NK/100$.

Часто облигации имеют купон, который характеризуется купонной ставкой $q$, что дает владельцу купонный доход, равный доле $q$ от номинала. Например, если $q$ = 10%, а $N$ = 1000 д.е., то разовый купонный доход равен 100 д.е. Купонный доход выплачивается периодически или только один раз, например, при погашении облигации. Купонный доход рассматривается как текущий.

Часто облигации имеют установленный период действия, после чего они могут быть погашены, т.е. владелец получает их номинальную стоимость.

Облигации обычно называются по имени их эмитента: государственные, если их выпустило государство, муниципальные, корпоративные и т.п.

Благодаря фиксированному текущему доходу облигации – весьма популярные ценные бумаги, по своей стоимости они превосходят остальные ценные бумаги.

*Акция* – это ценная бумага, обычно ее владелец занесен в особый список (реестр) акционеров, что дает ему некоторые права. Тот, кто выпускает (эмитирует) акции, называется *эмитент.* Акция дает ее владельцу право на получение дивидендов раз в квартал или с другой периодичностью. Дивиденды формируют текущий доход владельца акции. Если акции продаются и покупаются, то они имеют цену. Цена акции определяется многими факторами, некоторые из них носят случайный характер. Акции имеют номинальную стоимость, но обычно она не играет никакой роли.

Акции делятся на две большие группы: *обыкновенные* и *привилегированные.*

Выплаты дивидендов и возврат капитала при банкротстве эмитента сначала производятся по привилегированным акциям и только после этого по обыкновенным. Недостаток привилегированных акций в том, что если компания успешно ведет дела, то дивиденды на обычные акции растут, а на привилегированные – нет.

## 12.2. Периодически купонный процент выплачиваемый по ставке и эффективности

Доход от такой облигации получают только в виде купонных процентов. Пусть ставка купона $q$, ставка процента $i$, номинал облигации $N$. Тогда купонные выплаты $\{qN\}$ образуют вечную ренту. Дисконтируя все эти выплаты по ставке процента /, получим современную величину этой ренты, что и есть теоретическая цена облигации $P$. Итак,

$$P = qN(1+i) + qN/(1+i)^2 + \ldots = qN/i$$

Следовательно, курс облигации есть $K = 100 \cdot q / i$. Если выплата купонных денег происходит $p$ раз в году величиной $qN/p$, так что за год получается опять же $qN$, то эти купонные выплаты $\{qN/p\}$ надо дисконтировать по ставке $(1+i)^{1/p}$. Получаем формулу

$$K = (100q/p) / \left[(1+i)^{1/p} - 1\right]$$

Пусть теперь курс облигаций $K$ известен. Найдем текущую доходность облигации указанного типа. Если купонные выплаты производятся раз в год, то за год облигация приносит доход $qN$, а в нее вложено $P$ следовательно, доходность равна $j = qN/p$, или $qN/(KN) = q/K$ – если курс считать долей, а в процентах – $j = 100q/K$.

Можно предложить и другой способ определения доходности облигаций указанного типа. Пусть доходность облигации равна $j$, тогда купонные выплаты наращивают стоимость облигации по этой годовой ставке, значит, если дисконтировать этот поток по ставке $j$, то получим современную величину этого потока, а это и есть уже известная цена облигации. Купонные выплаты представляют собой вечную ренту, ее современная величина равна $qN/j$. Итак, имеем уравнение $qN/j = KN/100$, откуда $j = 100q/K$.

Для облигаций рассматриваемого типа текущая и полная доходности совпадают.

## Курс и доходность бескупонной облигации с погашением по номиналу

Доход от такой облигации получают как разницу между номиналом $N$ при погашении и ценой $P$ облигации. Так как текущих выплат нет, то текущая доходность нулевая. Если облигация куплена за $m$ лет до погашения, то, дисконтируя

платеж $N$ по ставке процента $i$ к современному моменту, получим теоретическую цену облигации $P = N/(1+i)^m$, следовательно, курс облигации $K = 100/(1+i)^m$ (понятно, что для такой облигации курс всегда меньше 100).

Теперь найдем доходность облигации, считая цену известной. Это просто: цена $P$, наращиваемая по ставке доходности у, через $m$ лет станет равной номиналу облигации. Следовательно, $P(1+j)^m = N$ или $(KN/100)(1+j)^m = N$, окончательно $j = (100/K)^{1/m} - 1$.

## Курс и доходность бескупонной облигации с выплатой купонных процентов при погашении

Проценты по такой облигации начисляются с капитализацией по сложной купонной ставке $q$ и выплачиваются в конце срока одновременно с погашением. Так как текущих выплат нет, то текущая доходность нулевая. Пусть $q$, $i$ – ставки купона и процента, и через $n$ лет после выпуска облигация будет погашена. Таким образом, общая сумма, которую выплатят владельцу при погашении, равна $N\cdot(1+q)^n$. Пусть облигация куплена за $m$ лет до погашения. Дисконтируя к этому моменту сумму $N\cdot(1+q)^n$ по ставке процента /, получим теоретическую цену облигации $P$. Итак, $P = N\cdot(1+q)^n/(1+i)^m$, следовательно, курс облигации $K = 100(1+q)^n/(1+i)^m$.

Теперь определим доходность облигации. Известная цена $P$, наращиваемая по ставке доходности у, через $m$ лет должна вырасти до $N\cdot(1+q)^n$, поэтому имеем уравнение $P(1+j)^m = N\cdot(1+q)^n$, откуда

$$j = (100/K)^{1/m}\cdot(1+q)^{n/m} - 1.$$

## Курс и доходность облигации с периодической выплатой процентов и погашением

Это самый общий тип облигаций. Суммарный доход от облигаций данного типа складывается из регулярных купонных выплат, роста курса, что дает доход при продаже облигации, или от погашения облигации – здесь доход может определяться разницей ставок процента при выпуске облигации и в момент ее погашения. Купонные выплаты формируют текущую доходность.

Пусть *q, i*-ставки купона и процента. Если облигация куплена за *m* лет до погашения, то будущие купонные доходы $\{qN\}$ есть годовая рента и ее современная величина есть $qN \cdot a(m,i)$, где $a(m,i)$ – коэффициент приведения этой ренты, т.е. $\left[1-(1+i)^{-m}\right]/i$. Добавив сюда еще современную величину номинала погашения $N \cdot (1+i)^{-m}$, получим теоретическую цену облигации *P*. Итак, $P = N \cdot (1+i)^{-m} + qN \cdot \left[1-(1+i)^{-m}\right]/i$ следовательно, курс облигации

$$K = 100 \cdot \left((1+i)^{-m} + q \cdot [1-(1+i)-m]/i\right)$$

Теперь определим доходность облигации рассматриваемого типа. Дисконтируя номинал облигации при погашении и купонные платежи по (пока неизвестной) ставке доходности y, должны получить цену облигации *P*. Следовательно, имеем уравнение $N(1+i)^{-m} + qN \cdot a(m,j) = P$, откуда и можно найти *j*.

## 12.3. Зависимость цены (ставки) облигации от процентной ставки

Рассмотрим самый общий тип облигаций – с периодической выплатой процентов и погашением. Цена такой облигации $P = N(1+i)^{-m} + qN\left[1-(1+i)^{-m}\right]/i$ складывается из дисконтированных к современному моменту номинала погашения *N* и купонных выплат $\{qN\}$. Легко видеть, что обе эти величины убывают при повышении ставки процента *i*, значит, и цена облигации при этом

также падает. Это падение тем больше, чем дальше момент гашения облигации.

**Пример 1.** Взяты две облигации: I и II, обе номиналом 1000. Первая

будет погашена через 6 лет, вторая – через 18 лет. Купонная ставка одинакова

– 8%. Получилась такая зависимость цен облигаций от ставки процента:

| Ставка процента | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| цена облигаций I | 709 | 634 | 568 | 510 | 469 | 413 |
| цена облигаций II | 359 | 258 | 186 | 136 | 100 | 74 |

# ГЛАВА XIII. КЛАССИЧЕСКАЯ СХЕМА СТОИМОСТИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

## 13.1. Понятие риска

В финансовом анализе производственных инвестиций мы неизбежно сталкиваемся с неопределенностью, неоднозначностью показателей затрат и отдачи. В связи с этим возникает проблема измерения риска и его влияния на результаты инвестиций.

Широко распространенный термин «риск», как известно, понимается неоднозначно. Его содержание определяется той конкретной задачей, где этот термин используется. Достаточно просто перечислить такие понятия как кредитный, валютный, инвестиционный, политический, технологический риски, риск ликвидности активов и т.д. Отметим, что даже самое общее определение этого понятия не оставалось неизменным во времени.

Говоря о первом в экономике научном определении риска, обычно ссылаются на Ф. Найта (1921), который предложил различать риск и неопределенность. Риск имеет место тогда, когда некоторое действие может привести к нескольким взаимоисключающим исходам с известным распределением их вероятностей. Если же такое распределение неизвестно, то соответствующая ситуация рассматривается как неопределенность. Как нам представляется, здесь речь идет, скорее, не об определении риска, а лишь о наличии информации, характеризующей риск.

В экономической практике, особенно финансовой, обычно не делают различия между риском и неопределенностью. Чаще всего под *риском понимают некоторую возможную потерю, вызванную наступлением случайных неблагоприятных событий.* В

некоторых областях экономической деятельности сложились устойчивые традиции понимания и измерения риска. Наибольшее внимание к измерению риска проявлено в страховании.

В инвестиционном анализе и страховом деле риск часто измеряется с помощью таких стандартных статистических характеристик, как дисперсия и среднее квадратическое (стандартное) отклонение. Обе характеристики измеряют колебания, в данном случае – колебания дохода. Чем они больше, тем выше рассеяние показателей дохода вокруг средней и, следовательно, степень риска.

Напомним, что между дисперсией ($D$) и средним квадратическим отклонением ($\sigma$) существует следующее соотношение:

$$\sigma = \sqrt{D}$$

В свою очередь дисперсия относительно выборочной средней $\bar{x}$ находится как

$$D = \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

где $n$ – количество наблюдений, $\bar{x}$ – средняя случайной переменной $x$.

Как известно, среднее квадратическое отклонение имеет то неоспоримое достоинство, что при близости наблюдаемого распределения (например, распределении дохода от инвестиций) к нормальному, что, строго говоря, должно быть статистически проверено, этот параметр может быть использован для определения границ, в которых с заданной вероятностью следует ожидать значение случайной переменной. Так, например, с вероятностью 68% можно утверждать, что значение случайной переменной x (в нашем случае доход) находится в границах $\bar{x} \pm \sigma$, а с вероятностью 95% – в пределах $\bar{x} \pm 2\sigma$ и т.д.

**Определение риска**

В настоящее время мы являемся свидетелями существенного изменения отношения общества к индустриализации и научно-

техническому прогрессу. В начале 20 в. ускорение роста и увеличение масштабов материального производства и потребления, активное использование природных ресурсов рассматривались как положительные тенденции развития цивилизации. Но одновременно резко увеличилось число и масштабы производственных аварий и катастроф. И сейчас, к сожалению, стало обыденным словосочетание "природная катастрофа". Материальные убытки общества от аварий и катастроф неуклонно возрастают.

Таким образом, современное общество все более четко осознает тот факт, что дальнейшее развитие цивилизации невозможно без установления жесткого контроля над потенциально опасными производствами. Вопросы обеспечения безопасности вышли на первый план. Практически ни один новый проект не имеет шансов на существование без строгой экологической экспертизы.

Результатом формирования нового, «безопасного» мышления стало возникновение и быстрое развитие новой области знания – управление риском.

**Управление риском** – это синтетическая научная дисциплина, которая изучает влияние на различные сферы деятельности человека случайных событий, наносящих физический и материальный ущерб.

Основные свои понятия и методы теория управления риском почерпнула из техники и инженерии, теории машин и механизмов, страхового и биржевого дела.

Впервые понятия риск и «ущерб» применительно к деловой сфере человеческой деятельности были сформулированы в страховом деле, а позднее и в биржевом.

Традиционные области механики, в частности теория машин и механизмов, имеют дело с изучением надежности различных устройств. Из этой сферы в теорию управления риском пришли

такие методы выявления риска, как деревья событий и деревья отказов. Менеджмент в качестве науки управления привнес в новую область знаний понимание того, какой должен быть организован процесс анализа и оценки риска. И конечно, в управлении риском широко используются понятия и методы теории вероятностей и математической статистики, факторного анализа и теории принятия решений.

Риск-менеджмент оформился в отдельную науку во второй половине XX в. Характерно, что каждый очередной этап консолидации знаний в этой области и дальнейшего развития теории инициировался какой-нибудь крупной промышленной катастрофой. Впервые серьезные исследования, приведшие к созданию методики оценки рисков опасных производств, были проведены после известной катастрофы, произошедшей на газохранилище в Кливленде (США) в 1944 г.

Терминология риск-менеджмента на данный момент еще полностью не сформировалась. Это связано с разнообразием видов рисков, которые являются объектом рассмотрения и которые необходимо объединить в рамках общего подхода. Например, своя терминология существует для страховых рисков, совсем другая – в математической статистике.

В современной теории рисков можно выделить три категории понятия риска:

1. Риск – возможная опасность и упущенная выгода.

То есть, чем больше доход или прибыль, тем больше опасность или угроза потерь. Данное понятие используется при определении отношения лица принимающего решение к риску (отрицание, безразличие, склонность к риску) и при построении областей, полей, зон риска (допустимый, критический, катастрофический риск).

2. Риск – возможная ошибка, отклонение от среднего значения показателя (прогнозируемого, расчетного, планового).

То есть, чем больше отклонение, тем больше риск и потери. Данное понятие используется в принятии решений (управленческий риск) и при сравнении и выборе вариантов (проектов).

3. Риск – это неблагоприятное событие, которое характеризуется вероятностью появления и возможным ущербом, потерями.

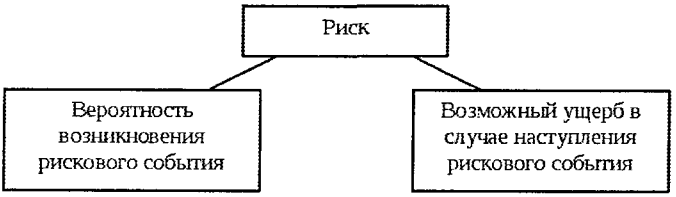
Это наиболее общее определение риска, характерное для любых областей деятельности человека, предприятия, страны и общества в целом. При использовании этого понятия, кроме количественных оценок риска (вероятность и величина потерь), можно определить качественные оценки риска (причины, место и время возникновения, последствия).

**Риск** – событие или группа родственных случайных событий, наносящих ущерб объекту, обладающему этим риском.

*Случайность* наступления события означает невозможность определить точно время (а иногда и место) его возникновения.

Под *объектом* понимается материальный объект или имущественный интерес. В качестве материального объекта может выступать человек или какое-либо имущество, а имущественного интереса – некое нематериальное свойство объекта, например, прибыль.

*Ущерб* –ухудшение или потеря свойств объекта. Если объектом выступает человек, то ущерб может выражаться в виде ухудшения его здоровья или смерти. Потеря свойств имущества выражается в его разрушении, ухудшении его потребительских свойств, потере стоимости. Ущерб может быть выражен в натуральном виде (физический) или в стоимостном выражении (экономический).




Основные количественные характеристики риска

## Основные свойства рисков

Возникновение рисков обусловлено неопределенностью, вероятностным характером будущих событий и состояний постоянно изменяемой внутренней и внешней среды организации. Поэтому риски присутствуют во всех сферах деятельности любой организации и полное устранение рисков невозможно.




Основные источники возникновения рисков

При анализе рисков используется принцип их независимости, который заключается в следующем:

1. Величина потерь от разных рисков независима друг от друга.

2. Реализация, появление определенного риска не влияет на вероятность возникновения другого риска.

## Классификация затрат

Для качественного и количественного анализа, выбора методов управления рисками, необходимо определить потери (убытки), которые возникают при появлении неблагоприятных событий в процессе предпринимательской деятельности. Основные виды потерь (убытков) в зависимости от их принадлежности к конкретному виду используемых предприятием ресурсов, ответственности за ущерб, можно разделить на следующие группы.

1. Финансовые потери. Это прямой денежный ущерб, который может быть нанесен предприятию вследствие реализации определенных рисков (изменение инфляции, валютного курса, налогов), потери прямой прибыли или упущенной выгоды (снижение цены, объемов реализации товаров; приостановка нормальной производственной деятельности), непредусмотренные платежи (выплата штрафов за невыполнение обязательств, судебные и юридические издержки, компенсации за вынужденный простой), неполучение денежных средств из предусмотренных источников (изменение стоимости ценных бумаг, отказ в кредите).

2. Материальные потери. Представляют собой прямые потери производственных фондов (оборудование, здания и сооружения, выпущенная продукция, запасы на складах, сырье и материалы, энергия), полную восстановительную стоимость имущества предприятия (строительство, закупки, поставки, монтаж, наладка).

3. Потери времени. Связаны с потерей фондов рабочего времени вследствие случайных обстоятельств (выход из строя оборудования, болезнь работника), замедление процесса предпринимательской деятельности по сравнению с плановым (увеличение оборота капитала, прибыли).

4. Социальные потери. Связаны с нанесением ущерба здоровью и жизни людей, персонала предприятия вследствие аварий, несчастных случаев (оплата расходов на лечение, выплаты по нетрудоспособности).

5. Репутационные потери. Связаны с нанесением ущерба престижу предприятия, имиджу участников, с изменением отношения покупателей, средств массовой информации, органов государственной власти.

6. Экологические потери. Связаны с нанесением ущерба окружающей среде в результате производственной деятельности, аварий, катастроф (загрязнения воды, атмосферы, земли; ухудшения качества жизни, продуктов питания; ухудшение состояния природных ресурсов; дополнительные расходы на медицинское обслуживание).

7. Морально-психологические потери. Обусловлены нарушением устойчивости функционирования организационной структуры предприятия (текучесть кадров; нездоровый психологический климат в коллективе; конфликты между работниками, менеджерами).

При оценке ущерба от различных рисков необходимо учитывать как прямые, так и косвенные потери (убытки). Прямые потери (убытки) – это финансовые, материальные, потери времени. Косвенные потери (убытки) – это социальные, репутационные, экологические, морально-психологические. Как правило, ущерб от всех видов потерь (убытков) можно выразить в денежной форме. На практике размер косвенных убытков во много раз (примерно на порядок) превышает размер прямых.

## Классификация рисков

Основные виды рисков. В процессе деятельности промышленных предприятий могут возникать следующие виды рисков.

1. Предпринимательские риски:

– низкий уровень квалификации и опыта управленческого персонала;

– низкий уровень менеджмента в деятельности организации;

– нарушение обязательств контрагентами;

– себестоимость, качество продукции;

– потери имущества предприятия;

– возникновение непредвиденных расходов (срочные, непредусмотренные работы и поставки; выплата штрафных санкций и судебных издержек);

– условия сбыта, реклама, сервис;

– наличие оборотных средств;

– изменения клиентуры, нестабильность поставок:

2. Коммерческие риски.

– изменения конъюнктуры рынка (спрос, предложение);

– изменения конкуренции;

– уменьшение объемов реализации продукции (сегментация рынка, стратегия продаж, ценообразование);

– снижение цены на продукцию;

– увеличение длительности сбыта продукции (реклама, взаимодействие с контрагентами и партнерами, продвижение товара к потребителям);

– изменения платежеспособности покупателей.

3. Финансовые риски:

– риск снижения финансовой устойчивости (большая доля заемного капитала; несбалансированность объемов положительных и отрицательных денежных потоков предприятия; угроза банкротства);

– риск неплатежеспособности (снижение уровня ликвидности оборотных активов предприятия);

– инфляционный риск (возможность обесценивания реальной стоимости капитала, финансовых активов предприятия; возможность обесценивания ожидаемых доходов);

– процентный риск (изменение депозитной, кредитной процентной ставки под влиянием конъюнктуры финансового рынка и государственного регулирования);

– валютный риск (изменения обменного курса валют, характерен для предприятий осуществляющих внешнеэкономическую деятельность, т.е. импорт и экспорт);

– депозитный риск (возможность невозврата депозитных вкладов, вследствие неудачного выбора банка);

– кредитный риск (непогашение платежных обязательств перед банком-кредитором; неплатеж, несвоевременный расчет за отпущенную в кредит готовую продукцию);

– налоговый риск (введение новых налогов и сборов; увеличение уровня ставок налогов; изменение условий осуществления налоговых платежей; отмена налоговых льгот);

– структурный риск (неэффективное финансирование текущих затрат предприятия; высокий удельный вес постоянных издержек; снижение положительного денежного потока по операционной деятельности);

– криминогенный риск (объявление фиктивного банкротства; подделка документов; хищение активов персоналом предприятия).

4. Инвестиционные риски:

– несвоевременность, низкий уровень подготовки инвестиционного проекта;

– несвоевременное открытие финансирования по проекту;

– неправильное оформление юридических прав;

– несвоевременное завершение проектно-конструкторских работ, строительно-монтажных работ;

– технические ошибки в проекте;

– превышение сметы проекта;

– потеря инвестиционной привлекательности проекта (упущенная выгода, снижение доходности);

– снижение эффективности проекта;

– появление новых альтернативных (аналогичных) технологий и товаров;

– предпринимательская, производственная, коммерческая деятельность на этапе эксплуатации проекта.

5. Производственные риски:

– уровень применяемой техники и технологий, производительности;

– не достижение проектной мощности предприятия;

– нарушения ритмичности производства;

– высокий уровень дополнительных производственных затрат;

– увеличение длительности производственного цикла;

– снижение, остановка производства продукции;

– отклонения в производственных процессах от заданных технико-экономических параметров;

– высокий уровень аварийности, брака, отказов оборудования.

6. Политические риски.

– социально-политические изменения;

– действия органов государственной власти;

– международные события;

– введение эмбарго, мораториев;

– национализация, экспроприация предприятий;

– социальные конфликты, забастовки, революции;

– военные действия;

– террористические акты.

7. Экономические риски:

– нестабильность экономики, спад экономики государства;

– изменение динамики технико-экономических показателей;

– изменения налогообложения;

– введение ограничений на торговлю;

– уровень инфляции.

8. Нормативно-законодательные риски:

– изменения в законодательной, нормативной базе;

– получение лицензий, разрешений от органов власти;

– условия инвестирования, использования прибыли.

9. Экологические риски:

– нанесение ущерба окружающей среде, жизни и здоровью граждан;

– аварии на промышленных объектах.

10. Форс-мажор:

– природные катастрофы;

– социальные конфликты, забастовки, революции, войны;

– террористические акты.

Основные классификационные признаки рисков.

Наиболее распространены следующие классификационные признаки рисков.

**По характеру деятельности:**

1) Предпринимательские риски.

2) Финансовые риски.

3) Коммерческие риски.

4) Инвестиционные риски.

5) Производственные риски.

6) Транспортные риски.

7) Профессиональные риски.

2. По сферам проявления:

1) Экономические риски.

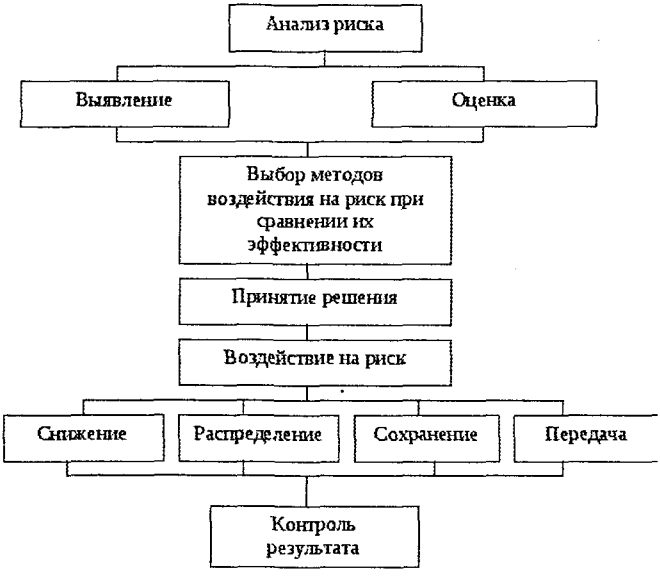
2) Политические риски.

3) Социальные риски.

4) Нормативно-законодательные риски.

**Управление риском** – это многоступенчатый процесс, имеющий своей целью уменьшить или компенсировать ущерб для объекта при наступлении неблагоприятных событий.

Общая схема процесса управления риском выглядит следующим образом:




**Анализ риска** – это начальный этап, имеющий целью получение необходимой информации о структуре, свойствах объекта и имеющихся рисках. Анализ состоит из выявления рисков и их оценки. При *выявлении рисков* (качественный анализ) определяются все риски, присущие исследуемой системе. *Оценка* – это количественное описание выявленных рисков, в ходе которого определяются такие характеристики, как вероятность и размер возможного ущерба. В это время формируется

набор сценариев развития неблагоприятных событий, и для различных рисков могут быть построены функции распределения вероятности наступления ущерба в зависимости от его размера.

Затем наступает этап выбора **метода воздействия на риски с целью** минимизировать возможный ущерб в будущем. Как правило, каждый вид риска допускает два-три традиционных способа его уменьшения. Поэтому возникает проблема оценки сравнительной эффективности методов воздействия на риск для выбора наилучшего из них. Сравнение может происходить на основе различных критериев, в том числе экономических.

После выбора оптимальных способов воздействия на конкретные риски появляется возможность сформировать общую стратегию управления всем комплексом рисков предприятия. Это этап принятия решений, когда определяются требуемые финансовые и трудовые ресурсы, происходит постановка и распределение задач среди менеджеров, осуществляется анализ рынка соответствующих услуг, проводятся консультации со специалистами.

Заключительным этапом управления риском является **контроль и корректировка результатов** реализации выбранной стратегии с учетом новой информации. Контроль состоит в получении информации от менеджеров о произошедших убытках и принятых мерах по их минимизации. Он может выражаться в выявлении новых обстоятельств, изменяющих уровень риска, передаче этих сведений страховой компании, наблюдении за эффективностью работы систем обеспечения безопасности и т.д. Раз в несколько лет должен происходить пересмотр данных об эффективности используемых мер по управлению рисками с учетом информации о произошедших за этот период убытках.

## 13.2. Отношение инвестора к рискам

Управление рисками проекта. Управление рисками в проекте включает следующие процессы:

– идентификация рисков;

– количественная оценка рисков;

– методы реагирования, нейтрализации рисков;

– контроль рисков в ходе выполнения проекта.

Процессы управления проектными рисками, их взаимодействие с другими процессами проекта изложены в международных стандартах по управлению проектами. Управление рисками осуществляется на всех фазах жизненного цикла проекта, а именно:

1. Риски доинвестиционной фазы проекта. На этой фазе определяются, анализируются основные риски присущие конкретному проекту. На основе предварительной оценки эффективности проекта и его рисков принимается решения о целесообразности реализации проекта и начале его финансирования. Можно выделить:

1) Риски стадии анализа инвестиционных возможностей, направления и прогноза развития предприятия, региона и т.д.

Для этой стадии характерны следующие риски:

– политический риск;

– экономический риск;

– административный риск.

Мониторинг данных рисков осуществляется на протяжении всего жизненного цикла проекта.

2) Риски стадии идентификации проекта.

Для этой стадии характерны следующие риски:

– ошибки в разработке концепции проекта;

– ошибки в определение расположения проекта (ресурсная возможность региона; социальная стабильность; состояние инфраструктуры);

– ошибки в маркетинговых прогнозах (изменение спроса, появление альтернативного продукта, изменение платежеспособности потребителей, выбор сегмента рынка);

– ошибки в прогнозах стоимости проекта и его доходов;

– экологический риск (наличие опасных производственных процессов);

– социальный риск (реакция населения на осуществление проекта, влияние проекта на уровень занятости);

– форс-мажорные риски.

Мониторинг маркетинговых прогнозов, прогнозов стоимости и доходов проекта, экологических, социальных, форс-мажорных рисков осуществляется на протяжении всего жизненного цикла проекта.

3) Риски стадии подготовки проекта.

Для этой стадии характерны следующие риски:

– ошибки в определении содержания проекта (масштаб, временные границы, иерархическая структура работ проекта);

– ошибки в определении технической, технологической осуществимости проекта;

– ошибки в определении источников финансирования;

– финансовый риск.

Мониторинг содержания проекта, финансовых рисков осуществляется на протяжении всего жизненного цикла проекта.

4) Риски стадии разработки и экспертизы проекта.

Для этой стадии характерны следующие риски:

– ошибки в определении эффективности проекта и его основных рисков;

– ошибки в проведении проектного анализа;

– низкий запас прочности, устойчивости проекта.

Анализ эффективности проекта и его рисков осуществляется на протяжении всего жизненного цикла проекта.

5) Риски стадии детального проектирования.

Для этой стадии характерны следующие риски:

– ошибки при планировании проекта;

– научно-технический риск;

– правовой риск.

Реализация данных рисков имеет существенное влияние на проект (снижение эффективности, отказ от проекта), может являться причиной многих рисков последующих фаз жизненного цикла проекта.

2. Риски инвестиционной фазы проекта. На этой фазе осуществляется освоение значительной доли инвестиций в проект (70–80 %). Риски, возникающие на инвестиционной фазе проекта, имеют значительный ущерб (потери), могут привести к резкому увеличению затрат на проект, снижению его эффективности и отказу от него. Для данной фазы жизненного цикла проекта, можно выделить:

1) Риски стадии проведения тендеров, заключения контрактов.

Для этой стадии характерны следующие риски:

– риски участников проекта;

– невыполнение контрактных обязательств исполнителями проекта;

– юридический риск;

– снижение платежеспособности заказчика проекта.

Мониторинг данных рисков для различных участников проекта (поставщик, подрядчик, проектировщик и т.д.) осуществляется на протяжении всего жизненного цикла проекта.

2) Риски стадии инженерно-технического проектирования.

Для этой стадии характерны следующие риски:

– научно-технический риск;

– конструкторский, технологический риск.

Последствия данных рисков могут являться причиной некоторых рисков эксплуатационной фазы жизненного цикла проекта (низкое качество работы объекта, продукта проекта; производственный риск).

3) Риски стадии строительства.

Для этой стадии характерны следующие риски:

– риск несвоевременного завершения строительных работ.

– непредвиденные затраты на реализацию проекта;

– риск увеличения сметной стоимости проекта.

Возникновение данных рисков может привести к увеличению стоимости, длительности проекта, снижению его эффективности и отказу от него.

4) Риски стадии производственного маркетинга.

Для этой стадии характерны следующие риски:

– несоответствие продукта проекта потребностям рынка;

– ошибки в оценке общей емкости рынка и аналогичной продукции;

– необходимость дополнительных маркетинговых исследований, рекламы;

– несоответствие проекта существующим каналам сбыта;

– ошибки в оценке трудностей выхода на рынок;

– ошибки в определении эластичности цены на продукцию;

– ошибки в оценке ожидаемого характера конкуренции, ее влияния на цену продукта проекта.

Последствия данных рисков могут являться причиной некоторых рисков эксплуатационной фазы жизненного цикла проекта (сбытовой риск).

5) Подготовка персонала.

Для этой стадии характерны следующие риски:

– несвоевременная подготовка персонала;

– низкий уровень квалификации, подготовки персонала.

Последствия данных рисков могут являться причиной некоторых рисков эксплуатационной фазы жизненного цикла проекта (низкое качество продукции, производственный риск).

3. Риски эксплуатационной фазы проекта.

На этой фазе происходит получение доходов от реализации продукта проекта. Риски, возникающие на эксплуатационной фазе проекта, могут привести к дополнительным затратам, к уменьшению прибыли и периода реализации проекта, снижению его эффективности и досрочному завершению. Для данной фазы жизненного цикла проекта, можно выделить:

1) Риски стадии сдачи проекта в эксплуатацию.

Для этой стадии характерны следующие риски:

– низкое качество работы проектного объекта;

– производственный риск.

Последствия данных рисков могут привести к дополнительным затратам, к уменьшению прибыли от реализации проекта, являться причиной некоторых рисков стадии расширения производства.

2) Риски стадии расширения производства.

Для этой стадии характерны следующие риски:

– невыполнение контрактных обязательств подрядчиками, поставщиками;

– низкое качество продукции проекта;

– изменения уровня цен, инфляции, стоимости капитала;

– сбытовой риск;

– управленческий риск.

Последствия данных рисков могут привести к дополнительным затратам, уменьшению прибыли и периода реализации проекта, к его досрочному завершению.

Развитие современной экономики, в т. ч. аграрного сектора, с учетом перспектив вступления России во Всемирную торговую организацию (ВТО), требует эффективных способов защиты

отечественных производителей в рамках свободного экономического пространства. Для сельскохозяйственных организаций актуальной становится разработка программы оценки рисков и управления ими для повышения эффективности деятельности. Риск – это комплекс факторов, действий или процессов, которые могут привести к материальным и другим потерям. Он возникает вследствие сознательного действия, однако в определенных условиях и прекращение действия может вести к его наступлению. Все риски в зависимости от возможного результата делятся на две большие группы – чистые и спекулятивные. Чистые риски предполагают возможность получения отрицательного или нулевого результатов. Их причинами могут быть: стихийные бедствия, войны, несчастные случаи, преступные действия, недееспособность организаций и др. Спекулятивные предполагают возможность получения как положительных, так и отрицательных результатов. Их причины: изменение конъюнктуры рынка, курсов валют, налогового законодательства и т. д. Сельскохозяйственные производители сталкиваются с множеством рисков, приводящих к значительным колебаниям доходов по годам. К основным рискам сельского хозяйства относятся: – макроэкономические, обусловленные ухудшением внутренней и внешней конъюнктуры мировых цен на отдельные товары российского экспорта, снижением темпов роста экономики и уровня инвестиционной активности, которые не позволяют интенсифицировать развитие агропромышленного комплекса и усиливают его зависимость от государственных инвестиций. В результате негативных макроэкономических процессов может снизиться спрос на продукцию агропромышленного комплекса, а также могут сократиться реальные доходы сельского населения; – природно-климатические, поскольку колебания погодных условий оказывают серьезное влияние на урожайность сельскохозяйственных культур, объемы

их производства. Зависимость функционирования отрасли от природно-климатических условий также снижает ее инвестиционную привлекательность; – социальные. Они связаны с вероятностью усиления социальной непривлекательности сельской местности и увеличения разрыва между городским и сельским уровнями жизни, которые могут привести к демографическому кризису и нехватке трудоспособного населения, что поставит под угрозу срыва реализацию программ развития аграрного сектора; – торгово-политические. Они обусловлены функционированием аграрного сектора в увязке с ситуацией на международных рынках и деятельностью экспортеров и импортеров сельхозпродукции на внутреннем рынке, а также возрастанием конкуренции в результате вступления России в ВТО и усилением ограничений, прежде всего по внутренней поддержке сельского хозяйства, тарифному квотированию и уровню таможенных пошлин; – законодательные, возникающие по причине несовершенства законодательной базы по регулированию сельскохозяйственной деятельности. При этом сложности юридического оформления права собственности на земельные участки ограничивают возможность сельскохозяйственных организаций использовать землю в качестве предмета залога и не позволяют товаропроизводителям привлекать финансовые ресурсы на реальных рыночных условиях.

## 13.3. Количественная оценка риска и методы его снижения

Общая последовательность анализа рисков включает в себя следующие этапы:

1. Выявление их источников и причин.
2. Идентификация всех возможных рисков.
3. Оценка уровня отдельных рисков.
4. Определение их допустимого уровня.

5. Разработка мероприятий по их снижению.

В соответствии с данной последовательностью оценка делится на качественную (этапы 1, 2 и 5) и количественную (3 и 4). Задача качественной оценки – выявление возможных видов риска, а также их источников. Кроме того, необходимо дать стоимостную оценку возможным последствиям реализации выявленных рисков и разработать мероприятия по минимизации этих последствий или же их компенсации. Результаты качественной оценки – основа для осуществления количественного анализа, который предполагает расчет числовых значений вероятности наступления рисковых событий и их последствий, степени (уровня) риска и допустимого уровня в данной конкретной ситуации. Экономический анализ позволяет качественно и количественно оценить риски организации. При количественном анализе требуется оценить их с вероятностной точки зрения. Для этого необходима определенная база данных, на основе которых строятся различные статистические и финансовые показатели. Анализ рисков, связанных с финансовым состоянием предприятия, использует стандартные финансовые коэффициенты в динамике за последние годы, построенные на основе данных бухгалтерской отчетности.

При анализе технологических рисков (урожайности) используются различные технологические параметры, например объем внесенных удобрений по бюджету и фактически, средняя урожайность за пять предыдущих лет, процент износа многолетних насаждений и т. д. Для анализа ценовых рисков исходной информацией служат цены на продукцию и ресурсы сельскохозяйственного производства. Используются различные статистические показатели (размах вариации, среднеквадратическое отклонение, коэффициент вариации и т. д.), цены исследуются в различных разрезах (по видам продукции, по срокам и покупателям).

• Идентификация и количественная характеристика рисков. Идентификация риска предполагает определение природы риска и его описание, т. е. составление исчерпывающего перечня всех рисковых ситуаций, которые потенциально существуют и могут возникнуть в деятельности сельскохозяйственного предприятия. Идентифицированному риску следует дать количественную характеристику, которая предполагает определение последствий риска. В этапы идентификации и количественной характеристики риска входят: – определение опасностей (анализ причин возникновения риска и характеристика связей между системой устранения риска и природными факторами); — анализ параметров риска (определение тяжести, частоты и интенсивности риска и характеристика экосистемы с точки зрения возможных опасностей);

– описание возможных соотношений (оценка соотношения между уровнем распознаваемости риска и возможностью его предотвращения);

– оценка риска (количественная оценка последствий рисковой деятельности). Для количественной характеристики может использоваться метод расчета коэффициента экономического риска, в основу которого положена стандартная производная функция:

$$B = f(A_1,..., A_n), \qquad (1)$$

где $B$ - валовой доход; $A_1,..., A_n$ - факторы риска, влияющие на валовой доход. Данную производную функцию с учетом влияния капитальных вложений $T$ и возможного увеличения масштаба производства (производственных факторов и, соответственно, выпуска сельхозпродукции) в $g$ раз можно представить следующим образом:

$$g^r B = Tf(gA_1,...., gA_n) \qquad (2)$$

где $r$ – степень однородности (фактор масштаба производства). Величина $r$ показывает степень отдачи от увеличения масштабов производства. Ее использование рассматривается с точки зрения воздействия каждого из параметров, включаемых в факторную модель, на валовой доход. На отождествление величины отдачи $r$ с показателями, характеризующими экономический риск, влияют:

– вероятность совпадения нескольких неблагоприятных обстоятельств; – вероятность совпадения нескольких благоприятных обстоятельств;

– абсолютный размер потерь в случае совпадения неблагоприятных обстоятельств. Неустойчивость сборов сельхозпродукции находится в существенной зависимости от водности того или иного года и доли продукции того или иного вида, производимой на орошаемых землях. Для сельскохозяйственных культур уровень урожайности и орошения обуславливается лимитирующим действием следующих факторов:

– неуправляемые: приходящая солнечная радиация, тепло обеспеченность, условия увлажнения атмосферными осадками, продолжительность безморозного периода;

– управляемые: сортовые особенности выращиваемых культур, потенциал их продуктивности, качество саженцев, обеспеченность элементами орошения, фондов энергообеспеченность. В качестве статистического метода исследования влияния перечисленных факторов на результаты сельхозпроизводства (прежде всего на урожайность) целесообразно применять метод сравнения динамических рядов. При этом тренд характеризует основную закономерность движения во времени, в основном свободную от случайных воздействий, а под тенденцией понимается некоторое общее направление развития.

Для оценки вероятности возникновения рисков и уровня возможных потерь используется также экспертный метод. На наш

взгляд, он наиболее эффективен для оценки рисков в конкретной организации, учитывая высокую неопределенность условий хозяйствования в этой отрасли. Его эффективность будет зависеть от квалификации экспертной комиссии. В качестве экспертов могут выступать работники сельскохозяйственной организации и специально приглашенные специалисты в данной области, которые определяют наиболее вероятный уровень потерь при производстве и реализации конкретного вида продукции от того или иного риска.

**Методы снижения рисков.**

Основные методы снижения рисков в экономике независимо от отраслевой специфики: хеджирование, распределение, диверсификация, страхование, резервирование (самострахование), минимизация (управление активами и пассивами) и избежание (отказ от связанной с рисками операции). Основной организационный способ диверсификации сельхозпроизводства – образование агрохолдингов, объединяющих различные агропромышленные предприятия. Это позволяет снять часть проблем, связанных с ценовыми рисками на предприятиях как сельского хозяйства, так и перерабатывающей промышленности, а также сокращает финансовые риски членов агрохолдинга. Диверсификация подразумевает также комбинирование различных производственных направлений с целью сокращения серьезных колебаний в уровне доходов. Финансовые риски можно снизить с помощью создания собственных финансовых резервов, страхования, хранения имущества в натуральной форме в условиях инфляции, обеспечения ликвидности фондов, прогнозирования финансово-кредитной и налоговой политики, а также состояния финансового рынка, повышения ответственности за своевременность финансовых расчетов, использования форвардных контрактов и других способов хеджирования. При

рассмотрении способов снижения рисков необходимо учитывать этапы производственной деятельности и характеристики возникающих рисков. Так, при предпосадочной подготовке почвы и высадке деревьев способами могут быть: применение специальных технологий, гибкая агротехника, использование устойчивых сортов, мелиорация, организация своевременного ремонта техники, создание материальных резервов, в т. ч. резерва мощностей; укрепление трудовой дисциплины, гибкое материальное стимулирование, повышение квалификации кадров и пр. При хранении и реализации продукции риски можно снизить: проведением профилактических мероприятий (ремонт помещений, правильная закладка продукции и ее хранение), созданием собственных финансовых резервов, расширением рынков сбыта, усилением контрольных функций, выбором гибкой стратегии и тактики, повышением ответственности за выполнение договоров, обучением работников использованию новых технологий и техники. Но самый распространенный и эффективный метод снижения рисков сельскохозяйственного производства – страхование.

Главная функция страхования - обеспечение страхователей адекватным страховым покрытием в случае негативных экономических последствий, вызванных отдельными рисками. Поэтому оно играет ключевую роль в обеспечении социальной и экономической защиты и повышении экономической стабильности сельхозпроизводства в целом. Наиболее важный страховой продукт – субсидируемое страхование урожая от множественных рисков, обычно погодных, но к ним могут быть добавлены риски повреждения культур дикими животными, противоправные действия третьих лиц и др. Эффективность существующей системы управления рисками в сельском хозяйстве определяется следующими положениями: • страхование позволяет планировать

и контролировать экономическую деятельность, компенсировать случайные вредные последствия;

В современных условиях особое внимание уделяется классификации рисков, особенно в сельскохозяйственных организациях. В зависимости от условий производства сельхозпродукции страховщик может устанавливать критерии определения частичной утраты урожая. Если из-за плохого урожая объем продукции, выставляемой на продажу, невелик, то для обеспечения своей ликвидности хозяйствам крайне важно своевременно получить выплаты по страхованию. При условии появления надежной статистики погоды и урожайности должны получить дальнейшее развитие страховые продукты на основе индексов (урожайности, погоды), а также страховое покрытие доходов: это позволит решить проблемы, связанные с доверием между страховыми компаниями и сельхозпроизводителями, снижением затрат на оценку убытков и ускорением страховых выплат.

# ГЛАВА XVI. ДИСПЕРСИЯ ДОХОДА

## 14.1. Диверсификация инвесторов и дисперсия доходов

Определим теперь что дает диверсификация для уменьшения риска и выявим условия, когда эта цель достигается. В качестве объекта анализа примем некоторый абстрактный портфель ценных бумаг (далее для краткости – портфель). Такой выбор объясняется методологическими преимуществами – в этом случае проще выявить зависимости между основными переменными. Однако многие из полученных результатов без большой натяжки можно распространить и на производственные инвестиции.

В предыдущем параграфе отмечалось, что в качестве измерителя риска в долгосрочных финансовых операциях широко распространена такая мера, как дисперсия дохода во времени. Диверсификация портфеля при правильном ее применении приводит к уменьшению этой дисперсии при всех прочих равных условиях. Диверсификация базируется на простой гипотезе. Если каждая компонента портфеля (в рассматриваемой задаче - вид ценной бумаги) характеризуется некоторой дисперсией дохода, то доход от портфеля имеет дисперсию, определяемую его составом. Таким образом, *изменяя состав портфеля, можно менять суммарную дисперсию дохода, а в некоторых случаях свести ее к минимуму.*

Итак, пусть имеется портфель из $n$ видов ценных бумаг. Доход от одной бумаги вида $i$ составляет величину $d_i$. Суммарный доход $(A)$, очевидно, равен

$$A = \sum_i a_i d_i \qquad (14.1)$$

где $a_i$ – количество бумаг вида $i$.

Если $d_i$ представляет собой средний доход от бумаги вида то величина $A$ характеризует средний доход от портфеля бумаг в целом.

Для начала положим, что показатели доходов различных видов бумаг являются статистически независимыми величинами (иначе говоря, не коррелируют между собой). Дисперсия дохода портфеля (обозначим ее как $D$) в этом случае находится как

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D_i \qquad (14.2)$$

где $D_i$ – дисперсия дохода от бумаги вида $i$, $n$ – количество видов ценных бумаг.

Для упрощения, которое нисколько не повлияет на результаты дальнейших рассуждений, перейдем от абсолютного измерения количества ценных бумаг к относительному. Пусть теперь $a_i$ характеризует долю в портфеле бумаги вида $i$, т.е.

$$0 \le a_i \le 1, \qquad \sum a_i = 1$$

Для зависимых в статистическом смысле показателей дохода отдельных бумаг дисперсию суммарного дохода находим следующим образом:

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D_i + 2\sum_{i \ne j} a_i a_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j \qquad (14.3)$$

где $D_i$ – дисперсия дохода от бумаги вида $i$, $r_{ij}$ – коэффициент корреляции дохода от бумаг вида $i$ и $j$, $\sigma_i$ и $\sigma_j$ – среднее квадратическое отклонение дохода у бумаг вида $i$ и $j$.

Коэффициент корреляции двух случайных переменных $x$ и $y$, как известно, определяется по формуле

$$r_{xy} = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n \sigma_x \sigma_y} \qquad (14.4)$$

где $\bar{x}, \bar{y}$ – средние (в нашем случае средние доходы двух видов бумаг).

Для расчетов часто применяется следующая рабочая формула:

$$r_{xy} = \frac{n\sum xy - \sum\bar{x}\sum\bar{y}}{\sqrt{\left|\sum x^2 - \left(\sum\bar{x}\right)^2\right| \cdot \left|n\sum y^2 - \left(\sum\bar{y}\right)^2\right|}}$$

Поскольку коэффициент корреляции может быть как положительной, так и отрицательной величиной, то, как это вытекает из (14.3), при положительной корреляции дисперсия суммарного дохода увеличивается, при отрицательной она сокращается. В самом деле, при заметной отрицательной корреляции положительные отклонения от среднего дохода одних бумаг погашаются отрицательными отклонениями у других. И наоборот, при положительной корреляции отклонения суммируются, что увеличивает общую дисперсию и риск.

Проследим теперь, каково влияние масштаба диверсификации на размер риска. Под масштабом диверсификации здесь будем понимать количество объектов, выбранных для инвестиции (количество видов ценных бумаг). Обратимся к условному примеру, который позволяет наиболее отчетливо выделить влияние указанного фактора. Итак, пусть портфель состоит из бумаг различного вида, но имеющих одинаковую дисперсию дохода $(\sigma_0^2)$. Удельные веса в портфеле каждого вида бумаг также одинаковы,

а общая сумма вложений равна 1. Положим, что показатели доходности у отдельных видов бумаг статистически независимы, т.е. применима формула (14.2). В этих условиях для оценки величины среднего квадратического отклонения дохода портфеля получим

$$D = \frac{1}{n}\sigma_0^2$$

где $n$ – количество видов ценных бумаг.

Воспользуемся приведенной формулой и определим дисперсию дохода для портфеля, состоящего из двух и трех видов бумаг. Так, для двух бумаг имеем

$$D = \frac{1}{2}\sigma_0^2 \quad \text{и} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{2}}\sigma_0 = 0{,}71\sigma_0$$

Для трех видов бумаг квадратическое отклонение портфеля составит $0{,}58\sigma_0$. Таким образом, *с увеличением числа составляющих портфеля риск уменьшается* даже при одинаковой дисперсии составляющих элементов. Однако прирост действенности диверсификации уменьшается. Соответствующая зависимость изображена на рис. 14.1.

Как видим, наибольшее влияние увеличение масштабов диверсификации оказывает на начальных стадиях, т.е. при малых значениях *n*. Например, в рамках рассмотренного примера переход от одного вида бумаг к четырем сокращает квадратическое отклонение на 50%, а от одного к восьми - на 65%.

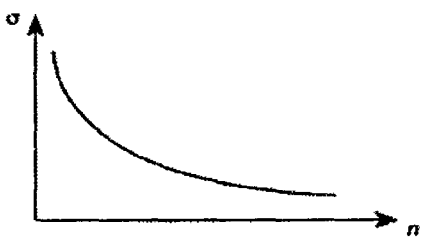



Рис. 14.1.

Полученные выше выводы в отношении тенденции изменения среднего квадратического отклонения в зависимости от числа составляющих при условии, когда дисперсии составляющих одинаковы, очевидно, справедливы и для более общих случаев. Однако, зависимость этих параметров от степени диверсификации проявляется здесь не столь четко.

Посмотрим теперь, как изменяются доход и величина риска при изменении структуры портфеля. Для этого вернемся к формулам (14.2) и (14.3) и запишем их только для двух видов бумаг *(X* и *Y)*. Такой анализ вряд ли имеет практическое значение. Однако с его помощью наглядно демонстрируются последствия «смешения» ценных бумаг с различными доходностью и дисперсией. Для независимых доходов получим

$$D = a_x^2 D_x + a_y^2 D_y \qquad (14.5)$$

и для зависимых доходов

$$D = a_x^2 \sigma_x^2 + a_y^2 \sigma_y^2 + 2a_x a_y r_{xy} \sigma_x \sigma_y \qquad (14.6)$$

Причем $a_y = 1 - a_x$.

В этом случае среднее значение суммарного дохода определяется

как

$$A = a_x a_y + (1 - a_x) d_y \qquad (14.7)$$

Пусть $d_y > d_x$ и $\sigma_y > \sigma_x$. Очевидно, что в силу этих условий рост доли бумаг второго вида увеличивает доходность портфеля. Так, на основе (14.7) получим

$$A = d_y + (d_y - d_x) a_y \qquad (14.8)$$

Что касается дисперсии дохода портфеля, то, как это следует из (14.6), положение не столь однозначно и зависит от знака и степени корреляции. В связи с этим подробно рассмотрим три ситуации: полная положительная корреляция доходов $(r_{xy} = +1)$, полная отрицательная корреляция $(r_{xy} = -1)$, независимость доходов или нулевая корреляция $(r_{xy} = 0)$.

В первом случае увеличение дохода за счет включения в портфель бумаги вида *Y* помимо *X* сопровождается ростом как дохода, так и дисперсии. Для портфеля, содержащего оба вида бумаг, квадратическое отклонение находится в пределах $\sigma_x < \sigma < \sigma_y$ (см. рис. 14.3, где точка *X* означает портфель, состоящий только из бумаг вида *X*, а *У* - портфель из бумаг вида *Y*).

Для частного случая, когда $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, получим по формуле (14.6) $D = \sigma^2$. Иначе говоря, при полной положительной корреляции "смешение" инвестиций не окажет никакого влияния на величину дисперсии. При полной отрицательной корреляции доходов динамика квадратического отклонения доходов от портфеля более сложная. По мере движения от точки *X* к точке *У* эта величина сначала сокращается и доходит до нуля в точке *B*, затем растет (см. рис. 14.4). Следует обратить внимание на то, что при движении от *X* до *B* рост дохода сопровождается уменьшением риска (квадратического отклонения).

В последней из рассматриваемых ситуаций квадратическое отклонение при увеличении доли бумаги *Y* проходит точку минимума равного $\sigma_m$, далее оно растет до $\sigma_y$ (см. рис. 14.5).

Совместим теперь все три графика на одном (см. рис. 14.6.). Как видим, все возможные варианты зависимости "доход-СКО" находятся в треугольнике *XBY*.

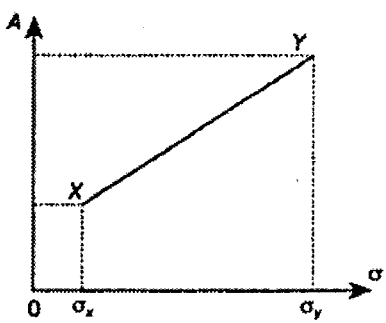



**Рис.14.3.**

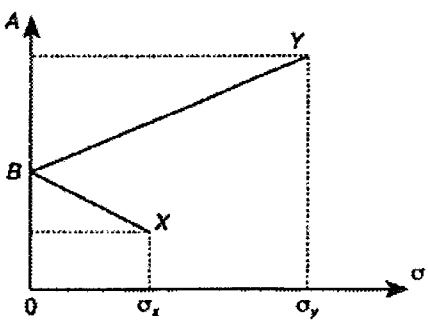
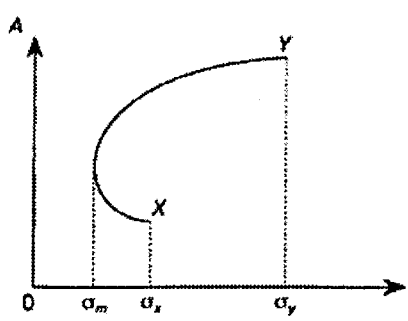



**Рис.14.4**



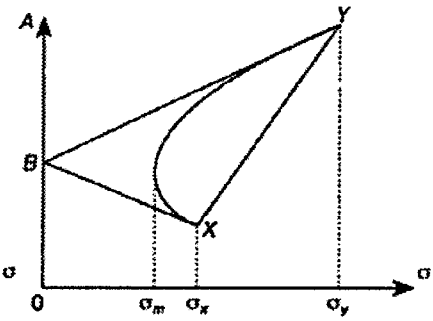




**Рис.14.5.** **Рис.14.6**

Из сказанного непосредственно следует, что эффективность диверсификации (в отношении сокращения риска) наблюдается только при отрицательной или, в крайнем случае, нулевой корреляции.

Пример 1. Портфель должен состоять из двух видов бумаг, параметры которых: $d_x = 2,\ \sigma_x = 0{,}8;\ d_y = 3;\ \sigma_y = 11.$

Доход от портфеля: $A = 2a_x + 3a_y$. Таким образом , доход в зависимости от величины долей находится в пределах $2 < A < 3$. Дисперсия суммы дохода составит:

$$D = a_x^2 \cdot 0{,}8^2 + a_y^2 \cdot 1{,}1^2 + a_x a_y r_{xy}\ 0{,}8 \cdot 1{,}1$$

Определим доход и дисперсию для портфеля с долями, равными, допустим, 0,3 и 0,7 . Получим по формулам (14 .6 ) и (14 .7 ): $D = 0{,}651 + 0{,}37 r_{xy}$ и $A = 2{,}7$. Таким образом , при полной положительной корреляции $D = 1{,}021$, при полной отрицательной корреляции $D = 0{,}281$. В и тоге с вероятностью 95% можно утверждать, что суммарный доход находится в первом случае в пределах $2{,}7 \pm 2 \times \sqrt{1{,}021} = 2{,}7 \pm 2{,}02$; во втором – он определяется

пределами $2,7 \pm 2 \times \sqrt{0,281} = 2,7 \pm 1,06$. При нулевой корреляции доходов искомые пределы составят $2,7 \pm 2\sqrt{0,651} = 2,7 \pm 1,64$.

Продолжим анализ с двумя бумагами и проследим, как влияет включение в портфель безрисковой (risk free) инвестиции.

Для этого заменим в портфеле бумагу $Y$ с параметрами $d_y, \sigma_y$ на бумагу с такой же доходностью, но с нулевой дисперсией. Доходность портфеля от такой замены, разумеется, не изменится. Что же касается дисперсии, то она теперь составит:

$$D = a_x^2 \sigma_x^2$$

Дисперсия дохода портфеля теперь зависит от удельного веса безрисковой составляющей, так как.

$$\sigma = a_x \sigma_x = (1 - a_y)\sigma_x \qquad (14.9)$$

Таким образом, «разбавление» портфеля безрисковой бумагой снижает риск портфеля в целом, а квадратическое отклонение дохода портфеля определяется убывающей линейной функцией доли безрисковой бумаги. Если $d_x > d_y$ (в противном случае проблема выбора портфеля отпадает – он должен состоять только из безрисковых бумаг), то доход от портфеля по мере увеличения доли безрисковой бумаги уменьшается от $d_x$ до $d_y$, а величина квадратического отклонения сокращается от $\sigma_x$ до 0 (см. рис. 14.7). И наоборот, рост доли рисковой бумаги увеличивает как риск, так и доход.

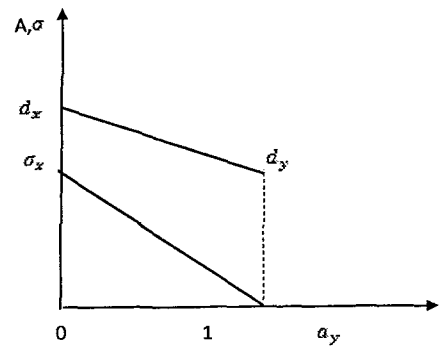



**Рис.14.7.**

Последнее утверждение для портфеля, состоящего из двух видов бумаг, иллюстрируется уравнением (14.10), которое получено преобразованием (14.7):

$$A = d_y + (d_x - d_y)a_x \qquad (14.10)$$

В свою очередь на основе (14.9) находим

$$a_x = \frac{\sigma}{\sigma_x}$$

В итоге получим интересное соотношение

$$A = d_y + \frac{d_x - d_y}{\sigma_x}\sigma \qquad (14.11)$$

Дробь в приведенном выражении иногда называют рыночной ценой риска. Если эта величина равна, скажем, 0,5, то при росте квадратического отклонения на 1% доход увеличится на 0,5.

## 14.2. Минимизация дисперсию дохода

Приведенные выше выражения для дисперсии суммарного дохода позволяют рассмотреть проблему диверсификации инвестиций и риска еще в одном аспекте, а именно, - определить структуру портфеля, которая минимизирует дисперсию и, следовательно, риск. Для нахождения минимума дисперсии вернемся к определяющим ее формулам. Если предположить, что нет статистической зависимости между доходами от отдельных видов инвестиций, то найти оптимальную в указанном смысле структуру портфеля не так уж и сложно. Положим, что портфель, как и выше, состоит из двух видов бумаг $X$ и $Y$. Их доли в портфеле составляют $a_x$ и $1-a_x$ а дисперсии $D_x$ и $D_y$. Общая дисперсия определяется по формуле (14.12). Поскольку эта функция является непрерывной, то применим стандартный метод определения экстремума. Находим, что минимальное значение дисперсии суммы имеет место тогда, когда

$$a_x = \frac{D_y}{D_x + D_y} \qquad (14.12)$$

Формулу (14.12) обычно приводят в аналитической финансовой литературе. Однако, для того, чтобы ею можно было воспользоваться, необходимо иметь значения дисперсий. По-видимому, при расчетах на перспективу удобнее оценить или задать экспертным путем отношение дисперсий:

$$D_{x/y} = D_x / D_y \qquad (14.13)$$

Разделим теперь числитель и знаменатель (14.12) на $D_y$, получим

$$a_x = \frac{1}{D_{x/y} + 1} \qquad (14.14)$$

При наличии корреляции между показателями доходов обратимся к (14.6). Минимум этой функции имеет место в случае, когда

$$a_x = \frac{D_y - r_{xy}\sigma_x\sigma_y}{D_x + D_y - 2r_{xy}\sigma_x\sigma_y}, \qquad (14.15)$$

или, использовав отношение дисперсий (14.13), получим

$$a_x = \frac{1 - r_{xy}\sqrt{D_{x/y}}}{D_{x/y} + 1 - 2r_{xy}\sqrt{D_{x/y}}} \qquad (14.16)$$

Как видно из приведенных формул, расчетная величина до ли одной из бумаг может при некоторых условиях оказаться отрицательной. Отсюда следует, что этот вид бумаги просто не должен включаться в портфель.

**Пример 2.** Вернемся к данным примера 1 и определим структуру портфеля с минимальной дисперсией. Напомним, что $\sigma_x = 0,8;\ \sigma_y = 1,1.$

При полной положительной корреляции расчетные значения доли первой бумаги составят по формуле (14 .15 )

$$a_x = \frac{1,1^2 - 1\times 0,8\times 1,1}{0,8^2 + 1,1^2 - 2\times 1\times 0,8\times 1,1} > 1$$

Соответственно, $a_y < 0$. Следовательно, минимальная дисперсия имеет место в случае, когда портфель состоит из одной бумаги вида *X*. Средний доход от портфеля равен 2.

При полной отрицательной корреляции находим

$$a_x = \frac{1,1^2 - (-1)0,8\times 1,1}{0,8^2 - 1,1^2 - 2(-1)0,8\times 1,1} = 0,579.$$

$$a_y = 1 - 0,579 = 0,421$$

Дисперсия в этом случае равна нулю (см. рис. 14 .4), а средний доход составит 2,421.

Наконец, при отсутствии корреляции получим по формуле (14.12)

$a_x = 0,654;\ a_y = 1 - 0,654 = 0,346$. Дисперсия дохода при такой структуре портфеля равна 0,418, а средний доход равен 2,346.

Пусть теперь портфель состоит из трех видов бумаг *X, Y, Z*. Их доли $a_x, a_y$ и $a_z = 1-(a_x+a_y)$. Дисперсия дохода от портфеля при условии независимости доходов от отдельных видов бумаг составит

$$D = a_x^2 D_x + a_y^2 D_y + \left[1-(a_x+a_y)\right]^2 D_z$$

Минимум дисперсии достигается, если структура портфеля определяется следующим образом:

$$a_y = \frac{D_{y/z}}{D_{x/z}+D_{y/z}+D_{x/z}+D_{y/z}},$$

$$a_x = \frac{D_{x/z}}{D_{x/z}+D_{y/z}+D_{x/z}+D_{y/z}}.$$

Не будем останавливаться на ситуации, когда доходы трех видов бумаг статистически зависимы. Перейдем к общей постановке задачи и определим структуру портфеля с $n$ составляющими. Допустим, что доходы статистически независимы. Опустим доказательства и приведем результат в матричном виде:

$$\overline{A} = D^{-1}e \qquad (14.17)$$

где $e$ – единичный вектор, характеризующий структуру портфеля,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{D_1}{D_n}+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \frac{D_2}{D_n}+1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & \frac{D_{n-1}}{D_n} \end{pmatrix},$$

$\overline{A}$–вектор, характеризующий $n-1$ элементов структуры портфеля.

Матрица $D$ имеет размерность $(n-1)\times(n-1)$.

**Пример 3.** Эксперты оценили следующие отношения дисперсий для портфеля, состоящего из четырех видов бумаг: $D_{1/4}=1,5; D_{2/4}=2; D_{3/4}=1$. По формуле (14.17) получим

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}2,5 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}^{-1}\times e=\begin{pmatrix}0,210\\ 0,158\\ 0,316\end{pmatrix},$$

откуда

$$a_4=1-\sum_1^3 a_i=1-0,684=0,316.$$

Заметим, что структуру портфеля, минимизирующую дисперсию дохода, с $n$ составляющими при наличии корреляции определить так же просто, как это было сделано выше, нельзя. Однако решение существует, хотя его получение достаточно хлопотное дело, да и вряд ли оно необходимо для практики.

Анализ диверсификации представляет собой первый этап в исследовании портфеля инвестиций. Следующим является максимизация дохода. Эта проблема также связана с измерением риска и требует обстоятельного специального обсуждения, выходящего за рамки настоящего учебника. Поэтому ограничимся лишь замечанием о том, что метод Г. Марковица, который заключается в разработке и решении специальной модели нелинейного программирования с использованием показателей доходов и дисперсий, в теоретическом плане не вызывает возражений. Что касается его практического применения, то здесь, на наш взгляд, скрыты серьезные подводные камни. Затронем лишь одну проблему – какой срок для расчета дисперсий следует принять во внимание? Если ограничиться небольшим сроком, то получим наиболее приближенные к современности данные. Однако они могут оказаться неустойчивыми, содержать много «шума», с другой стороны, стремление охватить максимальный срок неизбежно приведет к устареванию данных.

Минимум дисперсии дохода при отсутствии корреляции.

Дисперсия в этом случае определяется выражением (14.2), которое для *n* долей запишем как

$$D=\sum_{1}^{n-1}a_i^2D_i+\left(1-\sum_{1}^{n-1}a_i\right)^2 D_n \qquad (1)$$

В свою очередь

$$\left(1-\sum_{1}^{n-1}a_i\right)^2=1-2\sum a_i+\left(\sum a_i\right)^2,$$

где

$$\left(\sum_{1}^{n-1}a_i\right)^2=\sum_{1}^{n=1}a_i^2+2\sum_{1}^{n=1}a_i\sum_{2}^{n=1}a_i.$$

Окончательно имеем

$$\left(1-\sum_{1}^{n-1}a_i\right)^2=1-2\sum_{1}^{n=1}a_i+2a\sum_{2}^{n=1}a_i+2a_2\sum_{3}^{n=1}a_i+\ldots+2a_{n-2}a_{n-1}+\sum_{1}^{n=1}a_i^2. \qquad (2)$$

Преобразуем (1) с использованием (2) и определим $n-1$ частных производных:

$$f'(a_1)=a_1D_1+\left(\sum_{1}^{n-1}a_i-1\right)D_n,$$

$$f'(a_2)=a_2D_2+\left(\sum_{1}^{n-1}a_i-1\right)D_n, \qquad (3)$$

...

$$f'(a_{n-1})=a_{n-1}D_{n-1}+\left(\sum_{1}^{n-1}a_i-1\right)D_n.$$

Разделим каждое уравнение системы (3) на $D_n$ и приравняем его нулю. После некоторых преобразований получим

$$a_1\left(\frac{D_1}{D_n}+1\right)+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}=1$$

$$a_1+a_2\left(\frac{D_2}{D_n}+1\right)+a_3+\ldots+a_{n-1}=1, \qquad (4)$$

...

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{D_{n-1}}{D_n} + 1\right) = 1$$

Представим систему уравнений (4) в матричном виде:

$$AD = e.$$

После чего получим искомое уравнение (14.17):

$$A = D^{-1}e$$

## 14.3. Матрица доходов и ее риск

Предположим, что ЛПР (лицо, принимающее решения) рассматривает несколько возможных решений: $i$ = 1,…,m. Ситуация, в которой действует ЛПР, является неопределенной. Известно лишь, что наличествует какой-то из вариантов: $j$ = 1,…, n. Если будет принято $i$-е решение, а ситуация есть $j$-я , то фирма, возглавляемая ЛПР, получит доход $q_{ij}$. Матрица $Q = (q_{ij})$ называется матрицей последствий (возможных решений). Какое же решение нужно принять ЛПР? В этой ситуации полной неопределенности могут быть высказаны лишь некоторые рекомендации предварительного характера. Они не обязательно будут приняты ЛПР. Многое будет зависеть, например, от его склонности к риску. Но как оценить риск в данной схеме?

Допустим, мы хотим оценить риск, который несет $i$-е решение. Нам неизвестна реальная ситуация. Но если бы ее знали, то выбрали бы наилучшее решение, т.е. приносящее наибольший доход. Т.е. если ситуация есть $j$-я, то было бы принято решение, дающее доход $q_{ij}$. Значит, принимая $i$-е решение мы рискуем получить не $q_j$, а только $q_{ij}$, значит принятие $i$-го решения несет риск недобрать $r_{ij} = q_j - q_{ij}$. Матрица $R = (r_{ij})$ называется матрицей рисков.

**Пример 4.** Пусть матрица последствий есть

$$Q=\begin{pmatrix}2 & 5 & 8 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 12\\ 8 & 5 & 3 & 10\\ 1 & 4 & 2 & 8\end{pmatrix}$$

Составим матрицу рисков.

Имеем $q_1=\max(q_{i1})=8, q_2=5, q_3=8, q_4=12$. Следовательно, матрица рисков есть

$$R=\begin{pmatrix}3 & 3 & 0 & 8\\ 6 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 2\\ 7 & 1 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

**Правило Вальда** (правило крайнего пессимизма). Рассматривая *i*-е решение будем полагать, что на самом деле ситуация складывается самая плохая, т.е. приносящая самый малый доход $a_i$. Но теперь уж выберем решение $i_0$ с наибольшим $a_{i0}$. Итак, правило Вальда рекомендует принять решение $i_0$, такое что $a_{i0}=\max\limits_i a_i=\max\limits_i\left(\min\limits_j q_{ij}\right)$.

Так, в вышеуказанном примере, имеем $a_2=2, a_3=3, a_4=1$. Из этих чисел максимальным является число 3. Значит, правило Вальда рекомендует принять 3-е решение.

**Правило Сэвиджа** (правило минимального риска). При применении этого правила анализируется матрица рисков $R=(rij)$. Рассматривая *i*-е решение будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимального риска $b_i=\max(r_{ij})$. Но теперь уж выберем решение $i_0$ с наименьшим $b_{i0}$. Итак, правило Сэвиджа рекомендует принять решение $i_0$, такое что $b_{i0}=\min\limits_i b_i=\min\limits_i\left(\max\limits_j r_{ij}\right)$.

В рассматриваемом примере имеем

$b_1=8, b_2=6, b_3=5, b_4=7$. Минимальным из этих чисел является число 5. Т.е. правило Сэвиджа рекомендует принять 3-е решение.

**Правило Гурвица** (взвешивающее пессимистический и оптимистический *подходы к ситуации*). *Принимается решение* $i$, на котором достигается максимум $\lambda \cdot \min_j q_{ij} + (1-\lambda) \cdot \max_j q_{ij}$, где $0 \le \lambda \le 1$. Значение $\lambda$ выбирается из субъективных соображений. Если $\lambda$ приближается к 1, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда, при приближении $\lambda$ к 0, правило Гурвица приближается к правилу «розового оптимизма» (догадайтесь сами, что это значит). В вышеуказанном примере при $\lambda$= 1/2 правило Гурвица рекомендует 2-е решение.

# ГЛАВА XV. Страховая рента

## 15.1. Финансовая эквивалентность в страховании

В преобладающем числе областей финансовой деятельности объектами приложения методов количественного анализа являются детерминированные процессы, описываемые верными рентами. Однако в страховании и при анализе некоторых инвестиционных проектов возникает необходимость в использовании условных рент (contingent annuity), в которых важную роль играют вероятности наступления соответствующих событий (поступлений или выплат денег). Обсудим методы работы с такими рентами, причем для конкретности ограничимся страхованием. Выплата члена ренты в страховании зависит от наступления страхового события. Назовем такие ренты страховыми аннуитетами. Заранее число платежей в страховых аннуитетах, а часто и их срок, остаются неизвестными.

Согласно договору страхования страхователь уплачивает вперед страховщику некоторую сумму – премию (premium). В свою очередь он (или иной выгодоприобретатель) имеет право получить страховую сумму S после наступления страхового события. Если вероятность наступления этого события $q$ заранее известна (на основании прошлого опыта, по аналогии и т.д.), то теоретически, без учета всех прочих факторов (в том числе и фактора времени), премия $P$ определяется как

$$P = Sq$$

Приведенное равенство лишь иллюстрирует принцип финансовой эквивалентности обязательств страхователя и страховщика. Покажем в общем виде, как реализуется этот принцип при расчете страховой нетто-премии, под которой понимается теоретическая цена страхования.

На практике премия, которая поступает страховой организации, обычно превышает величину нетто-премии, так как включает

помимо нетто-премии и так называемую нагрузку (loading), последняя охватывает все расходы по ведению дела и некоторую прибыль страховой организации. Определение брутто-премии (нетто-премия плюс нагрузка) является чисто арифметической задачей, поэтому далее речь пойдет только о нетто-премии.

Пусть $P$ – размер премии, $q_n$ – вероятность страхового события (например, смерть застрахованного через n лет после начала страхования). Если страховое событие произойдет на первом году страхования, то страховщик получит сумму $p$ (пусть премия выплачивается в начале года), если же это событие наступит во втором году, то сумма премий равна $2P$ и т.д. Математическое ожидание такого ряда премий составит:

$$Pq_1 + 2Pq_2 + ... + nPq_n$$

Полученная величина хотя и обобщает все взносы застрахованного с учетом вероятностей их выплат, однако при суммировании соответствующих величин не принимается во внимание, что премии выплачиваются в разные моменты времени. С учетом этого фактора (с помощью дисконтирования сумм платежей) находим математическое ожидание современной стоимости (актуарная стоимость) взносов:

$$E(A) = P\left[q_1 + (1+v)q_2 + (1+v+v^2)q_3 + ... + (1+v+...+v^{n-1})q_n\right]$$

где $v$ – дисконтный множитель по ставке $i$.

Обратимся теперь к выплате страховой суммы. Положим, что она выплачивается в конце года, в котором имел место страховой случай. Тогда математическое ожидание выплаты в первом году составит $Sq_1$ во втором году $Sq_2$ и т.д. Математическое ожидание с учетом фактора времени (актуарная стоимость) выплат, очевидно, можно определить как

$$E(S) = S(vq_1 + v^2q_2 + ... + v^nq_n)$$

Исходя из принципа эквивалентности обязательств страховщика и страхователя, теперь можно написать равенство

E(S) = E(A),

которое позволяет найти искомое значение нетто-премии $p$. Таков в общем виде теоретический подход к методу расчета нетто-премии, принятый в личном страховании.

$$E(A)=p[q+(1+v)q+...+(1+v+...+v^{n-1})q]=PqK,$$

где

$$K=n+\sum_{1}^{n-1}(n-t)v^t$$

В свою очередь актуарная стоимость выплат страховых сумм находится как

$$E(S)=Sq\sum_{1}^{n}v^t.$$

Из равенства актуарных стоимостей взносов и выплат находим искомый размер нетто-премии.

В практике страховых, или как их часто называют, актуарных расчетов разработаны специальные приемы формирования упомянутых выше потоков платежей (страховых аннуитетов) и расчета их актуарных стоимостей.

До обсуждения проблем формирования страховых аннуитетов, связанных с жизнью людей (life annuity) и их использования для расчетов премий и страховых резервов необходимо ознакомиться с методикой определения необходимых вероятностей и ряда вспомогательных величин, с помощью которых существенно упрощается решение соответствующих задач. Речь пойдет о таблицах смертности и коммутационных функциях.

## 15.2. Таблица смертности и страховая вероятность

**Таблицы смертности**. Для осуществления актуарных расчетов, в том числе расчетов стоимостей страховых аннуитетов, необходимы исходные данные, характеризующие совокупность

застрахованных по полу и возрасту, а также система нормативных демографических показателей, отражающих статистические закономерности дожития до того или иного возраста. Последние содержатся в таблицах смертности (mortality tables).

Таблица смертности представляет собой числовую модель процесса вымирания по возрастам некоторой абстрактной совокупности людей. Такая таблица показывает, как последовательно с увеличением возраста уменьшается эта совокупность, достигая нуля сразу после предельного возраста ш. Она является обобщением данных демографической статистики за некоторый период времени.

Прежде чем приступить к описанию таблицы смертности и актуарных методов анализа необходимо сказать несколько слов о применяемых в актуарных расчетах обозначениях. Актуарная символика в личном страховании сложна, своеобразна и с этим приходится мириться, так как обозначения унифицированы на международном уровне. Одна из отличительных особенностей этой символики – множество нижних и верхних индексов, которые приписываются как справа, так и слева от основной переменной.

Основной показатель таблицы смертности - число людей $l_x$ в возрасте ровно $x$ лет, оставшихся в живых из первоначальной совокупности $l_0$, обычно равной 100 тыс. человек. Заметим, что и начальный возраст и первоначальное количество людей в таблице могут быть любыми – выбор того или иного начального возраста не влияет на результаты актуарных расчетов. Для актуарных расчетов применяют полные таблицы смертности, в которых возраст показан с интервалом в 1 год.

Величины $l_x$ (кроме $l_0$) определяются расчетным путем на основе заданных вероятностей смерти $(q_x)$, или, что реже, количества умерших $(d_x)$. В современных таблицах смертности

исходным показателем обычно служит вероятность смерти, т.е доля умерших в возрасте от $x$ до $x+1$ лет из числа доживших до возраста $x$ лет. Указанные вероятности получают на основе данных статистики населения с последующим их усреднением и сглаживанием.

Помимо показателей $l_x$ таблица смертности содержит число умерших за год в каждой возрастной группе $(d_x)$. Никакие иные факторы выбытия, кроме повозрастных вероятностей умереть, при разработке таблицы во внимание не принимаются.

В качестве иллюстрации приведем фрагмент таблицы смертности для мужчин, в которой начальный возраст – 18 лет.

**Таблица 1**

**Фрагмент таблицы смертности**

| $x$ | $l_x^*$ | $q_x$ | $d_x^*$ Л |
|---|---|---|---|
| 18 | 100000 | 0,00149 | 149 |
| 19 | 99851 | 0,00173 | 173 |
| 20 | 99678 | 0,00196 | 195 |
| … | | | |
| 30 | 96991 | 0,00381 | 370 |
| … | | | |
| 35 | 94951 | 0,00487 | 462 |
| … | | | |
| 40 | 92327 | 0,00708 | 654 |
| … | | | |
| 50 | 83640 | 0,01409 | 1178 |
| … | | | |
| 60 | 68505 | 0,02871 | 1967 |
| … | | | |
| 70 | 45654 | 0,05691 | 2598 |
| … | | | |
| 80 | 19760 | 0,11672 | 2306 |
| … | | | |

Показанные в таблице величины $l_x$ и $d_x$ сами по себе не имеют смысла. Они приобретают его лишь при сравнении в рамках таблицы смертности.

Показатели таблицы смертности связаны очевидными соотношениями:

$$l_{x+1} = l_x - d_x; \qquad d_x = l_x \cdot q_x$$

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x}.$$

Таблица смертности, фрагмент которой приведен выше, является минимальной по набору показателей. Она достаточна для простых видов личного страхования – страхования на дожитие и страхования жизни. На практике применяют и более полные таблицы. В частности, в групповом пенсионном и медицинском страховании применяют таблицы выбытия (decrement tables), в которых помимо смертности учитываются и другие причины сокращения числа участников страхования.

Страховые вероятности. На основе данных таблицы смертности нетрудно получить систему вероятностей дожития, необходимую для расчета соответствующих страховых показателей. Рассмотрим наиболее важные из таких вероятностей.

Вероятность прожить от возраста $x$ до $x+n$:

$$nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad (15.1)$$

Вероятность прожить еще один год после возраста x: лет:

$$P_x = 1 - q_x = 1 - \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_{x+1}}{l_x}.$$

Пример 1. Вероятность мужчине в возрасте 30 лет прожить еще 10 лет составит:

$${}_{10}P_{30} = \frac{l_{40}}{l_{30}} = \frac{92327}{96991} = 0{,}95191$$

По данным таблицы смертности находят и вероятности смерти в определенных возрастах. Например, вероятность умереть в возрасте от $x$ до $x+n$:

$$nq_x = 1 - nP_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{l_x}\sum_{j=x}^{x+n-1} d_j \qquad (15.2)$$

Пример 2. Вероятность для мужчины в возрасте 30 лет умереть в течение 10 следующих лет определяется как

$$_{10}q_{30} = 1 - {}_{10}P_{30} = 1 - 0{,}9845 = 0{,}0155,$$

Вероятность умереть через $m$ лет (на протяжении года $m + 1$) для лица в возрасте $x$ лет составит:

$$_{m|n}q_x = {}_m P_x \times q_{x+m} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \times \frac{d_{x+m}}{l_{x+m}} = \frac{d_{x+m}}{l_x} \qquad (15.3)$$

В свою очередь вероятность для лица в возрасте $x$ лет умереть в возрастном интервале *от* $x + m$ до $x + m + n$ лет определим следующим путем:

$$_{m|n}q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} = \frac{l_{x+m}}{l_x} \times \frac{l_{x+m}}{l_x} \times \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_{x+m}} \qquad (15.4)$$

Из последнего выражения вытекает, что

$$_{m|n}q_x = {}_mP_x \cdot {}_n q_{x+m}.$$

Иначе говоря, искомая вероятность равна произведению вероятности дожить до возраста $x + m$ и вероятности умереть в следующие $n$ лет.

Пример 3. Найдем для мужчины в возрасте 30 лет вероятность умереть в течение двух лет после достижения им 33 лет. Находим

$$_{3|2}q_{30} = \frac{l_{30} - l_{35}}{l_{30}} = \frac{95821 - 94951}{96991} = 0{,}00897$$

В некоторых актуарных расчетах (например, в пенсионном страховании) необходимы вероятности дожития супружеских пар. Эти вероятности также рассчитываются по таблицам смертности.

Пусть речь идет о супругах в возрасте $x$ и $y$ лет и необходимо оценить вероятности прожить еще $n$ лет для каждого из них. Обозначим эти вероятности как ${}_nP_x; {}_nP_y$. Определим их следующим образом:

$$ {}_nP_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}, \quad {}_nP_y = \frac{l_{y+n}}{l_y}, $$

где $l_x, l_y$ – числа доживших до соответствующих возрастов (берутся из таблиц смертности для мужчин и женщин).

В свою очередь вероятности умереть для каждого из супругов составят:

$$ {}_nq_x = 1 - {}_nP_x; \quad {}_nq_y = 1 - {}_nP_y $$

Рассчитаем еще две вероятности. Однако предварительно примем две рабочие гипотезы:

– оба супруга достигают возрастов $x$ и $y$ в один день;

– смерть одного супруга – страховое событие, независимое от смерти другого супруга.

Вероятность прожить супругам вместе еще $n$ лет (вероятность «сохранения» супружеской пары) рассчитывается как произведение вероятностей двух независимых событий:

$$ {}_nP_{xy} = {}_nP_x \cdot {}_nP_y = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = \frac{l_{x+n} \cdot l_{y+n}}{l_x \cdot l_y} \qquad (15.5) $$

В актуарной практике фигурирующие в формуле произведения чисел доживших принято обозначать следующим образом:

Формулу (16.5) теперь можно записать:

$$ {}_nP_{xy} = \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}} \qquad (15.6) $$

Найдем теперь вероятность того, что супруг (заключивший договор страхования в возрасте $x$ лет, когда его супруге было $y$ лет) не доживет до $x+n$ лет, а супруга, напротив, доживет до $y + n$

лет. Искомая вероятность (обозначим ее как ${}_nP_{x|y}$) равна произведению вероятностей:

$$ {}_nP_{x|y} = {}_nq_x \cdot {}_nP_y = (1 - {}_nP_x) \cdot {}_nP_x = {}_nP_y - {}_nP_x \cdot {}_nP_y = \frac{l_{y+n}}{l_y} - \frac{l_{xy+n}}{l_{xy}} \quad (15.7) $$

Пример 4. Пусть возраст супругов 50 и 45 лет. По таблицам смертности находим:

для мужчины $l_{50} = 83640, \quad l_{55} = 77007,$

для женщины $l_{45} = 96261, \quad l_{50} = 94348.$

Вероятность того, что оба супруга проживут следующие 5 лет, составит:

$$ {}_5P_{50;45} = {}_5P_{50} \cdot {}_5P_{45} = \frac{77007}{83640} \cdot \frac{94348}{96261} = 0{,}92070 \cdot 0{,}98013 = 0{,}9024. $$

Вероятность того, что супруг не проживет 5 лет, а супруга проживет

(см .(15 .7)):

$$ {}_5P_{50|45} = (1 - {}_5P_{50}) \cdot {}_5P_{45} = (1 - 0{,}92070) \cdot 0{,}98013 = 0{,}007772. $$

## 15.3. Коммутационная функция. Стоимость страховки аренды

Для сокращения записи страховых аннуитетов и упрощения расчетов применяют так называемые *коммутационные функции (commutations functions),* или *коммутационные числа.* Смысл этих чисел трудно, хотя и возможно, содержательно интерпретировать. Их проще воспринимать как чисто технические, вспомогательные средства.

Стандартные коммутационные функции делятся на две группы. В основу первых положены числа доживающих до определенного возраста, вторых – числа умерших. Кратко остановимся на методике получения наиболее важных в практическом отношении функций. Основными в первой группе являются функции $D_x$ и $N_x$:

$$D_x = l_x \cdot v^x \qquad (15.8)$$

$$N_x = \sum_{j=x}^{\omega} D_j \qquad (15.9)$$

где $v$ – дисконтный множитель по сложной ставке $i$, $\omega$ - предельный возраст, учитываемый в таблице смертности.

По определению

$$N_x = N_{x+1} + D_x, \qquad N_\omega = D_\omega.$$

В некоторых актуарных расчетах необходимы суммы коммутационных

чисел $D_x$ для заданных возрастных интервалов. В этих случаях можно воспользоваться коммутационными числами $N_x$:

$$\sum_{t=1}^{k} D_{x+t} = N_{x+1} - N_{x+k+1}.$$

На практике применяются еще два варианта функции $N_x$, к которым обращаются тогда, когда платежи производятся $m$ раз в году. Так, для платежей постнумерандо с достаточной для практических расчетов точностью применим следующее выражение:

$$N_x^{(m)} = N_x + \frac{m-1}{2m} D_x \qquad (15.10)$$

Для платежей пренумерандо

$$\ddot{N}_x^{(m)} = N_x - \frac{m-1}{2m} D_x \qquad (15.11)$$

Наиболее важными коммутационными функциями второй группы являются $C_x$ и $M_x$:

$$C_x = d_x v^{x+1} \qquad (15.12)$$

$$M_x = \sum_{j=x}^{\omega} C_j \qquad (15.13)$$

Между коммутационными числами обеих групп существуют определенные взаимозависимости:

$$C_x = d_x v^{x+1} = (l_x - l_{x+1}) v^{x+1} = l_x v^x v - l_{x+1} v^{x+1} = D_x v - D_{x+1}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$M_x = N_x v - N_{x+1}$$

Страховые организации разрабатывают таблицы коммутационных функций с учетом принятых в них норм доходности.

**Таблица 2.**

**Фрагемент таблицы коммутационных чисел**

| $x$ | $l_x$ | $D_x$ | $N_x$ | $N_x^{(12)}$ | $C_x$ | $M_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 100000 | 21199 | 244593 | 254309 | 28,98 | 1003,6 |
| 19 | 99851 | 19420 | 223393 | 232294 | 30,82 | 974,7 |
| 20 | 99678 | 17786 | 203973 | 212125 | 31,98 | 943,8 |
| 30 | 96991 | 7310 | 80677 | 84027 | 25,55 | 648,9 |
| 35 | 94951 | 4651 | 49910 | 52042 | 20,78 | 530,3 |
| 40 | 92327 | 2940 | 30376 | 31723 | 19,09 | 431,4 |
| 50 | 83640 | 1125 | 10465 | 10981 | 14,54 | 260,7 |
| 60 | 68505 | 389 | 3082 | 3261 | 10,25 | 134,7 |
| 70 | 45654 | 110 | 684 | 734 | 5,72 | 53,1 |
| 80 | 19760 | 20 | 85 | 95 | 2,14 | 13,0 |

При страховании супружеских пар возникает необходимость в коммутационной функции:

$$D_{xy} = l_{xy} \cdot v^{(x+y)/2} \qquad (15.14)$$

Величина $l_{xy}$ определена при расчете ${}_nP_{xy}$ (см (15.6)).

Функцию (16.14) можно получить на основе коммутационных функций $D_x$, $D_y$ следующим образом:

$$D_{xy} = D_x \cdot D_y \cdot v^{-(x+y)/2} = D_x \cdot D_y \cdot (1+i)^{\frac{x+y}{2}} \qquad (15.15)$$

В свою очередь

$$D_{xy+n} = l_{xy+n} \cdot v^{n+\frac{x+y}{2}},$$

$$D_{xy+n} = D_{x+n} \cdot D_{y+n} \cdot v^{-[n+(x+y)/2]} = D_{x+n} \cdot D_{y+n} (1+i)^{n+(x+y)/2}$$

Поскольку произведения коммутационных чисел имеют большую размерность, то их обычно умножают на $10^{-3}$.

Пример 5. Определим коммутационные числа $D_{50;45}$ и $D_{55;50}$ для супружеской пары примера 15.4. Находим:

$$\frac{x+y}{2}=\frac{50+45}{2}=47{,}5$$

Коммутационные числа при условии, что процентная ставка равна 9% , имеют следующие значения (первая строка - для мужчины, вторая - для женщины):

$$D_{50}=1124{,}8, \qquad D_{55}=673{,}1$$

$$D_{45}=1991{,}9, \qquad D_{50}=1268{,}8.$$

Отсюда

$$D_{50;45}=10^{-3}\cdot 1124{,}8\cdot 1991{,}9\cdot 1{,}09^{47{,}5}=134308$$

$$D_{55;50}=10^{-3}\cdot 673{,}1\cdot 1268{,}8\cdot 1{,}09^{5+47{,}5}=78770.$$

По аналогии с функцией $N_x$ найдем:

$$N_{xy}=\sum_{t=0}^{\omega-y} D_{x+t;y+t} \qquad (15.16)$$

## Стоимость страхового аннуитета

Отправным моментом актуарного анализа является определение стоимости страхового аннуитета. Для записи формул введем следующие обозначения для стоимостей годовых аннуитетов постнумерандо:

$a_x$ – для немедленного пожизненного аннуитета,

$a_{x:t|}$ – для немедленного ограниченного аннуитета,

$_{n|}a_x$ – для отложенного пожизненного аннуитета,

$_{n|}a_{x:t|}$ – для отложенного ограниченного аннуитета.

Аналогичная символика применяется и для аннуитетов пренумерандо, однако вместо символа $a$ записывается $\ddot{a}$.

Пусть лицу, начиная с возраста $x$ лет, пожизненно в конце каждого года выплачивается денежной единицы (аннуитет пожизненный, постнумерандо, немедленный). Тогда

$$a_x = P_x \cdot v +_2 P_x \cdot v^2 +\ldots+ {}_{\omega-x}P_x \cdot v^{\omega-x} = \frac{l_{x+1} \cdot v}{l_x} + \frac{l_{x+2} \cdot v^2}{l_x} +\ldots+ \frac{l_\omega \cdot v^{\omega-x}}{l_x}$$

Умножим числитель и знаменатель каждого слагаемого на $v^x$. После чего можно применить коммутационные функции $D_x$ и $N_x$ для расчета немедленного, пожизненного аннуитета постнумерандо с ежегодными выплатами:

$$a_x = \frac{\sum_{j=1}^{\omega-x} l_{x+j} \cdot v^{x+j}}{l_x \cdot v^x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Аналогичным образом определим стоимости других видов аннуитета. Так, для немедленного пожизненного аннуитета пренумерандо с ежегодной выплатой денежной единицы имеем:

$$\ddot{a}_x = 1 + P_x \cdot v +_2 P_x \cdot v^2 +\ldots+ {}_{\omega-x}P_x \cdot v^{\omega-x} = \frac{\sum_{j=0}^{\omega-x} l_{x+j} v^{x+j}}{l_x \cdot v^x} = \frac{N_x}{D_x},$$

Нетрудно убедиться в том, что $\ddot{a}_x = a_x + 1$ или $a_x = q_{x+1} \cdot v$ .

Формулы для расчета различных видов годовых аннуитетов приведены в табл. 15.3.

Пример 6. Определим стоимость отложенного на 20 лет, ограниченного

5 годами аннуитета пренумерандо для мужчины в возрасте 30 лет. Находим

$${}_{20|}\ddot{a}_{30:5|} = \frac{N_{50} - N_{55}}{D_{30}} = \frac{104653 - 58267}{7310,3} = 0,63453.$$

В табл. 15.3 приведены формулы для годовых аннуитетов. Если платежи выплачиваются $m$ раз в году, то в формулах вместо

$N_x$ следует использовать $N_x^{(m)}$ или $\ddot{N}_x^{(m)}$. Приведем формулы для соответствующих аннуитетов при условии $m = 12$.

**Таблица 15.3.**

**Формулы для расчета стоимостей аннуитетов**

| Вид аннуитета | Постнумерандо | Пренумерандо |
|---|---|---|
| *Немедленный пожизненный* | $a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$ (16.17) | $\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$ (16.18) |
| *Отложенный на n лет пожизненный* | ${}_{n\|}a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$ (16.19) | ${}_{n\|}\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$ (16.20) |
| *Немедленный, ограниченный (выплатыв течение t лет* | $a_{x:t\|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+t+1}}{D_x}$ (16.21) | $\ddot{a}_{x:t\|} = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}$ (16.22) |
| *Отложенный на n лет, ограниченный (выплаты в течение t лет)* | ${}_{n\|}a_{x:t\|} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+t}}{D_x}$ (16.23 | ${}_{n\|}\ddot{a}_{x:t\|} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{D_x}$ (16.24) |

Для ежемесячных платежей постнумерандо имеем следующие выражения.

*Немедленный пожизненный аннуитет:*

$$\ddot{a}_x = \frac{\ddot{N}_x^{(12)}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} - \frac{11}{24} \qquad (15.25)$$

*Немедленный ограниченный аннуитет:*

$$\ddot{a}_{x:t}^{(12)} = \frac{\ddot{N}_x^{(12)} - \ddot{N}_{x+t}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+t} - \frac{11}{24}(D_x - D_{x+t})}{D_x} \qquad (15.26)$$

*Отло*

*женный пожизненный аннуитет:*

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x^{(12)} = \frac{\ddot{N}_{x+n}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n} - \frac{11}{24}D_{x+n}}{D_x} \qquad (15.27) $$

*Отложенный ограниченный аннуитет:*

$$ {}_{n|}\ddot{a}_{x:t|}^{(12)} = \frac{\ddot{N}_{x+n}^{(12)} - \ddot{N}_{x+n+t}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t} - \frac{11}{24}(D_{x+n} - D_{x+n+t})}{D_x} \qquad (15.28) $$

Пример 7. Для условий примера 16.6, но с ежемесячными выплатами, получим:

$$ {}_{20|}\ddot{a}_{30:5|}^{(12)} = \frac{N_{50} - N_{55} - \frac{11}{24}(D_{50} - D_{55})}{D_{30}} = \frac{10405{,}3 - 5826{,}7 - \frac{11}{24}(1124{,}8 - 673{,}1)}{7310{,}3} = 0{,}60484 $$

Для ежемесячных выплат постнумерандо находим следующие соотношения.

*Немедленный пожизненный аннуитет:*

$$ a_x^{(12)} = \frac{N_{x+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x} + \frac{11}{24} \qquad (15.29) $$

*Немедленный ограниченный аннуитет:*

$$ a_{x:t|}^{(12)} = \frac{N_{x+1}^{(12)} - N_{x+t+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+t+1} + \frac{11}{24}(D_{x+t} - D_{x+t+1})}{D_x} \qquad (15.30) $$

*Отложенный на n лет пожизненный аннуитет:*

$$ {}_{n|}a_x^{(12)} = \frac{N_{x+n+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n+1} + \frac{11}{24}D_{x+n+1}}{D_x} \qquad (15.31) $$

*Отложенный ограниченный (выплаты в течение t лет) аннуитет:*

$$ {}_{n|}a_{x:t|}^{(12)} = \frac{N_{x+n+1}^{(12)} - N_{x+n+t+1}^{(12)}}{D_x} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+t+1} + \frac{11}{24}(D_{x+n+1} - D_{x+n+t+1})}{D_x} \qquad (15.32) $$

## Задачи для самостоятельных работ

1. На кондитерской фабрике из 3 видов сырья: сахара, фруктового сиропа и патоки производится 3 вида карамели: A, B и C. Нормы расхода сырья для производства 1 т для каждого вида карамели приведены в таблице. В таблице также показан общий вес каждого вида сырья, который может быть использован и доход, который можно получить от продажи 1 т каждого вида карамели.

Составьте математическую модель задачи планирования производства карамели, при которой фабрика получит максимальную прибыль.

| Сырьё | Расход сырья для 1 т карамели (т) | | | Общий вес сырья (т) |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | |
| Сахар | 0,8 | 0,5 | 0,6 | 800 |
| Патока | 0,4 | 0,4 | 0,3 | 600 |
| Фруктовый сироп | - | 0,1 | 0,1 | 120 |
| Доход от продажи 1 т товара (условная мера) | 108 | 112 | 126 | |

2. Молокоперерабатывающий завод производит молоко, кефир, сливки в бутылках. Для производства 1 т молока требуется 1010 кг, 1 т кефира –1010 кг, 1 т сливок – 9450 кг молока. Для производства 1 т молока и кефира тратится, соответственно, 0,18 и 0,19 машино /час рабочего времени. Для производства сливок специальные автоматы работают 3,25 часа. Общий вес перерабатываемого молока составляет 136000 кг. Основное перерабатывающее оборудование работает 21,4 машино/час, а автоматы, наливающие сливки 16,25 часа. Доход, полученный от продажи 1 т молока, кефира и сливок соответственно равняется 30,22 и 136 ден. ед. На заводе запланировано производить более 100 т молока

в бутылках за день. Остальные товары производятся неограниченно. При каком плане производства товаров в день, завод получит максимальный доход с их продажи? Составьте математическую модель задачи.

3. На швейной фабрике для производства товаров 4 видов используются материалы 3 артикулов. Норма использования материалов разного артикула для шитья одного вида товара приведены в таблице. Также, в таблице показана общая длина разно-артикульного материала фабрики и цена одной единицы каждого вида товаров. При каком плане производства каждого вида товара цена произведенных товаров будет максимальной? Составьте математическую модель задачи.

| **Артикул материала** | **Норма использования материала для 1 единицы товара (м)** | | | | **Общая длина материала (м)** |
|---|---|---|---|---|---|
| | **I** | **II** | **III** | **IV** | |
| 1 | 1 | – | 2 | 1 | 180 |
| 2 | – | 1 | 3 | 2 | 210 |
| 3 | 4 | 2 | – | 4 | 800 |
| Цена товара (тысяч сум) | 9 | 6 | 4 | 7 | |

4. Решите графическим методом задачу линейного программирования

*($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$):*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq -8 \\ -4x_1 + 6x_2 \leq 24 \end{cases}$$
$$max\, Z = x_1 + 2x_2$$

5. Решить графически следующие задачи ЛП.

$$f = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

6. Решить задачу симплекс-методом:

1. $F = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 6x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 \le 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \le 3 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 2 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4.$

2. $F = -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \le 5 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3.$

3. $F = 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 - 2x_6 = 24 \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36 \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3,4,5,6.$

7. Для следующих задач составить двойственные задачи:

1. $f = x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ 3x_1 + 3x_2 \le 9, \\ x_j \ge 0, \ j = 1, 2 \end{cases}$$

2. $f = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \le 4, \\ x_1 + 3x_3 - 4x_5 \ge 8, \\ x_1 \ge 0, x_3 \ge 0, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

8. Для следующих задач составить двойственную, привести графическую интерпретацию решений пары двойственных задач.

$$f = 8x_1 + 4x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 9, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

9. Для следующих задач составить двойственные задачи:

$$f = 2x_1 - x_2 + 5x_4 \rightarrow \min;$$
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_3 - 3x_4 = 8, \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

10. Решите задачи нелинейного программирования графическим методом.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 11, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z=2(x_1-7)^2+4(x_2-3)^2 \rightarrow min(max).$

2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z = x_1 \cdot x_2 \rightarrow max.$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow min(max)$

4. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$

$Z = x_1 \cdot x_2 \rightarrow \max$

11. Решите задачи методом Лагранжа.

1. $x_1 + x_2 = 180$

$Z = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \rightarrow \min.$

2. $x_1 + x_2 = 5$

$Z = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min(\max)$

3. $x_1 + x_2 = 4$

$x_2 + x_3 = 4$

$Z = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 \rightarrow \min(\max)$

4. $x_1^2 + x_2^2 = 19$

$x_1 + 2x_2 \cdot x_3 = 11$

$Z = 3x_1^2 + 2x_1 + 2x_2^2 + 4x_2 \cdot x_3 \rightarrow \min(\max)$

12. Решите задачу выпуклого программирования.

1.

$$L(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 12 \\ 3x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.

$$L(\bar{x}) = x_1 + 8x_2 + x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

3.

$$L(\bar{x}) = -2x_1 + 8x_2 + x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + x_2 \ge -8 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

4.

$$L(\bar{x}) = 2x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 10 \\ -x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

13. Дано $P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,8 \\ 0,9 & 0,7 & 0,8 \\ 0,7 & 0,6 & 0,6 \end{bmatrix}$ платежная матрица. Найти верхние и нижние цены игры. Найти на основе смешанных стратегий $S_A = [0,3,0,7]$, $S_B = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix}$ средний выигрыш платежной матрицы $P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

14. Найти на основе смешанных стратегий $S_A = [0,2,0,7]$, $S_B = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,4 \end{bmatrix}$ средний выигрыш платежной матрицы $P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

15. Дано $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 7 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ платежная матрица. Найти верхние и нижние цены игры.

16. Упростите матричную игру и найдите ее решение.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

17. Упростите матричную игру и найдите ее решение.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

18. Вычислить процентные деньги, которые получатся с капитала в 12750 сум отданного под 4,8 % с 28 августа 2018 г. По 9 сентября 2020 г.

19. Через какое время капитал, отданный под 4,5 % (простых), принесет прибыль, равную 3/25 самого капитала?

20. Бизнесмен купил за 6600 сум дом, приносящий 6% чистого дохода. Спустя 10 месяцев 26 дней после покупки дома, он положил в банк под 5 % капитал в 5 400 сум. К 1 сентября 1998 г. доход с дома и процентные деньги с 5400 сум составили вместе1994 сум. Когда был куплен дом?

21. Вкладчик 1 января положил на счет в банке 2 000 сум по схеме обыкновенный процент и приблизительное число дней под 22 % годовых. По какое число нужно делать вклад, чтобы получить 2 350 сум.?

22. Первоначально цену товара снизили на 10%, затем – на 20%, потом еще на 25%. На сколько всего процентов снизили цену?

23. Имеются два обязательства. Условия первого: $S_1 = 400$ тыс. сум, $n = 4$ мес.; условия второго: $S_2 = 400$ тыс. сум, $n_2 = 9$ мес.

Требуется:

а) найти ставку простого процента, при которой эти обязательства равноценны;

б) определить, какое из этих обязательств выгоднее для получателя денег при ставке простых процентов $i = 0{,}1$.

24. Вексель был учтен за 15 дней до срока погашения по ставке 18% годовых. В результате учета владелец векселя получил 49625 сум. Какова номинальная стоимость векселя при условии, что год принимается равным 360 дням.

25. Определить, какое помещение денег на срок 6 месяцев выгоднее:

а) под простую ставку процентов в 30% годовых;

б) под сложную ставку в 29% годовых при ежеквартальном начислении процентов.

26. Клиент внес в банк 2,5 тыс. сум. под 9,5% годовых, через 2 года и 270 дней он изъял вклад. Определить полученную им сумму при использовании банком: а) сложных процентов; б) смешанного метода.

27. Вычислить эффективную годовую процентную ставку по займу, если номинальная ставка равна 12% годовых и проценты начисляются: а) ежегодно; б) каждые 6 месяцев; в) ежемесячно; г) непрерывно.

28. Допустим, что годовые ставки начисления простого и сложного процента одинаковы. Сравнить результаты начисления в зависимости от срочности вклада:

1) сложный процент всегда выгоднее для вкладчика независимо от периода начисления;

2) для долгосрочных депозитов (больше года) сложный процент выгоднее простого;

3) для краткосрочных депозитов (меньше года) простой процент отстает от начисления сложного процента;

4) в пределах года простой процент выгоднее сложного.

29. Сравнить динамику удержания сложных и простых про центов при одной и той же годовой учетной ставке: 1) внутри года дисконт по простой учетной ставке больше, чем для удержания сложного процента; 2) при сроках больше года сложные проценты удерживают меньшую сумму, чем простые; 3) дисконтирование по сложной учетной ставке перекрывает простую ставку при любых сроках; 4) для краткосрочного учета (меньше года) дисконт по сложной ставке больше, а за пределами года наоборот.

30. Укажите соотношение между современной и конечной величинами потока.

31. Найдите современную и наращенную величины потока {(-2000,1); (1000,2); (1000,3); (1000,4)} при $i$=5% .

32. Семья хочет накопить $12 000 на машину, вкладывая в банк $1000 ежегодно. Годовая ставка процента в банке 7%. Как долго ей придется копить?

33. Семья хочет через 6 лет купить дачу за $12 000. Какую сумму (одинаковую) ей нужно каждый год из этих 6 лет добавлять на свой счет в банке, чтобы накопить $12 000, если годовая ставка процента в банке 8%?

34. Найти современную стоимость потока с платежами 40, 50, 45, 70, которые выплачиваются в конце каждого полугодия. Процентная ставка – 12% за полугодие.

35. Ожидается, что прирост доходов составит 5% в год. Какова современная стоимость и наращенная сумма доходов за 3 года, если прогнозируемая сумма 1-го года – 100, а процентная ставка – 7%? Решить задачу для следующих вариантов описания потока доходов: а) рента постнумерандо; б) доходы рассредоточены в пределах года. Для уменьшения погрешности модели «а» доходы за год отнести к середине каждого периода.

36. Для кого выгодна инфляция: для кредиторов или заемщиков?

37. Заем был взят под 16% годовых, выплачивать осталось ежеквартально по 500 д.е. в течение двух лет. Из-за изменения ситуации в стране процентная ставка снизилась до 6% годовых. В банке согласились с необходимостью пересчета ежеквартальных выплат. Каков должен быть новый размер выплаты?

38. На покупку дачного домика взят потребительский кредит 40 000 руб. на 8 лет под 8 простых процентов. Его нужно погашать равными ежеквартальными выплатами. Найти размер этой выплаты.

39. Заем 20 000 д.е. взят на 8 лет под 8% годовых. Погашаться будет ежегодными равными выплатами. Найдите размер этой выплаты.

40. Заем 20 000 д.е. взят на 10 лет под 8% годовых. Погашаться будет начиная с конца шестого года ежегодными равными вы платами. Найдите размер этой выплаты.

41. К категории льготных займов относится беспроцентный заем. Найдите относительный и абсолютный грант-элементы для та кого займа при $D = 1000$, $n = 5$, $i = 10\%$.

42. Как изменяется срок окупаемости проекта при изменении величины инвестиций, годовых доходов, ставки процента?

43. С помощью компьютера рассчитан инвестиционный проект: $\ln v = -4000$ д.е., последующий годовой доход при 8% годовых равен R = 1000 д.е., длительность проекта 6 лет и получено, что чистый приведенный доход NPV = 623 д.е. и срок окупаемости - 6 лет.

44. Для инвестиционного проекта длительностью 6 лет с планируемыми годовыми доходами 400 д.е. и годовой ставкой 10% с помощью компьютера найдены необходимые инвестиции – 1742 д.е.

45. Рассмотрим создание из доходов фонда для погашения кредита инвестиций. В банке взят кредит под инвестиционный проект по ставке $i$, а доходы от проекта помещаются в другой

банк по большей ставке $j$. Вычислите итоговые характеристики (необходимые данные – по вашему усмотрению).

46. Некто получил наследство в виде солидного банковского счета и теперь его «проедает», беря каждый год со счета в банке определенную сумму и тратя ее в течение года. По сути это «перевернутый» инвестиционный процесс. Введите понятия, аналогичные сроку окупаемости, внутренней норме доходности и т.п. Какие меры должен принять наследник при увеличении темпов инфляции?

47. В городе есть банк, выплачивающий 8% годовых. Как вы объясните, почему автомагазин продает автомобили в кредит под 6% годовых?

48. Что хорошо для владельца ценной бумаги: увеличение или уменьшение действующей процентной ставки в период владения этой бумагой, если эта бумага: а) облигация; б) акция; в) депозитный сертификат и т.д.?

49. Найдите курс облигации без погашения с периодической – раз в год – выплатой процентов при $q = 8\%, i = 5\%$. Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен 120.

50. Найдите курс бескупонной облигации за 5 лет до погашения при $i = 6\%$. Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен 70.

51. Найдите курс бескупонной облигации с выплатой процентов при погашении за 5 лет до погашения при $i = 4\%$, если облигация выпущена на 10 лет и $q = 8\%$. Вычислите доходность такой облигации, если ее курс равен 100.

52. Определить ориентировочную рыночную стоимость и оценку курса для корпоративной облигации номиналом 1000 сум. при условии, что срок погашения через 3 года, купонная ставка и ставка банковского процента – 10 и 4% годовых.

53. «Вечная» облигация, приносящая 4,5% фиксированного годового дохода, куплена по курсу 90%. Какова эффективность

вложения (сложная ставка годового процента), если купонные выплаты по облигации производятся поквартально?

54. С помощью компьютера проанализирована матрица доходов, построена по ней матрица рисков и отмечены операции, оптимальные по критериям Валвда, Сэвиджа и Гурвица (при $X$ = 1/2) в условиях полной неопределенности.

| | Матрица доходов | | | | | | Матрица рисков | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 4 | 6 | 12 | 6 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Вальд → | 2 | 2 | 6 | 8 | 14 | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 0 | 1 | 2 | 8 | 4 | 6 | 2 | 5 | 6 | 6 |
| | 2 | 2 | 2 | 4 | 10 | 6 | 4 | 0 | 3 | 4 | 4 |

Гурвиц ← Сэвидж →

55. Элемент матрицы называется седловой точкой в ней, если он минимален в своей строке и максимален в своем столбце. Докажите, что при наличии в матрице доходов седловой точки критерий Вальда рекомендует решение-строку, в которой находится седловая точка.

56. В фонд ежегодно в начале года поступают средства по 10 000 сум. в течение 7 лет, на которые начисляются проценты по ставке 15% годовых, причем выплаты производятся поквартально, а проценты начисляются ежемесячно. Определить наращенную стоимость ренты и современную стоимость фонда.

57. По условиям кредитного договора с банком фирма должна проводить погашение суммы кредита в течение 4 лет ежегодными равными платежами по 20 000 сум., вносимыми в конце года с начислением на них 15 % годовых. Определить современную величину ренты с использованием метода математического дисконтирования.

58.Найти современную стоимость потока с платежами 40,50, 45,70, которые выплачиваются в конце каждого полугодия. Процентная ставка - 2% за полугодие.

59. Предполагается, что платежи каждый год будут уменьшаться на 50 тыс.сум. Первая выплата равна 500 тыс. сум. Платежи и начисления процентов производятся один раз в конце

его дана протяжении 8 лет, ставка – 6%в год. Необходимо найти современную величину и наращенную сумму данной ренты.

60. Инвестиции производятся на протяжении 4 лет один раз в конце года по 2 млн сум. Ставка сложных процентов 17% годовых. Найти сумму инвестиций к концу срока.

61. Для формирования фонда ежеквартально делаются взносы по 100000 сум., Проценты начисляются один раз в год по ставке 17%. Найти современную стоимость фонда, который будет накоплен к концу пятилетнего срока.

62. Замените годовую ренту с годовым платежом $600 и длительностью 10 лет семилетней годовой рентой. Ставка процента 8% в год.

63. Пусть долг, равный 100 тыс. сум., необходимо погасить равными суммами за 5 лет, платежи в конце года. За заем выплачиваются проценты поставке 5%. Составить план погашения долга.

64. Заем 200000 сум взят на 10 лет под 8% годовых. Погашаться будет начиная с конца 6-го года ежегодным и равным и выплатами. Найти размер этой выплаты.

65. Кредит в 20 млн сум. выдана 2 года подставку 10%. Согласно договору все проценты должны быть выплачены одной суммой в начале срока. Определить:

а) план погашения $x$ минимальным числом выплат;

б) может ли срочная $y$ плата второго года равняться 10 млн. сум?

66. При выдаче ссуды на180 дней под 8% годовых кредитором удержаны комиссионные в размере 0,5% суммы кредита. Какова эффективность ссудной операции в виде годовой ставки сложных процентов? В пределах года начисление идет по простому проценту, кредитному году соответствует временная база в 360 дней.

67. По кредитному договору на 800 000 сум сроком на 5 лет фирма должна проводить погашение долга равными частями в конце каждого года. На остаток долга банк начисляет 10 % годовых. Составить план погашения амортизации долга и определить сумму процентов по кредиту.

68. По контракту произведенная продукция стоимостью 2 млн. сум. оплачивается в рассрочку ежеквартально в течение 5 лет с начислением сложных процентов на оставшуюся сумму долга по годовой процентной ставке 0,12. Определить величины равных платежей, если начало оплаты продукции:

а) перенесено на полгода после подписания контракта;

б) отложено на 2 года.

69. Ссуда в 30500 сум выдана в 2004г.1января по сложной ставке10% годовых. Заемщик обязан вернуть долг, выплачивая 8000,16500 и 6500 сум последовательно15.03, 07.07 и 21.10 того же года. Кто при такой схеме погашения кредита оказывается в проигрыше: кредитор или должник, и насколько?

70. По контракту произведенная продукция стоимостью 2 млн.сум. оплачивается в рассрочку ежеквартально в течение 5 лет с начислением сложных процентов на оставшуюся сумму долга по годовой процентной ставке 0,12. Определить величины равных платежей, если начало оплаты продукции:

а) перенесено на полгода после подписания контракта;

б) отложено на 2 года;

71. В городе есть банк, выплачивающий 10 % годовых. Как вы объясните, почему автомагазин продает автомобили в кредит под 8% годовых?

72. В городе есть банк, выплачивающий 8 % годовых. Каквы объясните, почему автомагазин продает автомобили в кредит под 6% годовых?

73. Как изменяется срок окупаемости проекта при изменении величины инвестиций, годовых доходов, ставки процента?

74. Допустим, инвестиционный проект «циклический». Фабрика работает циклами: один год из десяти она на капитальном ремонте и обновлении, что требует $30 000, в остальные девять лет цикла фабрика приносит доход $10 000 в год. Найдите характеристики данного потока платежей. (Уточним, что затраты относят на конец первого года цикла, доход поступает в конце каждого года цикла, начиная со второго года.)

75. Каковы будут эквивалентные номинальные годовые процентные ставки с начислениями по полугодиям и ежеквартально, если соответствующая им эффективная ставка равна 20 %?

76. Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки 10 % годовых.

77. Определить, какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку 12 % годовых.

78. Если доходность одной операции в процентах годовых больше, чем аналогичная характеристика другой, значит ли это, что первую операцию надо предпочесть второй?

79. Облигация приносит ежегодный доход в 1 000 сум на протяжении 5 лет. Какова текущая стоимость облигации, если процентная ставка равна 12 %?

80. До погашения бескупонной дисконтной облигации осталось 3 месяца. Найти рыночный курс облигации, если ставка дисконтирования выбрана 15 %.

## Литература

1. Плотников, А.Д. Математическое программирование: экспресс-курс / А.Д. Плотников. М., 2007.

2. Кузнецов, А.В. Руководство к решению задач по математическому программированию: учеб. пособие / А.В. Кузнецов, Н.И. Холод, Л.С. Костевич. Минск, 2001.

3. Математические методы и модели исследования операций. Учебник М.: «Дашков и К». 2006 г.

4. Исследование операции в экономике. / Под редакцией Н.Ш. Кремера. Учебное пособие. М.: «Экзамен», 2004.

5. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. – Мн. : «Вышэйшая школа», 1986.

6. Кузнецов, А. В. Высшая математика. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Мн.: «Вышэйшая школа», 1994.

7. Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич. – Мн.: «Вышэйшая школа», 1978.

8. Кузнецов, А. В. Сборник задач по математическому программированию / А. В. Кузнецов, Г. И. Новикова, Н. И. Холод. – Мн.: «Вышэйшая школа», 1985.

9. Сакович, В. А. Исследование операций / В. А. Сакович. – Мн.: «Вышэйшая школа», 1985.

10. Экономико-математические методы и модели / Под ред. А. В. Кузнецова. – Мн. : «БГЭУ», 1999.

11. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование / Под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Мн.: «Вышэйшая школа», 1995.

12. Бабайцев В.А., Гисин В.В., Математические основы финансовой математики., М.,2005 г.

13. Башарин Г.П. Начала финансовой математики, М.: ИНФРА, 1997.

14. Ширяев В.И. Финансовая математика. Потоки платежей производные финансовые инструменты. Учебное пособие. –М: Изд. ЛКИ, 2007. – 240 с.

15. Ершов Ю.С. Финансовая математика в вопросах и ответах.-Н.: Сибирское соглашение,1999.

16. Капитоненко В.В. Финансовая математика и ее приложения. –М.: ПРИОР, 2000.

17. Ковалев В.В. Сборник задач по финансовому анализу. – М.: Финансы и статистика, 2000.

18. Ковалев В.В., Уланов В.А. Курс финансовых вычислений.-М.: Финансы и статистика, 2001.

19. Малыхин В.И. Финансовая математика.-М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2000.

20. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. –М.:Дело Лтд, 1995.

21. Шеремет А.Д., Сайфулин Р.С. Методика финансового анализа.-М.:Инфра-М, 1995.

22. Мелкумов Я.С. Финансовые вычисления. Теория и практика. –М.: Инфра-М, 2002.

## СОДЕРЖАНИЕ


Введение..... 3

**ГЛАВА I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ..... 6**

1.1. Экономико-математические модели..... 6

1.2. Математические модели простых экономических задач..... 13

1.3. Графическое решение задач линейного программирования... ..... 18

**ГЛАВА II. АЛГОРИТМ СИМПЛЕКСНОГО МЕТОДА ДЛЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ..... 27**

2.1. Нахождение неотрицательных решений систем линейных уравнений..... 27

2.2. Решение задач стандартного вида симплексным методом..... 38

2.3. Метод искусственного базиса..... 43

**ГЛАВА III. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ..... 47**

3.1.Основные теоремы теории двойственности и их экономический смысл..... 47

3.2. Анализ решения экономических задач..... 59

3.3. Двойственный симплексный метод..... 60

**ГЛАВА IV. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ.... ..... 66**

4.1. Задача целочисленного программирования..... 66

4.2. Метод отсечения плоскостей. Метод Гомори..... 67

4.3. Понятие о граничном методе ..... 73

**ГЛАВА V. ТЕОРИЯ ИГР..... 82**

5.1. Основные понятия теории игр и их модели..... 82

5.2. Решение игры в смешанных стратегиях..... 89

5.3. Приведение матричных игр к задачам линейного программирования..... 94
**ГЛАВА VI. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ..... 100**
6.1. Постановка задачи нелинейного программирования и их виды..... 100
6.2. Условный экстремум..... 101
6.3. Метод множителей Лагранжа..... 105
**ГЛАВА VII. ВЫПУКЛОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ 108**
7.1. Производная и градиент по направлению..... 108
7.2. Проверка выпуклости методом Сильвестра..... 111
7.3. Геометрическая интерпретация задачи выпуклого программирования..... 113
**ГЛАВА VIII. ПРОЦЕНТЫ..... 116**
8.1. Наращение в простых, сложных и непрерывных процентах..... 116
8.2. Учетная ставка и эквивалентность учетной ставки.... 130
8.3. Наращение в переменных процентах..... 135
**ГЛАВА IX. ПЛАТЕЖНЫЙ ПОТОК..... 137**
9.1. Арендная плата и их накопление..... 137
9.2. Арендная плата с одинаковой абсолютной изменчивостью во времени..... 142
9.3. Фиксированная непрерывная аренда. Аренда конверсии... ..... 146
**ГЛАВА X. КРЕДИТНЫЙ СЧЕТ..... 155**
10.1. Общий метод погашения задолженности. Погашения задолженности путем создания фонда с высокими процентными ставками..... 155
10.2. Потребительский кредит. Льготные кредиты. Абсолютный и относительный грант-элемент..... 159
10.3. Ипотечный кредит. Консолидация и обмен долга... 165

**ГЛАВА XI. АНАЛИЗ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ... ..... 173**
11.1. Расчет характеристик проектов с ограниченными начальными инвестициями и фиксированным доходом... .. 173
11.2.Определение срока погашения задолженности..... 177
11.3. Определение суммы инвестиции. Зависимость характеристик процесса от процентной ставки..... 178
**ГЛАВА XII. РЫНОК ЦЕННЫХ БУМАГ..... 179**
12.1. Облигации и их курс..... 179
12.2. Периодически купонный процент выплачиваемый по ставке и эффективности..... 181
12.3. Зависимость цены (ставки) облигации от процентной ставки..... 184
**ГЛАВА XIII. КЛАССИЧЕСКАЯ СХЕМА СТОИМОСТИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ..... 186**
13.1. Понятие риска..... 186
13.2. Отношение инвестора к рискам..... 200
13.3. Количественная оценка риска и методы его снижения ..... 206
**ГЛАВА XVI. ДИСПЕРСИЯ ДОХОДА..... 213**
14.1. Диверсификация инвесторов и дисперсия доходов... 213
14.2. Минимизация дисперсию дохода..... 222
14.3. Матрица доходов и ее риск..... 227
ГЛАВА XV. Страховая рента..... 230
15.1.Финансовая эквивалентность в страховании..... 230
15.2. Таблица смертности и страховая вероятность..... .. 232
15.3. Коммутационная функция. Стоимость страховки аренды..... 238
Задачи для самостоятельных работ..... 245
Литература..... 259

**УСАРОВ ЖУРАБЕК АБДУНАЗИРОВИЧ**

# БИЗНЕС МАТЕМАТИКА

*Учебник*

**Ташкент – «Innovatsion rivojlanish nashriyot-matbaa uyi» – 2022**

| | |
|---|---|
| **Редактор:** | **М.Алимов** |
| **Техник редактор:** | **М.Турсунов** |
| **Художник:** | **А.Шушунов** |
| **Корректор:** | **Л.Ибрагимов** |
| **Компьютерная вёрстка:** | **М.Зойирова** |

**E-mail: nashr2019@inbox.ru Тел: +99899.373-90-35**
**Изд.лиц. AI№009, 20.07.2018. Разрешено в печать 05.09.2022.**
**Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times Uz».**
**Офсетная печать. Усл. печ.л. 17,0. Изд. печ.л. 16,5.**
**Тираж 50 . Заказ № 115.**

**Отпечатано в типографии**
**«Innovatsion rivojlanish nashriyot-matbaa uyi»**
**100174, г. Ташкент, ул. Университет 7.**