АБДУЛЛАЕВ А.М., ДЖАМАЛОВ М.С.

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ



ТАШКЕНТ

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

АБДУЛЛАЕВ А.М., ДЖАМАЛОВ М.С.

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УЧЕБНИК

Ташкент – 2010

Абдуллаев А.М., Джамалов Эконометрическое моделирование. Учебник для ВУЗов. (Научная книга)

В учебнике изложены вопросы эконометрического моделирования, учета зависимостей между факторами и мультиколлинеарности при построении эконометрических моделей, а также классические модели линейной и множественной регрессии. Описаны различные аспекты и методы исследования временных рядов, дисперсионного, корреляционного и факторного анализа, рассмотрены методы построения системы эконометрических уравнений, динамических эконометрических моделей, а также методы экспертного оценивания, используемые при содержательной интерпретации результатов эконометрических исследований.

Для студентов экономических специальностей вузов, аспирантов, преподавателей, научных сотрудников и специалистов по прикладной экономике, статистике и финансам.

Рецензенты: д.э.н., проф. Салимов Б.Т.
д.э.н., проф. Шермухамедов А.Т.

Рекомендовано Министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан в качестве учебника для студентов высших учебных заведений.

© Абдуллаев А.М. и др.

10884/1
NAMANGAN STATE UNIVERSITY
Abdurahmon Xo'ja o'g'li

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 8
Основные свойства экономической системы, которые учитываются в эконометрических моделях 11
Глава 1. Введение в анализ временных рядов 29
1.1. *Понятие временного ряда* 29
1.2. *Автокорреляция уровней временного ряда и выявление его структуры* 41
1.3. *Моделирование тенденции временного ряда* 48
1.4. *Моделирование тенденции временного ряда при наличии структурных изменений* 55
1.5. *Изучение взаимосвязей по временным рядам* 62
1.5.1. *Специфика статистической оценки взаимосвязи двух временных рядов* 62
1.5.2. *Методы исключения тенденции* 63
1.5.3. *Автокорреляция в остатках. Критерий Дарбина-Уотсона* 72
1.5.4. *Оценивание параметров уравнения регрессии при наличии автокорреляции в остатках* 77
1.5.5. *Адаптивные модели прогнозирования* 81
Контрольные вопросы 86
Глава 2. Применение метода наименьших квадратов к обработке экономической информации 87
2.1. *Общие замечания* 87
2.2. *Качественное описание совокупности данных* 88
2.3. *Количественное описание совокупности данных* 95
2.4. *Метод наименьших квадратов как вычислительный прием* 103
2.5. *Применение метода наименьших квадратов при обработке связанных рядов динамики* 113
2.6. *Обобщенный метод наименьших квадратов* 123
Контрольные вопросы 130
Глава 3. Корреляционный анализ 131
3.1. *Общие заме* 131

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
Axborot-resurs markazi

3.2. *Корреляционные методы измерения тесноты связи* 132
3.3. *Непараметрические методы оценки тесноты связи* 141
3.4. *Измерение тесноты связи между рядами динамики* 147
3.5. *Автокорреляция и авторегрессия* 150
Контрольные вопросы 154
Глава 4. Моделирование как метод исследования сложных экономических систем 155
4.1. *Основы модельного описания сложных экономических систем* 155
4.2. *Методы и принципы моделирования экономических систем* 163
4.3. *Вычислительные эксперименты с моделями экономических систем* 170
4.4. *Эффективность вычислительного эксперимента с эконометрической моделью* 174
4.5. *Моделирование сезонных и циклических колебаний* 193
Контрольные вопросы 203
Глава 5. Применение производственной функции в экономических исследованиях 205
5.1. *Методология построения комплексных эконометрических моделей* 205
5.2. *Статистические характеристики эконометрической модели* 209
5.3. *Введение искусственных переменных* 216
5.4. *Проблемы мультиколлинеарности* 219
5.5. *Производственные функции* 226
5.6. *Результаты расчетов, произведенных при помощи производственных функций* 234
5.7. *Применение эконометрических моделей для имитации и прогноза* 242

Контрольные вопросы 244
Глава 6. Дисперсионный анализ 245
6.1. *Теория дисперсии и ошибки* 245
6.2. *Дисперсия как ошибка измерения и вариация переменной* 251
6.3. *Ковариация и корреляция* 254
6.4. *Источники статистических ошибок* 257
6.5. *Законы случайных вариаций в эконометрии* 258
6.6. *Основные предположения дисперсионного анализа* 465
6.7. *Методика дисперсионного анализа* 268
Контрольные вопросы 278
Глава 7. Факторный анализ 279
7.1. *Понятие о факторном анализе* 279
7.2. *Методика факторного анализа* 282
7.3. *Компонентный анализ или метод главных компонент* 291
Контрольные вопросы 296
Глава 8. Парная корреляция и регрессия 297
8.1. *Общие замечание* 297
8.2. *Оценка параметров линейной регрессии и корреляции* 304
8.3. *Интервалы прогноза по линейному уравнению регрессии* 323
8.4. *Нелинейная регрессия* 328
8.4.1. *Нелинейные зависимости, подчиняющиеся непосредственной линеаризации* 350
8.4.2. *Метод наименьших квадратов. Метод оценивания регрессионных параметров* 357
8.4.3. *Корреляция для нелинейной регрессии. Коэффициенты эластичности* 363
8.4.4. *Оценка существенности нелинейной регрессии* 368
8.5. *Нелинейная корреляция и регрессия* 372
8.6. *Средняя ошибка аппроксимации* 381

Контрольные вопросы 383
Глава 9. Множественная регрессия и корреляция 384
9.1. *Общие замечание* 384
9.2. *Отбор факторов при построении множественной регрессии* 386
9.3. *Выбор формы уравнения регрессии* 396
9.4. *Оценка параметров уравнения множественной регрессии* 401
9.5. *Частные уравнения регрессии* 406
9.6. *Множественная корреляция* 409
9.7. *Частная корреляция* 419
9.8. *Проверка надежности результатов корреляционного и регрессионного анализа* 428
9.9. *Ложная корреляция* 436
Контрольные вопросы 438
Глава 10. Системы эконометрических уравнений 439
10.1. *Общее понятие о системах уравнении, используемых в эконометрике* 439
10.2. *Структурная и приведенная формы модели* 443
10.3. *Проблема идентификации* 448
10.4. *Оценивание параметров структурной модели* 458
10.5. *Применение систем эконометрических уравнений* 469
Контрольные вопросы 478
Глава 11. Динамические эконометрические модели 479
11.1. *Основные свойства и модели одномерных временных рядов* 479
Глава 12. Методы анализа результатов эконометрического исследования 488
12.1. *Общая характеристика метода экспертных оценок* 488
12.2. *Классификация методов получения экспертной информации* 495
12.3. *Типы шкал и методы получения элементарных суждений* 500

12.4. *Методы обработки и анализа экспертных оценок* ... 507
12.5. *Оценка и учет компетентности экспертов* ... 523
12.6. *Пример использования экспертных оценок в экономической практике* ... 527
Глава 13. Проведение расчетов характеристик эконометрических моделей с помощью компьютера ... 537
13.1. *Предпосылки корреляционно-регрессионного анализа* ... 537
13.2. *Этапы корреляционно-регрессионного анализа* ... 539
13.3. *Основные методы поиска наилучшего уравнения* ... 546
13.4. *Инструментарий Excel и пример решения Множественной регрессионной задачи* ... 552
13.5. *Анализ и прогнозирование на основе трендов* ... 565
13.6. *Сущность и основные формы трендов* ... 567
13.7. *Инструментальные средства Excel для работы с трендом* ... 570
13.8. *Технология построения трендов в Excel* ... 580
Глоссарий ... 583
Литература ... 595
Приложение 1 ... 599
1) Таблица значений F-критерия Фишера ... 599
2) Критические значения t-критерия Стьюдента ... 600
3) Критические значения корреляции ... 600
4) Значения статистик Дарбина-Уотсона ... 601
Приложение 2 ... 602
Прогнозирование экономических показателей С помощью многофакторных регрессионных и Корреляционных моделей (алгоритм решения задач) ... 602

ВВЕДЕНИЕ

В 30-х годах XX в. зародилось новое направление в экономической науке, возникшее в результате взаимодействия и взаимообусловленности трех основных компонентов: экономической теории, статистики и математических методов. Междисциплинарный подход к изучению экономики привел к созданию такой учебной дисциплины, как эконометрика.

Дальнейшему развитию эконометрики способствовало стремительное развитие средств вычислительной техники, обладающей значительным объемом оперативной памяти и высоким быстродействием, что в частности, позволило с высокой степенью точности и оперативности проводить статистический анализ временных рядов и проверку как параметрических, так и непараметрических гипотез, исследовать сложные многофакторные регрессионные модели и решать другие задачи, составляющие предмет исследования эконометрики.

В последние десятилетия эконометрика как научна дисциплина стремительно развивается и является фундаментом современного экономического образования.

Предметом эконометрики являются факторы, формирующие развитие экономических явлений и процессов. Эконометрика – это искусство разработки и предвидения экономических нормативов, прогнозов и гипотез. Предпосылки, на которых основываются оценки факторов развития экономики, связаны с риском. Для уменьшения ошибок эконометрики должны подумать, как включить в эконометрические расчеты все без исключения факторы и выбрать наиболее эффективные методы их оценки, которые обеспечили бы их достоверность.

Объективную характеристику развития экономических явлений и процессов в будущем могут обеспечить правильно подобранные статистические и математические методы. Известно, что эти методы перестают быть предметом интереса в практической деятельности в тех случаях, когда нет уверенности в какой

мере они подходят к решению конкретных задач. Эконометрические расчеты выступают средством усовершенствования менеджмента хозяйственной деятельности, без них невозможно достижение высоких экономических результатов. Они содействуют правильной оценке влияния факторов на соблюдение принципов рыночной экономики и достижение экономических результатов от их внедрения.

Эконометрика должна систематически и эффективно обеспечивать непрерывный процесс принятия управленческих решений, которые бы давали возможность достигать намеченных целей или курса действий. Здесь наиболее важной задачей является выявление возможной цели руководителя предприятия или организации и определение ее фактического достижения при различных вариантах осуществления процесса хозяйственной деятельности. Следовательно, важной задачей эконометрии является оценка направленных действий специалистов на достижение экономической эффективности хозяйственной деятельности.

В рыночной экономике, которая изменяет условия функционирования хозяйственных объектов, задачей эконометрики является прогнозирование путей развития макро- и микроэкономических факторов хозяйственной деятельности. Прогнозная информация должна давать возможность принимать решение в зависимости от хозяйственной конъюнктуры. Такие решения могут быть выработаны только на основании надежных статистических данных, обработанных и обобщенных соответствующими эконометрическими методами.

Эконометрика позволяет проводить количественный анализ реальных экономических явлений, основываясь на современном развитии теории и наблюдениях, связанных с методами получения выводов.

Основная задача эконометрики - наполнить эмпирическим содержанием априорные экономические рассуждения.

Цель эконометрики - эмпирический вывод экономических законов. Эконометрика дополняет теорию, используя реальные данные для проверки и уточнения постулируемых отношении. Эконометрические расчеты нужно проводить постоянно, систематически повторяя все их критерии: от формулировки проблемы, отбора цели, составления альтернативных действий, сбора данных, выбора метода их оценки и построения экономических прогнозов или моделей, взвешивания затрат по отношению к экономическим результатам, дополнительной проверки предпосылок и исходных данных, перепроверки целей, выявления новых альтернатив до построения улучшенных моделей.

Эта книга адресована прежде всего студентам, впервые приступающим к изучению эконометрики, и имеет две цели. Во-первых, мы хотим подготовить читателя к прикладным исследованиям в области экономики. Во-вторых, мы думаем, что она будет полезна студентам, которые собираются в дальнейшем углубленно изучать теорию эконометрики. Никаких предварительных знаний об эконометрике не требуется. Однако предполагается знакомство с курсами линейной алгебры и теории вероятностей и математической статистики в начальном объеме. Мы предполагаем также, что читатель владеет математическим анализом в пределах стандартного курса экономического вуза.

Учебник написано авторами на основе трудов отечественных и зарубежных авторов с расширением прикладных аспектов литературных источников за счёт собственных научно-практических разработок. Авторы, признательны рецензентам и всем, кто, ознакомился с. содержанием рукописи, за ряд ценных замечаний, которые с благодарностью были приняты и учтены.

Учебник рекомендован для студентов экономических вузов по всем экономическим специальностям.

Основные свойства экономической системы, которые учитываются в эконометрических моделях

Основные свойства экономической системы, которые

Можно выделить следующие свойства экономической системы, которые можно воспроизвести эконометрической моделью:

• Все экономические процессы происходят в пространстве и во времени. Свойства времени двигаться только вперед используется во всех моделях временных рядов.

• Экономическая система — самонастраиваемая система, которая может находиться в состоянии динамического равновесия. Это свойство экономической системы используется в решении систем одновременных уравнений.

• Экономическая система обладает инерционными свойствами. Движущей силой общества являются потребности членов общества, которые нельзя быстро изменить. Также нельзя быстро изменить форму собственности, способ производства, культуру производства, производительные силы и производственные отношения. Инерционные свойства экономической системы являются методологической предпосылкой прогнозирования.

Текущее состояние экономической системы испытывает влияния прошлых, настоящих и будущих значений переменных этой системы. Это свойство используется в авторегрессионных и автокорреляционных моделях, моделях адаптивных ожиданий частичной корректировки, адаптивных методах прогнозирования.

Для всех явлений в природе между причиной и следствием существует временной лаг, или временная задержка. Для обнаружения временной задержки необходимо, чтобы ее величина была больше временного шага изучения связи между причиной и следствием. Это свойство используется в моделях сосредоточенного и распределенного лага.

• Все временные экономические процессы происходят циклически. Это свойство используется в моделях сезонных и длиннопериодических волн, существующих во временных рядах.

• Последние значения временного ряда оказывают большее влияние на прогнозное значение, чем первые значения временного ряда. Это свойство реализуется с помощью взвешенной регрессии.

• Прошлые значения показателя временного ряда оказывают влияние на его текущее значение, но не зависит от него. Это свойство значений временного ряда используется в системах одновременных уравнений для получения экзогенной переменной с помощью лаговой эндогенной переменной.

На некоторых участках временных рядов экономического показателя могут наблюдаться закономерности изменения их дисперсии. Дисперсии участков временного ряда можно рассматривать как зависимую переменную, численные значения которой можно прогнозировать методами регрессионного анализа. Зная амплитуду колебаний и их длительность, можно уточнить доверительные прогнозные интервалы изучаемого показателя. Использование дисперсии временного ряда как зависимой переменной является новым направлением в эконометрике.

Классификация переменных в эконометрических исследованиях

Микроэкономические данные количественно описывают процессы на отдельных предприятиях народного хозяйства. Микроэкономический анализ ограничивается изучением явлений и их взаимосвязей на заводах, предприятиях и учреждениях.

Макроэкономические ряды составляются на основе микроэкономических данных и характеризуют народное хозяйство или отдельные его отрасли.

Переменная - показатель экономической системы, численные значения которого изменяются. Переменные можно классифицировать по различным признакам. По признаку принадлежности ко входу или выходу экономической системы переменные подразделяются на входные и выходные.

Входные переменные экономической системы - это ресурсы и условия существования предприятия. Например, количество работников, объемы сырья и материалов.

Выходные переменные - это результирующие показатели деятельности предприятия. Например, объем валовой продукции, прибыль.

Производные переменные - это переменные, которые получаются вследствие определенных отношений выходных показателей к входным. Например, производительность труда, фондоотдача.

Как правило, между производными переменными и их составляющими переменными существует ложная корреляция Пирсона (о типах ложной корреляции см. в глоссарии).

Как правило, входные переменные являются причинами или факторами, а выходные переменные следствиями или зависимыми переменными.

По признаку принадлежности к причине или следствию в причинно-следственных отношениях переменные подразделяются на факторы и зависимые переменные.

Фактор - причина, которая влияет на зависимую переменную.

Зависимая переменная - следствие, которое испытывает влияние со стороны факторов. Как правило, зависимыми переменными являются результаты деятельности процессов. В эконометрике недавно появился еще один вид зависимой переменной - дисперсия экономического показателя, зависящая от времени.

По характеру влияния на зависимую переменную можно выделить главные и второстепенные факторы.

Главный фактор - это такая причина, без которой не будет существовать зависимая переменная.

Второстепенный фактор - это такая причина, которая влияет на зависимую переменную, но без которой зависимая переменная сможет существовать.

Например, по отношению к товарообороту ассортимент товара, спрос являются главными факторами, а реклама и культура обслуживания являются второстепенными факторами.

При построении модели обычно пользуются следующим правилом: в модель нужно включить все главные факторы и несколько второстепенных.

По признаку значений переменные подразделяются на числовые и качественные.

Числовая переменная - переменная, которая имеет дискретные или непрерывные численные значения.

Качественная переменная - переменная, значения которой принадлежат к определенному классу. Например, предприятие может быть приватизированным или неприватизированным, убыточным или прибыльным, расположенным далеко или близко от источников сырья.

По признаку преобразования переменные могут быть исходные и преобразованные.

Исходные переменные подразделяются на первичные и агрегированные.

Первичные переменные - это переменные, полученные в процессе деятельности экономической системы в реальном времени. Например, данные по каждой покупке, фиксируемые в кассовом аппарате.

Агрегированные переменные - это переменные, полученные суммированием первичных данных за определенный промежуток времени. Например, данные о сумме товарооборота, зафиксированного кассовым аппаратом за один день. При этом полностью сглаживается варьирование товарооборота в течение рабочего дня.

Преобразованные переменные - переменные, которые подвергаются определенным преобразованиям. Преобразования можно производить с помощью простых функций ($1/X$, $\ln X$ и т.д.), ортогональных преобразований, преобразований факторного анализа, делением одной переменной на другую. Очень часто при преобразованиях теряется экономический смысл новой переменной.

По отношению к возможности получения численных значений переменные группируются на доступные и скрытные, или латентные

Доступные переменные - переменные, которые можно получить из каких либо источников.

Скрытные, или *латентные переменные* - переменные, численные значения которых нельзя получить. Например, реальные доходы населения являются скрытной переменной. Обычно, в модель вместо латентного фактора включают доступный фактор (инструментальная переменная), который сильно связан с латентной переменной. Например, реальные доходы населения (латентная переменная) тесно связаны с затратами на предметы роскоши (доступная инструментальная переменная).

Инструментальная переменная - переменная, которая может заменить в модели исходную переменную и обладает двумя свойствами: во-первых, она тесно связана с исходной переменной, во-вторых, она не связана с остатками модели.

Фиктивная переменная - переменная, которая количественным образом описывает качественный признак.

По времени действия переменные группируются на текущие и лаговые.

Текущие переменные - переменные, которые измерены в текущий момент времени.

Лаговые переменные - переменные, численные значения которых измерены в предшествующие моменты времени по отношению к текущим значениям зависимой переменной. Лаговая

переменная обладает удивительным свойством - она может влиять, но не может быть зависимой, так как прошлое может влиять на будущее, но прошлое не зависит от текущего времени.

По отношению к месту нахождения в экономической системе переменные разделяются на *внутренние* (эндогенные) и *внешние* (экзогенные).

Изменение одной переменной приводит к изменению других до перехода системы в динамическое равновесное состояние. Эндогенные переменные зависят от переменных системы и могут влиять на остальные переменные. Эндогенные переменные принято обозначать буквой *Y*.

Экзогенные переменные не зависят от деятельности системы, но могут влиять на эндогенные переменные. Экзогенные переменные принято обозначать буквой *X*. Экзогенными переменными можно условно считать инвестиции в экономику, гуманитарную помощь. Истинными экзогенными переменными можно считать лаговые эндогенные переменные, природные, космические факторы.

Эндогенные переменные - внутренние переменные, которые принадлежат к экономической системе. При этом эндогенные переменные могут влиять на другие эндогенные переменные и могут от них зависеть. Например, если в магазине имеется очередь, то увеличение продавцов приведет к увеличению товарооборота, увеличение товарооборота приведет к увеличению продавцов. Процесс увеличения продавцов и товарооборота будет продолжаться до тех пор, пока будет сохраняться очередь. Товарооборот и количество продавцов являются эндогенными переменными.

Свойства эндогенных переменных

Свойство 1. Эндогенные переменные имеют обратные связи, которые порождают проблему устойчивости экономической системы. Предположим, что в исходный момент времени эндогенные переменные находятся в средне динамическом равновесном состоянии (ярким примером служат усто-

явшиеся значения спроса, цены и предложения. изучаемые в микроэкономике). При изменении эндогенной переменной возможны следующие сценарии ее изменения:

• она плавно монотонно или циклически вернется к своему исходному значению, такое поведение эндогенной переменной характерно для устойчивой экономической системы;

• она плавно монотонно или циклически примет минимальное или максимальное возможные значения, такое поведение эндогенной переменной характерно для неустойчивой экономической системы.

Экзогенные переменные — внешние переменные, которые влияют на переменные экономической системы, но от них не зависят. Например, суточное вращение Земли влияет на показатели экономической системы, но вращение Земли не зависит от экономической системы.

Лаговая эндогенная переменная является экзогенной.

В зависимости от расположения переменной во времени могут быть статические и динамические переменные.

Свойства экзогенных переменных

Свойство 1. Предположим, что экономическая система находится в устойчивом состоянии и эндогенные переменные имеют средние динамические равновесные значения. Изменение одной или нескольких экзогенных переменных приводит через несколько циклов к изменению средних динамических значений эндогенных переменных.

Свойство 2. Прогнозные значения эндогенных переменных можно получить только с помощью экзогенных переменных.

Взаимосвязь экзогенных и эндогенных переменных описывается системой одновременных уравнений, которые принято называть эконометрической моделью.

Известны две формы одновременных уравнений: структурная и приведенная.

Структурная форма одновременных уравнений содержит в качестве объясняющих переменных как эндогенные,

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI
NAMANGAN DAVLAT

так и экзогенные переменные, которые отражают реальную структуру взаимосвязи переменных.

Приведенная форма одновременных уравнений содержит в качестве объясняющих переменных только экзогенные переменные. Приведенная форма используется для получения прогнозных значений эндогенных переменных и для получения расчетных значений эндогенных переменных, используемых для получения несмещенных оценок параметров структурной формы одновременных уравнений.

Приведем структурную систему одновременных уравнений для

$$Y_1 = a_0 + a_1 Y_2 + a_2 X_1 + e_1;$$
$$Y_2 = b_0 + b_1 Y_1 + b_2 X_2 + e_2.$$

Если в первом уравнении вместо Y_2 подставить второе уравнение, а во втором уравнении вместо Y_1 подставить первое уравнение, то после несложных преобразований можно получить приведенную систему одновременных уравнений.

$$Y_1 = c_0 + c_1 X_2 + c_2 X_2 + e_3;$$
$$Y_2 = d_0 + d_1 X_1 + d_2 X_2 + e_4.$$

Однозначный переход от структурной системы к приведенной системе одновременных уравнений можно было произвести при условии идентифицируемости структурной системы одновременных уравнений.

Структурная система одновременных уравнений обладает такими свойствами:

• количество уравнений равно количеству эндогенных переменных;

• структурная система одновременных уравнений может быть: неидентифицируемой, идентифицируемой, сверхидентифицируемой. Поясним более подробно эти свойства системы одновременных уравнений. Система одновременных уравнений неидентифицируема, если для какого-нибудь уравнения системы выполняется неравенство;

$$n < (n_i + d_i),$$

где n - общее число всех экзогенных переменных системы;

n_i - число экзогенных переменных i-го уравнения;

d_i - число объясняющих эндогенных переменных i-го уравнения.

Модель идентифицируема, если для каждого уравнения системы выполняется равенство:

$$n = (n_i + d_i).$$

Из этого равенства следует, что количество всех эндогенных переменных должно равняться количеству экзогенных переменных. В каждом уравнении количество объясняющих переменных должно равняться количеству эндогенных переменных. Комбинации объясняющих переменных в каждом уравнении не должны повторяться.

Как правило, экзогенных переменных не хватает для того, чтобы система стала идентифицируемой, поэтому часто в качестве экзогенной переменной выбирают лаговую эндогенную переменную.

Модель сверхидентифицируемая, если хотя бы для одного уравнения системы выполняется неравенство

$$n > (n_i + d_i).$$

Статические переменные - это переменные, которые изучаются в определенный фиксированный момент времени. Статическими переменными можно считать данные пространственной выборки.

Динамические переменные - это переменные, которые изучаются в течение определенного времени. Динамическими переменными можно считать данные временных рядов, Динамические переменные могут иметь средние динамические равновесные значения. В экономической системе все эндогенные переменные связаны между собой. Если одна переменная изменилась, то по экономической системе побегут волны до установления средне динамических равновесных

значений переменных, при условии что система имеет отрицательные обратные связи и колебания в системе носят затухающий характера. Однако при положительной обратной связи амплитуда колебаний в системе увеличивается, система не может самонастроиться и при определенных условиях может разрушиться, например, при гиперинфляции.

Среднее динамическое равновесное значение переменной - значение эндогенной переменной, которое устанавливается стабильным в экономической системе.

Синхронизирующий фактор - причина, которая оказывает влияние на все или на часть факторов, однонаправленно влияющих на зависимую переменную (праздники, катастрофы, собрание сотрудников перед выполнением работы).

Эконометрические исследования накладывают следующие ограничения на значения переменных:

• численные значения переменной должны изменяться. Это условие обусловлено тем, что нельзя определить степень влияния переменной, значения которой не изменяются. Степень синхронности изменения переменных влияет на величину критерия их связи между собой;

• количество значений в переменной или объем выборки должен быть в 2-3 раза больше, чем количество факторов в модели;

• все переменные в модели должны иметь изменяющиеся численные значения. Если в модели используется качественная переменная, то необходимо каждому классу дать численное значение;

• численные значения переменных по возможности не должны содержать ошибок измерений;

• в значениях переменной не должно быть пропусков. Если какие-то значения в переменной отсутствуют, то следует заполнить их средними значениями или интерполяционными значениями.

Эконометрические исследования должны учитывать следующие свойства значений переменных:

• сильно выделяющееся значение зависимой переменной (выброс) может быть результатом влияния сильно изменившегося одного влияющего фактора или результатом однонаправленного воздействия большинства объясняющих переменных. Вероятность однонаправленного воздействия большинства объясняющих переменных очень мала. Поэтому причиной этого явления могло послужить изменение такого синхронизирующего фактора, который одновременно повлиял на эти объясняющие переменные. В экономических исследованиях такими синхронизирующими факторами могут быть: праздники; культурно-массовые мероприятия; стихийные бедствия; предвыборные кампании; сезонность; события, которые вызывают ожидание перемен, и другие явления, которые одновременно воздействуют на все население или только на ее часть;

• если переменные изменяются синхронно в текущие моменты времени или с временной задержкой, то эти переменные связаны между собой. Если переменные изменяются хаотично или случайным образом, то эти переменные не связаны между собой;

Основные свойства экономического временного ряда

1. Текущие состояние экономической системы испытывают влияние прошлых, настоящих и будущих значений переменных этой системы

2. Для всех явлений в природе между причиной и следствием существует временной лаг (временная задержка).

3. Все временные экономические процессы происходят циклически, которые могут содержать периодические волны: короткие и длинные.

4. «Свежие» значения временного ряда оказывают большее влияние на его прогнозное значение, чем "старые" значения.

5. При построении доверительных интервалов прогноза и уравнения регрессии следует считать более точным не среднее значение временного ряда, а его последнее значение.

6. Возможные реализации экономического процесса в фиксированный момент времени t; имеют определенный закон распределения вероятностей и соответствующие статистические характеристики: среднее арифметическое значение, дисперсия, ковариация и их математические ожидания. Если изучать две группы возможных реализаций в моменты времени t и $t+k$, то можно вычислить автоковариацию для пар случайных величин Y_t и Y_{t+k}, где $k=1, 2,..., n-t$;

7. В численных значениях временного ряда не должно быть пропусков. Если имеется пропуск, то он восстанавливается средним значением, обычно из ближайших к нему чисел.

Статистические характеристики временного ряда

Временны ряды могут иметь следующие статистические характеристики:

- среднее арифметическое значение;
- дисперсия;
- автоковариация;
- автокорреляционная функция (автокоррелограмма);
- периодограмма.

Среднее арифметическое значение временного ряда Y_t вычисляется по следующей формуле

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_t}{n}.$$

Дисперсия временного ряда Y_t вычисляется по формуле

$$S^2 = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}{n-1}.$$

Автоковариация k-го порядка временного ряда Y_t вычисляется по формуле

$$Cov(Y_t, Y_{t+k}) = \frac{1}{n-k} \sum_{t=1}^{n-k} (Y_t - \bar{Y}_1)(Y_{t+k} - \bar{Y}_2)$$

Автокорреляция k-го порядка временного ряда Y_t - коэффициент корреляции $r(Y_t, Y_{t+k})$, рассчитанный между исходным временным рядом Y_t и этим же временным рядом,

только сдвинутым вперед на к дат Y_{t+k}. Автокорреляция показывает степень влияния предыдущих значений временного на их последующие значения с временным сдвигом, равным k датам.

$$r(k) = r(Y_t, Y_{t+k}) = \frac{\sum_{t=1}^{n} (Y_t - \bar{Y}_1)(Y_{t+k} - \bar{Y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n-k} (Y_t - \bar{Y}_1)^2 \sum_{t=k}^{n} (Y_{t+k} - \bar{Y}_2)^2}}.$$

В расчетах автокорреляции k-го порядка должны участвовать только заполненные пары чисел анализируемых рядов. Это значит, что в расчетах не должны участвовать первые к чисел ряда Y_t, и k последних чисел ряда Y_{t+k}.

Автокорреляционная функция (автокоррелограмма) - зависимость коэффициентов автокорреляции от величины их порядка k.

Автокорреляция может изменяться от -1 до +1.

График автокорреляционной функции зависит от тенденции, присутствующей во временном ряду (рис. 1.)

Анализ рис. 1 а, б показывает, что если временной ряд **имеет линейную** тенденцию, то автокоррелограмма имеет **вид** горизонтальной линией с численными значениями, равными единице.

Анализ рис. 1 в, г, д, е позволяет утверждать следующее: автокоррелограмма повторяет тенденцию в нормированном виде, которая имеется во временном ряду.

Имеются определенные правила анализа автокоррелограмм для выявления тенденции во временном ряду. Большинство статистических пакетов позволяют рассчитать автокоррелограмму. Однако, как указывает ряд авторов, автокоррелограмма является вещью в себе, и требуется большой опыт по ее анализу, который трудно формализуется. Визуальный анализ временного ряда и изучение периодограммы позволяют часто заменять анализ автокоррелограммы. Более

подробно со свойствами автокоррелограмм, частных автокоррелограмм (с указанием 95% интервала, в котором коэффициенты не отличаются от нуля) для различных видов временных трендов (линейные. линейно-аддитивный, сезонные) можно ознакомиться в источнике [1].

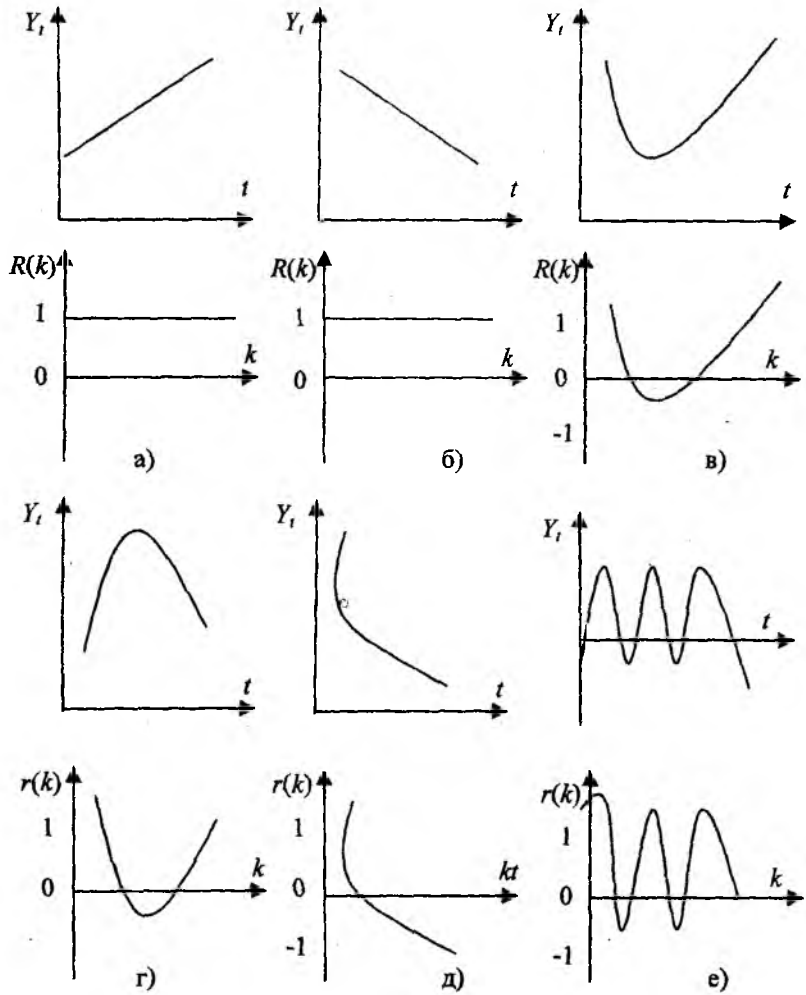


Рис. 1. Различные виды тенденций и их автокоррелограммы

Периодограмма. Одной из важных характеристик экономического временного ряда является его периодограмма.

Дадим определение периодограммы в том виде, как оно было предложено А. Шустером в 1898 г.

Пусть Y_t - временной ряд с нулевым средним, а t пробегает целые числа от 1 до n. Представим временной ряд Y_t в виде следующей модели:

$$Y_t = a\cos(2\pi t / T) + b\sin(2\pi t / T) + e = c\cos(2\pi t / T + \varphi) + e,$$

где T - некоторая фиксированная величина, обычно называемая периодом, или длиной волны;

φ - начальная фаза колебания;

a, b, c - амплитуды периодических колебаний;

$$a = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t \cos(2\pi t / T);$$

$$b = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t \sin(2\pi t / T);$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$c^2(T) = a^2(T) + b^2(T)$$

Периодограмма - график зависимости $c^2(T)$ от длины волны T, которая показывает зависимость квадрата амплитуды косинусоидального колебания от его периода для временного ряда с нулевым средним значением.

В практических целях можно упростить расчет периодограммы, если построить зависимость ошибки модели

$$Y_t = a_0 + a_1 t + a_2 \sin(2\pi t / T) + a_3 \cos(2\pi t / T) + e_t,$$

от периода T. где T принимает значения от 3 до удвоенной длины временного ряда.

Коэффициенты модели рассчитываются методом наименьших квадратов [12].

Целями анализа временных рядов являются:

• выявление структуры временного ряда для более глубокого понимания динамически экономических процессов;

• получение точечного и интервального прогноза динамического экономического показателя.

Классификация моделей. Все модели можно разделить по средствам моделирования на материальные и абстрактные.

Материальные модели воспроизводят характеристики объекта с помощью материальных средств. Например, используя объект магазина, можно искать оптимальный вариант размещения оборудования, перемещения покупателей, путей движения товаров.

Абстрактные модели воспроизводят характеристики объекта с помощью умозаключений, которые являются плодом человеческого мышления. По способу моделирования абстрактные модели подразделяются на графические, математические, словесно-описательные.

Графические модели - это представление взаимосвязи переменных в виде графиков, диаграмм. Визуальный анализ графических моделей является одним из самых мощных средств обнаружения вида тенденции и прогнозной оценки динамики экономического процесса, степени взаимосвязи переменных. Графические модели позволяют провести качественный анализ взаимосвязи переменных, а также выдвинуть гипотезу о форме зависимости между переменными, которую необходимо проверить с помощью математических методов.

Математическая модель - это совокупность уравнений, отображающих зависимости между экономическими показателями или переменными. Математические модели позволяют количественно измерить степень взаимосвязи переменных и получить расчетные значения признаков объектов.

Словесно-описательные модели - это совокупность умозаключений, которые качественно характеризуют логическую взаимозависимость экономических показателей экономической системы.

Экономические процессы происходят в пространстве и во времени, в правовой и законодательной среде общества в

сочетании с потребностями членов общества при соблюдении законов сохранения ресурсов: денежных, трудовых, сырья и материалов, духовных, интеллектуальных, моральных и богатства, которое можно взять с данной территории.

Приведенная словесно-описательная модель представляет пример системного рассмотрения всех процессов, происходящих на предприятии, организации или в государстве. Все три вида абстрактных моделей взаимно дополняют друг друга и широко используются в эконометрическом анализе. Следовательно, эконометрические модели могут быть пространственными и временными, а также пространственно-временными.

Пространственные модели описывают связь между переменными объектов, взятых за определенный момент времени.

Временные модели описывают динамику переменной объекта за определенные фиксированные моменты времени.

Пространственно-временные модели описывают динамику переменной нескольких объектов за определенные фиксированные моменты времени.

Этапы эконометрического моделирования. При изучении любой науки необходимо в ней выделить стержень, на котором будет находиться весь теоретический материал. В физике этим стержнем могут быть законы сохранения массы, количества движения, энергии, импульса; в теории относительности - закон независимости скорости света от его источника.

В эконометрике таким стержнем нам представляются этапы эконометрического моделирования. Рассмотрение этих этапов позволяет системно осветить все основные положения эконометрики.

Этап 1. Постановочный. Формирование цели исследования. Выявление экономических проблем и выделение из них наиболее существенной. Цель исследования соответствует решению тех проблем, которые возникают у предприятия, находящегося на определенном этапе своего развития.

Этап 2. Априорный. Анализ сущности изучаемого объекта. Определяют главные и второстепенные факторы, влияющие на проблему.

Этап 3. Информационный. Сбор данных и статистической информации по всем переменным причинно-следственных связей зависимости проблемы от предполагаемых причин. Визуальный анализ графиков всех переменных и причинно-следственных связей для определения тенденций и вида зависимостей между переменными.

Этап 4. Спецификация математической модели. Определение вида математической функции, которая описывает влияние объясняемых переменных на зависимую переменную.

Этап 5. Идентификация модели. Статистический анализ модели и оценка параметров регрессионной модели.

Этап 6. Определение качества модели по обучающей выборке. Определение качества спецификации модели по обучающей выборке с использованием следующих характеристик:

E - стандартная ошибка модели;

F - критерий Фишера для проверки достоверности модели;

S_{ai} - стандартное отклонение коэффициента a_i;

t_{ai} - критерий Стьюдента для проверки достоверности коэффициента a_i.

Проверка достоверности модели и коэффициентов регрессионной модели.

Получение точечного и интервального прогноза.

Этап 7. Верификация модели. Определение адекватности модели по контрольной выборке. Принятие решения об улучшении качества спецификации модели.

Этап 8. Выводы и предложение. Выводы и предложения должны содержать оценку качества математической модели и возможные варианты решения экономической проблемы, Выбор варианта решения проблемы предполагает использование методов оптимизации целевой функции, при соблюдении ограничений на ресурсы.

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

1.1. Понятие временного ряда

Временным рядом называют упорядоченную во времени последовательность измерений. Теоретически измерения могут регистрироваться непрерывно, но обычно они осуществляются через равные промежутки времени и нумеруются аналогично выборке (объема n): $Y=\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$

Во временных рядах главный интерес представляет описание или моделирование их структуры.

В каждый момент времени (или временной интервал) t значение исследуемой величины, являющейся числовой характеристикой явления, может формироваться под совокупным воздействием большого числа факторов как случайного, так и неслучайного характера. Изменение условий развития явления ведет к ослаблению действия одних факторов и усилению других и в конечном счете к варьированию изучаемого признака во времени. Временной ряд является, таким образом, совокупностью наблюдений случайного процесса.

Характерным для временного ряда $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \ldots, Y_{t_n}$ является то, что порядок в последовательности $t_1, t_2, \ldots, t_n$, существен для анализа, т.е. время выступает как один из определяющих факторов. Это отличает временной ряд от случайной выборки $X_1, X_2, \ldots, X_n$, где индексы служат лишь для удобства идентификации.

Как правило, имеют дело с рядами, определенными в равноотстоящие друг от друга моменты времени. Тогда в качестве единицы времени выбирают интервал между двумя соседними моментами и члены ряда обозначают символами $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ Если необходимо рассматривать значения ряда в моменты, предшествующие начальному, то используются

обозначения ..., Y_{-3}, Y_{-2}, Y_{-1}. Очевидное требование к временному ряду состоит в том, чтобы результаты наблюдений были сравнимы между собой. Для обеспечения сравнимости в случае, когда временными интервалами являются месяцы или дни, необходимо до проведения анализа устранять некоторые мешающие эффекты. Например, месяцы имеют различную продолжительность, общественные праздники влияют на сравнимость экономических и социологических данных.

Компоненты временного ряда

Можно выделить три основных задачи исследования временных рядов:

1) Описание изменения исследуемого признака во времени и выявление свойств исследуемого ряда.

2) Объяснение механизма изменения уровней ряда.

3) Статистическое прогнозирование значений изучаемого признака для будущих моментов времени.

Рассмотрение реальных ситуаций показывает, что типичные временные ряды могут быть представлены как декомпозиция из четырех составляющих:

$$Y_t = f(S_t, T_t, C_t, \varepsilon_t),$$

где S_t – сезонная составляющая;

T_t – тренд, тенденция или систематическое движение;

C_t – циклическая составляющая;

ε_t – случайная (несистематическая) остаточная компонента.

Любой ряд можно описать в виде композиции этих составляющих. Надо, однако, помнить, что операция разложения временного ряда, допустимая с математической точки зрения и часто полезная для моделирования изучаемого явления, может в некоторых случаях ввести в заблуждение. В частности, при таком подходе чрезмерным упрощением может оказаться предположение о независимом влиянии указанных компонент.

Наиболее простым для обнаружения и выделения является эффект *сезонности*. Под *сезонностью* понимают влияние внешних факторов, действующих с заранее известной периодичностью. Так, в ряду ежемесячных данных естественно ожидать наличие сезонных эффектов с периодом 12, в квартальных рядах – с периодом 4. В свою очередь, в информации, собираемой с интервалом 1 час, вполне могут возникнуть сезонные эффекты с периодом 24. Распространенный пример сезонности – колебания цен на сельхозпродукцию в течение года. Всегда цены на овощи, например, минимальны летом и максимальны зимой.

Определить понятие тренда труднее. *Трендом* (или *тенденцией*) называют неслучайную, медленно меняющуюся составляющую временного ряда, на которую могут накладываться случайные колебания, сезонные или циклические эффекты. Это не вполне строгое понятие лежит в основе нескольких моделей и методов анализа временных рядов, представляющих временной ряд в виде комбинации нескольких компонент, одна из которых является достаточно гладкой. Следует признать относительность термина "медленно меняющийся". Его использование зависит от поставленных целей. Например, при исследовании величины осадков в течение сотни лет, медленное увеличение в течение всей длительности изучаемого периода может быть понято как тренд, однако на самом деле этот рост осадков, характерный для данного столетия, может оказаться частью некоторого медленного колебательного процесса, наблюдаемого в пределах нескольких тысячелетий. Делать вывод на тысячелетие вперед на основе тренда, выявленного по данным одного столетия, очевидно, неправильно.

Цикличность в чем-то схожа с сезонностью, но проявляется на более продолжительных интервалах времени. Например, активно обсуждается влияние солнечной активности на показатели аграрного производства. По многолетним наблюдениям активность Солнца имеет цикличность в 10,5 - 11 лет, и максимумы, так же как и минимумы солнечной радиа-

ции, по мнению многих исследователей, влияют на урожайность зерновых культур, репродуктивную способность животных и т.д. Если это так, то в динамике показателя можно найти повторяющиеся характерные изменения с интервалом в 10,5 - 11 лет (цикличность), тогда как внутри каждого года фиксировать сезонный эффект движения цен на сельскохозяйственных рынках.

Все то, что мы не включили в описание с помощью тренда, сезонности и цикличности, относится к случайной составляющей ε_t. Это не означает, что эта составляющая не подлежит дальнейшему анализу, поскольку в ней содержится только хаос. Анализ случайной компоненты – пожалуй, самая интересная часть исследования временных рядов и этому мы еще уделим внимание позже.

Сглаживание временных рядов

Достаточно простым методом выявления тенденции развития является сглаживание временного ряда, т.е. замена фактических уровней расчетными, имеющими меньшую колеблемость, чем исходные данные. Соответствующее преобразование называется фильтрованием. Рассмотрим несколько методов сглаживания.

Метод скользящих средних

Данный метод основан на представлении ряда в виде суммы достаточно гладкого тренда и случайной компоненты. В основе метода лежит идея расчета теоретического значения на основе локального приближения. Для построения оценки тренда в точке t по значениям ряда из временного интервала $[t-m, t+m]$ рассчитывают теоретическое значение ряда. Наибольшее распространение в практике сглаживания рядов получил случай, когда все веса для элементов интервала $[t-m, t+m]$ равны между собой. По этой причине этот метод называют методом скользящих средних, так как при выполнении процедуры происходит скольжение окном ши-

риной $2m + 1$ по всему ряду. Ширину окна обычно берут нечетной, так как теоретическое значение рассчитывается для центрального значения: количество слагаемых $k = 2m+1$ с одинаковым числом уровней слева и справа от момента t (рис. 1.1.)

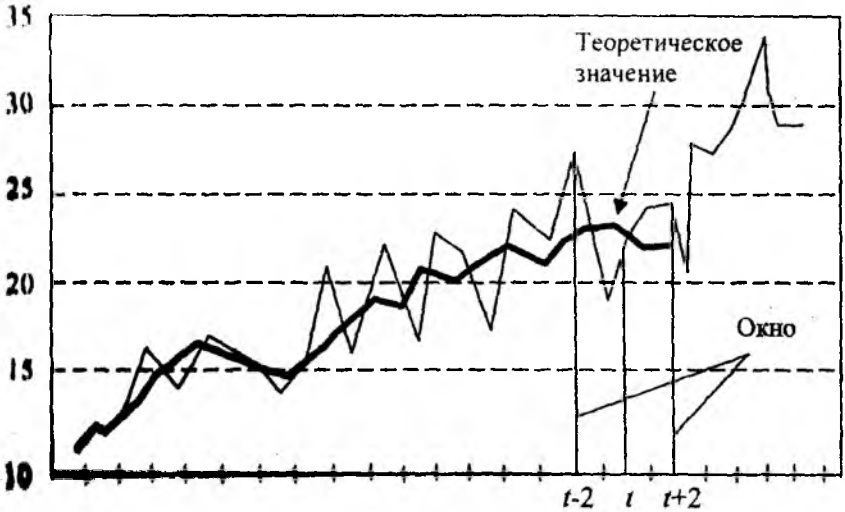


Рис.1.1. Пример расчета 5-летней скользящей средней для временного ряда

Формула для расчета скользящей средней в этом случае **принимает вид**:

$$\widetilde{Y} = \frac{1}{2m+1}\sum_{i=t-m}^{t+m} Y_i .$$

Общая формула метода "взвешенных" скользящих средних имеет вид:

$$\widetilde{Y}_t = a_{-m}Y_{t-m} + \ldots + a_0 Y_t + \ldots + a_m Y_{t+m} = \sum_{t=t-m}^{t+m} a_i y_i ; \quad \sum_{i=t-m}^{t+m} a_i = 1,$$

где $\widetilde{Y}_t$ – сглаженное (отфильтрованное) значение уровня на момент t;

a_m – "вес", приписываемый уровню ряда, находящемуся на расстоянии m от момента t.

Суммирование в фильтре распространяется на $1+2m$ уровней (m уровней до момента t и m уровней после него).

Дисперсия для $\widetilde{Y}_t$, равна σ^2 / k, где через σ^2 обозначена дисперсия исходных членов ряда, а k – интервал (или окно) сглаживания, поэтому чем больше интервал сглаживания, тем сильнее усреднение данных и менее изменчива выделяемая тенденция. Чаще всего сглаживание производят по трем, пяти и семи членам исходного ряда. При этом следует учитывать следующие особенности скользящей средней: если рассмотреть ряд с периодическими колебаниями постоянной длины, то при сглаживании на основе скользящей средней с интервалом сглаживания, равным или кратным периоду, колебания полностью устранятся; нередко сглаживание на основе скользящей средней столь сильно преобразует ряд, что выделенная тенденция развития проявляется лишь в самых общих чертах, а более мелкие, но важные для анализа детали (волны, изгибы и т.д.) исчезают; после сглаживания мелкие волны могут иногда поменять направление на противоположное – на месте "пиков" появляются "ямы", и наоборот. Все это требует осторожности в применении простой скользящей средней и заставляет искать более тонкие методы описания.

Краевые эффекты. Метод скользящих средних не дает значений тренда для первых и последних m членов ряда. Этот недостаток особенно заметно сказывается в случае, когда длина ряда невелика, или же если необходимо провести экстраполяцию на будущее.

Этот метод (и другие, подобные ему) может вызывать автокорреляцию остатков, даже если она отсутствовала в исходных данных. Это – так называемый эффект Слуцкого-Юла.

Экспоненциальное сглаживание

Экспоненциальная средняя Q_t является примером асимметричной взвешенной скользящей средней, в которой учитывается степень старения данных – чем старее информация, тем с меньшим весом входит она в формулу для расчета сглаженного значения уровня ряда Q_t:

$$Q_t = \alpha y_t + (1-\alpha)Q_{t-1},$$

здесь: Q_t – экспоненциальная средняя, заменяющая наблюдаемое значение ряда y_t (в сглаживании участвуют все данные, полученные к текущему моменту t), α – параметр сглаживания, характеризующий вес текущего (самого нового) наблюдения, $0<\alpha<1$.

Метод применяется для прогнозирования нестационарных временных рядов, имеющих случайные изменения уровня и угла наклона. По мере удаления от текущего момента времени в прошлое вес соответствующего члена ряда быстро (экспоненциально) уменьшается и практически перестает оказывать какое-либо влияние на значение Q_t.

Легко получить, что $Q_t = Q_{t-1} + \alpha(y_t - Q_{t-1})$. Последнее соотношение позволяет дать следующую интерпретацию экспоненциальной средней: если Q_{t-1} – прогноз значения ряда y_t, то разность $y_t - Q_{t-1}$ есть погрешность прогноза; таким образом, прогноз Q_t для следующего момента времени $t+1$ учитывает ставшую известной в момент t ошибку прогноза.

Можно показать, что

$$MQ_t = MY_t, \qquad DQ_t = \frac{\alpha}{2-\alpha} DY_t,$$

т.е. математические ожидания наблюдений и экспоненциальных средних совпадают, а дисперсия сглаженных уровней меньше дисперсии исходных наблюдений. Если α близка к единице, то различие между дисперсиями невелико, однако с уменьшением α колебания экспоненциальной средней более

сглаживаются. Выбор параметра сглаживания представляет собой достаточно сложную проблему. Общие соображения таковы: метод хорош для прогнозирования достаточно гладких рядов. В этом случае можно выбрать сглаживающую константу путем минимизации ошибки прогноза на один шаг вперед, оцененной по последней трети ряда. Некоторые специалисты рекомендуют, если высокочастотная компонента ряда имеет достаточно большую дисперсию, не следует использовать большие значения параметра сглаживания, например больше 0,2. (Использование больших значений сглаживающей константы приведет к плохим прогнозам.) На самом деле для каждого конкретного ряда исследователь волен выбрать свое значение α в зависимости от цели сглаживания.

Медианное сглаживание

Основное достоинство медианного сглаживания – устойчивость к выбросам. В основе метода лежит вычисление скользящей медианы. Для того чтобы найти значение скользящей медианы в точке t, вычисляется медиана значений ряда во временном интервале $[t-q, t+q]$. Медиана ряда во временном интервале определяется как центральный член вариационного ряда – последовательности значений ряда, входящих в этот временной интервал, упорядоченной по возрастанию. Соответствующее значение называется $(2q+1)$ – точечной скользящей медианой. В отличие от выборочного среднего, выборочная медиана значительно более устойчива по отношению к наличию выбросов и других случайных искажений данных. Например, при введении в базу данных последовательности чисел (24, 27, 23, 31, 29, 27, 26) была допущена ошибка: вместо числа 23 было введено 233. Эта ошибка в меньшей мере скажется на результатах расчета медианы этого ряда, так как при построении вариационного ряда ошибочное значение будет находиться в самом конце ранжированного по возрастанию ряда, а за теоретическое

значение берется центральный член. Как ясно из описания, если момент времени t стоит от начала или конца ряда менее, чем на q точек, вычисление становится невозможным. Для того чтобы тем не менее не сужать область определения сглаженного ряда по сравнению с исходным, для устранения этих краевых эффектов используют различные методы. Например, для таких точек, за исключением концевых, вычисляется значение скользящей медианы меньшего, максимально возможного порядка.

Применение сглаживания и критерии качества

В зависимости от целей сглаживания применяется тот или иной метод, либо их комбинация. Следует заметить, что повторное сглаживание уже сглаженного ряда дает несколько другие результаты, чем изменение параметров сглаживания. При использовании метода скользящего среднего и медианного сглаживания под параметрами понимается ширина окна. Одним из распространенных методов сглаживания является последовательность из трех фильтров 3, 5, Н, где 3 - сглаживание методом скользящих средних с шириной окна 3, далее с шириной окна 5 и затем фильтр Хеминга – сглаживание скользящим средним с шириной окна 3 и весами [0,25; 0,5; 0,25].

Выравнивание методом скользящих средних наиболее распространено как метод для оценки тенденции. Однако фильтрацию методом простого скользящего среднего можно сравнить с применением частотного фильтра. При относительно небольшой ширине окна сглаживания (m) фильтр простого скользящего среднего работает как фильтр высоких частот, т.е. исключает колебания высокой частоты. С другой стороны, фильтр простого скользящего среднего обладает тем преимуществом, что вычисления его весьма просты. Кроме того, заранее известны периоды извлекаемых частот. Таким образом, с помощью простого скользящего среднего

можно совершенно исключить вклад некоторой заданной частоты подбором подходящей длины фильтра.

Метод экспоненциального сглаживания – это один из методов сглаживания, который обладает хорошими прогностическими способностями. Он применяется для краткосрочного прогнозирования. При использовании метода медианного сглаживания достаточно часто применяется целая серия сглаживаний с разной шириной окна.

Критерием качества при разных целях сглаживания могут выступать разные показатели. Все критерии основываются на анализе остатков ряда. Теме анализа остатков будет посвящен отдельный раздел. Наиболее распространенные критерии – это средняя величина остатков, максимальная величина остатков. Существует еще несколько критериев.

Основные элементы временного ряда

Можно построить эконометрическую модель, используя два типа исходных данных:

- данные, характеризующие совокупность различных объектов в определенный момент (период) времени;
- данные, характеризующие один объект за ряд последовательных моментов (периодов) времени.

Модели, построенные по данным первого типа, называются *пространственными моделями.* Модели, построенные на основе второго типа данных, называются *моделями временных рядов.*

Временной ряд – это совокупность значений какого-либо показателя за несколько последовательных моментов или периодов времени. Каждый уровень временного ряда формируется под воздействием большого числа факторов, которые условно можно подразделить на три группы:

- факторы, формирующие тенденцию ряда;
- факторы, формирующие циклические колебания ряда;
- случайные факторы.

При различных сочетаниях в изучаемом явлении или процессе этих факторов зависимость уровней ряда от времени может принимать различные формы. Во-первых, большинство временных рядов экономических показателей имеют тенденцию, характеризующую совокупное долговременное воздействие множества факторов на динамику изучаемого показателя. Очевидно, что эти факторы, взятые в отдельности, могут оказывать разнонаправленное воздействие на исследуемый показатель. Однако в совокупности они формируют его возрастающую или убывающую тенденцию. На рис. 1.2а) показан гипотетический временной ряд, содержащий возрастающую тенденцию.

Во-вторых, изучаемый показатель может быть подвержен циклическим колебаниям. Эти колебания могут носить сезонный характер, поскольку экономическая деятельность ряда отраслей экономики зависит от времени года (например, цены на сельскохозяйственную продукцию в летний период выше, чем в зимний; уровень безработицы в курортных городах в зимний период выше по сравнению с летним). При наличии больших массивов данных за длительные промежутки времени можно выявить циклические колебания, связанные с общей динамикой конъюнктуры рынка, а также с фазой бизнес-цикла, в которой находится экономика страны. На рис. 1.2б) представлен гипотетический временной ряд, содержащий только сезонную компоненту.

Некоторые временные ряды не содержат тенденции и циклической компоненты, а каждый следующий их уровень образуется как сумма среднего уровня ряда и некоторой (положительной или отрицательной) случайной компоненты. Пример ряда, содержащего только случайную компоненту, приведен на рис. 1.2в).

Очевидно, что реальные данные не следуют целиком и полностью из каких-либо описанных выше моделей. Чаще всего они содержат все три компоненты. Каждый их уровень

формируется под воздействием тенденции, сезонных колебаний и случайной компоненты.

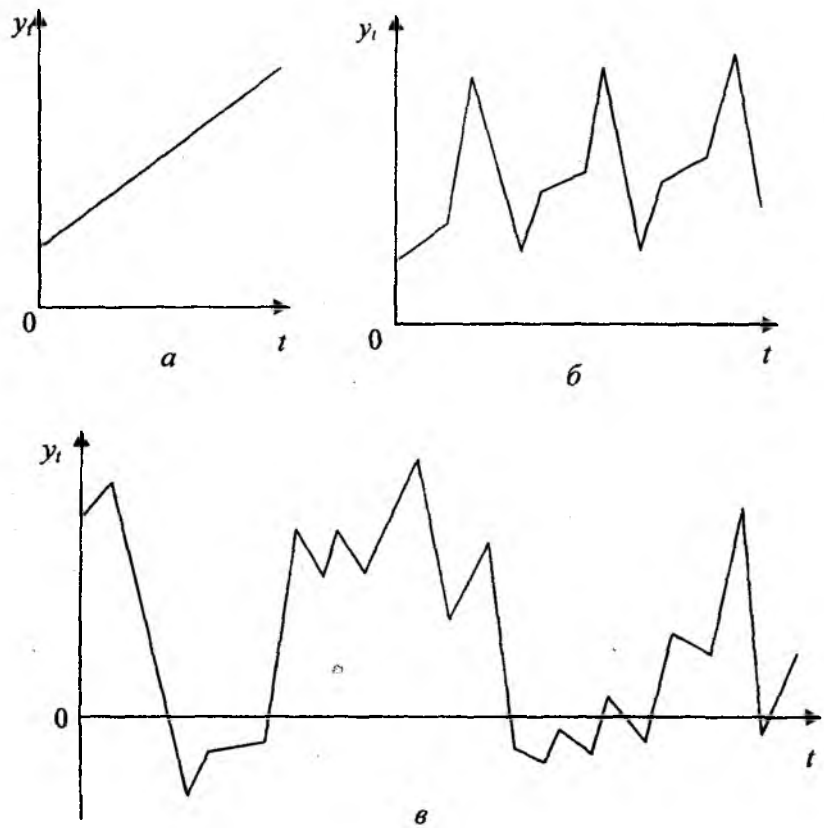


Рис. 1.2. Основные компоненты временного ряда: *а* - возрастающая тенденция; *б* - сезонная компонента; *в* — случайная компонента

В большинстве случаев фактический уровень временного ряда можно представить как сумму или произведение трендовой, циклической и случайной компонент. Модель, в которой временной ряд представлен как сумма перечислен-

ных компонент, называется *аддитивной* моделью временного ряда. Модель, в которой временной ряд представлен как произведение перечисленных компонент, называется *мультипликативной* моделью временного ряда. Основная задача эконометрического исследования отдельного временного ряда – выявление и придание количественного выражения каждой из перечисленных выше компонент с тем, чтобы использовать полученную информацию для прогнозирования будущих значений ряда или при построении моделей взаимосвязи двух или более временных рядов.

1.2. Автокорреляция уровней временного ряда и выявление его структуры

При наличии во временном ряде тенденции и циклических колебаний значения каждого последующего уровня ряда зависят от предыдущих. Корреляционную зависимость между последовательными уровнями временного ряда называют *автокорреляцией уровней ряда*.

Количественно ее можно измерить с помощью линейного коэффициента корреляции между уровнями исходного временного ряда и уровнями этого ряда, сдвинутыми на несколько шагов во времени. Рассмотрим пример.

Пример 1. Расчет коэффициентов автокорреляции уровней для временного ряда расходов на конечное потребление.

Пусть имеются следующие условные данные о средних расходах на конечное потребление (y_t, д. е.) за 8 лет (табл. 1.1).

Разумно предположить, что расходы на конечное потребление в текущем году зависят от расходов на конечное потребление предыдущих лет.

Определим коэффициент корреляции между рядами y_t и y_{t-1} и измерим тесноту связи между расходами на конечное потребление текущего и предыдущего годов. Добавим в табл. 1.1 временной ряд y_{t-1}.

Таблица 1.1.

Расчет коэффициента автокорреляции первого порядка для временного ряда расходов на конечное потребление, д. е.

t	y_t	y_{t-1}	$y_t-\bar{y}_1$	$y_{t-1}-\bar{y}_2$	$(y_t-\bar{y}_1)\times$ $\times(y_{t-1}-\bar{y}_2)$	$(y_{t-1}-\bar{y}_1)^2$	$(y_{t-1}-\bar{y}_2)^2$
1	7	-	-	-	-	-	-
2	8	7	-3,29	-3	9,87	10,8241	9
3	8	8	-3,29	-2	6,58	10,8241	4
4	10	8	-1,29	-2	2,58	1,6641	4
5	11	10	-0,29	0	0,00	0,0841	0
6	12	11	0,71	1	0,71	0,5041	1
7	14	12	2,71	2	5,42	7,3441	4
8	16	14	4,71	4	18,84	22,1841	16
Итого	86	70	-0,03*	0	44,0	53,4287	38

* Сумма не равна нулю ввиду наличия ошибок округления.

Одна из рабочих формул для расчета коэффициента корреляции имеет вид:

$$r_{xy}=\frac{\sum(x_j-\bar{x})(y_j-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_j-\bar{x})^2\cdot\sum(y_j-\bar{y})^2}}.$$

В качестве переменной x мы рассмотрим ряд $y_2, y_3, \ldots, y_8$; в качестве переменной y – ряд $y_1, y_2, \ldots, y_7$. Тогда приведенная выше формула примет вид

$$r_1=\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t-\bar{y}_1)\cdot(y_{t-1}-\bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n}(y_t-\bar{y}_1)^2\cdot\sum_{t=2}^{n}(y_{t-1}-\bar{y}_2)^2}}, \qquad (1)$$

где

$$\bar{y}_1=\frac{\sum_{t=2}^{n}y_t}{n-1};\quad \bar{y}_2=\frac{\sum_{t=2}^{n}y_{t-1}}{n-1}. \qquad (2)$$

Эту величину называют коэффициентом автокорреляции уровней ряда первого порядка, так как он измеряет зависимость между соседними уровнями ряда t и t-1, т. е. при лаге 1.

Для данных примера 1 соотношения (2) составят:

$$\bar{y}_1 = \frac{8+8+10+11+12+14+16}{7} = \frac{79}{7} = 11{,}29;$$

$$\bar{y}_2 = \frac{7+8++8+10+11+12+14}{7} = \frac{70}{7} = 10{,}0.$$

Используя формулу (1), получаем коэффициент автокорреляции первого порядка:

$$r_1 = \frac{44}{\sqrt{53{,}42 \cdot 38}} = 0{,}976.$$

Полученное значение свидетельствует об очень тесной зависимости между расходами на конечное потребление текущего и непосредственно предшествующего годов и, следовательно, о наличии во временном ряде расходов на конечное потребление сильной линейной тенденции.

Аналогично можно определить коэффициенты автокорреляции второго и более высоких порядков. Так, коэффициент автокорреляции второго порядка характеризует тесноту связи между уровнями y_t и y_{t-1} и определяется по формуле

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^{n}(y_t - \bar{y}_3)\cdot(y_{t-2} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^{n}(y_t - \bar{y}_3)^2 \cdot \sum_{t=3}^{n}(y_{t-2} - \bar{y}_4)^2}}, \qquad (3)$$

где

$$\bar{y}_3 = \frac{\sum_{t=3}^{n} y_t}{n-2}; \quad \bar{y}_4 = \frac{\sum_{t=3}^{n} y_{t-2}}{n-2}. \qquad (4)$$

Для данных из примера 1 получим:

$$\bar{y}_3 = \frac{8+10+11+12+14+16}{6} = \frac{71}{6} = 11{,}83;$$

$$\bar{y}_4 = \frac{7+8++8+10+11+12}{6} = \frac{56}{6} = 9{,}33.$$

Построим табл. 1.2.

Таблица 1.2.

Расчет коэффициента автокорреляции второго порядка для временного ряда расходов на конечное потребление, д.е.

t	y_t	y_{t-2}	$y_t-\bar{y}_3$	$y_{t-2}-\bar{y}_4$	$(y_t-\bar{y}_3)\times$ $\times(y_{t-2}-\bar{y}_4)$	$(y_t-\bar{y}_3)^2$	$(y_{t-2}-\bar{y}_4)^2$
1	7	-	-	-	-	-	-
2	8	-	-	-	-	-	-
3	8	7	-3,83	-2,33	8,9239	14,6689	5,4289
4	10	8	-1,83	-1,33	2,4339	3,3489	1,7689
5	11	8	-0,83	-1,33	1,1039	0,6889	1,7689
6	12	10	0,17	0,67	0,1139	0,0289	0,4489
7	14	11	2,17	1,67	3,6239	4,7089	2,7889
8	16	12	4,17	2,67	11,1339	17,3889	7,1289
Итого	86	56	-0,02*	0,02*	27,3334	40,8334	19,3334

* Сумма не равна нулю ввиду наличия ошибок округления.

Подставив полученные значения в формулу (3), имеем:

$$r_2 = \frac{27,3334}{\sqrt{40,8334 \cdot 19,3334}} = 0,973.$$

Полученные результаты еще раз подтверждают вывод о том, что ряд расходов на конечное потребление содержит линейную тенденцию.

Число периодов, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, называют *лагом*. С увеличением лага число пар значений, по которым рассчитывается коэффициент автокорреляции, уменьшается. Некоторые авторы считают целесообразным для обеспечения статистической достоверности коэффициентов автокорреляции использовать правило – максимальный лаг должен быть не больше (n/4). [16, 17].

Отметим два важных *свойства коэффициента автокорреляции*. *Во-первых*, он строится по аналогии с линейным коэффициентом корреляции и таким образом характеризует тесноту только линейной связи текущего и предыдущего уровней ряда. Поэтому по коэффициенту автокорреляции

можно судить о наличии линейной (или близкой к линейной) тенденции. Для некоторых временных рядов, имеющих сильную нелинейную тенденцию (например, параболу второго порядка или экспоненту), коэффициент автокорреляции уровней исходного ряда может приближаться к нулю.

Во-вторых, по знаку коэффициента автокорреляции нельзя делать вывод о возрастающей или убывающей тенденции в уровнях ряда. Большинство временных рядов экономических данных содержит положительную автокорреляцию уровней, однако при этом могут иметь убывающую тенденцию.

Последовательность коэффициентов автокорреляции уровней первого, второго и т. д. порядков называют *автокорреляционной функцией временного ряда*. График зависимости ее значений от величины лага (порядка коэффициента автокорреляции) называется *коррелограммой*.

Анализ автокорреляционной функции и коррелограммы позволяет определить лаг, при котором автокорреляция наиболее высокая, а следовательно, и лаг, при котором связь между текущим и предыдущими уровнями ряда наиболее тесная, т. е. при помощи анализа автокорреляционной функции и коррелограммы можно выявить структуру ряда.

Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции первого порядка, исследуемый ряд содержит только тенденцию. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции порядка τ, ряд содержит циклические колебания с периодичностью в τ моментов времени. Если ни один из коэффициентов автокорреляции не является значимым, можно сделать одно из двух предположений относительно структуры этого ряда: либо ряд не содержит тенденции и циклических колебаний и имеет структуру, сходную со структурой ряда, изображенного на рис. 1.2в), либо ряд содержит сильную нелинейную тенденцию, для выявления которой нужно провести дополнительный анализ. Поэтому коэффициент автокорреляции уровней и автокорреляционную

функцию целесообразно использовать для выявления во временном ряде наличия или отсутствия трендовой компоненты (T) и циклической (сезонной) компоненты (S).

Временной ряд расходов на конечное потребление, рассмотренный нами в примере 1, содержит только тенденцию, так как коэффициенты автокорреляции его уровней высокие.

Пример 2. Автокорреляционная функция и выявление структуры ряда.

Пусть имеются условные данные об объемах потребления электроэнергии жителями региона за 16 кварталов (табл. 1.3).

Таблица 1.3.

Потребление электроэнергии жителями региона, млн. кВт/ч

t	y_t	y_{t-1}	y_{t-2}	y_{t-3}	y_{t-4}
1	6,0	-	-	-	-
2	4,4	6,0	-	-	-
3	5,0	4,4	6,0	-	-
4	9,0	5,0	4,4	6,0	-
5	7,2	9,0	5,0	4,4	6,0
6	4,8	7,2	9,0	5,0	4,4
7	6,0	4,8	7,2	9,0	5,0
8	10,0	6,0	4,8	7,2	9,0
9	8,0	10,0	6,0	4,8	7,2
10	5,6	8,0	10,0	6,0	4,8
11	6,4	5,6	8,0	10,0	6,0
12	11,0	6,4	5,6	8,0	10,0
13	9,0	11,0	6,4	5,6	8,0
14	6,6	9,0	11,0	6,4	5,6
15	7,0	6,6	9,0	11,0	6,4
16	10,8	7,0	6,6	9,0	11,0

Определим коэффициент автокорреляции первого порядка (добавим y_{t-1} в табл. 1.3 и воспользуемся формулой расчета линейного коэффициента корреляции). Он составит: r_1=0,165. Отметим, что расчет этого коэффициента производился по 15, а не по 16 парам наблюдений. Это значение свидетельствует о слабой

зависимости текущих уровней ряда от непосредственно им предшествующих уровней. Однако, как следует из графика, структура этого ряда такова, что каждый следующий уровень y_t зависит от уровня y_{t-4} и y_{t-2} в гораздо большей степени, чем от уровня y_{t-1}. Построим ряд y_{t-2}.

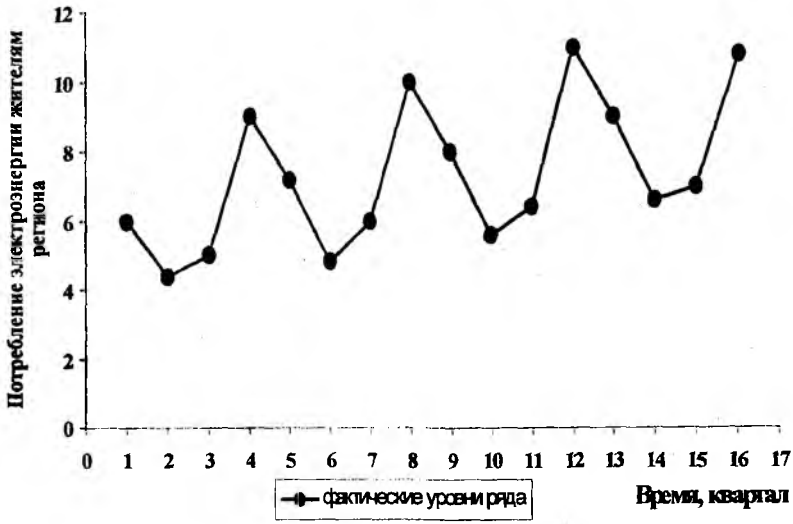


Рис. 1.3. Потребление электроэнергии жителями региона

Рассчитав коэффициент автокорреляции второго порядка r_2, получим количественную характеристику корреляционной связи рядов y_t, y_{t-2}: r_2=0,567. Продолжив расчеты аналогичным образом, получим автокорреляционную функцию этого ряда. Ее значения и коррелограмма приведены в табл. 1.4.

Анализ значений автокорреляционной функции позволяет сделать вывод о наличии в изучаемом временном ряде, *во-первых*, линейной тенденции, *во-вторых*, сезонных колебаний периодичностью в четыре квартала. Данный вывод подтверждается и графическим анализом структуры ряда.

Таблица 1.4.

Коррелограмма временного ряда потребления электроэнергии

Лаг	Коэффициент автокорреляции уровней	Коррелограмма
1	0,165154	**
2	0,566873	*******
3	0,113558	*
4	0,983025	**********
5	0,118711	*
6	0,722046	*********
7	0,003367	
8	0,973848	**********

Аналогично, если, например, при анализе временного ряда наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции уровней второго порядка, ряд содержит циклические колебания в два периода времени, т.е. имеет *пилообразную структуру*.

1.3. Моделирование тенденции временного ряда

Одним из наиболее распространенных способов моделирования тенденции временного ряда является построение аналитической функции, характеризующей зависимость уровней ряда от времени, или тренда. Этот способ называют *аналитическим выравниванием временного ряда*.

Поскольку зависимость от времени может принимать разные формы, для ее формализации можно использовать различные виды функций. Для построения трендов чаще всего применяются следующие функции:

- линейный тренд: $\hat{y}_t = a + b \cdot t$;
- гипербола: $\hat{y}_t = a + b/t$;

- экспоненциальный тренд: $\hat{y}_t = e^{a+b \cdot t}$;

- тренд в форме степенной функции: $\hat{y}_t = a \cdot t^b$;

- парабола второго и более высоких порядков

$$\hat{y}_t = a + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + ... + b_k \cdot t^k .$$

Параметры каждого из перечисленных выше трендов можно определить обычным МНК, используя в качестве независимой переменной время $t = 1,2,...,n$, а в качестве зависимой переменной – фактические уровни временного ряда y_t. Для нелинейных трендов предварительно проводят стандартную процедуру их линеаризации. [19, 20, 28].

Существует несколько способов определения типа тенденции. К числу наиболее распространенных способов относятся качественный анализ изучаемого процесса, построение и визуальный анализ графика зависимости уровней ряда от времени, расчет некоторых основных показателей динамики. В этих же целях можно использовать и коэффициенты автокорреляции уровней ряда. Тип тенденции можно определить путем сравнения коэффициентов автокорреляции первого порядка, рассчитанных по исходным и преобразованным уровням ряда. Если временной ряд имеет линейную тенденцию, то его соседние уровни y_t и y_{t-1} тесно коррелируют. В этом случае коэффициент автокорреляции первого порядка уровней исходного ряда должен быть высоким.

Выбор наилучшего уравнения в случае, если ряд содержит нелинейную тенденцию, можно осуществить путем перебора основных форм тренда, расчета по каждому уравнению скорректированного коэффициента детерминации R^2 и выбора уравнения тренда с максимальным значением скорректированного коэффициента детерминации. Реализация этого метода относительно проста при компьютерной обработке данных.

Пример 3. Расчет параметров тренда. Имеются помесячные данные о темпах, роста номинальной заработной пла-

ты в РУз за 10 месяцев 2009 г. в процентах к уровню декабря 2008 г. (табл. 1.5). Требуется выбрать наилучший тип тренда и определить его параметры.

Таблица 1.5.

Темпы роста номинальной месячной заработной платы за 10 месяцев 2009 г. в % к уровню декабря 2008 г.

Месяц	Темпы роста номинальной месячной заработной платы	Месяц	Темпы роста номинальной месячной заработной платы
Январь	82,9	Июнь	121,6
Февраль	87,3	Июль	118,6
Март	99,4	Август	114,1
Апрель	104,8	Сентябрь	123,0
Май	107,2	Октябрь	127,3

Построим график данного временного ряда (рис. 1.4).

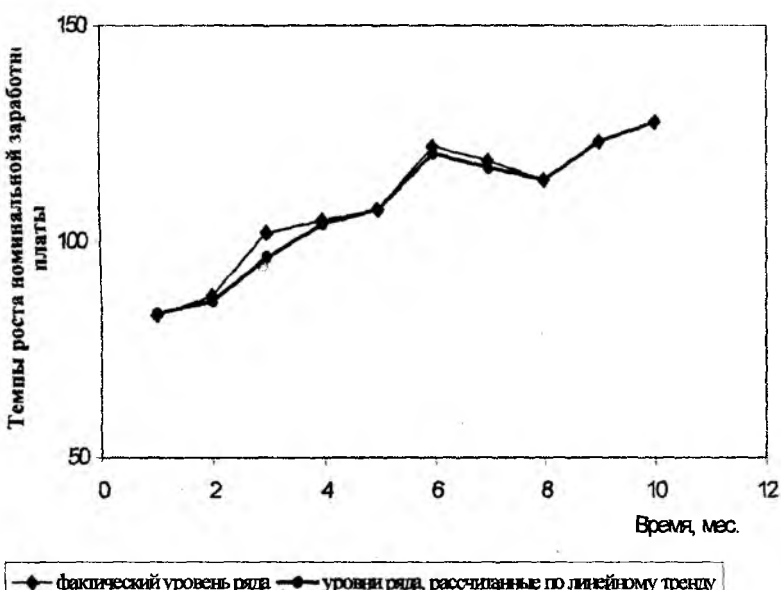


Рис. 1.4. Динамика темпов роста номинальной заработной платы за 10 месяцев 2009 г.

На графике рис. 1.4 наглядно видно наличие возрастающей тенденции. Возможно существование линейного тренда.

Для дальнейшего анализа определим коэффициенты автокорреляции по уровням этого ряда и их логарифмам (табл. 1.6).

Таблица 1.6.

Автокорреляционная функция временного ряда темпов роста номинальной месячной заработной платы за 10 месяцев 2009 г., % к уровню декабря 2008 г.

Лаг	Автокорреляционная функция	
	по уровням ряда	по логарифмам уровней ряда
1	0,901	0,914
2	0,805	0,832
3	0,805	0,896

Высокие значения коэффициентов автокорреляции первого, второго и третьего порядков свидетельствуют о том, что ряд содержит тенденцию. Приблизительно равные значения коэффициентов автокорреляции по уровням этого ряда и по логарифмам уровней позволяют сделать следующий вывод: если ряд содержит нелинейную тенденцию, то она выражена в неявной форме. Поэтому для моделирования его тенденции в равной мере целесообразно использовать и линейную, и нелинейную функции, например степенной или экспоненциальный тренд.

Для выявления наилучшего уравнения тренда определим параметры основных видов трендов. Результаты этих расчетов представлены в табл. 1.7, согласно данным которой наилучшей является степенная форма тренда, для которой значение скорректированного коэффициента детерминации наиболее высокое. Уравнение степенного тренда можно использовать как в линеаризованном виде, так и в форме исходной степенной функции после проведения операции потенцирования. В исходном виде это уравнение выгладит следующим образом:

$$\hat{y}_t = e^{4,39} \cdot t^{0,193},$$

или

$$\hat{y}_t = 80,32 \cdot t^{0,193}$$

Таблица 1.7.

Уравнения трендов для временного ряда темпов роста номинальной месячной заработной платы за 10 месяцев 2009 г., % к уровню декабря 2008 г.

Тип тренда	Уравнение	R^2	$\overline{R}^2$
Линейный	$\hat{y}_t = 82,66 + 4,72t$ $(0,595)^*$	0,887	0,873
Парабола второго порядка	$\hat{y}_t = 72,9 + 9,599t - 0,444t^2$ $(2,11)^*$ $(0,187)^*$	0,937	0,920
Степенной	$\hat{\ln y}_t = 4,39 + 0,193 \ln t$ $(0,017)^*$	0,939**	0,931**
Экспоненциальный	$\hat{\ln y}_t = 4,43 + 0,045 \ln t$ $(0,006)^*$	0,872**	0,856**
Гиперболический	$\hat{y}_t = 122,57 - 47,63/t$ $(8,291)^*$	0,758	0,728

*В скобках указаны стандартные ошибки коэффициентов регрессии.
** Коэффициенты детерминации рассчитаны по линеаризованным уравнениям регрессии.

Наиболее простую экономическую интерпретацию имеют параметры линейного и экспоненциального трендов.

Параметры линейного тренда можно интерпретировать так: a – начальный уровень временного ряда в момент времени t=0; b - средний за период абсолютный прирост уровней ряда. Применительно к данному временному ряду можно сказать, что темпы роста номинальной месячной заработной платы за 10 месяцев 2009 г. изменялись от уровня 82,66% со средним за месяц абсолютным приростом, равным 4,72 проц.

пункта. Расчетные по линейному тренду значения уровней временного ряда определяются двумя способами. *Во-первых*, можно последовательно подставлять в найденное уравнение тренда значения t=1, 2,..., n, т.е.

$$\hat{y}_1^{\text{лин}} = 82{,}66 + 4{,}72 \cdot 1 = 87{,}38;$$

$$\hat{y}_2^{\text{лин}} = 82{,}66 + 4{,}72 \cdot 2 = 92{,}10.$$

Во-вторых, в соответствии с интерпретацией параметров линейного тренда каждый последующий уровень ряда есть сумма предыдущего уровня и среднего цепного абсолютного прироста, т. е.

$$\hat{y}_2^{\text{лин}} = \hat{y}_1^{\text{лин}} + b = 87{,}38 + 4{,}72 = 92{,}10;$$

$$\hat{y}_3^{\text{лин}} = \hat{y}_2^{\text{лин}} + b = 92{,}10 + 4{,}72 = 96{,}82$$

и т.д.

График линейного тренда приведен на рис. 1.4.

Параметры экспоненциального тренда имеют следующую интерпретацию. Параметр a – это начальный уровень временного ряда в момент времени t=0. Величина e^b – это средний за единицу времени коэффициент роста уровней ряда.

Для нашего примера уравнение экспоненциального тренда в исходной форме имеет вид:

$$\hat{y}_t = e^{4{,}43} \cdot e^{0{,}045t},$$

или

$$\hat{y}_t = 83{,}96 \cdot 1{,}046^t.$$

Таким образом, начальный уровень ряда в соответствии с уравнением экспоненциального тренда составляет 83,96 (сравните с начальным уровнем 82,66 в линейном тренде), а средний цепной коэффициент роста – 1,046. Следовательно, можно сказать, что темпы роста номинальной месячной заработной платы за 10 месяцев 2009 г. изменялись от уровня 83,96% со средним за месяц цепным темпом роста, равным 104,6%. Иными словами, средний за месяц цепной темп прироста временного ряда составил 4,6%.

По аналогии с линейной моделью расчетные значения уровней ряда по экспоненциальному тренду можно получить как путем подстановки в уравнение тренда значений t=1, 2,..., n, так и в соответствии с интерпретацией параметров экспоненциального тренда: каждый его последующий уровень есть произведение предыдущего уровня на соответствующий коэффициент роста:

$$\hat{y}_1^{\text{эксп}} = \hat{y}_0^{\text{эксп}} \cdot 1{,}046 = 83{,}96 \cdot 1{,}046 = 87{,}82;$$

$$\hat{y}_2^{\text{эксп}} = \hat{y}_1^{\text{эксп}} \cdot 1{,}046 = 87{,}82 \cdot 1{,}046 = 91{,}87$$

и т.д.

При наличии неявной нелинейной тенденции следует дополнять описанные выше методы выбора наилучшего уравнения тренда качественным анализом динамики изучаемого показателя, с тем чтобы избежать ошибок спецификации при выборе вида тренда. Качественный анализ предполагает изучение проблем возможного наличия в исследуемом временном ряде поворотных точек и изменения темпов прироста, или ускорения темпов прироста, начиная с определенного момента (периода) времени под влиянием ряда факторов, и т. д. В случае если уравнение тренда выбрано неверно при больших значениях t, результаты анализа и прогнозирования динамики временного ряда с использованием выбранного уравнения будут недостоверными вследствие ошибки спецификации. Иллюстрация возможного появления ошибки спецификации приводится на рис. 1.5.

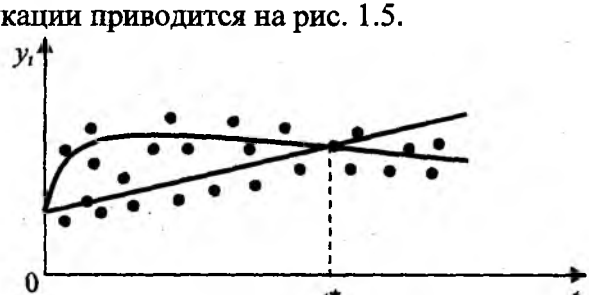


Рис. 1.5. Ошибка спецификации при выборе уравнения тренда

Если наилучшей формой тренда является парабола второго порядка, в то время как на самом деле имеет место линейная тенденция, то при больших t парабола и линейная функция будут по-разному описывать тенденцию в уровнях ряда. При $t>t^*$ парабола второго порядка характеризует убывающую тенденцию в уровнях ряда y_t а линейная функция – возрастающую.

1.4. Моделирование тенденции временного ряда при наличии структурных изменений

От сезонных и циклических колебаний следует отличать единовременные изменения характера тенденции временного ряда, вызванные структурными изменениями в экономике или иными факторами. В этом случае, начиная с некоторого момента времени t^*, происходит изменение характера динамики изучаемого показателя, что приводит к изменению параметров тренда, описывающего эту динамику. Схематично такая ситуация изображена на рис. 1.6.

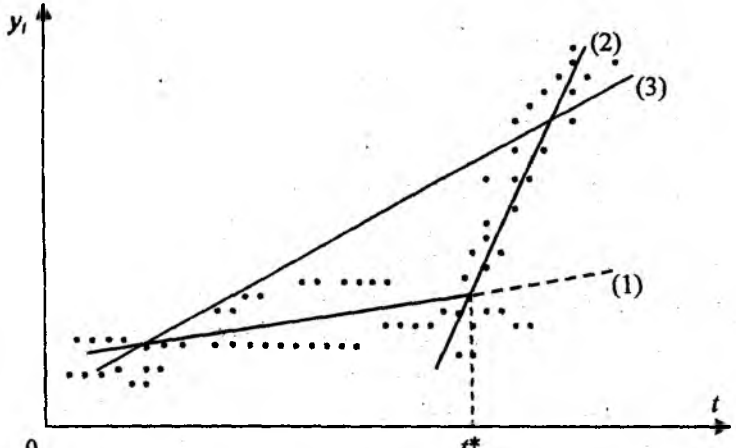


Рис. 1.6. Изменение характера тенденции временного ряда

Момент (период) времени t^* сопровождается значительными изменениями ряда факторов, оказывающих сильное воздействие на изучаемый показатель y_t. Чаще всего эти изменения вызваны изменениями в общеэкономической ситуации или факторами (событиями) глобального характера, приведшими к изменению структуры экономики (например, начало крупных экономических реформ, изменение экономического курса, нефтяные кризисы и прочие факторы). Если исследуемый временной ряд включает в себя соответствующий момент (период) времени, то одной из задач его изучения становится выяснение вопроса о том, значимо ли повлияли общие структурные изменения на характер этой тенденции. [30, 35, 24, 25].

Если это влияние значимо, то для моделирования тенденции данного временного ряда следует использовать *кусочно-линейные модели регрессии*, т.е. разделить исходную совокупность на две подсовокупности (до момента времени t^* и после момента t^*) и построить отдельно по каждой подсовокупности уравнения линейной регрессии (на рис. 1.6 этим уравнениям соответствуют прямые (1) и (2)). Если структурные изменения незначительно повлияли на характер тенденции ряда y_t, то ее можно описать с помощью единого, для всей совокупности данных уравнения тренда (на рис. 1.6 этому уравнению соответствует прямая (3)).

Каждый из описанных выше подходов имеет свои положительные и отрицательные стороны. При построении кусочно-линейной модели происходит снижение остаточной суммы квадратов по сравнению с единым для всей совокупности уравнением тренда. Однако разделение исходной совокупности на две части ведет к потере числа наблюдений и, следовательно, к снижению числа степеней свободы в каждом уравнении кусочно-линейной модели. Построение единого для всей совокупности уравнения тренда, напротив, позволяет сохранить число наблюдений n исходной совокупности, однако остаточная сумма квадратов по

этому уравнению будет выше по сравнению с кусочно-линейной моделью. Очевидно, что выбор одной из двух моделей (кусочно-линейной или единого уравнения тренда) будет зависеть от соотношения между снижением остаточной дисперсии и потерей числа степеней свободы при переходе от единого уравнения регрессии к кусочно-линейной модели.

Таблица 1.8.

Условные обозначения для алгоритма теста Чоу

№ уравнения	Вид уравнения	Число наблюдений в совокупности	Остаточная сумма квадратов	Число параметров в уравнении[1]	Число степеней свободы остаточной дисперсии
Кусочно-линейная модель					
(1)	$y^{(1)}=a_1+b_1t$	n_1	$C^1_{ост}$	k_1	n_1- k_1
(2)	$y^{(2)}=a_2+b_2t$	n_2	$C^2_{ост}$	k_2	n_2- k_2
Уравнение тренда по всей совокупности					
(3)	$y^{(3)}=a_3+b_3t$	n	$C^3_{ост}$	k_3	n- k_3=(n_1+n_2)- k_3

[1] В рассматриваемой нами формулировке число параметров всех уравнений k_1= k_2= k_3=2. В общем случае число параметров в каждом уравнении может различаться.

Формальный статистический тест для оценки этого соотношения был предложен Грегори Чоу[1]. Применение этого теста предполагает расчет параметров уравнений трендов, графики которых изображены на рис.1.6 прямыми (1), (2) и (3). Введем систему обозначений, приведенную в табл. 1.8.

Выдвинем гипотезу H_0 о структурной стабильности тенденции изучаемого временного ряда.

Остаточную сумму квадратов по кусочно-линейной модели $\left(C^{кл}_{ост}\right)$ можно найти как сумму $C^1_{ост}$ и $C^2_{ост}$:

[1] Chow Gregory C. Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions. //Econometrica. -Vol. 28. -№3. 1960. -С. 591-605.

$$C^{кл}_{ост} = C^{1}_{ост} + C^{2}_{ост}. \quad (1)$$

Соответствующее ей число степеней свободы составит:

$$(n_1 - k_1) + (n_2 - k_2) = (n - k_1 - k_2). \quad (2)$$

Тогда сокращение остаточной дисперсии при переходе от единого уравнения тренда к кусочно-линейной модели можно определить следующим образом:

$$\Delta C_{ост} = C^{3}_{ост} - C^{кл}_{ост} \quad (3)$$

Число степеней свободы, соответствующее $\Delta C_{ост}$, с учетом соотношения (2) будет равно:

$$n - k_3 - (n - k_1 - k_2) = k_1 + k_2 - k_3. \quad (4)$$

Далее в соответствии с предложенной Г. Чоу методикой определяется фактическое значение F-критерия по следующим дисперсиям на одну степень свободы вариации:

$$F_{факт} = \frac{Д_{\Delta C}}{Д_{кл}} = \frac{\Delta C_{ост} : (k_1 + k_2 - k_3)}{C^{кл}_{ост} : (n - k_1 - k_2)}. \quad (5)$$

Найденное значение $F_{факт}$ сравнивают с табличным, полученным по таблицам распределения Фишера для уровня значимости α и числа степеней свободы $(k_1 + k_2 - k_3)$ и $(n - k_1 - k_2)$.

Если $F_{факт} > F_{табл}$, то гипотеза о структурной стабильности тенденции отклоняется, а влияние структурных изменений на динамику изучаемого показателя признают значимым. В этом случае моделирование тенденции временного ряда следует осуществлять с помощью кусочно-линейной модели. Если $F_{факт} < F_{табл}$, то нет оснований отклонять ноль-гипотезу о структурной стабильности тенденции. Ее моделирование следует осуществлять с помощью единого для всей совокупности уравнения тренда.

Отметим следующие особенности применения теста Чоу:

1. Если число параметров во всех уравнениях (1), (2), (3) (см. рис. 1.6) одинаково и равно k, то формула (5) упрощается:

$$F_{факт} = \frac{\Delta C_{ост} : k}{C^{кл}_{ост} : (n - 2k)}. \quad (6)$$

2. Тест Чоу позволяет сделать вывод о наличии или отсутствии структурной стабильности в изучаемом временном ряде. Если $F_{факт}<F_{табл}$, то это означает, что уравнения (1) и (2) описывают одну и ту же тенденцию, а различия численных оценок их параметров a_1 и a_2, а также b_1 и b_2 соответственно статистически незначимы. Если же $F_{факт}>F_{табл}$, то гипотеза о структурной стабильности отклоняется, что означает статистическую значимость различий оценок параметров уравнений (1) и (2).

3. Применение теста Чоу предполагает соблюдение предпосылок о нормальном распределении остатков в уравнениях (1) и (2) и независимость их распределений.

Если гипотеза о структурной стабильности тенденции ряда y, отклоняется, дальнейший анализ может заключаться в исследовании вопроса о причинах этих структурных различий и более детальном изучении характера изменения тенденции. В принятых нами обозначениях, эти причины обуславливают различия оценок параметров уравнении (1) и (2).

Возможны следующие сочетания изменения численных оценок параметров этих уравнений (рис. 1.7.):

- изменение численной оценки свободного члена уравнения тренда a_2 по сравнению с a_1 при условии, что различия между b_1 и b_2 статистически незначимы. Геометрически это означает, что прямые (1) и (2) параллельны (рис. 1.7а). В данной ситуации можно говорить о скачкообразном изменении уровней ряда y_t в момент времени t^* при неизменном среднем абсолютном приросте за период;
- изменение численной оценки параметра b_2 по сравнению с b_1 при условии, что различия между a_1 и a_2 статистически незначимы. Геометрически это означает, что прямые (1) и (2) пересекают ось ординат в одной точке (рис. 1.7). В этом случае изменение тенденции связано с изменением среднего абсолютного прироста временного ряда, начиная с момента времени t^*, при неизменном начальном уровне ряда в момент времени t=0;

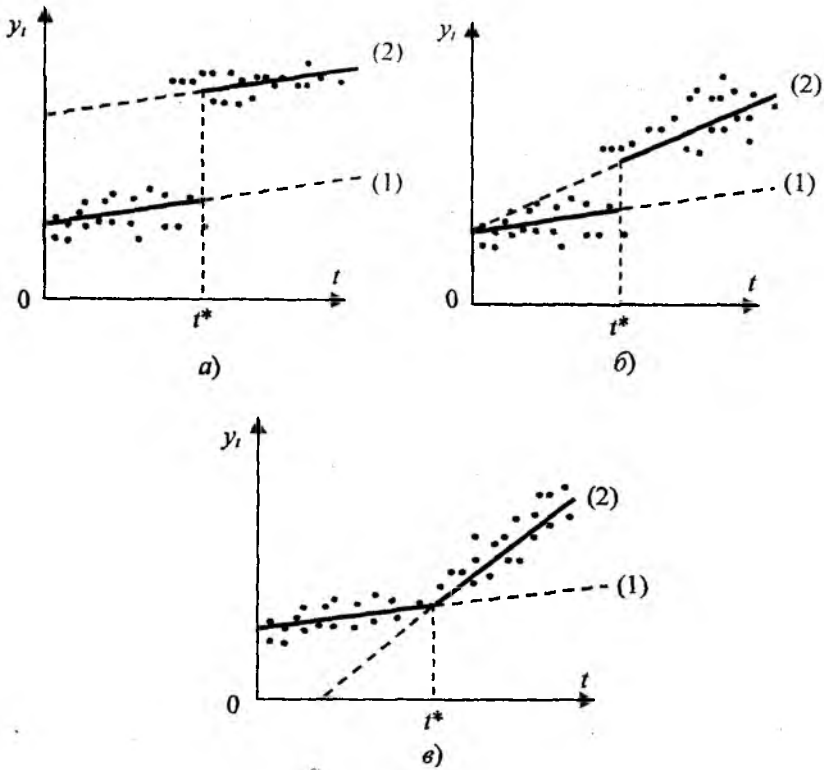


Рис. 1.7. Изменение тенденции временного ряда при различном сочетании статистической значимости изменений параметров a_1 и a_2; b_1 и b_2:

а – статистически значимым является различие только между a_1 и a_2;

б – статистически значимым является различие только между b_1 и b_2;

в – статистически значимым является различие между a_1 и a_2, а также между b_1 и b_2.

• изменение численных оценок параметров a_1 и a_2, а также b_1 и b_2. Геометрически эта ситуация изображена на рис. 1.7 в. Она означает, что изменение характера тенденции сопровождается изменением как начального уровня ряда, так и среднего за период абсолютного прироста.

Один из статистических методов тестирования при применении перечисленных выше ситуаций для характеристики тенденции изучаемого временного ряда был предложен американским экономистом Д.Гуджарати[1]. Этот метод основан на включении в модель регрессии фиктивной переменой Z_t которая принимает значения 1 для всех $t<t^*$, принадлежащие промежутку времени до изменения характера тенденции, далее - промежутку (1), и 0 значения для всех $t>t^*$, принадлежащие промежутку времени после изменения характера тенденции, далее - промежутку (2). Д.Гуджарати предлагает определять параметры следующего уравнения регрессии:

$$y_t = a + b \cdot Z_t + c \cdot t + d \cdot (Z_t \cdot t) + \varepsilon_t . \qquad (7)$$

Таким образом, для каждого промежутка времени получим следующие уравнения:

Промежуток (1) $Z=1 \quad y_t = (a+b) + (c+d) \cdot t + \varepsilon_t ;$

Промежуток (2) $Z=1 \quad y_t = a + c \cdot t + \varepsilon_t ;$

Сопоставив полученные уравнения с уравнениями (1) и (2), нетрудно заметить, что

$$a_1 = (a+b); \quad b_1 = (c+d); \qquad (8)$$

$$a_2 = a; \quad b_2 = c.$$

Параметр b есть разница между свободными членами уравнений (1) и (2), а параметр d - разница между параметрами b_1 и b_2 уравнений (1) и (2). Оценка статистической значимости различий a_1 и a_2, а также b_1 и b_2 эквивалентна оценке статистической значимости параметров b и d уравнения (7). Эту оценку можно провести при помощи t-критерия Стьюдента.

Таким образом, если в уравнении (7) b является статистически значимым, а d - нет, то изменение тенденции вызвано только различиями параметров a_1 и a_2 (рис. 1.7а). Если в этом уравнении параметр d статистически значим, а b - незначим, то изменение характера тенденции вызвано разли-

[1] Gujarati D.N. Basic Econometrics. –McGraw-Hill, Inc. 1995. -pp. 509-513.

чиями параметров b_1 и b_2 (рис. 1.7б). Наконец, если оба коэффициента b и d являются статистически значимыми, то на изменение характера тенденции повлияли как различия между a_1 и a_2, так и различия между b_1 и b_2 (рис. 1.7в).

Этот метод можно использовать не только в дополнение к тесту Чоу, но и самостоятельно для проверки гипотезы о структурной стабильности тенденции изучаемого временного ряда. Основное его преимущество перед тестом Чоу состоит в том, что нужно построить только одно, а не три уравнения тренда.

Мы рассмотрели простейший случай применения теста Чоу для моделирования линейной тенденции. Однако этот тест (а также модель (7) с фиктивной переменной) может использоваться (и действительно используется во многих прикладных исследованиях) при проверке гипотез о структурной стабильности и в более сложных моделях взаимосвязи двух и более временных рядов.

1.5. Изучение взаимосвязей по временным рядам

1.5.1. Специфика статистической оценки взаимосвязи двух временных рядов

Изучение причинно-следственных зависимостей переменных, представленных в форме временных рядов, является одной из самых сложных задач эконометрического моделирования. Применение в этих целях традиционных методов корреляционно-регрессионного анализа, может привести к ряду серьезных проблем, возникающих как на этапе построения, так и на этапе анализа эконометрических моделей. В первую очередь эти проблемы связаны со спецификой временных рядов как источника данных в эконометрическом моделировании.

Для того чтобы получить коэффициенты корреляции, характеризующие причинно-следственную связь между изучаемыми рядами, следует избавиться от так называемой ложной корреляции, вызванной наличием тенденции в каждом ряде. Обычно это осуществляют с помощью одного из методов исключения тенденции.

Предположим, что по двум временным рядам x_t и y_t строится уравнение парной линейной регрессии вида

$$y_t = a + b \cdot x_t + \varepsilon_t .$$

Наличие тенденции в каждом из этих временных рядов означает, что на зависимую y_t и независимую x_t переменные модели оказывает воздействие фактор времени, который непосредственно в модели не учтен. Влияние фактора времени будет выражено в корреляционной зависимости между значениями остатков ε_t за текущий и предыдущие моменты времени, которая получила название "автокорреляция в остатках".

Автокорреляция в остатках есть нарушение одной из основных предпосылок МНК - предпосылки о случайности остатков, полученных по уравнению регрессии. Один из возможных путей решения этой проблемы состоит в применении к оценке параметров модели обобщенного МНК. При построении уравнения множественной регрессии по временным рядам данных, помимо двух вышеназванных проблем, возникает также проблема мультиколлинеарности факторов, входящих в уравнение регрессии, в случае если эти факторы содержат тенденцию.

1.5.2. Методы исключения тенденции

Сущность всех методов исключения тенденции заключается в том, чтобы устранить или зафиксировать воздействие фактора времени на формирование уровней ряда. Основные методы исключения тенденции можно разделить на две группы:

- методы, основанные на преобразовании уровней, исходного ряда в новые переменные, не содержащие тенденции. Эти методы предполагают непосредственное устранение трендовой компоненты T из каждого уровня временного ряда. Два основных метода в данной группе - это метод последовательных разностей и метод отклонений от трендов;
- методы, основанные на изучении взаимосвязи исходных уровней временных рядов при элиминировании воздействия фактора времени на зависимую и независимые переменные модели. В первую очередь это метод включения в модель регрессии по временным рядам фактора времени. Рассмотрим подробнее методику их применения.

Метод отклонений от тренда

Пусть имеются два временных ряда x_t и y_t, каждый из которых содержит трендовую компоненту T и случайную компоненту ε. Проведение аналитического выравнивания по каждому из этих рядов позволяет найти параметры соответствующих уравнений трендов и определить расчетные по тренду уровни $\hat{x}_t$ и $\hat{y}_t$ соответственно. Эти расчетные значения можно принять за оценку трендовой компоненты T, каждого ряда. Поэтому влияние тенденции можно устранить путем вычитания расчетных значений уровней ряда из фактических. Эту процедуру проделывают для каждого временного ряда в модели. Дальнейший анализ взаимосвязи рядов проводят с использованием не исходных уровней, а отклонений от тренда $x_t - \hat{x}_t$ и $y_t - \hat{y}_t$ при условии, что последние не содержат тенденции.

Пример 1. Измерение взаимосвязи расходов на конечное потребление и совокупного дохода.

Пусть помимо расходов на конечное потребление имеются данные о совокупном доходе (д. е). Исходные данные за 8 лет представлены в табл. 1.9. Требуется охарактеризовать тесноту и силу связи между временными рядами совокупного дохода x_t и расходов на конечное потребление y_t.

Таблица 1.9.

Расходы на конечное потребление и совокупный доход (усл. е. д.).

Год	1	2	3	4	5	6	7	8
Расходы на конечное потребление, y_t	7	8	8	10	11	12	14	16
Совокупный доход, x_t	10	12	11	12	14	15	17	20

Корреляционно-регрессионный анализ, проведенный по исходным данным рядов, приводит к следующим результатам:

$$\hat{y}_t = -2{,}05 + 0{,}92 \cdot x_t; \qquad r_{xy}^2 = 0{,}965, \qquad r_{xy} = 0{,}982.$$

Как было показано в примере 1, коэффициент автокорреляции первого порядка по ряду расходов на конечное потребление $r_1^y = 0{,}976$. Аналогично можно рассчитать, что коэффициент автокорреляции первого порядка временного ряда совокупного дохода $r_1^x = 0{,}880$. Можно предположить, что полученные результаты содержат ложную корреляцию ввиду наличия в каждом из рядов линейной или близкой к линейной тенденции. Применим метод устранения тенденции по отклонениям от тренда. Результаты расчета линейных трендов по каждому из рядов представлены в табл. 1.10.

Таблица 1.10.

Результаты расчета параметров линейных трендов расходов на конечное потребление и совокупного дохода

Показатели	Расходы на конечное потребление	Совокупный доход
Константа	5,071428	8,035714
Коэффициент регрессии	1,261904	1,297619
Стандартная ошибка коэффициента регрессии	0,101946	0,179889
R-квадрат	0,962315	0,896611
Число наблюдений	8	8
Число степеней свободы	6	6

По трендам $\hat{y}_t = 5{,}07 + 1{,}26 \cdot t$ и $\hat{x}_t = 8.04 + 1.3 \cdot t$ определим расчетные значения y_t и x_t и отклонения от трендов $y_t - \hat{y}_t$ и $x_t - \hat{x}_t$ (табл. 1.11).

Таблица 1.11.

Трендовая компонента и ошибка для временных рядов расходов на конечное потребление и совокупного дохода

Время, t	y_t	x_t	$\hat{y}_t$	$\hat{x}_t$	$y_t - \hat{y}_t$	$x_t - \hat{x}_t$
1	7	10	6,33	9,34	0,67	0,66
2	8	12	7,59	10,64	0,41	1,36
3	8	11	8,85	11,94	-0,85	-0,94
4	10	12	10,11	13,24	-0,11	-1,24
5	11	14	11,37	14,54	-0,37	-0,54
6	12	15	12,63	15,84	-0,63	-0,84
7	14	17	13,89	17,14	0,11	-0,14
8	16	20	15,15	18,44	0,85	1,56

Проверим полученные отклонения от трендов на автокорреляцию. Коэффициенты автокорреляции первого порядка по отклонениям от трендов составляют:

$$r_1^{\Delta x_t} = 0{,}254, \quad r_1^{\Delta y_t} = 0{,}129$$

Следовательно, временные ряды отклонений от трендов можно использовать для получения количественной характеристики тесноты связи исходных временных рядов расходов на конечное потребление и общего дохода. Коэффициент корреляции по отклонениям от трендов $r_{\Delta x \Delta y} = 0{,}860$ (сравните это значение с коэффициентом корреляции по исходным уровням рядов $r_{xy} = 0{,}982$). Связь между расходами на конечное потребление и совокупным доходом прямая и тесная.

Результаты построения модели регрессии по отклонениям от трендов следующие:

Константа	0,017313
Коэффициент регрессии	0,487553

Стандартная ошибка коэффициента регрессии	0,117946
R-квадрат	0,740116
Число наблюдений	8
Число степеней свободы	6

Содержательная интерпретация параметров этой модели затруднительна, однако ее можно использовать для прогнозирования. Для этого необходимо определить трендовое значение факторного признака $\hat{x}_t$ и с помощью одного из методов оценить величину предполагаемого отклонения фактического значения от трендового. Далее по уравнению тренда для результативного признака определяют трендовое значение $\hat{x}_t$, а по уравнению регрессии по отклонениям от трендов находят величину отклонения $y_t - \hat{y}_t$. Затем находят точечный прогноз фактического значения y_t по формуле

$$y_t = \hat{y}_t + (y_t - \hat{y}_t).$$

Метод последовательных разностей.

В ряде случаев вместо аналитического выравнивания временного ряда с целью устранения тенденции можно применить более простой метод - метод последовательных разностей.

Если временной ряд содержит ярко выраженную линейную тенденцию, ее можно устранить путем замены исходных уровней ряда цепными абсолютными приростами (первыми разностями).

Пусть

$$y_t = \hat{y}_t + \varepsilon_t, \qquad (2)$$

где ε_t — случайная ошибка;

$$\hat{y}_t = a + b \cdot t. \qquad (3)$$

Тогда

$$\Delta_t = y_t - y_{t-1} = a + b \cdot t + \varepsilon_t - (a + b \cdot (t-1) + \varepsilon_{t-1}) =$$
$$= b + (\varepsilon_t - \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) \qquad (4)$$

Коэффициент b - константа, которая не зависит от времени. При наличии сильной линейной тенденции остатки ε_t достаточно малы и в соответствии с предпосылками МНК носят случайный характер. Поэтому первые разности уровней ряда Δ_t не зависят от переменной времени, их можно использовать для дальнейшего анализа.

Если временной ряд содержит тенденцию в форме параболы второго порядка, то для ее устранения можно заменить исходные уровни ряда на вторые разности.

Пусть имеет место соотношение (2), однако

$$\hat{y}_t = a + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 . \qquad (5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_t &= y_t - y_{t-1} = a + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + \varepsilon_t - \\ &- \left(a + b_1 \cdot (t-1) + b_2 \cdot (t-1)^2 + \varepsilon_{t-1}\right) = \\ &= b_1 - b_2 + 2 \cdot b_2 \cdot t + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) \end{aligned} \qquad (6)$$

Как показывает это соотношение, первые разности Δt, непосредственно зависят от фактора времени t и, следовательно, содержат тенденцию.

Определим вторые разности:

$$\begin{aligned} \Delta_t^2 &= \Delta_t - \Delta_{t-1} = b_1 - b_2 + 2 \cdot b_2 \cdot t + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}) - \\ &- \left(b_1 - b_2 + 2 \cdot b_2 \cdot (t-1) + (\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2})\right) = \\ &= 2 \cdot b_2 + (\varepsilon_t - 2 \cdot \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}) \end{aligned} \qquad (7)$$

Очевидно, что вторые разности Δ_t^2 не содержат тенденции, поэтому при наличии в исходных уровнях тренда в форме параболы второго порядка их можно использовать для дальнейшего анализа. Если тенденции временного ряда соответствует экспоненциальный или степенной тренд, метод последовательных разностей следует применять не к исходным уровням ряда, а к их логарифмам. [24].

Пример 2. Изучение зависимости расходов на конечное потребление от совокупного дохода по первым разностям.

Обратимся вновь к данным о расходах на конечное потребление y_t, и совокупном доходе x_t (табл. 1.12). Проанализируем зависимость между этими рядами, используя для этого первые разности (табл. 1.12).

Таблица 1.12.

Первые разности временных рядов расходов на конечное потребление и совокупного дохода

t	y_t	x_t	$\Delta_t y$	$\Delta_t x$
1	7	10	-	-
2	8	12	1	2
3	8	11	0	-1
4	10	12	2	1
5	11	14	1	2
6	12	15	1	1
7	14	17	2	2
8	16	20	2	3
Коэффициент корреляции первого порядка			-0,109	-0,156

Результаты проверки временных рядов первых разностей на автокорреляцию приведены в последней строке табл. 1.12. Поскольку полученные ряды не содержат автокорреляции, будем использовать их вместо исходных данных для измерения зависимости между расходами на конечное потребление и совокупным доходом. Коэффициент корреляции этих рядов по первым разностям составляет $r_{\Delta_t \Delta_{tx}} = 0{,}717$. Это подтверждает вывод о наличии тесной прямой связи между расходами на конечное потребление и совокупным доходом, приведенный в примере 1.

Построение уравнения регрессии зависимости расходов на конечное потребление от совокупного дохода по первыми разностям привело к следующим результатам:

Константа	0,676471
Коэффициент регрессии	0,426471

Стандартная ошибка коэффициента регрессии	0,184967
R-квадрат	0,515219
Число наблюдений	7
Число степеней свободы	5

Таким образом, уравнение регрессии имеет вид:

$$\hat{\Delta_t y} = 0{,}68 + 0{,}43 \cdot \Delta_t x; \qquad R^2 = 0{,}515.$$

В отличие от уравнения регрессии по отклонениям от тренда, параметрам данного уравнения легко дать интерпретацию. При изменении прироста дохода на 1 д.е. прирост потребления изменяется в среднем на 0,43 д.е. в ту же сторону. При всей своей простоте метод последовательных разностей имеет два существенных недостатка. Во-первых, его применение связано с сокращением числа пар наблюдений, по которым строится уравнение регрессии, и, следовательно, с потерей числа степеней свободы. Во-вторых, использование вместо исходных уровней временных рядов их приростов или ускорений приводит к потере информации, содержащейся в исходных данных.

Включение в модель регрессии фактора времени.

В корреляционно-регрессионном анализе устранить воздействие какого-либо фактора можно, если зафиксировать воздействие этого фактора на результат и другие включенные в модель факторы. Этот прием широко используется в анализе временных рядов, когда тенденция фиксируется через включение фактора времени в модель в качестве независимой переменной.

Модель вида

$$y_t = a + b_1 \cdot x_t + b_2 \cdot t + \varepsilon_t, \qquad (8)$$

относится к группе моделей, включающих фактор времени. Очевидно, что число независимых переменных в такой модели может быть больше единицы. Кроме того, это могут быть не только текущие, но и лаговые значения независимой переменной, а также лаговые значения результативной переменной.

Преимущество данной модели по сравнению с методами отклонений от трендов и последовательных разностей в том, что она позволяет учесть всю информацию, содержащуюся в исходных данных, поскольку значения y_t и x_t есть уровни исходных временных рядов. Кроме того, модель строится по всей совокупности данных за рассматриваемый период в отличие от метода последовательных разностей, который приводит к потере числа наблюдений. Параметры a и b модели с включением фактора времени определяются обычным МНК. Расчет и интерпретацию параметров покажем на примере.

Пример 3. Построение модели регрессии с включением фактора времени.

Вернемся к данным табл. 1.9. Построим уравнение регрессии, описывающее зависимость расходов на конечное потребление y_t от совокупного дохода x_t и фактора времени. Для расчета параметров уравнения регрессии (8) воспользуемся обычным МНК. Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} na + b_1 \sum x_t + b_2 \sum t = \sum y_t \\ a \sum x_t + b_1 \sum x_t^2 + b_2 \sum t \cdot x_t = \sum x_t \cdot y_t \\ a \sum t + b_1 \sum t \cdot x_t + b_2 \sum x_t^2 = \sum t \cdot y_t \end{cases} \qquad (9)$$

Рассчитав по исходным данным необходимые величины, получим:

$$\begin{cases} 8 \cdot a + 111 \cdot b_1 + 36 \cdot b_2 = 86, \\ 111 \cdot a + 1619 \cdot b_1 + 554 \cdot b_2 = 1266, \\ 36 \cdot a + 554 \cdot b_1 + 204 \cdot b_2 = 440. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно a, b_1 и b_2, находим: a=1,15; b_1=0,49; b_2=0,63. Следовательно, уравнение регрессии имеет вид:

$$y_t = 1{,}15 + 0{,}49 \cdot x_1 + 0{,}63 \cdot t + \varepsilon_t .$$

Интерпретация параметров этого уравнения следующая. Параметр b_1=0,49 характеризует, что при увеличении сово-

купного дохода на 1 д.е. расходы на конечное потребление возрастут в среднем на 0,49 д.е. в условиях существования неизменной тенденции. Параметр b_2=0,63 означает, что воздействие всех факторов, кроме совокупного дохода, на расходы на конечное потребление приведет к его среднегодовому абсолютному приросту на 0,63 д.е.

1.5.3 Автокорреляция в остатках. Критерий Дарбина-Уотсона.

Рассмотрим уравнение регрессии вида

$$y_t = a + \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot x_{jt} + \varepsilon_t , \qquad (10)$$

где k – число независимых переменных модели.

Для каждого момента (периода) времени t=1:n значение компоненты ε_t определяется как

$$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t \qquad (11)$$

или

$$\varepsilon_t = y_t - \left(a + \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot x_{jt} \right) \qquad (12)$$

Рассматривая последовательность остатков как временной ряд, можно построить график их зависимости от времени. В соответствии с предпосылками МНК остатки ε_t, должны быть случайными (рис. 1.8). Однако при моделировании временных рядов нередко встречается ситуация, когда остатки содержат тенденцию (рис. 1.8б) и в)) или циклические колебания (рис. 1.8 г). Это свидетельствует о том, что каждое следующее значение остатков зависит от предшествующих. В этом случае говорят о наличии автокорреляции остатков.

Автокорреляция остатков может быть вызвана несколькими причинами, имеющими различную природу. Во-первых, иногда она связана с исходными данными и вызвана наличием ошибок

измерения в значениях результативного признака. Во-вторых, в ряде случаев причину автокорреляции остатков следует искать в формулировке модели.

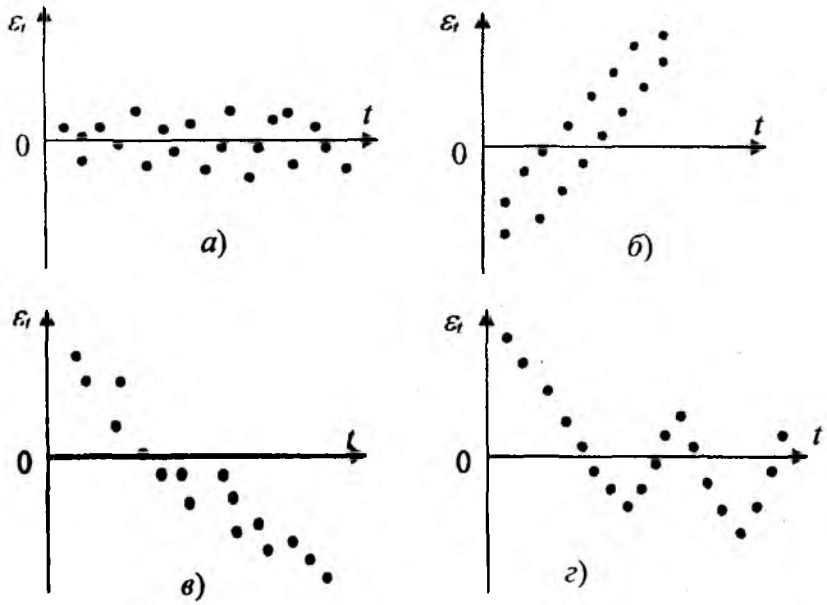


Рис. 1.8. Модели зависимости остатков от времени
а) - случайные остатки; *б*) - возрастающая тенденция в остатках; *в*) - убывающая тенденция в остатках; *г*) - циклические колебания в остатках.

Модель может не включать фактор, оказывающий существенное воздействие на результат, влияние которого отражается в остатках, вследствие чего последние могут оказаться автокоррелированными. Очень часто этим фактором является фактор времени t. Кроме того, в качестве таких существенных факторов могут выступать лаговые значения переменных, включенных в модель. Либо модель не учитывает несколько второстепенных факторов, совместное влияние которых на результат существенно ввиду совпадения тенденций их изменения или фаз циклических колебаний.

От истинной автокорреляции остатков следует отличать ситуации, когда причина автокорреляции заключается в неправильной спецификации функциональной формы модели. В этом случае следует изменить форму связи факторных и результативного признаков, а не использовать специальные методы расчета параметров уравнения регрессии при наличии автокорреляции остатков. [29, 30, 33, 37].

Существуют два наиболее распространенных метода определения автокорреляции остатков. Первый метод - это построение графика зависимости остатков от времени и визуальное определение наличия или отсутствия автокорреляции. Второй метод - использование критерия Дарбина-Уотсона и расчет величины:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2}. \qquad (13)$$

Таким образом, d есть отношение суммы квадратов разностей последовательных значений остатков к остаточной сумме квадратов по модели регрессии. Практически во всех статистических ППП значение критерия Дарбина-Уотсона указывается наряду с коэффициентом детерминации, значениями t- и F-критериев.

Коэффициент автокорреляции остатков первого порядка определяется как

$$r_1^{\varepsilon} = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}_1) \cdot (\varepsilon_{t-1} - \bar{\varepsilon}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}_1)^2 \cdot \sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_{t-1} - \bar{\varepsilon}_2)^2}}, \qquad (14)$$

где

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t}{n-1}; \qquad \bar{\varepsilon}_2 = \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_{t-1}}{n-1}. \qquad (15)$$

Так как ε_t - остатки, полученные по уравнению регрессии, параметры которого определены обычным МНК, то в соответствии с предпосылками МНК их сумма и среднее значение равны нулю:

$$\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t = 0; \qquad \varepsilon_t = \frac{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t}{n} = 0 . \tag{16}$$

Следовательно, без уменьшения общности можно предположить, что

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2 = 0 . \tag{17}$$

Предположим также

$$\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2 \approx \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_{t-1}^2 . \tag{18}$$

С учетом соотношений (17) и (18) формула для расчета коэффициента автокорреляции остатков (14) преобразуется следующим образом:

$$r_1^{\varepsilon} \approx \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2 \cdot \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_{t-1}^2}} \approx \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2} . \tag{19}$$

Преобразуем теперь формулу (13) расчета критерия Дарбина-Уотсона следующим образом:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2 - 2 \cdot \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1} + \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2} \tag{20}$$

С учетом (18) имеем:

$$d \approx \frac{2 \cdot \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2 - 2 \cdot \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2} = 2 \cdot \left(1 - \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2} \right) . \tag{21}$$

Сравнив выражения (19) и (21), нетрудно вывести следующее соотношение между критерием Дарбина-Уотсона и коэффициентом автокорреляции остатков первого порядка:

$$d \approx 2 \cdot \left(1 - r_1^{\varepsilon}\right). \qquad (22)$$

Таким образом, если в остатках существует полная положительная автокорреляция и $r_1^{\varepsilon} = 1$, то d=0. Если в остатках полная отрицательная автокорреляция, то $r_1^{\varepsilon} = -1$ и, следовательно, d=4. Если автокорреляция остатков отсутствует, то $r_1^{\varepsilon} = 0$ и d=2. Следовательно,

$$0 \le d \le 4.$$

Алгоритм выявления автокорреляции остатков на основе критерия Дарбина-Уотсона следующий. Выдвигается гипотеза H_0 об отсутствии автокорреляции остатков. Альтернативные гипотезы H_1 и H_1^* состоят, соответственно, в наличии положительной или отрицательной автокорреляции в остатках. Далее по специальным таблицам (см. приложение) определяются критические значения критерия Дарбина-Уотсона d_L и d_U для заданного числа наблюдений n, числа независимых переменных модели k и уровня значимости α. По этим значениям числовой промежуток [0; 4] разбивают на пять отрезков. Принятие или отклонение каждой из гипотез с вероятностью $(1-\alpha)$ рассматривается на рис. 1.9.

Есть положительная автокорреляция остатков. H_0 отклоняется. С вероятностью $P = (1-\alpha)$ принимается H_1.	Зона неопределенности	Нет оснований отклонять H_0 (автокорреляция остатков отсутствует)	Зона неопределенности	Есть отрицательная автокорреляция остатков. H_0 отклоняется. С вероятностью $P = (1-\alpha)$ принимается H_1^*
0 d_L	d_U	2	4- d_U	4- d_L 4

Рис. 1.9.Механизм проверки гипотезы о наличии автокорреляции остатков

Если фактическое значение критерия Дарбина-Уотсона попадает в зону неопределенности, то на практике предполагают существование автокорреляции остатков и отклоняют гипотезу H_0.

Есть несколько существенных ограничений на применение критерия Дарбина-Уотсона.

Во-первых, он неприменим к моделям, включающим в качестве независимых переменных лаговые значения результативного признака, т.е. к моделям авторегрессии. Для тестирования на автокорреляцию остатков моделей авторегрессии используется критерий h Дарбина.

Во-вторых, методика расчета и использования критерия Дарбина-Уотсона направлена только на выявление автокорреляции остатков первого порядка. При проверке остатков на автокорреляцию более высоких порядков следует применять другие методы, рассмотрение которых выходит за рамки данного учебника.

В-третьих, критерий Дарбина-Уотсона дает достоверные результаты только для больших выборок.

1.5.4. Оценивание параметров уравнения регрессии при наличии автокорреляции в

Обратимся вновь к уравнению регрессии (1). Примем некоторые допущения относительно этого уравнения:

- пусть y_t и x_t не содержат тенденции, например, представляют собой отклонения выравненных по трендам значений от исходных уровней временных рядов;
- пусть оценки a и b параметров уравнения регрессии найдены обычным МНК;
- пусть критерий Дарбина-Уотсона показал наличие автокорреляции в остатках первого порядка.

Чтобы понять, каковы последствия автокорреляции в остатках для оценок параметров модели регрессии, найденных

обычным МНК, построим формальную модель, описывающую автокорреляцию в остатках. Автокорреляция в остатках первого порядка предполагает, что каждый следующий уровень остатков ε_t зависит от предыдущего уровня ε_{t-1}. Следовательно, существует модель регрессии вида

$$\varepsilon_t = c + d \cdot \varepsilon_{t-1} + u_t, \qquad (23)$$

где c и d - параметры уравнения регрессии.

В соответствии с рабочими формулами МНК имеем:

$$c = \bar{\varepsilon}_t - d \cdot \bar{\varepsilon}_{t-1}; \quad d = \frac{\overline{\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}} - \bar{\varepsilon}_t \cdot \bar{\varepsilon}_{t-1}}{\overline{\varepsilon^2_{t-1}} - \bar{\varepsilon}^2_{t-1}}. \qquad (24)$$

С учетом соотношений (16) и (117) получим:

$$c = 0; \quad d = \frac{\overline{\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}}}{\overline{\varepsilon^2_{t-1}}} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon^2_{t-1}} \approx r_1^{\varepsilon}. \qquad (25)$$

где r_1^{ε} - коэффициент автокорреляции остатков первого порядка.

Таким образом, имеем:

$$\varepsilon_t = r_1^{\varepsilon} \cdot \varepsilon_{t-1} + u_t, \qquad (26)$$

где u_t – случайная ошибка.

Заметим, что $\left|r_1^{\varepsilon}\right| < 1$.

Учитывая соотношение (26), уравнение (1) можно переписать в виде

$$y_t = a + b \cdot x_t + r_1^{\varepsilon} \cdot \varepsilon_{t-1} + u_t \qquad (27)$$

Найденные соотношения показывают, что текущий уровень ряда y_t, зависит не только от факторной переменной x_t но и от остатков предшествующего периода ε_{t-1}.

Допустим, мы не принимаем во внимание эту информацию и определяем оценки параметров a и b уравнения (1) обычным МНК. Тогда можно показать, что, полученные

оценки неэффективны, т.е. они не имеют минимальную дисперсию. Это приводит к увеличению стандартных ошибок, снижению фактических значений t-критерия и широким доверительным интервалам для коэффициента регрессии. На основе таких результатов можно сделать ошибочный вывод о незначимом влиянии исследуемого фактора на результат, в то время как на самом деле его влияние статистически значимо. [24, 35, 41, 44].

Отметим, что при соблюдении прочих предпосылок МНК автокорреляция остатков не влияет на свойства состоятельности и несмещенности оценок параметров уравнения регрессии обычным МНК, за исключением моделей авторегрессии. Применение МНК к моделям авторегрессии ведет к получению смещенных, несостоятельных и неэффективных оценок.

Рассмотрим основной подход к оценке параметров модели регрессии в случае, когда имеет место **автокорреляция остатков**. Для этого вновь обратимся к **исходной модели (1)**. Для момента времени t-1 эта модель

$$y_{t-1} = a + b \cdot x_{t-1} + \varepsilon_{t-1}. \qquad (28)$$

Умножим обе части уравнения (28) на r_1^{ε}:

$$r_1^{\varepsilon} \cdot y_{t-1} = r_1^{\varepsilon} \cdot a + r_1^{\varepsilon} \cdot b \cdot x_{t-1} + r_1^{\varepsilon} \cdot \varepsilon_{t-1}. \qquad (29)$$

Вычтем почленно из уравнения (1) уравнение (29)

$$y_t - r_1^{\varepsilon} \cdot y_{t-1} = a - r_1^{\varepsilon} \cdot a + b \cdot x_t - r_1^{\varepsilon} \cdot b \cdot x_{t-1} + \varepsilon_t - r_1^{\varepsilon} \cdot \varepsilon_{t-1}. \qquad (30)$$

Проведя тождественные преобразования в (30), имеем:

$$y_t - r_1^{\varepsilon} \cdot y_{t-1} = a \cdot (1 - r_1^{\varepsilon}) + b \cdot (x_t - r_1^{\varepsilon} \cdot x_{t-1}) + \varepsilon_t - r_1^{\varepsilon} \cdot \varepsilon_{t-1}. \qquad (31)$$

или

$$y'_t = a' + b \cdot x'_t + u_t. \qquad (32)$$

В формуле (32):

$$y'_t = y_t - r_1^{\varepsilon} \cdot y_{t-1}; \qquad (33)$$

$$x'_t = x_t - r_1^{\varepsilon} \cdot x_{t-1}; \qquad (34)$$

$$u_t = \varepsilon_t - r_1^{\varepsilon} \cdot \varepsilon_{t-1}; \qquad (35)$$

$$a' = a \cdot (1 - r_1^{\varepsilon}). \qquad (36)$$

Поскольку u_t - случайная ошибка, то для оценки параметров уравнения (32) можно применять обычный МНК.

Итак, если остатки по исходному уравнению регрессии содержат автокорреляцию, то для оценки параметров уравнения используют обобщенный МНК. Для его реализации необходимо выполнять следующие условия.

1. Преобразовать исходные переменные y_t и x_t к виду (33) и (34).

2. Применив обычный МНК к уравнению (32), определить оценки параметров a' и b.

3. Рассчитать параметр a исходного уравнения из соотношения (36) как

$$a = a'/(1 - r_1^{\varepsilon}). \qquad (37)$$

4. Выписать исходное уравнение (1).

Обобщенный метод наименьших квадратов аналогичен методу последовательных разностей. Однако мы вычитаем из y_t (или x_t) не все значение предыдущего уровня y_{t-1} (или x_{t-1}), а некоторую его долю $r_1^{\varepsilon} \cdot y_{t-1}$ или $r_1^{\varepsilon} \cdot x_{t-1}$. Если $r_1^{\varepsilon} = 1$, данный метод есть просто метод первых разностей, так как

$$y'_t = y_t - y_{t-1}; \qquad (38)$$

и

$$x'_t = x_t - x_{t-1}; \qquad (39)$$

Поэтому в случае, если значение критерия Дарбина-Уотсона близко к нулю, применение метода первых разностей вполне обоснованно. Если $r_1^{\varepsilon} = -1$, т.е. в остатках наблюдается полная отрицательная автокорреляция, то изложенный выше метод модифицируется следующим образом: $y'_t = y_t - (-1) \cdot y_{t-1} = y_t + y_{t-1}$; (40)

Аналогично

$$x'_t = x_t - (-1) \cdot x_{t-1} = x_t + x_{t-1}; \qquad (41)$$

Поскольку

$$a' = a \cdot (1 - r_1^{\varepsilon}) = 2 \cdot a. \qquad (42)$$

имеем:

$$y_t + y_{t-1} = 2 \cdot a + b \cdot (x_t + x_{t-1}) + u_t. \qquad (43)$$

Следовательно,

$$(y_t + y_{t-1})/2 = a + b \cdot (x_t + x_{t-1})/2 + u_t/2. \qquad (44)$$

В сущности, в модели (44) мы определяем средние за два периода уровни каждого ряда, а затем по полученным усредненным уровням обычным МНК рассчитываем параметры a и b. Данная модель называется моделью регрессии по скользящим средним.

Основная проблема, связанная с применением данного метода, заключается в том, как получить оценку r_1^{ε}. Существует множество способов оценить численное значение коэффициента автокорреляции остатков первого порядка. Однако основными способами являются оценка этого коэффициента непосредственно по остаткам, полученным по исходному уравнению регрессии, и получение его приближенного значения из соотношения между коэффициентом автокорреляции остатков первого порядка и критерием Дарбина-Уотсона: $r_1^{\varepsilon} = 1 - d/2$.

1.5.5. Адаптивные модели прогнозирования

Адаптивная модель прогнозирования Брауна.

Характерной чертой адаптивных методов прогнозирования является их способность непрерывно учитывать эволюцию динамических характеристик изучаемых процессов, приспосабливающихся под эту эволюцию, придавая больший вес тем значениям, которые ближе к текущему моменту прогнозирования.

Все адаптивные методы хорошо воспроизводят плавно изменяющиеся значения временного ряда и плохо аппроксимируют резко изменяющиеся данные и выбросы. Аппрокси-

мированный временной ряд с помощью адаптивных методов повторяет резко изменяющиеся данные, но сдвинутыми во времени на одну дату, что значительно ухудшает качество модели. Это негативное свойство адаптивных методов прогнозирования следует учитывать при подборе коэффициентов сглаживания.

Экспоненциально взвешенное среднее значение вычисляется по формуле

$$Z_t = \lambda Y_t + (1-\lambda) Z_{t-1},$$

(обоснование формулы см. в разделе - Метод экспоненциального скользящего среднего (Метод Брауна)).

Если в качестве "наивного" прогноза принять следующий алгоритм: "прогноз спроса на некоторый товар в следующем месяце равен спросу на товар в этом месяце", то можно утверждать следующее: прогноз временного ряда на дату t+1 равен экспоненциальной взвешенной средней на момент времени t. В соответствии с этим и при условии, что

$$Y_t = a_0 + e_t,$$

где a_0 - неизвестный параметр, не зависящий от времени;

e_t - случайный остаток со средним, равным нулю, и конечной дисперсией, адаптивная модель прогнозирования Брауна имеет следующий вид:

$$\Pi_{t+1} = Z_t = \lambda Y_t + (1-\lambda) Z_{t-1} = \lambda Y_t + (1-\lambda)\Pi_t;$$

$$\Pi_{t+1} = \Pi_t + \lambda (Y_t - \Pi_t),$$

где Π_{t+1} - прогноз временного ряда на момент времени t+1;

Z_t - экспоненционально взвешенное среднее на момент времени t;

$Y_t - \Pi_t$ - ошибка прогноза;

Π_1 - первое прогнозное значение определяется экспертным способом, рассчитывают его с помощью регрессионного анализа или считают равным первому значению временного ряда;

λ - коэффициент сглаживания.

Адаптивный метод прогнозирования Брауна обладает следующими свойствами:

• для построения прогноза по экспоненциально взвешенному среднему необходимо знать только начальную оценку прогноза, дальнейшее прогнозирование возможно по поступлении свежих данных;

• в экспоненциально взвешенном среднем значения весов убывают со временем, поэтому здесь нет точки, на которой веса обрываются;

• чем больше λ, тем выше чувствительность среднего; чем меньше λ, тем устойчивее становится экспоненциально взвешенное среднее;

• изменяя коэффициент λ, можно найти его оптимальное значение по признаку ошибки модели. Если оптимальное значение $0 \le \lambda \le 0{,}3$, то временной ряд является стационарным, если $1 \ge \lambda > 0{,}3$, то временной ряд является нестационарным и следует перейти к моделям, учитывающим тенденцию временного ряда;

• прогнозы, основанные на экспоненциально взвешенном среднем хорошо воспроизводят гладкие временные ряды, но очень плохо воспроизводят выбросы;

• если временной ряд имеет линейную тенденцию роста, то экспоненциальная средняя приводит к смещенным прогнозам.

Адаптивная модель прогнозирования Хольта.

Экспоненциальная средняя приводит к смещенным прогнозам, т.е. дает систематическую ошибку, когда временной ряд имеет тенденцию линейного роста. Для этого случая разработано несколько вариантов адаптивных моделей, также использующих процедуру экспоненциального сглаживания. В основе моделей лежит гипотеза о том, что прогноз может быть получен по

$$П_{t+k} = a_{0,t} + da_{1,t},$$

где $a_{0,t}$, $a_{1,t}$ - текущие оценки коэффициентов адаптивного полинома первого порядка;

d - глубина прогноза.

Одной из первых моделей этого типа была двухпараметрическая модель Ч.Хольта, в которой оценка коэффициентов производится следующим образом:

$$\Pi_{t+k} = a_{0,t} + a_{1,t};$$

$$a_{0,t} = \lambda_1 Y_t + (1-\lambda_1)(a_{0,t-1} + a_{1,t-1}) = \lambda_1 Y_t + (1-\lambda_1)\Pi_t;$$

$$a_{1,t} = \lambda_2 (a_{0,t} - a_{0,t-1}) + (1-\lambda_2) a_{1,t-1},$$

где λ_1, λ_2 - параметры экспоненциального сглаживания ($0<\lambda_1$, $\lambda_2<1$).

Оптимальное значение параметров λ_1, λ_2 можно определить по минимальной ошибке модели.

Адаптивные модели прогнозирования Бокса-Дженкинса.

Если модель Хольта усовершенствовать путем включения разности ошибок, то получится полная трехпараметри-ческая модель Дж. Бокса и Г. Дженкинса:

$$\Pi_{t+1} = a_{0,t} + a_{1,t};$$

$$a_{0,t} = \lambda_1 Y_t + (1-\lambda_1)(a_{0,t-1} + a_{1,t-1}) + \lambda_3 (e_t - e_{t-1});$$

$$a_{1,t} = \lambda_2 (a_{0,t} - a_{0,t-1}) + (1-\lambda_2) a_{1,t-1},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - параметры экспоненциального сглаживания ($0<\lambda_1$, λ_2, $\lambda_3<1$).

Адаптивные модели прогнозирования Уинтерса

Модель Хольта была развита Уинтерсом так, чтобы она охватывала помимо линейного тренда еще и сезонные эффекты. Прогноз, сделанный в момент t: на k тактов времени вперед, равен:

$$\Pi_{t+k} = (a_{0,t} + k a_{1,t}) + w_{t+k-T},$$

где w_{t+k-T} - коэффициент сезонности;

T - число временных тактов, содержащихся в полном сезонном цикле (для месячных данных T=12).

Модель Уинтерса содержит три параметра сглаживания $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($0 < \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 1$).

Коэффициенты модели вычисляются по следующим формулам:

$$a_{0,t} = \lambda_1 \frac{Y_t}{w_{t-T}} + (1-\lambda_1)(a_{0,t-1} + a_{1,t-1});$$

$$w_t = \lambda_2 \frac{Y_t}{a_{0,t}} + (1-\lambda_2) w_{w-T};$$

$$a_{1,t} = \lambda_3 (a_{0,t} - a_{0,t-1}) + (1-\lambda_3) a_{1,t-1}.$$

Адаптивная аддитивная модель сезонности Тейла-Вейджа.

Предположим, что исходный временной ряд был преобразован так, чтобы его можно аппроксимировать аддитивной моделью:

$$Y_t = a_{0,t} + w_t + \delta_t;$$

$$a_{0,t} = a_{0,t-1} + a_{1,t},$$

где $a_{0,t}$ - уровень процесса после выделения сезонных колебаний;

$a_{1,t}$ - аддитивный коэффициент роста;

w_t - аддитивный коэффициент сезонности;

δ_t - белый шум.

Прогноз, сделанный на момент t на k временных тактов вперед, вычисляется по следующей формуле:

$$\Pi_{t+k} = a_{0,t} + k a_{1,t} + w_{t+k-T},$$

где $a_{0,t} = a_{0,t-1} + a_{1,t-1} + \lambda_1 (Y_t - \Pi_t);$

$a_{1,t} = a_{1,t-1} + a_{1,t-1} + \lambda_1 \lambda_2 (Y_t - \Pi_t);$

$w_t = w_{t-T} + (1-\lambda_1) + \lambda_3 (Y_t - \Pi_t);$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ($0 < \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 1$). - параметры адаптации;

k=1 - глубина прогноза;

T - число временных тактов, содержащихся в полном сезонном цикле.

Контрольные вопросы.

1. Перечислите основные элементы временного ряда.
2. Что такое автокорреляция уровней временного ряда и как ее можно оценить количественно?
3. Дайте определение автокорреляционной функции временного ряда.
4. Перечислите основные виды трендов.
5. Какова интерпретация параметров линейного и экспоненциального трендов?
6. Выпишите общий вид мультипликативной и аддитивной модели временного ряда.
7. Перечислите этапы построения мультипликативной и аддитивной моделей временного ряда.
8. С какими целями проводятся выявление и устранение сезонного эффекта?
9. Как структурные изменения влияют на тенденцию временного ряда?
10. Какие тесты используют для проверки гипотезы о структурной стабильности временного ряда?
11. Какова концепция теста Чоу?
12. Изложите суть метода Гуджарати. В чем его преимущество перед тестом Чоу?

ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ К ОБРАБОТКЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

2.1. Общие замечания

Среди множества методов, созданных статистикой для обработки различных экспериментальных данных, наибольшее распространение получил метод наименьших квадратов в силу сравнительной простоты вычислительных процедур, реализуемых с помощью ЭВМ. В социально-экономической статистике в основном используются официальные данные государственной статистики, данные министерств и ведомств, характеризующие развитие народного хозяйства, его отраслей, культуры, здравоохранения и т.д. Иногда считают, что полученные статистические данные несут в себе неточности, связанные с методологией исчисления синтетических показателей, таких, как производительность труда, рентабельность и т.д. Но эти неточности никоим образом не отражаются на результатах, поскольку методология исчисления этих показателей является общепринятой.

Эти неточности можно назвать ошибками упрощения. Возникают они как следствие таких причин:

1. Мысленной остановки непрерывного процесса производства, его формализации в дискретные моменты времени.

2. Неполноты охвата, потому что иногда часть единиц изучаемой совокупности по тем или иным причинам не может быть включена в исследование. Например, при анализе работы предприятий часто исключаются предприятия, проработавшие неполный год, использующие импортное оборудование и т. д.

3. Неполноты учета факторов, воздействующих на то или иное социально-экономическое явление. Эти ошибки

возникают потому, что ни в одно уравнение, ни в одну модель нельзя включить бесконечное число факторных признаков; обычно отбирается только часть их, причем практически отбор носит чисто субъективный характер.

4. В силу характера выбранного уравнения связи. Как бы хорошо уравнение ни было обосновано, как бы теоретически адекватно ни описывало исследуемое явление, оно не может быть его точным аналогом.

Любую статистическую совокупность, полученную в результате наблюдения, сплошного или выборочного, прежде чем обработать методом наименьших квадратов, необходимо предварительно теоретически проанализировать. Предварительный теоретический анализ представляет исследование исходных данных и должен раскрыть внутрисистемное содержание совокупности. Такой внутрисистемный анализ включает качественное и

Экономист или социолог, который использует метод наименьших квадратов для анализа социально-экономических явлений и процессов, должен учитывать, что применяет этот метод для исследования реальных статистических данных, т.е. реальных качественно определенных показателей, выражающих реальные объемы производства, реализации, затрат и т.д., а следовательно, и реально существующие пропорции и связи.

Таким образом, применяя метод наименьших квадратов для обработки данных социально-экономической статистики, всегда следует помнить о двух сторонах, выражающих сущность статистических показателей: качественной и количественной.

2.2. Качественное описание совокупности данных

Если обработке подвергается совокупность статистических данных, полученных без участия исследователя, то в отдельных случаях необходима их критическая оценка. Кри-

тическая оценка начинается с выяснения, кем и когда получены исходные данные, какие материалы представлены: первичные или вторичные, расчетные, обобщающие? Самыми надежными являются данные государственной статистики, публикуемые в статистических сборниках, в периодической печати (об итогах выполнения государственных планов социального и экономического развития, по результатам различных единовременных учетов, переписей и др.).

Данные многочисленных социологических исследований необходимо проверять особенно тщательно. Если в исследовании используются данные не проверенные статистикой, то они должны подвергаться обязательно критической оценке, при этом необходимо, если это возможно, выяснить полноту охвата, качество, достоверность, пригодность их для целей исследования, детально проанализировать весь процесс получения исходных данных, т.е. ознакомиться с программой наблюдения, организацией, видом и способом наблюдения, установить репрезентативность данных, определить величину ошибки и т.д.

Критическая оценка исходных данных включает также оценку каждого элемента совокупности с точки зрения соответствия его понятию единицы наблюдения.

Большое значение для последующей успешной обработки данных имеет установление однородности, однотипности единиц, входящих в исследуемую совокупность. Состав исходной совокупности может быть гомогенным, т.е. содержать однотипные единицы, и гетерогенным, т.е. содержать разнотипные единицы. Понятие однородность означает близость основного свойства, качества единиц совокупности, их типичность.

Однородность единиц формируется под воздействием внутренних причин и условий. Одинаковые для всех единиц совокупности причины и условия существования создают то общее, что объединяет единицы совокупности, но эти же

причины и условия формулируют их сущность, т.е. то, что отличает одну единицу совокупности от другой.

Обязательным условием существования статистической совокупности является наличие вариации признака у единиц совокупности. Вариация - это количественное изменение признака. Вариация появляется под воздействием случайных, прежде всего внешних причин. Это, например, колебания размера и веса деталей при обработке на станке, колебания уровня урожайности сельскохозяйственных культур на отдельных участках (табл. 2.1).

Таблица 2.1.

Урожайность риса, ц с га	Число участков
До 20	2
20-30	14
30-35	14
35-40	20
40-45	23
45-50	15
50 и выше	12
Итого	100

Причины, порождающие вариацию социально-экономических явлений, очень сложны и многообразны. Они лежат в коренных особенностях исследуемого явления, в его сущности, в его социально-экономической принадлежности. Целесообразная деятельность людей, объединенных в коллективы, под влиянием самых разнообразных факторов создает вариацию уровня дохода, рентабельности производства продукции и т.п. в этих коллективах. Для примера приведем группировку фермерских хозяйств по размеру валового дохода на 100 га пашни в 2005 г. (табл. 2.2) и группировку малых промышленных предприятий по объему валовой продукции за 2004 г. (табл. 2.3).

Таблица 2.2.

	Число фермерских хозяйств, в процентах к итогу
Всего фермерских хозяйств	100
Из них фермеров, имеющих валовой доход в расчете на 100 га пашни:	
до 1 млн. сум	1,0
свыше 1 до 5 млн. сум	4,2
свыше 5 до 10 млн. сум	12,9
свыше 10 до 15 млн. сум	13,5
свыше 15 до 20 млн. сум	12,0
свыше 20 до 30 млн. сум	19,3
свыше 30 до 40 млн. сум	12,7
свыше 40 млн. сум	24,4

Социально-экономические явления, как правило, обладают большой вариацией. Это, например, численность работающих на предприятиях в пределах отрасли, поголовье скота в пределах совхозов одного направления.

Если исследуются результаты целенаправленной человеческой деятельности, то вариация будет отражать вмешательство многочисленных нарушающих факторов, природу которых в отдельных случаях невозможно

Например, в распределении городов республики по числу жителей на январь 2004 г. (см. табл. 2.4) вариация складывается под влиянием большого числа факторов: исторических, географических, экономических, социальных и множества других, сущность которых не всегда удается

Однако во всех случаях вариацию следует изучать и измерять, поскольку показатели вариации дают не менее важную информацию, чем другие показатели, в частности средняя величина. Показатели вариации показывают, как группируются значе-

ния признака вокруг средней. Они используются для характеристики упорядоченных статистических совокупностей: группировок, классификаций, рядов распределений.

Таблица 2.3.

	Число малых предприятий, в процентах к итогу
Предприятия, состоящие на самостоятельном балансе	100
в том числе с объемом валовой продукции, тыс. сум:	
до 1000	6,0
1001-5000	13,1
5001-10000	12,5
10001-20000	36,8
20001-30000	12,9
30000-50000	14,5
50001-100000	2,3
100001 и более	1,9

Таблица 2.4.

Число жителей, тыс.,чел	Число городов
до 10	10
10-20	62
20-50	60
50-100	25
100-500	17
500 и более	8
Итого	182

К показателям вариации относятся размах вариации, среднеквадратическое отклонение, коэффициент вариации. Они являются одновременно и мерами однородности совокупности. Однако социально-экономические явления обла-

дают большей колеблемостью, чем явления физические, биологические, и поэтому для первых величина показателей вариации не всегда может характеризовать степень однородности. Так, при построении отраслевых статистических моделей однородными могут считаться предприятия по таким качественным признакам, как единство подчиненности, единство технологических процессов, однотипность выпускаемой продукции, хотя количественно вариация других признаков может оказаться весьма высокой.

Формирование однородной совокупности социально-экономических явлений - сложный и трудоемкий процесс. Исследуя такие явления, необходимо опираться на те отрасли знаний, предметом изучения которых являются различные стороны общественной жизни: исторический материализм, политическая экономия, социология, экономика отраслей народного хозяйства и т. д.

Знание конкретной отрасли исследования позволяет сформировать систему показателей, выявить основные из них, вскрыть взаимосвязи между отдельными явлениями, факторами. Основой качественного анализа является выявление причинно-следственных связей, оценка силы воздействия отдельных факторов на результаты хозяйственной деятельности. Коэффициенты корреляции, которые характеризуют силу воздействия, даже будучи весьма близкими, к единице, еще не дают ответа о наличии связей. Эти связи могут оказаться ложными вследствие допущенных логических ошибок при формировании

Изучением проблемы ложной корреляции занимались такие известные ученые, как Б.С.Ястремский, Н.С.Четвериков и др. Хотя теория ложной корреляции еще достаточно не разработана, но основные причины, способствующие появлению ложной корреляции. Связи могут оказаться ложными когда:

1) обрабатываемые статистические ряды построены на данных, взятых из совокупностей с разными законами распределения;

2) обрабатываются динамические ряды, имеющие ярко выраженные тенденции;

3) статистические ряды построены на данных, взятых из разнородных совокупностей;

4) обрабатываются ряды относительных величин, причем все относительные величины получены, как отношения к одной и той же величине;

5) обрабатываются статистические ряды, содержащие ошибки наблюдения, т.е. в случаях, когда исходные данные не были критически оценены.

Проведению действенной качественной оценки исследуемой совокупности способствует овладение навыками абстрактно-логического мышления.

Всякая абстракция отражает конкретное только в главном, основном, существенном, т.е. теми свойствами, которые показывают качественную определенность явлений. Метод восхождения от абстрактного к конкретному открывает общее направление исследования. Другие методы познания в той или иной степени используют методологию восхождения от абстрактного к конкретному на определенных стадиях исследования. Метод наименьших квадратов, применяемый для исследования социально-экономических явлений, опирается на способ абстракции уже на первой своей стадии -наблюдении. Включение в программу вопросов, ответы на которые раскрывают существенные свойства единиц наблюдения, уже приводит к абстрагированию от многих малозначащих признаков с точки зрения поставленной задачи исследования. Абстракция возрастает на последующих стадиях и особенно на стадии обработки моделей методом наименьших квадратов. Использование метода абстракции в конечном итоге приводит к выявлению реально существующих связей и взаимозависимостей

Особенно широко следует применять различные приемы и методы, выработанные экономической наукой с целью выявления резервов для перевыполнения планов. Так, при ана-

лизе экономических показателей, характеризующих итоги работы определенной отрасли, необходимо сравнивать эти показатели с плановыми, показатели работы передовых предприятий с показателями отстающих, обязательно проводить сопоставления с итогами за прошлые периоды времени, указывая на важность таких сравнений.

2.3. Количественное описание совокупности данных

Количественное описание социально-экономических явлений основано на широком использовании таких статистических методов, как метод группировок, метод относительных и средних величин, индексный метод.

Наиболее действенным методом количественного описания социально-экономических явлений являются статистические группировки, т.е. расчленение явления по какому-либо существенному признаку. В исследовании социально-экономических явлений применяются три вида статистических группировок: типологические, структурные и аналитические. [22, 27, 36].

С помощью типологических группировок выявляются социально-экономические типы и однородные по существенному признаку группы. Научная ценность типологических группировок определяется тем, насколько правильно выбран группировочный признак. Если группировочный признак выбран правильно, то группировка может выразить социально-экономическую сущность явления.

С помощью структурных группировок может быть выявлена структура изучаемого явления. Так, в экономических исследованиях широко применяются структурные группировки предприятий по степени выполнения плана, по размеру основных производственных фондов, численности работающих и т. д.

С помощью аналитических группировок выявляется характеристика взаимосвязей между явлениями. Аналитические группировки в сочетании с относительными и средними величинами помогают раскрыть степень влияния одних факторов на другие. Недостатком метода группировок является то обстоятельство, что при анализе сложных социально-экономических явлений строятся весьма сложные комбинированные таблицы, а это приводит к тому, что действительные закономерности затушевываются.

Относительные величины являются простейшими обобщающими показателями, которые характеризуют числовую меру соотношений двух сопоставляемых величин. С помощью относительных величин можно характеризовать выполнение планов, определять темпы развития социально-экономических явлений во времени, структуру явлений и т.д.

Средние величины являются обобщающей характеристикой массовых, качественно однородных социально-экономических явлений. Наиболее употребительные средние величины: арифметическая, гармоническая, геометрическая. Средние величины, вычисленные за ряд периодов времени, показывают закономерности развития явлений, выявляют устойчивость изучаемых явлений. Правильное применение средних величин возможно только в сочетании с методом группировок.

Недостаток средних величин как обобщающих показателей заключается в том, что в них сглаживаются количественные различия изучаемых социально-экономических явлений, на основании средней величины нельзя судить о характере распределения значений признака в совокупности.

Индексы широко применяются в практике статистических исследований социально-экономических явлений для изучения степени влияния факторов, структуры и структурных сдвигов, для характеристики соотношений средних уровней и т.д.

Вышеперечисленные методы носят название описательных (дискрептивных) и наряду с качественным анализом помогают

устанавливать и выявлять причинно-следственные связи между социально-экономическими явлениями. Однако применение только этих методов не может полностью решить задачу исчерпывающего познания сложных процессов и явлений в силу особенностей этих явлений.

Эти особенности заключаются в том, что тенденции и закономерности социально-экономических явлений и процессов могут проявляться только в массовых данных. Им свойственна некоторая неопределенность, случайность, которая объясняется тем, что каждое явление зависит от большого числа факторов как прямых, так и косвенных. Социально-экономические явления связаны со многими другими явлениями: как социальными, так и природными, биологическими, механическими и т.д., с их многогранными переплетениями. Все это создает некоторую неопределенность, случайность проявления социально-экономических явлений.

Специфика статистических методов исследования, в основе которых лежит метод наименьших квадратов (регрессионного, дисперсионного, факторного), состоит в том, что обнаруженные связи и зависимости обосновываются не как жестко детерминированные, а устойчивые только на определенный момент времени и при определенных условиях с той или иной. степенью вероятности. Анализируя многочисленные статистические данные о явлениях и процессах общественной жизни, можно обнаружить связь между характеристиками социально-экономической статистики и понятиями

Количественное описание статистической совокупности в зависимости от целей и задач исследования может включать определение вероятности события или его частоты, группировку исходных данных и на ее основании расчет статистических характеристик: относительных и средних величин. Группировка позволяет установить наличие связей, а также характер и направление их, а расчет средних величин и показателей вариации дает возможность оценить репрезентативность данных.

Наиболее сложной и важной задачей количественного описания совокупности является проверка закона распределения признака в ней. В зависимости от этого в дальнейшем для обработки результатов наблюдения применяется тот или иной математико-статистический метод.

Проверка закона распределения должна заключаться в самом тщательном анализе условий получения исходной информации. В социально-экономической статистике обычно проверяют, подчиняются ли исходные данные нормальному закону распределения (проверяют основную гипотезу), причем начинают с проверки закона распределения каждого показателя. В качестве оцениваемых параметров используются центральные моменты третьего и четвертого порядков, показатели асимметрии и эксцесса.

Если распределение нормально, то $\mu_3 = 0$, $\mu_4 = 3\sigma^4$, а показатели асимметрии $A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$ и эксцесса $E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$.

Суждение о нормальности распределения можно вынести и на основании дисперсий показателей асимметрии и эксцесса. При $|A| \leq 3\sqrt{D(A)}$ и $|E| \leq 5\sqrt{D(E)}$ нормальность распределения подтверждается.

При большом объеме данных близость к нормальному распределению определяется с помощью критериев согласия. Рассмотрим на примере применение критерия Пирсона χ^2 (хи-квадрат). Этот критерий может применяться в случае, когда количество наблюдений в каждой выделенной группе не менее пяти ($f_i \geq 5$).

Если для исходного распределения не известны основные параметры $\bar{x}$ и σ^2, их определяют по результатам выборки, и в этом случае число степеней свободы уменьшают на количество вычисленных параметров. Критическая область для χ^2-критерия

является односторонней и при уровне значимости, равном α, определяется следующим выражением:

$$\sum \frac{(f - f')^2}{f'} > \chi^2_\alpha ,$$

где f - частоты эмпирического (исходного) распределения; f' - теоретические частоты.

Пример. При выборочном обследовании занятости женщин домашним хозяйством было получено следующее распределение (табл. 2.5).

Таблица 2.5.

Занятость женщин домашним хозяйством, часов в неделю	Число женщин, f_i	Центр интервала, x_i	$x'_i = \frac{x_i - 15}{2}$	$x'_i \cdot f_i$	$x'^2_i \cdot f_i$
8-10	49	9	-3	-147	441
10-12	106	11	-2	-212	424
12-14	183	13	-1	-183	183
14-16	261	15	0	0	0
16-18	227	17	1	227	227
18-20	119	19	2	238	476
20-22	17	21	3	51	153
22-224	38	23	4	152	608
Итого	1000			126	2512

Выдвигается гипотеза H_0 о том, что распределение данного признака подчиняется нормальному закону распределения.

По данным распределения рассчитаем $\bar{x}$, σ^2, σ (используя упрощенные методы расчета):

$$\bar{x} = \frac{126}{1000} \cdot 2 + 15 \approx 15{,}3;$$

$$\sigma^2 = 4\left[\frac{2512}{1000} - (0{,}126)^2\right] \approx 9{,}736;$$

$\sigma = 3{,}1$.

Вычисляем теоретические частоты f' (табл. 2.6).

Таблица 2.6.

Занятость женщин домашним хозяйством, часов в неделю, *a-b*	Число женщин f_i	$t_1 = \frac{a-15{,}3}{3{,}1}$	$t_2 = \frac{b-15{,}3}{3{,}1}$	$\frac{\varphi(t_2)}{2} - \frac{\varphi(t_1)}{2}$	f_i'
8-10	49	9	-3	-147	441
10-12	106	11	-2	-212	424
12-14	183	13	-1	-183	183
14-16	261	15	0	0	0
16-18	227	17	1	227	227
18-20	119	19	2	238	476
20-22	17	21	3	51	153
22-224	38	23	4	152	608
Итого	1000			126	2512

Определяем критерий χ^2 (табл. 2.7).

Таблица 2.7.

f_i	f_i'	$f_i - f_i'$	$(f_i - f_i')^2$	$\frac{(f_i - f_i')^2}{f_i'}$
49	38	11	121	3,18
106	100	6	36	0,36
183	194	-11	121	0,61
261	255	6	36	0,14
227	227	0	0	0
119	122	-3	9	0,07
17	50	-33	1089	21,1
38	14	24	576	41,1
1000				66,56

Табличное значение $\chi^2_\alpha = 13{,}46$. Так как $\chi^2 > \chi^2_\alpha$ (66,56>13,46) гипотеза H_0 о нормальности распределения частот отвергается.

Следует отметить, что исходное распределение частот в данной задаче по внешнему виду вполне соответствовало распределению частот при нормальном законе распределения. Однако известное утверждение о том, что в различных областях знаний законы распределений частот проявляются по-разному, в данном исследовании подтвердилось.

Наконец, при проверке закона распределения исходных данных можно воспользоваться критерием ℵ (каппа), который вычисляется на основании показателей асимметрии и эксцесса:

$$\aleph = \frac{A(E+3)^2}{4(4E-3A)(2E-3A-6)}.$$

По величине критерия ℵ определяют, к какому типу кривых Пирсона относится данное распределение. Каждый из семи типов кривых может при непрерывном изменении параметров перейти в нормальную кривую. Следовательно, если распределение признаков в изучаемой совокупности относится к первым семи типам кривых Пирсона, то с некоторыми оговорками возможны те же приемы их анализа, что и при нормальном распределении.

Иногда на практике, при проверке основной гипотезы используют свойства нормального распределения. Известно, что нормальное распределение является симметричным, и с помощью таблицы функции распределения можно определить, что интервалу $t\sigma$ -соответствуют вероятности:

$P = 50\%$ при t=0,7;
$P = 68\%$ при t=1,0;
$P = 95\%$ при t=2,0;
$P = 99{,}7\%$ при t=3,0.

Следовательно, всякий раз, когда эмпирические распределения будут относительно симметричными и содержать в интер-

вале $\bar{x} + t\sigma$ доли наблюдений, близкие к теоретическим, можно делать предположение о нормальности закона распределения.

При многомерных распределениях проверяется гипотеза о нормальности частных распределений. Если частные распределения нормальны, то многомерная функция $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ также будет распределена по нормальному закону со средним значением $a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2 + ... + a_n\bar{x}_n$ и дисперсией $a_1\sigma_1^2 + a_2\sigma_2^2 + ... + a_n\sigma_n^2$.

Однако распределение признаков, характеризующих социально-экономические явления и процессы, не всегда бывает нормальным, и в этом случае последующее применение статистических приемов обработки, в том числе и метода наименьших квадратов, становится затруднительным или вообще невозможным. В ряде случаев исходные распределения можно нормализовать. Одним из способов нормализации является замена исходных величин их логарифмами. В этом случае распределение будет называться логарифмически-

Положим, $u = \ln x$ (или $x = e^u$), тогда плотность распределения

$$f(u) = \frac{1}{\sigma_u\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(u-\mu_u)^2}{2\sigma_u^2}};$$

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma_u\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(\ln x-\mu_u)^2}{2\sigma_u^2}}.$$

Получив с помощью формул логарифмически-нормального распределения все необходимые результаты для $\ln x$, можно затем вернуться к исходным величинам.

Предварительный анализ, включающий две стадии описания совокупности, подкрепляет теоретическую обоснованность применения метода наименьших квадратов, позволяет в дальнейшем при использовании методологии корреляций и регрессий углубиться в сущность изучаемых связей и во

многих случаях приводит к выявлению ранее неизвестных соотношений между исследуемыми явлениями.

2.4. Метод наименьших квадратов как вычислительный прием

Основной принцип метода наименьших квадратов рассмотрим на следующем примере: будем считать, что две величины (два показателя) x и y взаимосвязаны. Причем y находится в некоторой зависимости от x. Следовательно, y будет зависимой, а x - независимой величиной. Пусть связь между ними криволинейная, описывается уравнением параболы второго порядка

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 .$$

Задача сводится к отысканию неизвестных параметров a_0, a_1 и a_2. Значения величин x и y представлены двумя рядами данных:

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_N ,$$

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N .$$

Если бы все значения, полученные по данным наблюдения, лежали строго на кривой, описываемой уравнением параболы, то для каждой из точек было бы справедливо следующее равенство:

$$y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 = 0 .$$

Однако на практике имеет место другое равенство:

$$y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 = \Delta_i ,$$

т.е. существует разность Δ_i между данными наблюдения и данными, полученными по уравнению связи. Эта разность и возникает вследствие наличия ошибок упрощения.

Задача заключается в том, чтобы найти такие коэффициенты уравнения (регрессии), чтобы ошибка была минимальной. Можно минимизировать сумму абсолютных отклонений (ошибок):

$$S = \sum_{i=1}^{N} |\Delta_i| \to \min$$

или минимизировать сумму кубических ошибок (метод наименьших кубов):

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left|\Delta_i^3\right| \to \min$$

или, наконец, минимизировать наибольшую абсолютную ошибку:

$$\min \max_i \left|\Delta_i\right|.$$

Однако наиболее оптимальной является оценка ошибки по методу наименьших квадратов:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 \to \min$$

Метод наименьших квадратов обладает тем замечательным свойством, что число нормальных уравнений равно числу неизвестных параметров. Приведенное выше уравнение параболы второго порядка имеет три неизвестных параметра a_0, a_1 и a_2. Минимизируя сумму

$$S = \sum_{i=1}^{N} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right)^2 \to \min,$$

мы получим три уравнения.

Для нахождения значений неизвестных параметров необходимо приравнять частные производные указанной суммы по этим параметрам к нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = -2\sum\left(y - a_0 - a_1 x - a_2 x^2\right) = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = -2\sum\left(y - a_0 - a_1 x - a_2 x^2\right) \cdot x = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = -2\sum\left(y - a_0 - a_1 x - a_2 x^2\right) \cdot x^2 = 0.$$

Проделав простейшие преобразования, получим систему из трех уравнений, которую называют системой нормальных уравнений:

$$\begin{cases} Na_0 + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 = \sum y; \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 = \sum yx; \\ a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 = \sum yx^2. \end{cases}$$

Решив систему, найдем значения a_0, a_1 и a_2 и получим уравнение регрессии. Вычислим по уравнению регрессии теоретические значения $\bar{y}_x$ и сравним их с данными наблюдения, рассчитав так называемую остаточную сумму квадратов (табл. 2.8).

Таблица 2.8.

Номер наблюдения	Значения y по данным наблюдения	Значения y по данным уравнений регрессии	$\Delta_i = y_i - \bar{y}_{x_i}$	Δ_i^2
1	y_1	$\bar{y}_{x_1}$	Δ_1	Δ_1^2
2	y_2	$\bar{y}_{x_2}$	Δ_2	Δ_2^2
...	...	...	...	...
N	y_N	$\bar{y}_{x_N}$	Δ_N	Δ_N^2
				$\sum \Delta_i^2$

Остаточная сумма квадратов должна совпадать с минимальной возможной величиной, рассчитанной по методу наименьших квадратов.

Рассмотрим случай, когда исследуемая величина (показатель) y зависит от многих других величин $x_1, x_2, ..., x_n$. В случае когда зависимость линейная, связь между величинами описывается уравнением:

$$\bar{y}_{1,2,...,n} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n,$$

следовательно, при методе наименьших квадратов минимизируется выражение:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left(\bar{y}_{1,2,\ldots,n} - a_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - \ldots - a_n x_n \right)^2 \to \min.$$

Поочередно приравниваются к нулю частные производные по параметрам a_0, a_1, a_2,…, a_n, т. е.

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \ldots; \quad \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0.$$

Например, по параметру a_1:

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum 2\left(y - a_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 - \ldots - a_n x_n\right)\left(-x_1\right) = 0.$$

Отсюда

$$-2\sum y x_1 + 2a_0 \sum x_1 + 2a_1 \sum x_1^2 + 2a_2 \sum x_1 x_2 + \ldots + 2a_n \sum x_1 x_n = 0,$$

или

$$a_0 \sum x_1 + a_1 \sum x_1^2 + a_2 \sum x_1 x_2 + \ldots + a_n \sum x_1 x_n = \sum y x_1 .$$

В результате таких преобразований по всем параметрам a_i получаем систему из n нормальных уравнений с n неизвестными (по числу параметров):

$$\begin{cases} N a_0 + a_1 \sum x_1 + a_2 \sum x_2 + \ldots + a_n \sum x_n = \sum y; \\ a_0 \sum x_1 + a_1 \sum x_1^2 + a_2 \sum x_1 x_2 + \ldots + a_n \sum x_1 x_n = \sum y x_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 \sum x_n + a_1 \sum x_1 x_n + a_2 \sum x_2 x_n + \ldots + a_n \sum x_n^2 = \sum y x_n. \end{cases}$$

Метод наименьших квадратов даже при сравнительно небольшом числе наблюдений приводит к получению достаточных оценок. Оценки могут быть точечными и интервальными. Точечные оценки обладают следующими свойствами [13, 23]:

1. Несмещенности. При большом числе наблюдений с одинаковыми объемами выборки среднее значение оцениваемого параметра должно стремиться к своему истинному значению в гипотетической совокупности:

$$\bar{y}_{1,2\ldots n} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to y$$

Если этого не происходит, то оценки будут смещенными. Смещение может быть объяснено ошибками наблюдения и прежде всего систематическими.

2. Эффективности. При анализе регрессий может сложиться такая ситуация, при которой будут получены не одна, а несколько несмещенных оценок. В этом случае выбирают оценку, которая обладает наименьшей дисперсией. Такую оценку называют эффективной.

3. Состоятельности. Если при оценивании какого-либо параметра точность оценки при увеличении объема выборки возрастает, то считают, что эта оценка является состоятельной. Предельной точности эта оценка достигает тогда, когда ее численное значение совпадает с оцениваемым параметром (практически этого никогда не бывает).

Однако любая оценка истинного значения параметра по выборочным данным может быть произведена только с определенной степенью достоверности. Степень достоверности определяется путем построения

МНК может быть использован и в тех случаях, когда имеются данные только косвенных наблюдений, являющиеся функциями многих неизвестных. Метод наименьших квадратов получил широкое распространение не только как вычислительный прием, с помощью которого определяются параметры различного вида уравнений, но и стал математической основой современного регрессионного анализа, являющегося важнейшим методом изучения взаимосвязей между социально-экономическими явлениями.

Регрессионный анализ, как любой статистический метод исследования, может быть применим только при определенных условиях. Эти условия следующие:

- все величины (показатели) должны подчиняться нормальному закону распределения, их совместные распределения также должны быть нормальными, отдельные наблюдения должны быть независимыми, т.е. результаты, получен-

ные в i-м наблюдении, не должны быть связаны с предыдущими и не должны содержать никакой информации о последующих наблюдениях и не влиять на них; дисперсия y должна все время оставаться постоянной, при изменении величины y и при изменении значений факторных признаков;

- уравнение регрессии, аппроксимирующее эмпирические данные, должно быть линейным относительно своих параметров.

Типично линейным является следующее уравнение регрессии:

$$\bar{y}_{1,2,\ldots,n} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n .$$

Факторные признаки $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ могут быть представлены в уравнении нелинейно, например:

$$\bar{y}_{1,2,\ldots,n} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^3 + \ldots + a_n x_n^n$$

Однако это уравнение относительно параметров линейно.

Нарушение перечисленных условий может привести к тому, что уравнение регрессии не будет адекватно отражать исследуемый процесс.

В случае если тенденция имеет вид показательной функции

$$Y_t = a_0 a_1^t$$

логарифмы параметров функции оцениваются с помощью метода наименьших квадратов:

$$\begin{cases} N \ln a_0 + \ln a_1 \sum t = \sum \ln y, \\ \ln a_0 \sum t + \ln a_1 \sum t^2 = \sum t \ln y. \end{cases}$$

Корни приведенных систем нормальных уравнений являются оценками параметров функций сглаживания.

Часто по начальным данным невозможно решить вопрос о том, какая функция является наиболее подходящей для представления тенденции развития ряда динамики. В таких случаях можно пользоваться двумя способами определения формы функции:

1. Выбор функции методом минимума среднеквадратической ошибки.

2. Применение дисперсионного анализа.

Первый способ заключается в следующем. На основе логического анализа и личного опыта исследователя выбирают ряд различных функций и оценивают их параметры. После этого определяется среднеквадратическая ошибка для каждой функции по следующей формуле:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{N}\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2}{N-k-1}},$$

где Y_t - значения ряда динамики; $\hat{Y}_t$ - сглаженные значения ряда динамики; k - число параметров функции (не включая свободный член).

Функция, которой соответствует минимальная среднеквадратическая ошибка, является наиболее подходящей.

Следует отметить, что описанный метод дает сравнимые результаты лишь при равном числе параметров уравнений.

Второй способ состоит в сравнении дисперсий. Общую вариацию исследуемого ряда динамики можно разделит на две части: вариация вследствие тенденции и случайная вариация или $V = V_1 + V_2$. Общая вариация определяется по формуле:

$$V = \sum_{t=1}^{N}\left(Y_t - \bar{Y}\right)^2,$$

где $\bar{Y}$ - средний уровень ряда динамики.

Случайная вариация (или вариация вокруг тенденции вызванная случайными обстоятельствами) определяется по формуле:

$$V_2 = \sum_{t=1}^{N}\left(Y_t - \hat{Y}_t\right)^2.$$

Вариация вследствие тенденции может быть определена как разница общей и случайной вариаций:

$$V_1 = V - V_2.$$

Степени свободы при определении соответствующей дисперсий следующие:

1. Число степеней свободы для дисперсии вследствие тенденции на единицу меньше числа параметров уравнения сглаживания.

2. Число степеней свободы для случайной дисперсии равно разнице числа уровней ряда динамики и числа параметров уравнения сглаживания.

3. Число степеней свободы для общей дисперсии единицу меньше числа уровней ряда динамики.

Для линейной функции дисперсии исчисляются следующим образом:

$$S^2 = \frac{V}{N-1};$$

$$S_1^2 = V_1;$$

$$S_2^2 = \frac{V_2}{N-2}.$$

После определения дисперсий (необходимо лишь определение дисперсии вследствие тенденции и случайной дисперсии) исчисляется эмпирическое значение F-критерия:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

Полученную величину сравнивают с табличным значением, определенным соответственно степеням свободы и вероятности α. Если выполняется неравенство $F > F_\alpha$, то анализируемое уравнение подходит для представления тенденции. При этом начать анализ следует с самого простого уравнения, соответствующего логическим соображениям, постепенно переходя к более сложным, пока не определено подходящее уравнение.

После определения тренда вычитают значения тренда из соответствующих уровней первоначального ряда динамики и в дальнейшем анализе пользуются отклонениями от тренда:

$$Z(t) = Y(t) - \hat{Y}(t).$$

Отклонения $Z(t)$ имеют нулевую среднюю арифметическую и дисперсию σ^2.

Если данные не содержат какую-нибудь явную, ярко выраженную тенденцию, то необходимо начинать определение тенденции с самого простого полинома – прямой линии. Следовательно, необходимо определить параметры уравнений

$$\hat{Y}(t) = a_0 + a_1 t \text{ и } \hat{Y}'(t) = a_0' + a_1' t$$

Система нормальных уравнений для прямой имеет вид

$$\begin{cases} Na_0 + a_1 \sum t = \sum y \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum ty \end{cases}$$

Пример 1. Определим тенденции рядов динамики валового сбора и урожайности пшеницы в Республики Узбекистан. (Гипотетические данные) (табл. 2.9).

Решая систему, получим корни уравнений, являющиеся искомыми параметрами:

$$a_0 = \frac{\sum y}{N} = \frac{1449,4}{19} = 76,284;$$

$$a_1 = \frac{\sum yt}{\sum t^2} = \frac{1407,3}{570} = 2,469;$$

$$a_0' = \frac{\sum y'}{N} = \frac{330,7}{19} = 17,405;$$

$$a_1' = \frac{\sum y't}{\sum t^2} = \frac{328,3}{570} = 0,576.$$

Линейная тенденция ряда динамики валового сбора пшеницы выражается уравнением

$$\hat{y}_t = 76,284 + 2,469t$$

и линейная тенденция урожайности пшеницы - уравнением

$$\hat{y}_t' = 17,405 + 0,576t.$$

Таблица 2.9.

Время	Валовой сбор, млн. т. y_t	Урожайность, ц/га y'_t	t	t^2	yt	$y't$	$\hat{y}_t$	$\hat{y}'_t$
1	47,3	13,5	-9	81	-425,7	-121,5	54,06	12,22
2	67,4	11,6	-8	64	-539,2	-92,8	56,53	12,80
3	58,1	14,7	-7	49	-406,7	-102,9	59,00	13,37
4	76,6	16,2	-6	36	-159,6	-97,2	61,47	13,95
5	69,1	15,2	-5	25	-345,5	-76,0	63,94	14,53
6	64,3	15,1	-4	16	-257,2	-60,4	66,41	15,10
7	66,5	16,9	-3	9	-199,5	-50,7	68,88	15,68
8	70,8	16,8	-2	4	-141,6	-33,6	71,35	16,25
9	49,7	12,9	-1	1	-49,7	-12,9	73,82	16,83
10	74,4	13,8	0	0	0	0	76,28	17,41
11	59,7	16,1	1	1	59,7	16,1	78,75	17,98
12	100,5	20,4	2	4	201,0	40,8	81,22	18,56
13	77,4	17,8	3	9	232,2	53,4	83,69	19,13
14	93,4	18,3	4	16	373,6	73,2	86,16	19,71
15	79,9	18,9	5	25	399,5	94,5	88,63	20,29
16	99,7	22,8	6	36	598,2	136,8	91,10	20,86
17	98,8	23,1	7	49	691,6	161,7	93,57	21,44
18	86,0	19,6	8	64	688,0	156,8	96,04	22,01
19	109,8	27,0	9	81	988,2	243,0	98,51	22,59
Итого	1449,4	330,7	0	570,0	1407,3	328,3	1449,40	330,70

Проверяем пригодность линейной функции в качестве тренда ряда динамики валового сбора озимой пшеницы. Для этого определим дисперсии

$$S^2 = \frac{V}{N-1} = \frac{5478,73}{18} = 304,37;$$

$$S_1^2 = V_1 = 3230,42;$$

$$S_2^2 = \frac{V_2}{N-2} = \frac{2248,31}{17} = 132,25.$$

Аналогично проверяем пригодность линейной функции в качестве тренда ряда динамики урожайности пшеницы:

$$S^2 = \frac{V}{N-1} = \frac{274,09}{18} = 15,23;$$

$$S_1^2 = V_1 = 189,08;$$

$$S_2^2 = \frac{V_2}{N-2} = \frac{85,01}{17} = 5,00;$$

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{189,08}{5,00} = 37,816.$$

Так как F=37,816 и $F_{0,99}$=8,40, можно утверждать с 99%-ной вероятностью, что линейную функцию можно применять для характеристики тенденции развития ряда динамики урожайности пшеницы. Полученный результат совпадает с общим выводом примера 1.

Параметры a_1 и a_1' характеризуют скорость изменения функций. Следовательно, можно сказать, что в течение исследуемого периода валовой сбор пшеницы увеличивался в среднем на 2,469 млн. т в год, а урожайность пшеницы - на 0,576 ц/га в год.

2.5. Применение метода наименьших квадратов при обработке связанных рядов динамики

Многомерные временные ряды, показывающие зависимость результативного признака от одного или нескольких факторных, называют связанными рядами динамики. Применение метода наименьших квадратов для обработки рядов динамики не требует выдвижения никаких предположений о законах распределения исходных данных. Однако при использовании метода наименьших квадратов к обработке связанных рядов следует учитывать особенности динамики социально-экономических явлений.

Эти особенности состоят в том, что между предыдущими и последующими уровнями рядов динамики имеется определенная связь, которая носит название автокорреляции (авторегрессии). При обработке одномерных рядов динамики наличие автокорреляции лишь способствует более полному и четкому выявлению тенденции развития рассматриваемого социально-экономического явления во времени. При обработке же методом наименьших квадратов связанных рядов динамики наличие автокорреляции отрицательно сказывается на некоторых оценках и прежде всего па величине среднеквадратических ошибок коэффициентов регрессии. А это в свою очередь приводит к искажению значений доверительных интервалов и затрудняет проверку их значимости.

Статистика выработала несколько способов определения наличия автокорреляции в динамических рядах. Один из наиболее простых основан на использовании линейного коэффициента корреляции r. Величина r показывает тесноту связи между рядом исходных уровней y_t и рядом тех же уровней, сдвинутых на один период времени, т.е. y_{t+1}. Она рассчитывается по следующей формуле;

$$r_t = \frac{\overline{y_t \cdot y_{t+1}} - \overline{y_t} \cdot \overline{y_{t+1}}}{\sqrt{\sigma^2_{y_t} \cdot \sigma^2_{y_{t+1}}}}$$

где

$$\sigma^2_{y_t} = \frac{\sum (y_{ti} - \bar{y})^2}{N}$$

Пример 2. Рассчитаем коэффициент корреляции по данным о производстве стали в республике (табл. 2.10).

По данным табл. 2.10 и по формулам подсчитаем

$$r_t = 0{,}424.$$

Для проверки значимости автокорреляции применяются критерии Дарбина-Уотсона (*DW*) или Неймана (*K*).

Таблица 2.10.

t	Производство стали, млн.т. y_t	y_{t+1}	$y_t \cdot y_{t+1}$	y_t^2	y_{t+1}^2
1	47	51	2397	2209	2601
2	51	55	2805	2601	3025
3	55	59	3245	3025	3481
4	59	62	3658	3481	3844
5	62	66	4092	3844	4356
6	66	70	4620	4356	4900
7	70	75	5250	4900	5625
8	75	79	5925	5625	6241
9	79	82	6478	6241	6724
10	82	86	7052	6724	7396
11	86	89	7654	7396	7921
12	89	92	8188	7921	8464
13	92	96	8832	8464	9216
14	96	100	9600	9216	10000
15	100	103	10300	10000	10609
16	103			10609	
Итого	1212	1165	90096	96612	94403

Критерий Дарбина-Уотсона вычисляется по формуле

$$DW = \frac{\sum V_t \cdot V_{t+1}}{\sum V_t^2}$$

а критерий Неймана

$$K = \frac{\dfrac{\sum (V_{t+1} - V_t)^2}{N-1}}{\dfrac{\sum V_t^2}{N}},$$

где $V_t = y_i - \bar{y}_t$.

Теоретически применение этих критериев основано на том, что в динамических рядах как сами наблюдения, так и отклонения от них распределяются в хронологическом порядке. При числе наблюдений N число значений V_{t+1} будет равно N-1.

При условии, что отклонения уровней от тенденции (остатки) случайны, значения DW, лежащие в интервале 0-4, всегда будут находиться ближе к 2. Если автокорреляция положительная, то $D<2$, если отрицательная, то $2 \le DW \le 4$. Следовательно, оценки, полученные по критерию, являются не точечными, а интервальными, их значения для трех уровней значимости $\alpha = 0{,}01$; $\alpha = 0{,}025$ и $\alpha = 0{,}05$ с учетом числа наблюдений даны в специальных таблицах.

Критерий Неймана дает только точечную оценку. В таблицах значения K даны для положительной (K_1) и для отрицательной (K_2) автокорреляции. Если полученная в результате обработки динамического ряда величина K будет иметь значение ниже табличного, то автокорреляция положительная, если выше - отрицательная. Если же полученное значение критерия лежит в интервале K_1- K_2, то автокорреляция от-

Пример 3. Проверим значимость полученного коэффициента корреляции r_t вычисленного по данным о производстве стали (см. табл. 2.11). Рассчитаем критерий Дарбина-Уотсона. Для этого составим систему нормальных уравнений, найдем a_0 и a_1 и построим уравнение регрессии (вспомогательные расчетные данные приведены в табл. 2.11).

$$\begin{cases} 16\,a_0 = 1212\,; \\ 1360\,a_1 = 2554\,. \end{cases}$$

$$a_0 = 75{,}8; \quad a_1 = 1{,}88.$$

$$\bar{y}_t = 75{,}8 + 1{,}88\,t\,.$$

Величина критерия Дарбина-Уотсона $D = \dfrac{3{,}65}{5{,}77} = 0{,}63$,

т.е. $D<2$ и это подтверждает наличие в исходном динамическом ряду положительной автокорреляции.

Величина критерия Неймана

$$K = \frac{5{,}07 : 15}{6{,}78 : 16} \approx 0{,}8\,.$$

Таблица 2.11.

Производство стали, млн. т. y_t	t	t^2	yt	$\bar{y}_t$	V_t	V_{t+1}	$V_t \cdot V_{t+1}$	V_t^2	$V_{t+1} - V_t$	$(V_{t+1} - V_t)^2$
47	-15	225	-705	47,6	-0,6	-0,4	0,24	0,36	0,2	0,04
51	-13	169	-663	51,4	-0,4	-0,1	0,04	0,16	0,3	0,09
55	-11	121	-605	55,1	-0,1	0,1	-0,01	0,01	0,2	0,04
59	-9	81	-531	58,9	0,1	-0,6	-0,06	0,01	-0,7	0,49
62	-7	49	-434	62,6	-0,6	-0,4	0,24	0,36	0,2	0,04
66	-5	25	-330	66,4	-0,4	-0,2	0,08	0,16	0,2	0,04
70	-3	9	-210	70,2	-0,2	1,1	-0,22	0,04	1,3	1,69
75	-1	1	-75	73,9	1,1	1,3	1,43	1,21	0,2	0,04
79	1	1	79	77,7	1,3	0,6	0,78	1,69	-0,7	0,49
82	3	9	246	81,4	0,6	0,8	0,48	0,36	0,2	0,04
86	5	25	430	85,2	0,8	0	0	0,64	-0,8	0,64
89	7	49	623	89,0	0	-0,7	0	0	-0,7	0,49
92	9	81	828	92,7	-0,7	-0,5	0,35	0,49	0,2	0,04
96	11	121	1056	96,5	-0,5	-0,2	0,10	0,25	0,3	0,09
100	13	169	1300	100,2	-0,2	-1,0	0,2	0,04	-0,8	0,64
103	15	225	1545	104,0	-1,0			1,0	-	-
1212		1360	2554				3,65	6,78		5,07

Полученная величина критерия Неймана также подтверждает сделанные выводы о наличии в исследуемом ряду динамики положительной автокорреляции [8, 39].

Статистическая наука выработала несколько методов исключения автокорреляции: 1) метод Фриша-Воу – включение времени в качестве дополнительного фактора; 2) метод последовательных разностей; 3) метод авторегрессионных преобразований. Рассмотрим их.

1. По этому методу время вводится в систему связанных динамических рядов в явной форме, в качестве дополнительного фактора. Уровни исходных динамических рядов могут быть представлены показателями в любой форме, в том числе логарифмической, а время всегда вводится в линейной форме. Введение фактора времени снимает основную тенденцию развития всех явлений, представленных исследуемыми рядами динамики. Доказано, что введение времени аналогично использованию отклонений фактических данных от трендов.

Применение метода наименьших квадратов к обработке многомерных временных рядов не отличается от методологии его применения к обработке обычных статистических рядов. В рассматриваемом случае минимизируется следующее выражение:

$$S = \sum [y_i - f(x_1, x_2, ..., x_n, t)]^2 \to \min.$$

Пример 4. По данным о реализованной продукции и накладных расходах на реализацию (см. табл. 2.12) найти линейное уравнение связи и рассчитать неизвестные параметры.

Таблица 2.12.

Реализованная продукция, млн. сум, x	Накладные расходы, тыс сум y	t	xy	x^2	yt	t^2	xt	$\bar{y}_{xt}$
9	27	1	243	81	27	1	9	30,5
13	36	2	468	169	72	4	26	32,4
17	29	3	493	289	87	9	51	34,2
22	41	4	902	484	164	16	88	38,7
29	54	5	1566	841	270	25	145	48,3
36	71	6	2556	1296	426	36	216	58,0
44	50	7	2200	1936	350	49	308	70,3
51	81	8	4131	2601	648	64	408	79,9
60	98	9	5880	3600	882	81	540	94,8
281	487	45	18439	11297	2926	285	1791	487,1

Составим систему нормальных уравнений (см. табл. 2.12).

$$\begin{cases} Na_0 + a_1 \sum x + a_2 \sum t = \sum y; \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum xt = \sum yx; \\ a_0 \sum t + a_1 \sum xt + a_2 \sum t^2 = \sum yt. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a_0 + 281a_1 + 45a_2 = 487; \\ 281a_0 + 11297a_1 + 1791a_2 = 18439; \\ 45a_0 + 1791a_1 + 285a_2 = 2926. \end{cases}$$

Отсюда

$$a_0 = 15{,}63;\ a_1 = 2{,}61;\ a_2 = -8{,}60.$$

Следовательно,

$$\bar{y}_{xt} = 15{,}63 + 2{,}61x - 8{,}60t$$

2. При исключении автокорреляции методом последовательных разностей обработке методом наименьших квадратов подвергаются не сами уровни

$$y_1, y_2, ..., y_n; \quad x_1, x_2, ..., x_n,$$

а последовательные разности между ними:

$$\Delta y_1 = y_t - y_{t-1};$$

$$\Delta y_2 = y_{t-1} - y_{t-2};$$

$$\Delta y_3 = y_{t-2} - y_{t-3};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta y_k = y_{t-k} - y_{t-k-1},$$

и

$$\Delta x_1 = x_t - x_{t-1};$$

$$\Delta x_2 = x_{t-1} - x_{t-2};$$

$$\Delta x_3 = x_{t-2} - x_{t-3};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta x_k = x_{t-k} - x_{t-k-1},$$

При использовании этого метода исходят из предположения, что все разности между уровнями динамических ря-

дов, начиная с первой, будут содержать только случайную компоненту. Причем первые разности содержат случайную компоненту в линейной форме, вторые - случайную компоненту, описываемую параболой второго порядка, третьи - показательной функцией.

Уравнение регрессии между исследуемыми признаками Δy и Δx будет иметь следующий вид:

$$\Delta y = a_0 + a_1 \Delta x,$$

а система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} Na_0 + a_1 \sum \Delta x = \sum \Delta y; \\ a_0 \sum \Delta x + a_1 \sum (\Delta x)^2 = \sum \Delta y \Delta x. \end{cases}$$

Пример 5. По данным приведенного выше примера найдем уравнение связи, используя первые разности (так как связь между объемом реализованной продукции и накладными расходами предполагается линейной) (табл. 2.13).

Таблица 2.13.

t	Реализованная продукция, млн. сум, x	Накладные расходы, тыс. сум, y	Δx	Δy	$(\Delta x)^2$	$\Delta x \Delta y$	$\bar{y}_x$
1	9	27	-	-	-	-	11,9
2	13	36	4	9	16	36	16,5
3	17	29	4	-7	16	-28	21,1
4	22	41	5	12	25	60	26,8
5	29	54	7	13	49	91	34,9
6	36	71	7	17	49	119	42,9
7	44	50	8	-21	64	-168	51,1
8	51	81	7	31	49	217	60,2
9	60	98	9	17	81	153	70,5
Итого			51	71	349	480	

Составим систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} 8a_0 + 51a_1 = 71; \\ 51a_0 + 349a_1 = 480. \end{cases}$$

Отсюда

$$a_0 = 1{,}54;\ a_1 = 1{,}15.$$

Следовательно,

$$\bar{y}_{xt} = 1{,}54 + 1{,}15x.$$

3. Исключение автокорреляции методом авторегрессионных преобразований состоит в том, что определяют уравнение связи между отклонениями от тенденций двух связанных рядов динамики [18, 19]:

$$\begin{array}{ll} y_1 - \bar{y}_{t1} & x_1 - \bar{x}_{t1}; \\ y_2 - \bar{y}_{t2} & x_2 - \bar{x}_{t2}; \\ y_3 - \bar{y}_{t3} & x_3 - \bar{x}_{t3}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ y_n - \bar{y}_m & x_n - \bar{x}_m. \end{array};$$

В обоих рядах динамики исключают тенденцию, считая, что тенденции рядов по x и y описываются уравнениями прямых:

$$\bar{x}_t = a_0 + a_1 t;$$

$$\bar{y}_t = a_0 + a_1 t.$$

Полученные на основе этих уравнений значения $\bar{x}_{ti}$ и $\bar{y}_{ti}$ вычитаются из фактических значений уровней рядов x_i и y_i, а затем на основании случайных остатков осуществляется расчет уравнения регрессии.

В этом случае также получают уравнения регрессии, не искаженные влиянием автокорреляции.

Пример 6. Для нахождения уравнения регрессии воспользуемся теми же данными и проведем соответствующие расчеты.

Рассчитаем значения $x - \bar{x}_t$ (табл.2.14).

Таблица 2.14.

t	Реализованная продукция, млн. сум x	t	t^2	xt	$\bar{x}_t$	$x - \bar{x}_t$
1	9	-4	16	-36	5,4	3,6*
2	13	-3	9	-39	11,8	1,2
3	17	-2	4	-34	18,2	-1,2
4	22	-1	1	-22	24,8	-2,8
5	29	0	0	0	31,2	-2,2
6	36	1	1	36	37,8	-1,8
7	44	2	4	88	44,2	-0,2
8	51	3	9	153	50,6	0,4
9	60	4	16	240	57,0	3,0
Итого	281		60	386		

Рассчитаем значения $y - \bar{y}_t$ (табл. 2.15).

Таблица 2.15.

t	Накладные расходы, тыс. сум, y	t	t^2	yt	$\bar{y}_t$	$y - \bar{y}_t$
1	27	-4	16	-108	21,4	5,6
2	36	-3	9	-108	29,6	6,4
3	29	-2	4	-58	37,7	-8,7
4	41	-1	1	-41	45,9	-4,9
5	54	0	0	0	54,1	-0,1
6	71	1	1	71	62,3	8,7
7	50	2	4	100	70,5	-20,5
8	81	3	9	243	78,6	2,4
9	98	4	16	392	86,8	11,2
Итого	487			491		

Считая зависимость линейной, рассчитаем параметры уравнения связи между $\bar{x}_t$ и $\bar{y}_t$ (табл. 2.16).

Таблица 2.16.

t	$x-\bar{x}_t$	$y-\bar{y}_t$	$(x-\bar{x}_t)(y-\bar{y}_t)$	$(x-\bar{x}_t)^2$
1	3,6	5,6	20,16	12,96
2	1,2	6,4	7,68	1,44
3	-1,2	-8,7	10,44	1,44
4	-2,8	-4,9	13,72	7,84
5	-2,2	-0,1	0,22	4,84
6	-1,8	8,7	-15,66	3,24
7	-0,2	-20,5	4,10	0,04
8	0,4	2,4	-0,96	0,16
9	3,0	11,2	33,6	9,0
Итого			73,30	40,96

Проведя соответствующие расчеты, получим:

$$a_1 = 2{,}03;.$$

$$\bar{y}_x = 2{,}03x.$$

Для трех описанных выше примеров подсчитаны суммы квадратов отклонений. Они составляют:

1) для метода введения времени в качестве дополнительного фактора – 682,6;
2) для метода последовательных (первых) разностей – 2648,7;
3) для метода авторегрессионных преобразований – 2876,9.

Наименьшая сумма квадратов получена при использовании первого метода. Следовательно, введение времени в качестве дополнительной переменной является наиболее действенным способом обработки связанных рядов динамики (во всяком случае, при линейной связи между исследуемыми рядами).

2.6. Обобщенный метод наименьших квадратов

При нарушении гомоскедастичности и наличии автокорреляции ошибок рекомендуется традиционный метод наименьших квадратов (известный в английской терминологии как метод OLS – Ordinary Least Squared) заменять обобщен-

ным методом, т.е. методом GLS (Generalized Least Squared). Обобщенный метод наименьших квадратов применяется к преобразованным данным и позволяет получать оценки, которые обладают не только свойством несмещенности, но и имеют меньшие выборочные дисперсии. Специфика обобщенного МНК применительно к корректировке данных при автокорреляции остатков будет рассмотрена далее. Здесь остановимся на использовании обобщенного МНК для корректировки гетероскедастичности.

Как и раньше, будем предполагать, что среднее значение остаточных величин равно нулю. А вот дисперсия их не остается неизменной для разных значений фактора, а пропорциональна величине K_i т. е.

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 \cdot K_i,$$

где σ_i^2 - дисперсия ошибки при конкретном i-й значении фактора;

σ^2 - постоянная дисперсия ошибки при соблюдении предпосылки о гомоскедастичности остатков;

K_i - коэффициент пропорциональности, меняющийся с изменением величины фактора, что и обусловливает неоднородность дисперсии.

При этом предполагается, что σ^2 неизвестна, а в отношении величины K выдвигаются определенные гипотезы, характеризующие структуру гетероскедастичности. В общем виде для уравнения

$$y_i = a + b \cdot x_i + \varepsilon_i \text{ при } \sigma_i^2 = \sigma^2 \cdot K_i$$

модель примет вид: $y_i = \alpha + \beta_i \cdot x_i + \sqrt{K_i} \cdot \varepsilon_i$

В ней остаточные величины гетероскедастичны. Предполагая в них отсутствие автокорреляции, можно перейти к уравнению с гомоскедастичными остатками, поделив все переменные, зафиксированные в ходе i-го наблюдения на $\sqrt{K_i}$.

Тогда дисперсия остатков будет величиной постоянной, т.е. $\sigma_{ei}^2 = \sigma^2$.

Иными словами, от регрессии y по x мы перейдем к регрессии на новых переменных: $y/\sqrt{K}$ и $x/\sqrt{K}$.

Уравнение регрессии примет вид:

$$\frac{y_i}{\sqrt{K_i}} = \frac{\alpha}{\sqrt{K_i}} + \beta \cdot \frac{x_i}{\sqrt{K_i}} + \varepsilon_i.$$

Исходные данные для данного уравнения будут иметь вид:

$$y = \begin{vmatrix} \frac{y_1}{\sqrt{K_1}} \\ \frac{y_2}{\sqrt{K_2}} \\ \cdots\cdots \\ \frac{y_n}{\sqrt{K_n}} \end{vmatrix}; \qquad x = \begin{vmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{K_1}} \\ \frac{x_2}{\sqrt{K_2}} \\ \cdots\cdots \\ \frac{x_n}{\sqrt{K_n}} \end{vmatrix};$$

По отношению к обычной регрессии уравнение с новыми, преобразованными переменными представляет собой взвешенную регрессию, в которой переменные y и x взяты с весами $1/\sqrt{K}$.

Оценка параметров нового уравнения с преобразованными переменными приводит к взвешенному методу наименьших квадратов, для которого необходимо минимизировать сумму квадратов отклонений вида

$$S = \sum \frac{1}{K_i} \cdot (y_i - a - b \cdot x_i)^2.$$

Соответственно получим следующую систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \sum \frac{y_i}{K_i} = a \cdot \sum \frac{1}{K_i} + b \cdot \sum \frac{x_i}{K_i}; \\ \sum \frac{y_i \cdot x_i}{K_i} = a \cdot \sum \frac{x_i}{K_i} + b \cdot \sum \frac{x_i^2}{K_i}. \end{cases}$$

Если преобразованные переменные x и y взять в отклонениях от средних уровней, то коэффициент регрессии b можно определить как

$$b = \frac{\sum \frac{1}{K} \cdot x \cdot y}{\sum \frac{1}{K} \cdot x^2}.$$

При обычном применении метода наименьших квадратов к уравнению линейной регрессии для переменных в отклонениях от средних уровней коэффициент регрессии b определяется по формуле

$$b = \frac{\sum (x \cdot y)}{\sum x^2}.$$

Как видим, при использовании обобщенного МНК с целью корректировки гетероскедастичности коэффициент регрессии b представляет собой взвешенную величину по отношению к обычному МНК с весами $1/K$.

Аналогичный подход возможен не только для уравнения парной, но и для множественной регрессии. Предположим, что рассматривается модель вида

$$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \varepsilon,$$

для которой дисперсия остаточных величин оказалась пропорциональна K_i^2. K_i - представляет собой коэффициент пропорциональности, принимающий различные значения для соответствующих i значений факторов x_1 и x_2. Ввиду того, что

$$\sigma_{ві}^2 = \sigma^2 \cdot K_i^2,$$

рассматриваемая модель примет вид

$$y = a + b_1 \cdot x_{1i} + b_2 \cdot x_{2i} + K_i \cdot \varepsilon_i,$$

где ошибки гетероскедастичны.

Для того чтобы получить уравнение, где остатки ε_i гомоскедастичны, перейдем к новым преобразованным переменным, разделив все члены исходного уравнения на коэффициент пропорциональности K. Уравнение с преобразованными переменными составит

$$\frac{y_i}{K_i} = \frac{a}{K_i} + b_1 \cdot \frac{x_{1i}}{K_i} + b_2 \cdot \frac{x_{2i}}{K_i} + \varepsilon_i.$$

Это уравнение не содержит свободного члена. Вместе с тем, найдя переменные в новом преобразованном виде и применяя обычный МНК к ним, получим иную спецификацию модели:

$$\frac{y_i}{K_i} = A + + b_1 \cdot \frac{x_{1i}}{K_i} + b_2 \cdot \frac{x_{2i}}{K_i} + \varepsilon_i.$$

Параметры такой модели зависят от концепции, **принятой** для коэффициента пропорциональности K_i. В **эконометрических** исследованиях довольно часто **выдвигается** гипотеза, что остатки ε_i, пропорциональны **значениям** фактора. Так, если в уравнении

$$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + \ldots + b_p \cdot x_p + E,$$

предположить, что $E = \varepsilon \cdot x_1$, т. е. K=x_1 и $\sigma_{ei}^2 = \sigma^2 \cdot x_1^2$, то обобщенный МНК предполагает оценку параметров следующего трансформированного уравнения:

$$\frac{y}{x_1} = b_1 + b_2 \cdot \frac{x_2}{x_1} + \ldots + b_p \cdot \frac{x_p}{x_1} + \varepsilon.$$

Если предположить, что ошибки пропорциональны x_p, то модель примет вид:

$$\frac{y}{x_p} = b_p + b_2 \cdot \frac{x_2}{x_p} + \ldots + b_{p-1} \cdot \frac{x_{p-1}}{x_p} + \varepsilon.$$

Применение в этом случае обобщенного МНК приводит к тому, что наблюдения с меньшими значениями преобразованных переменных x/K имеют при определении параметров регрессии относительно больший вес, чем с первоначальными переменными. Вместе с тем следует иметь в виду, что новые преобразованные переменные получают новое экономическое содержание и их регрессия имеет иной смысл, чем регрессия по исходным данным.

Пример 7. Пусть y - издержки производства, x_1 - объем продукции, x_2 - основные производственные фонды, x_3 - численность работников, тогда уравнение

$$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3 + E$$

является моделью издержек производства с объемными факторами. Предполагая, что σ_u^2 пропорциональна квадрату численности работников x_3, мы получим в качестве результативного признака затраты на одного работника (y/x_3), а в качестве факторов следующие показатели: производительность труда (x_1/x_3) и фондовооруженность труда (x_2/x_3). Соответственно трансформированная модель примет вид

$$\frac{y}{x_3} = b_3 + b_1 \cdot \frac{x_1}{x_3} + b_2 \cdot \frac{x_2}{x_3} + \varepsilon,$$

где параметры b_1, b_2, b_3 численно не совпадают с аналогичными параметрами предыдущей модели. Кроме того, коэффициенты регрессии меняют экономическое содержание: из показателей силы связи, характеризующих среднее абсолютное изменение издержек производства с изменением абсолютной величины соответствующего фактора на единицу, они фиксируют при обобщенном МНК среднее изменение затрат на работника; с изменением производительности труда на единицу при неизменном уровне фондовооруженности труда; и с изменением фондовооруженности труда на единицу при неизменном уровне производительности труда.

Если предположить, что в модели с первоначальными переменными дисперсия остатков пропорциональна квадрату объема продукции, $\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma^2 \cdot x_1^2$, можно перейти к уравнению регрессии вида

$$\frac{y}{x_1} = b_1 + b_2 \cdot \frac{x_2}{x_1} + b_3 \cdot \frac{x_3}{x_1} + \varepsilon.$$

В нем новые переменные: y/x_1 - затраты на единицу (или на 1 сум. продукции), x_2/x_1 - фондоемкость продукции, x_3/x_1 - трудоемкость продукции.

Гипотеза о пропорциональности остатков величине фактора может иметь реальное основание: при обработке недостаточно однородной совокупности, включающей как крупные, так и мелкие предприятия, большим объемным значениям фактора может соответствовать большая дисперсия результативного признака и большая дисперсия остаточных величин.

При наличии одной объясняющей переменной гипотеза $\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma^2 \cdot x^2$ трансформирует линейное уравнение

$$y = a + b \cdot x + \varepsilon \cdot x$$

в уравнение

$$\frac{y}{x} = b + \frac{a}{x} + \varepsilon,$$

в котором параметры a и b поменялись местами, константа стала коэффициентом наклона линии регрессии, а коэффициент регрессии - свободным членом.

Пример 8. Рассматривая зависимость сбережений y от дохода x, по первоначальным данным было получено уравнение регрессии

$$y = -1{,}081 + 0{,}1178 \cdot x.$$

Применяя обобщенный МНК к данной модели в предположении, что ошибки пропорциональны доходу, было получено уравнение для преобразованных данных:

$$\frac{y}{x} = 0{,}1026 - 0{,}8538 \cdot \frac{1}{x}.$$

Коэффициент регрессии первого уравнения сравнивают со свободным членом второго уравнения, т.е. 0,1178 и 0,1026 - оценки параметра *b* зависимости сбережений от дохода.

Переход к относительным величинам существенно снижает вариацию фактора и соответственно уменьшает дисперсию ошибки. Он представляет собой наиболее простой случай учета гетероскедастичности в регрессионных моделях с помощью обобщенного МНК. Процесс перехода к относительным величинам может быть осложнен выдвижением иных гипотез о пропорциональности ошибок относительно включенных в модель факторов. Например, $\ln \sigma_{si}^2 = \ln \sigma^2 + b \cdot \ln x + v$, т.е. рассматривается характер взаимосвязи $\ln \varepsilon_i^2$ от $\ln x$. Использование той или иной гипотезы предполагает специальные исследования остаточных величин для соответствующих регрессионных моделей. Применение обобщенного МНК позволяет получить оценки параметров

ГЛАВА 3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

3.1. Общие замечания

Корреляционный анализ является необходимым углублением метода наименьших квадратов и регрессионного анализа. В построенном с помощью метода наименьших квадратов уравнении регрессии отсутствует указание на степень взаимосвязанности результативного признака с факторными. Корреляционный анализ позволяет определить тесноту связи между исследуемыми признаками, оценить разброс исходных данных около линии регрессии, «качество» уравнения регрессии, правильность выбора типа

Под корреляционным анализом понимается совокупность методов, которые можно подразделить на две большие группы:

Первая группа – параметрические или собственно-корреляционные методы измерения тесноты связей; они подразумевают вычисление линейного коэффициента корреляции, множественного коэффициента корреляции, частного коэффициента корреляции, корреляционного отношения. Применение этих показателей требует соблюдения некоторых условий: 1) исследуемые явления (показатели) должны быть распределены по нормальному или близкому к нормальному закону распределения; 2) отдельные наблюдения должны быть независимы.

Вторая группа методов – непараметрические, применение которых в исследовании не требует соблюдения каких-либо условий. Эти методы включают расчеты различных коэффициентов, показывающих тесноту связи. Их применение оправдывается в тех случаях, когда собственно – корреляционные методы измерения связей являются недостаточными, например при определении тесноты связи между качественными признаками, при обобщении экспертных оценок и т. д.

Непараметрические методы оценки связи проще. Они требуют для расчетов несравненно меньше времени, чем собственно-корреляционные. Кроме того, они не требуют никаких предположений о законах распределения исходных статистических данных, так как при их использовании исследователь оперирует не самими значениями признаков, а их частотами, знаками, рангами и т. д.

3.2. Корреляционные методы измерения тесноты связи

При наличии связи между двумя признаками справедливо следующее неравенство:

$$D(x+y) \neq Dx + Dy,$$

т.е. дисперсия суммы признаков $D(x+y)$ отличается от суммы дисперсий этих признаков $(Dx + Dy)$ на величину, характеризующую корреляционную связь между признаками x, y.

Необходимым и достаточным условием наличия корреляционной связи является неравенство:

$$M[(x - Mx)(y - My)] \neq 0.$$

Величина в левой части неравенства носит название корреляционного момента. Корреляционный момент имеет ту же размерность, что и величины x, y. На практике обычно используется безразмерная величина, которая называется линейным коэффициентом корреляции.

$$r = \frac{M[(x - Mx)(y - My)]}{\sqrt{Dx \cdot Dy}},$$

которая называется линейным коэффициентом корреляции.

Линейный коэффициент корреляции имеет очень большое значение, когда речь идет о нормальном распределении. Легко доказывается, что условие $r=0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы величины x и y были независимы. При этом условии и коэффициенты регрессии a_{yx}, a_{xy}

также обращаются в нуль, а прямые регрессии y по x и x по y оказываются взаимноперпендикулярными (параллельными одна оси абсцисс, а вторая оси ординат).

Если же r=1, то это означает, что все точки (x, y) находятся на прямой и зависимость между x и y является функциональной. Прямые регрессии y по x и x по y в этом случае совпадают. Указанное соображение распространяется также на случай нормального распределения трех и более величин.

Линейный коэффициент корреляции изменяется в пределах $-1 \le r \le 1$. В общем виде формулу, по которой он определяется, можно записать так:

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

если $\overline{xy} > \bar{x} \cdot \bar{y}$, то значение r положительно, если $\overline{xy} < \bar{x} \cdot \bar{y}$, то оно отрицательно.

Среднеквадратическая ошибка линейного коэффициента корреляции вычисляется по формуле

$$\sigma_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{N-1}},$$

где N - число наблюдений. На основании величины ошибки строится доверительный интервал для r:

$$r - t\sigma_r \le r \le r + t\sigma_r.$$

Значимость линейного коэффициента корреляции можно проверить по t-критерию:

$$t = \sqrt{\frac{r^2}{1 - r^2}(N-2)}.$$

Этот критерий применяется для случаев, когда N<50.

Пример 1. По данным о зависимости стоимости основных производственных фондов от объема валовой продукции рассчитаем линейный коэффициент корреляции, его ошибку и определим его значимость:

$$r = \frac{\overline{x \cdot y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\frac{\sum yx}{N} - \frac{\sum x}{N} \cdot \frac{\sum y}{N}}{\sqrt{\left[\frac{\sum x^2}{N} - \left(\frac{\sum x}{N}\right)^2\right] \cdot \left[\frac{\sum y^2}{N} - \left(\frac{\sum y}{N}\right)^2\right]}} =$$

$$= \frac{\frac{2907}{10} - \frac{55}{10} \cdot \frac{445}{10}}{\sqrt{\left[\frac{385}{10} - \left(\frac{55}{10}\right)^2\right] \cdot \left[\frac{22487}{10} - \left(\frac{445}{10}\right)^2\right]}} = 0{,}97;$$

$$\sigma_r = \frac{1 - 0{,}95}{\sqrt{10-1}} = \frac{0{,}05}{3} = 0{,}017$$

С вероятностью P=0,9545 строим доверительный интервал для оценки r.

$$0{,}95 - 2 \cdot 0{,}017 \le \hat{r} \le 0{,}95 + 2 \cdot 0{,}017;$$

$$0{,}916 \le r \le 0{,}984.$$

Проверим значимость r. Расчетное значение критерия

$$t_p = \sqrt{\frac{0{,}95}{1 - 0{,}95}(10-2)} = \sqrt{\frac{0{,}95 \cdot 8}{0{,}05}} = 12{,}3.$$

Табличное значение при 5%-ном уровне значимости $t_т$=2,306, следовательно, $t_p > t_т$ и значимость коэффициента корреляции подтверждается.

Формулу для расчета линейного коэффициента корреляции можно получить, используя отклонения от средней:

$$r = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 \sum (y - \bar{y})^2}}.$$

Тесноту связи при множественной корреляционной зависимости, т.е. при наличии взаимосвязи трех и более признаков одновременно, характеризует множественный, или совокупный, коэффициент корреляции R. Множественный коэффициент корреляции вычисляется при наличии линей-

ной связи между результативным и факторными признаками, а также между каждой парой факторных признаков. Подсчитывается он по следующей формуле:

$$R_{1.2...n} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{1.2...n}}{\sigma^2_y}},$$

где $\sigma^2_{1.2...n}$ - остаточная дисперсия; σ^2_y - общая дисперсия результативного признака.

Множественный коэффициент корреляции можно рассчитать, используя парные коэффициенты корреляции и β-коэффициенты:

$$R_{1.2...n} = \sqrt{\beta_1 r_{yx_1} + \beta_2 r_{yx_2} + ... + \beta_n r_{yx_n}},$$

где r_{yx_i} - парные коэффициенты; β_i - коэффициенты в стандартизованном масштабе.

Множественный коэффициент корреляции можно также получить на основе вычисления определителей, составленных из парных коэффициентов корреляции:

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ r_{32} & 1 & \cdots & r_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n2} & r_{n3} & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

$$R_{1.2...n} = \sqrt{\frac{\Delta^*}{\Delta}}.$$

Множественный коэффициент корреляции изменяется в пределах от 0 до 1 и по определению положителен:

$$0 \le R \le 1.$$

Вычисленный коэффициент R обязательно должен корректироваться на число наблюдений, так как при малом числе наблюдений значение R получается завышенным. Если бы число факторных признаков было равно числу наблюдений, то гиперплоскость, построенная по методу наименьших квадратов, прошла бы через все точки N и множественный коэффициент корреляции был бы равен 1, хотя связь между результативным и факторными признаками могла быть очень слабой.

Величина множественного коэффициента корреляции корректируется на основании следующего выражения:

$$\hat{R}_{1.2...n} = \sqrt{1-(1-R^2)\frac{N-1}{N-n}},$$

где $\hat{R}$ - скорректированное значение; N - число наблюдений; n - число факторных признаков.

Корректировка R не производится при условии, если

$$\frac{N-n}{n} \geq 20.$$

Среднеквадратическая ошибка коэффициента множественной корреляции определяется по формуле

$$\sigma_R = \frac{1}{\sqrt{N-1}}.$$

Если выполняется неравенство $\frac{R}{\sigma_R} > 3$, то с вероятностью P=0,99 можно считать R значимым.

Оценка доверительных границ R производится следующим образом: величина R приравнивается к гиперболическому тангенсу величины z, т. е.

$$R = \text{th}z,$$

где

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+R}{1-R}.$$

Плотность распределения z является почти нормальной со средним значением

$$\bar{z} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+R}{1-R} + \frac{R}{2(N-1)}$$

и дисперсией

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{N-3}.$$

Следовательно,

$$P\{-t\sigma_z < z - z_0 < t\sigma_z\} = \Phi(t).$$

Отсюда

$$z - t\sigma_z < z_0 < z + t\sigma_z;$$

$$\begin{cases} z_1 = z - t\sigma_z; \\ z_2 = z + t\sigma_z. \end{cases}$$

По таблицам для этих значений z находят R_1 и R_2, т. е.

$$R_1 < R < R_2.$$

Пример 2. Воспользуемся данными примера о связи между среднегодовой стоимостью основных производственных фондов (x_1) в млн. сум, относительным уровнем затрат на производство (x_2) в процентах и объемом реализованной продукции (y) в млн. сум. и рассчитаем множественный коэффициент корреляции, его ошибку, частные коэффициенты корреляции.

Подсчитанные значения парных коэффициентов корреляции следующие:

$$r_{yx_1} = 0{,}88; \quad r_{x_1x_2} = 0{,}88; \quad r_{yx_2} = 0{,}77.$$

Множественный коэффициент корреляции вычислим, используя значения парных коэффициентов:

$$R = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1} \cdot r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}7744 + 0{,}5929 - 2 \cdot 0{,}88 \cdot 0{,}77 \cdot 0{,}88}{1 - 0{,}7744}} \approx 0{,}88.$$

Проверим правильность расчета множественного коэффициента корреляции. Построим вспомогательную табл. 3.1 и произведем расчеты.

Таблица 3.1.

y	$\bar{y}_x$	$y-\bar{y}_x$	$(y-\bar{y}_x)^2$	$(y-\bar{y})$	$(y-\bar{y})^2$
20	20,29	-0,29	0,0841	9,4	88,36
25	20,37	4,63	21,4369	4,4	19,36
20	25,77	-5,77	33,2929	9,4	88,36
30	28,31	1,69	2,8561	0,6	0,36
32	30,61	1,39	1,9321	2,6	6,76
25	27,75	-2,75	7,5625	4,4	19,36
29	33,15	-4,15	17,2225	0,4	0,16
37	35,83	1,17	1,3689	7,6	57,76
36	36,61	0,39	0,1521	6,6	43,56
40	38,31	1,69	2,8561	10,6	112,36
Итого			88,7642		436,4

Определим R

$$R=\sqrt{1-\frac{8,87642}{43,64}}\approx 0,88.$$

Рассчитаем $\hat{R}$

$$\hat{R}=\sqrt{1-(1-0,7744)\cdot\frac{9}{7}}=0,84.$$

Определим σ_R

$$\sigma_R=\frac{1}{10-1}=0,11.$$

Имеем $\frac{R}{\sigma_R}=\frac{0,84}{0,11}=7,63>3.$ Следовательно, величина R значима.

Определим доверительные границы, в которых с вероятностью P=0,95 находится R (t=1,96):

$$-1,96\cdot 0,11<z-z_0<1,96\cdot 0,11;$$

$$z_1=1,3758-1,96\cdot 0,11=1,1602;$$

$$z_2=1,3758+1,96\cdot 0,11=1,5914.$$

По таблицам находим, что R_1=0,83, R_2 = 0,92.

Следовательно, $0,83<R_0<0,92$.

По парным коэффициентам корреляции можно вычислить частные коэффициенты корреляции. Частные коэффициенты корреляции позволяют оценить воздействие на результативный признак одних факторов при исключении других или закреплении последних на постоянном уровне. Различают частные коэффициенты первого, второго и более высоких

Пример 3. На основании приведенных выше данных о зависимости трех показателей работы однотипных предприятий вычислим частные коэффициенты корреляции первого порядка:

$$r_{yx_1}(x_2)=\frac{r_{yx_1}-r_{yx_2}\cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1-r_{yx_2}^2)(1-r_{yx_1}^2)}}=\frac{0,88-0,88\cdot 0,77}{\sqrt{(1-0,5929)(1-0,7744)}}=0,68;$$

$$r_{yx_2}(x_1)=\frac{r_{yx_2}-r_{yx_1}\cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1-r_{yx_1}^2)(1-r_{x_1x_2}^2)}}=\frac{0,77-0,88\cdot 0,88}{\sqrt{(1-0,7744)(1-0,5929)}}=0,014.$$

Если связь между исследуемыми факторами криволинейная, то теснота связи определяется с помощью **корреляционного** отношения. Корреляционное отношение **может использоваться** для измерения тесноты связи и при **линейной связи**. Различают эмпирическое и теоретическое **корреляционное** отношение. Эмпирическое корреляционное **отношение** вычисляется как корень квадратный из **отношения** межгрупповой дисперсии к общей:

$$\eta=\sqrt{\frac{\delta^2}{\sigma^2}};\quad 0\le\eta\le 1.$$

Оно вычисляется на основании группировки или ряда распределения.

Пример 4. По данным задачи на рассчитаем эмпирическое корреляционное отношение, имея $\bar{y}=6,12$ и $\sigma_y^2=3,11$, рассчитаем δ^2, т.е. межгрупповую дисперсию. Построим вспомогательную табл. 3.2.

Таблица 3.2.

$\bar{y}_i$	f_i	$(y_i - \bar{y})$	$(\bar{y}_i - \bar{y})^2$	$(\bar{y}_i - \bar{y})^2 f_i$
4,40	10	-1,72	2,9584	29,5840
5,47	15	-0,65	0,4225	6,3375
6,53	15	0,41	0,1681	4,5215
8,20	10	2,08	4,3264	43,3264
Итого	50			81,7694

Значит, $\delta^2 = \frac{81,7694}{50} = 1,64$; $\eta = \sqrt{\frac{1,64}{3,11}} = 0,73$.

Величина η показывает, что между результативным и факторными признаками существует достаточно тесная связь.

Теоретическое корреляционное отношение вычисляется по формулам: $\eta = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - \bar{y}_x)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}}$ или $\eta = \sqrt{\frac{\sum (\bar{y}_i - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}}$.

Среднеквадратическая ошибка теоретического корреляционного отношения подсчитывается по формуле $\sigma_{-} = \frac{1 - \eta^2}{}$.

Значимость определяется из условия $\frac{\eta}{\sigma_\eta} \geq 3$.

Если корреляционное отношение рассчитать для линейной зависимости, то оно должно быть численно равно линейному коэффициенту корреляции, т.е. $\eta = |r|$. Это равенство можно использовать для проверки гипотезы о линейности связи. Если отношение величины линейного коэффициента корреляции к величине теоретического корреляционного отношения будет близким к единице, то подтверждается гипотеза о линейности связи. Если это отношение будет близким к нулю, то гипотеза линейности отвергается.

Пример 5. Проверим гипотезу линейности связи для исходных данных. Вспомогательные расчеты приведены в табл. 3.3. Имеем $\bar{y} = 44{,}5$.

Таблица 3.3.

y	$\bar{y}_x$	$y_i - \bar{y}_x$	$(y_i - \bar{y}_x)^2$	$(y - \bar{y})$	$(y - \bar{y})^2$
20	19,4	-0,6	0,36	-24,5	600,25
25	25,0	0	0	-19,5	380,25
31	30,6	0,4	0,16	-13,5	182,25
31	36,2	-5,2	27,04	-13,5	182,25
40	41,8	-1,8	3,24	-4,5	20,25
56	47,4	8,6	73,96	11,5	132,25
52	53,0	-1,0	1,0	15,5	240,25
60	58,6	1,4	1,96	15,5	240,25
60	64,2	4,2	17,64	7,5	56,25
70	69,8	0,2	0,04	25,5	650,25
Итого 445	446		125,40		2684,50

Следовательно, теоретическое корреляционное отношение

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{125{,}40}{2684{,}5}} = 0{,}976.$$

Коэффициент корреляции $r = 0{,}97$. Таким образом, отношение

$$\frac{r}{\eta} = \frac{0{,}96}{0{,}976} = 0{,}994$$

очень близко к единице, и гипотеза о линейности подтверждается.

3.3. Непараметрические методы оценки тесноты связи

Среди непараметрических методов оценки тесноты связи наибольшее значение имеют расчеты ранговых коэффициентов корреляции Спирмена ρ и Кендалла τ. Эти коэффициенты могут быть использованы для определения тесноты связей как между количественными, так и между качествен-

ными признаками при условии, если значения этих признаков могут быть упорядочены или проранжированы по степени убывания или возрастания признака.

Коэффициент Спирмена рассчитывается по формуле

$$\rho = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{N(N^2 - 1)},$$

где d_i^2 — квадраты разности рангов связанных величин x и y;

N — число наблюдений (число пар рангов).

Пример 6. По данным группы из десяти однотипных предприятий о себестоимости товарной продукции, млн. сум. (x) и накладных расходах по реализации этой продукции, тыс. сум. (y) рассчитаем коэффициент Спирмена (табл. 3.4).

Таблица 3.4.

x	y	Ранжирование				Сравнение рангов		Разность рангов d_i	d_i^2
		x	Ранг x R_x	y	Ранг y R_y	R_x	R_y		
12,0	462	11,0	1	462	1	2	1	-1	1
18,8	939	12,0	2	506	2	5	6	-1	1
11,0	506	15,4	3	765	3	1	2	-1	1
29,0	1108	17,5	4	804	4	9	9	0	0
17,5	872	18,8	5	872	5	4	5	-1	1
23,4	765	20,7	6	939	6	7	3	4	16
35,6	1368	23,4	7	998	7	10	10	0	0
15,4	1002	26,1	8	1002	8	3	8	-5	25
26,1	998	29,0	9	1108	9	8	7	1	1
20,7	804	35,6	10	1368	10	6	4	2	4
Итого									50

Коэффициент Спирмена

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 50}{10 \cdot 99} = 0{,}700.$$

Расчет рангового коэффициента Кендалла осуществляется по следующей формуле:

$$\tau = \frac{2S}{N(N-1)},$$

где N - число наблюдений; S - сумма положительных и отрицательных баллов по одной из связанных величин, ранги которой расположены в соответствии с упорядоченными рангами другой. Для определения тесноты связи между произвольным числом ранжированных признаков применяется множественный коэффициент ранговой корреляции (коэффициент конкордации) W, который вычисляется по формуле

$$W = \frac{12S}{m^2(N^3 - N)},$$

где m - количество факторов; N - число наблюдений; S - разность между суммой квадратов сумм по строкам и средним квадратом суммы сумм строк.

Пример 7. Определить по коэффициенту W тесноту связи между объемом реализованной продукции, суммой накладных расходов на реализацию, себестоимостью единиц продукции и средней заработной платой рабочих десяти однотипных предприятий. Связь между исследуемыми признаками представлена в табл. 3.5.

Таблица 3.5.

Реализация продукции, млн.сум, y	Накладные расходы на реализацию, тыс. сум, x	Себестоимость единицы продукции, тийин, z	Средняя заработная плата рабочих, V
12,0	462	68,8	168,5
18,8	939	70,2	158,7
11,0	506	71,4	171,7
29,0	1108	78,5	188,9
17,5	872	66,9	160,4
23,4	765	69,7	165,2
35,6	1368	72,3	175,0
15,4	1002	77,5	170,4
26,1	998	65,2	162,7
20,7	804	70,7	163,0

Располагаем исходные данные по рангам (табл. 3.6).

Таблица 3.6.

R_y	R_x	R_z	R_v	Сумма строк	Квадраты сумм
2	1	3	6	12	144
5	6	5	1	17	289
1	2	7	8	18	324
9	9	10	10	38	1444
4	5	2	2	13	169
7	3	4	5	19	361
10	10	8	9	37	1369
3	8	9	7	27	729
8	7	1	3	19	361
6	4	6	4	20	400
Итого				220	5590

$$S = 5590 - \frac{(220)^2}{10} = 750.$$

Согласно

$$W = \frac{12 \cdot 750}{16 \cdot (1000 - 10)} = 0{,}568.$$

Значимость множественного коэффициента ранговой корреляции проверяется по критерию χ^2:

$$\chi^2 = \frac{S}{m \cdot N(N-1)}.$$

Для приведенного примера расчетное значение критерия

$$\chi^2_p = \frac{750}{4 \cdot 10 \cdot 9} = 2{,}083.$$

Табличное значение χ^2 для вероятности P=0,95 составит $\chi^2_т = 3{,}325$. Так как $\chi^2_p < \chi^2_т$ значимость W подтверждается.

Для определения тесноты связи двух качественных признаков, каждый из которых состоит только из двух групп, применяются коэффициенты ассоциации и контингенции. Для их вычисления строится таблица (см. табл. 3.7), которая

показывает связь между двумя явлениями, каждое из которых должно быть альтернативным, т.е. состоящим из двух качественно отличных друг от друга значений признака (например, хороший, плохой).

Таблица 3.7.

a	b	$a+b$
c	d	$c+d$
$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

Коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

- ассоциации $A = \dfrac{ad-bc}{ad+bc}$

- контенгенции $K = \dfrac{ad-bc}{\sqrt{(a+b)(b+d)(a+c)(c+d)}}$,

где a, b и c, d - количественные характеристики исследуемых групп.

Коэффициент контингенции всегда меньше коэффициента ассоциации. Связь считается подтвержденной,

$$A \geq 0{,}5 \text{ или } k \geq 0{,}3.$$

Пример 8. Исследовать связь между выполнением норм выработки молодыми рабочими и окончанием ими средней школы. Результаты обследования характеризуются данными (табл. 3.8).

Таблица 3.8.

Группы рабочих	Выполнивших норму	Не выполнивших норму	Всего
Окончившие среднюю школу	78	22	100
Не окончившие среднюю школу	32	68	100
Всего	110	90	200

По данным таблицы

$$A = \frac{78 \cdot 68 - 32 \cdot 22}{78 \cdot 68 + 32 \cdot 22} = 0{,}766; \quad 0{,}766 > 0{,}5;$$

$$K = \frac{78 \cdot 68 - 32 \cdot 22}{\sqrt{(78+22)(22+68)(78+32)(32+68)}} = 0{,}46; \quad 0{,}46 > 0{,}3.$$

Между исследуемыми признаками прослеживается четкая связь, что подтверждается достаточно высокими значениями коэффициентов ассоциации и контингенции.

Когда каждый из качественных признаков состоит более чем из двух групп, то для определения тесноты связи можно применить коэффициент взаимной сопряженности Пирсона. Этот коэффициент вычисляется по следующей формуле:

$$C = \sqrt{\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}},$$

где φ^2 - показатель взаимной сопряженности.

Расчет коэффициента взаимной сопряженности производится по следующей схеме (табл. 3.9).

Таблица 3.9.

Группы признака A	Группы признака B			Итого
	B_1	B_2	B_3	
A_1	f_1	f_2	f_3	n_1
A_2	f_4	f_5	f_6	n_4
A_3	f_7	f_8	F_9	n_7
Итого	m_1	m_2	m_3	

Расчет φ^2 производится так:

по первой строке

$$\left(\frac{f_1^2}{m_1} + \frac{f_2^2}{m_2} + \frac{f_3^2}{m_3}\right) : n_1 = z_1;$$

по второй строке

$$\left(\frac{f_4^2}{m_1} + \frac{f_5^2}{m_2} + \frac{f_6^2}{m_3}\right) : n_2 = z_2;$$

по третьей строке

$$\left(\frac{f_7^2}{m_1} + \frac{f_8^2}{m_2} + \frac{f_9^2}{m_3}\right) : n_3 = z_3;$$

$$\varphi^2 = z_1 + z_2 + z_3 - 1 = \sum z_i - 1.$$

Пример 9. С помощью коэффициента взаимной сопряженности исследовалась связь между себестоимостью продукции и накладными расходами на реализацию (табл. 3.10).

Таблица 3.10.

Накладные расходы	Себестоимость									Итого (n_i)	$\sum \frac{f_i^2}{m_i}$	z_i
	нижняя			средняя			высокая					
	f_i	f_i^2	$f_i^2/30$	f_i	f_i^2	$f_i^2/40$	f_i	f_i^2	$f_i^2/50$			
Нижние	19	361	12,033	12	144	3,6	9	81	1,620	40	17,253	0,431
Средние	7	49	1,633	18	324	8,1	15	225	4,5	40	14,233	0,356
Высокие	4	16	0,533	10	100	2,5	26	676	13,52	40	16,553	0,414
Итого (m_i)	30			40			50			120		1,21

По данным таблицы

$$\varphi^2 = 1{,}204 - 1 = 0{,}204; \quad C = \sqrt{\frac{0{,}204}{1{,}204}} = 0{,}41.$$

Достаточно высокое значение C указывает на наличие связи между исследуемыми признаками.

Непараметрические методы измерения связи используются для проверки условий применения метода наименьших квадратов: независимости распределений признаков, однородности выборок, наличия тренда в рядах динамики.

3.4. Измерение тесноты связи между рядами динамики

Способы исключения автокорреляции, рассмотренные выше, дают возможность рассчитать коэффициенты корреляции, показывающие степень тесноты связи между двумя динамическими рядами. Коэффициенты корреляции могут быть рассчитаны или на основе метода последовательных

разностей, или на основе метода авторегрессионных преобразований (способом исключения тенденции).

В первом случае расчет производится по формуле

$$r = \frac{\sum \Delta_x \Delta_y}{\sqrt{\sum \Delta_x^2 \cdot \sum \Delta_y^2}},$$

где Δ_x, Δ_y - первые разности между соседними уровнями связанных рядов динамики.

Во втором случае используется следующее выражение:

$$r = \frac{\sum V_x V_y}{\sqrt{\sum V_x^2 \cdot \sum V_y^2}},$$

где V_x, V_y - отклонение от тенденций связанных рядов динамики.

Величина r в обоих случаях изменяется в пределах от -1 до 1.

Пример 10. Расчет коэффициентов корреляции по приведенным выше формулам проиллюстрируем на примере двух рядов динамики, показывающих взаимосвязь между стоимостью реализованной продукции и накладными расходами (см. табл. 3.11).

Таблица 3.11.

Реализованная продукция, млн. сум. x	Накладные расходы, тыс. сум. y	Δx	Δy	$\Delta x \Delta y$	Δ_x^2	Δ_y^2	V_x	V_x^2	V_y	V_y^2	$V_x V_y$
9	27	-	-	-	-	-	3,6	12,96	5,6	31,36	20,16
13	36	4	9	36	16	81	1,2	1,44	6,4	40,96	7,68
17	29	4	-7	-28	16	49	-1,2	1,44	-8,7	75,69	10,44
22	41	5	12	60	25	144	-2,8	7,84	-4,9	24,01	13,72
29	54	7	13	91	49	169	-2,2	4,84	-0,1	0,01	0,22
36	71	7	17	119	49	289	-1,8	3,24	8,7	75,69	-15,66
44	50	8	-21	-168	64	441	-0,2	0,04	-20,5	420,25	4,10
51	81	7	31	217	49	961	0,4	0,16	2,4	5,76	-0,96
60	98	9	17	153	81	289	3,0	9,0	11,2	125,44	33,6
				480	349	2423		40,96		799,17	73,30

По формуле $r = \frac{480}{\sqrt{349 \cdot 2423}} = 0{,}522.$

По формуле $r = \frac{83{,}30}{\sqrt{40{,}96 \cdot 799{,}77}} = 0{,}407.$

Показатели тесноты связи, вычисленные этими способами, близки по значению.

Из теоремы Фришa-Воу следует, что тесноту связи можно оценить и третьим способом, т.е. рассчитать коэффициент корреляции между связанными динамическими рядами по

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{1,2...t}}{\sigma^2_y}},$$

где значения остаточной дисперсии определяются как разность между фактическими уровнями исходного динамического ряда и теоретическими, вычисленными по

$$\bar{y}_{1,2...t} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + + a_{n+1} t$$

Пример 11. Рассмотрим расчет R на примере с теми же данными (табл. 3.12)

Таблица 3.12.

Реализованная продукция, млн. сум. x	Накладные расходы, тыс. сум. y	t	$\bar{y}_{xt}$	$y_i - \bar{y}_{xt}$	$(y_i - \bar{y}_{xt})^2$	$(y - \bar{y})$	$(y - \bar{y})^2$
9	27	1	30,5	3,5	12,25	-27	729
13	36	2	32,4	3,6	12,96	-18	324
17	29	3	34,2	5,2	27,04	-25	625
22	41	4	38,7	2,3	5,29	-13	169
29	54	5	48,3	5,7	32,49	0	0
36	71	6	58,0	13,0	169,00	17	289
44	50	7	70,3	20,3	412,09	-4	16
51	81	8	79,9	1,1	1,21	27	729
60	98	9	94,8	3,2	10,24	44	1936
281	487				682,57		4817

При $\bar{y} = 54$ подсчитываем

$$R = \sqrt{1 - \frac{682,57}{4817}} = 0,927.$$

Этот способ оценки тесноты связи следует считать менее точным, чем первые два, так как значение коэффициента корреляции в этом случае значительно преувеличивается за счет введения фактора времени.

Измерение тесноты связи динамических рядов также должно базироваться на предварительном теоретическом анализе, на основании которого выделяют фактор-причину и фактор-следствие, т. е. факторный и результативный признаки. Коэффициенты, рассчитанные на основе первых разностей и отклонений от тенденции, характеризуют лишь тесноту связи результативного и факторного признаков. Величина коэффициента корреляции, вычисленная на основе дисперсий, показывает, какая часть вариации результативного признака объясняется вариацией факторного.

Мы могли убедиться, что метод наименьших квадратов действительно является мощным средством исследования социально-экономических явлений, но его применение должно основываться на анализе исходных данных, на выявлении реально существующих причинно-следственных связей. Метод наименьших квадратов позволяет получить несмещенные оценки, построенные на его основе уравнения достаточно адекватно отражают взаимосвязи. Если коэффициенты регрессии окажутся значимыми, то уравнения могут быть использованы для экстраполяции за пределы исследуемой совокупности.

3.5. Автокорреляция. Авторегрессия

Определение понятия автокорреляции временного ряда.

Автокорреляция = авто (греч. *autos* - сам) + корреляция: корреляция с самим собой.

Автокорреляция является характеристикой временного ряда. В эконометрике используются два понятия "автокорреляция временного ряда" и "автокорреляция

Автокорреляция временного ряда порядка d равна коэффициенту корреляции, рассчитанному между исходным временным рядом и его лаговой переменной порядка d.

Лаговая переменная порядка d получается от исходного временного ряда методом перемещения его по времени вперед на d дат. База данных для расчета коэффициента автокорреляции приведена в табл. 3.13.

Таблица 3.13.

База данных для расчета коэффициента автокорреляции

t	Y_t	Y_{t-1}
1	Y_1	$Y_{1-1}=Y_0$
2	Y_2	$Y_{2-1}=Y_1$
3	Y_3	$Y_{3-1}=Y_2$
4	Y_4	$Y_{4-1}=Y_3$
5		$Y_{5-1}=Y_4$

Существуют две трактовки коэффициента автокорреляции: прямая и обратная.

Прямая трактовка - коэффициент автокорреляции показывает степень влияния текущих значений временного ряда на его будущее значение.

Обратная трактовка - коэффициент автокорреляции показывает степень влияния будущих значений временного ряда на его текущее значение.

В эконометрике подразумевается прямая трактовка коэффициента автокорреляции первого порядка. Для учета влияния будущих значений временного ряда на текущее значение используются модели адаптивных ожиданий и частичной корректировки. Логическим продолжением автокорреляции является авторегрессия, которую будем изучать

Автокорреляция остатков порядка d равна коэффициенту корреляции, рассчитанному между исходными остатками

модели и лаговыми остатками порядка d. Коэффициент автокорреляции рассчитывается по обычной формуле коэффициента корреляции, только в качестве первой переменной являются исходные остатки, а в качестве второй переменной используются лаговые остатки порядка d.

Причиной появления в остатках достоверной автокорреляции первого порядка является наличие в остатках тенденций, вызванных плохой спецификацией

Последствия наличия в остатках автокорреляции первого порядка. Если модель содержит остатки с достоверной автокорреляцией, то могут возникнуть следующие последствия:

- модель является плохо специфицированной и появляется возможность ее улучшения;
- ошибка модели является завышенной, а достоверность модели заниженной.

Критерии проверки достоверности автокорреляции остатков модели. Проверку достоверности коэффициента автокорреляции остатков первого порядка можно производить по упрощенной или по более точной методике.

Упрощенная методика проверки коэффициента автокорреляции совпадает с методикой проверки достоверности обычного парного коэффициента корреляции, которая выполняется в такой последовательности:

Шаг 1. Выдвигается нулевая гипотеза о том, что $r(d) = 0$, H_0: $r(d) = 0$.

Шаг 2. Вычисляется $r(d)$.

Шаг 3. Вычисляется ошибка $r(d)$.

$$S_{r(d)} = \sqrt{\frac{1 - r(d)^2}{n - d}}.$$

Шаг 4. Вычисляется t-критерий Стьюдента.

$$t = \frac{r(d)}{S_{r(d)}}.$$

Шаг 5. Проверяется условие:

если $|t| \geq t_{\alpha/2}$ $(\alpha = 0{,}5; m = n - d - 2)$, то нулевая гипотеза отвергается с вероятностью $1 - \alpha$, где t-критерий Стьюдента.

В противном случае нулевая гипотеза принимается.

Для более точной проверки достоверности коэффициента автокорреляции остатков используется критерий Дарбина-Уотсона (DW).

Шаг 1. Вычисляется критерий Дарбина-Уотсона

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \approx 2(1 - r(1)).$$

Шаг 2. Определяются по таблицам нижнее и верхнее пороговые значения соответственно $d_н$ и $d_в$, зависящие от числа измерений, уровня значимости и числа объясняемых факторов в модели.

Шаг 3. Проверяются следующие условия:

а) если $d_в < DW < 4 - d_в$, то нулевая гипотеза об отсутствии автокорреляции принимается;

б) если $d_н \leq DW \leq d_в$ или $4 - d_в \leq DW \leq 4 - d_н$, то нулевая гипотеза об отсутствии автокорреляции не принимается и не отвергается (область неопределенности крите-

с) если $0 < DW \leq d_н$, то нулевая гипотеза об отсутствии автокорреляции отвергается и утверждается, что имеется положительная автокорреляция остатков;

д) если $4 - d_н < DW < 4$, то нулевая гипотеза об отсутствии автокорреляции отвергается и утверждается, что имеется отрицательная автокорреляция остатков.

Критерий DW рассчитывается практически во всех статистических пакетах прикладных программ.

Коэффициент автокорреляции первого порядка обладает следующими свойствами.

Коэффициент автокорреляции может принимать значения от -1 до +1.

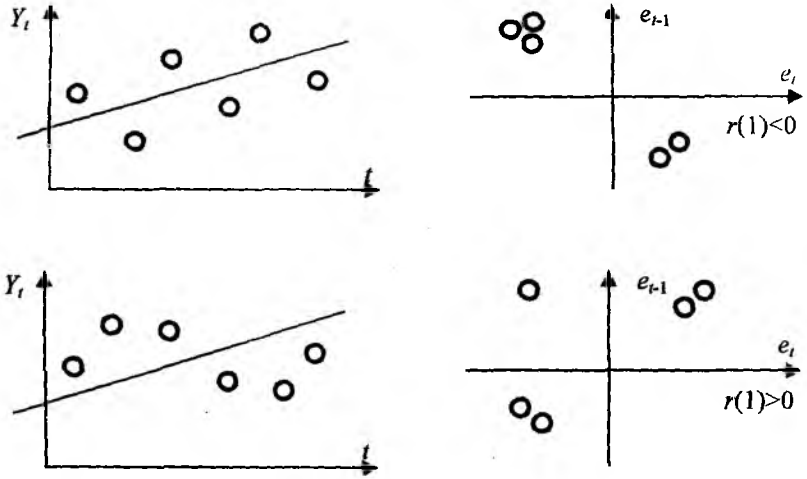


Рис. 3.1. Примеры отрицательного и положительного коэффициента автокорреляции остатков.

Анализ рис. 3.1 показывает, что, если остатки часто меняют свой знак, коэффициент автокорреляции первого порядка будет отрицательным, а если имеются серии положительных и отрицательных значений остатков, - то положительным.

Модели, учитывающие автокорреляцию остатков. Если линейная модель

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + e_t$$

содержит автокорреляцию остатков первого порядка, то для ее устранения можно использовать следующую модель:

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + e_t = a_0 + a_1 X_t + p e_{t-1} + v_t,$$

где p - коэффициент автокорреляции первого порядка;

e_{t-1} - лаговая переменная остатков первого порядка;

$e_t = p e_{t-1} + v_t$;

v_t - остатки новой модели.

ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ – КАК МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

4.1. Основы модельного описания сложных экономических систем

В условиях социально-экономических реформ в Узбекистане, существенно усложнились методы исследования экономических систем и управления ими. При выработке эффективных решений, следует учитывать, что современная экономическая система, как правило является сложной системой большого масштаба. Отметим, что общепринятого определения сложной системы к настоящему времени не существует. Для выделения подобных объектов на множестве других обычно используют перечисление их основных свойств, а именно:

- большое количество элементов;
- сложность формализации;
- иерархичность построения;
- наличие взаимодействия «человек-машина»;
- необходимость учета при их исследовании неопределенных факторов различной природы;
- сложность информационных потоков;
- эмерджентность и др.

При анализе сложной системы особое значение имеет учет ее эмерджентных свойств, под которыми понимают такие свойства, которыми: не обладает ни один из составляющих ее элементов. Таким свойством, например, является структура системы. Исследование подобных систем проводят с использованием системного подхода. В настоящее время под системным подходом понимают направление методологии научного познания, в основе которого лежит исследование объектов как систем.

Под системой будем понимать такое множество любых элементов, поведение которого определяется целью операции, реализуемой системой, а также составом и способом связи элементов (структурой множества).

При исследовании экономических систем возникает ряд вопросов; решение которых не является очевидным, т.е. носит проблемный характер. Основной проблемой является расхождение между желаемым и действительным результатами функционирования рассматриваемой системы.

Для решения данной проблемы выделяют и четко формулируют цель деятельности. Затем на основе анализа проблемы выделяют и обосновывают некоторую целостность - систему, предназначенную для решения этой проблемы, а также определяют возможные альтернативные варианты (подходы) к ее решению.

Введем ряд определений.

Цель - идеальное представление оперирующей стороны о желаемом результате - определяет способы и формы действий, их характер и системную упорядоченность, а также средства достижения требуемого результата.

Для достижения поставленной цели необходима целенаправленная деятельность - операция.

Операция - есть совокупность целенаправленных действий, объединенных общим замыслом и единой целью.

В формализованном виде цель операции выражается набором некоторых параметров целеполагания $Y_{тр}$. При этом реальный результат Y операции (фактический или ожидаемый ее конечный итог) может не совпадать с желаемым.

Под **эффективностью операции** понимают степень соответствия ее реального результата Y требуемому результату.

Возможные альтернативные пути $u \in U$ достижения цели в общем случае обладают разной эффективностью. Поэтому при проведении исследований необходимо сравнивать эти пути между собой по эффективности и выбирать из них лучший.

В исследованиях эффективности экономических систем обычно приходится решать следующие проблемы:

1) оценивание эффективности использования системы;

2) выбор рационального способа использования системы или варианта ее построения.

Оценка эффективности заключается в выработке так называемого оценочного суждения относительно пригодности системы (или способа ее использования) к решению определенного круга задач.

Выбор рационального способа использования или варианта построения системы производится на основе оценивания и сопоставления возможных альтернативных способов или вариантов по эффективности. При этом эффективность экономических систем определяется множеством различных факторов.

Под **фактором** понимают движущую силу какого-либо процесса (явления) или условие, влияющее на тот или иной процесс (явление).

Учет влияния различных групп факторов при исследовании **эффективности** операции осуществляется путем определения характера влияния этих факторов на показатель эффективности.

Показатель эффективности $W(u)$ **операции** есть мера степени соответствия реального результата операции требуемому.

Основным требованием при выборе показателя эффективности является соответствие показателя цели операции, которая отображается требуемым результатом $Y_{тр}$. Помимо указанного требования, показатель эффективности должен удовлетворять требованиям содержательности и интерпретируемости, измеримости и соответствия системе предпочтений исследователя (оперирующей стороны).

Для сопоставления стратегий проведения операций, характеризующихся различной степенью достижения цели (эффективностью), и осуществления направленного выбора

стратегий из множества допустимых вводят соответствующее правило сопоставления. Данное правило называют критерием эффективности. [4, 7, 10, 19].

С целью установления характера связей различных факторов, оказывающих влияние на эффективность операции, с показателем эффективности этой операции разрабатывают модель операции.

Под моделью операции понимают некоторый условный образ (аналог) реальной системы, который создается с целью получения информации об этой системе.

По сравнению с реальной системой (оригиналом) модель может иметь совершенно иную природу. Следует иметь в виду, что ни одна формальная модель не может дать исчерпывающих сведений о развитии реальных процессов, поскольку практически всегда присутствуют неконтролируемые факторы, но получаемые с ее помощью решения позволяют оперирующей стороне ориентироваться в обстановке проведения операции, вносить полезные уточнения в модель, анализировать различные стратегии, выявлять второстепенные и существенные факторы исследуемой операции.

Изучать свойства системы можно и экспериментальным путем. Однако далеко не всегда такой путь изучения применим, особенно для сложных экономических систем.

Как правило, эксперимент со сложной системой затруднен из-за большого масштаба системы и возможных негативных последствий таких исследований. По понятным причинам нельзя, например, экспериментировать с системой народного хозяйства. Обычный путь изучения свойств больших экономических систем - моделирование.

Концепция моделирования предполагает формирование некоторого условного образа реальной системы, отражающего лишь некоторые существенные стороны процесса ее функционирования. Этот образ и называют моделью системы.

Модель также является системой. Между реальной системой и моделью должно быть установлено определенное соответствие. С моделью можно производить различные эксперименты для выявления тех или иных ее свойств. Затем выявленные свойства распространяются на реальную систему.

В общем случае к моделям предъявляется множество требований. В частности, модель не должна быть слишком сложной, что может в значительной мере затруднить получение содержательных выводов. Однако неоправданное упрощение модели снижает степень соответствия ее реальной системе и приводит к тому, что выводы, сделанные в рамках модели, не пригодны для моделируемой системы. Широко известно, например, приписываемое А. Эйнштейну выражение: «Модели должны быть настолько простыми, насколько это возможно, но не проще».

Степень соответствия модели той реальной системе, для описания которой она построена, называется адекватностью модели.

Использование неадекватной модели лишено практической ценности.

Таким образом, процесс моделирования предполагает наличие:

- объекта исследования;
- исследователя, перед которым поставлена конкретная задача;
- модели, создаваемой для получения информации об объекте и необходимой для решения задачи.

Причем по отношению к модели исследователь является, по сути дела, экспериментатором. Только в данном случае эксперимент проводится не с реальным объектом, а с его моделью. Эксперимент в эконометрике есть основное средство познания объекта исследования. При этом следует иметь в виду, что любой эксперимент может иметь существенное значение в экономической науке только после специальной обработки его результатов.

Моделирование сложных экономических систем в настоящее время немыслимо без использования ЭВМ. При этом значительная часть экономических задач, решаемых с использованием ЭВМ, так или иначе сводится к задаче обоснования решений руководителя (менеджера). Процесс подготовки и принятия решений на основе моделирования можно представить в виде следующих этапов:

1. Анализ проблемной ситуации и постановок задачи.
2. Определение параметров операции и выбор показателей и критериев ее эффективности.
3. Построение описательной (концептуальной) модели системы.
4. Построение математической модели функционирования системы.
5. Алгоритмизация и программирование.
6. Проведение моделирования на ЭВМ.
7. Обработка результатов моделирования.
8. Формирование решения.

Между указанными этапами имеются существенные связи, как прямые, так и обратные. Следует отметить, что это деление принято лишь для удобства рассмотрения процесса подготовки и принятия решений и является условным.

Одним из наиболее перспективных методов обучения подготовке и принятию решений по результатам экономических исследований является проведение деловых (операционных) игр. Деловую игру можно определить как имитацию управленческой или организационной деятельности руководящего органа в учебных, практических и исследовательских целях, выполняемую на модели

При условии достаточного соответствия реальным условиям, сравнительно небольших затрат времени и других ресурсов деловые игры являются весьма эффективным методическим средством обучения принятию решений в конкретной управленческой и исследовательской практике.

Развитие вычислительной техники, усложнение экономических систем и стоящих перед ними задач привело к тому, что деловые игры в настоящее время являются не только хорошим средством обучения и тренировки руководящего состава, но также и методом оценивания эффективности функционирования сложных экономических систем. Об этом, в частности, свидетельствует то внимание, с которым к исследовательским экономическим играм относятся в США. В ходе таких игр осуществляется компьютерное моделирование экономических систем, позволяющее решать следующие задачи:

1) проводить анализ ситуаций и оценку обстановки на внутренних и внешних рынках;

2) оценивать степень приближения к кризисному состоянию;

3) анализировать состояние фирмы и осуществлять стратегическое планирование ее развития и др.

При постановке и решении экономических задач выделяют три группы факторов: качество элементов системы, условия функционирования системы, способы использования (применения) или варианты построения системы.

Первая группа факторов связывается с положительными (полезными) свойствами элементов системы, способствующими или препятствующими достижению заданной цели.

Ко второй группе относятся факторы, оказывающие влияние на условия функционирования системы: природные факторы, факторы, являющиеся следствием активных действий конкурентов или партнеров, и др.

Третья группа факторов, определяющая способы применения системы или варианты ее построения, включает порядок и приемы использования или организации (синтеза) системы на базе ее элементов.

Каждой системе присущи свои особенности, которые характеризуются совокупностью соответствующих факторов. К ним относятся: способы связи и взаимодействия между элемен-

тами системы, режимы и регулярность их использования, выделенные ресурсы, способы управления, планирования и др.

Указанные группы факторов, кроме того, подразделяются по возможности целенаправленного воздействия на них на управляемые и неуправляемые, а по отношению к внешней среде - на внешние и внутренние.

При исследовании эффективности систем факторы отображают в виде переменных. С точки зрения информированности исследователя об этих переменных факторы делят на определенные и неопределенные. К определенным факторам относят переменные, значения которых известны исследователю с требуемой точностью. К определенным факторам также относят контролируемые входные воздействия, в том числе и управляемые переменные.

К неопределенным относят переменные, о значениях которых исследователь осведомлен не полностью. Неопределенные переменные делят на две группы: случайные переменные и неопределенные переменные нестохастической (неслучайной) природы.

Неопределенность нестохастического характера возникает обычно в силу следующих обстоятельств:

- наличия целенаправленного противодействия со стороны конкурирующей системы, способы действий которой неизвестны исследователю (поведенческая неопределенность);
- недостаточной известности некоторых явлений, сопровождающих процесс функционирования системы (природная неопределенность);
- нечеткого представления цели операции, приводящего к неоднозначной трактовке соответствия реального результата операции желаемому (целевая неопределенность).

В общем случае модель исследуемой системы S можно представить в виде множества величин, описывающих процесс функционирования реальной системы и образующих следующие подмножества:

- совокупность входных воздействий на систему:

$$x_i \in X, \quad i = \overline{1, n_x};$$

- совокупность воздействий внешней среды:

$$v_l \in V, \quad l = \overline{1, n_v};$$

- совокупность внутренних (собственных) параметров системы:

$$d_k \in D, \quad k = \overline{1, n_d};$$

- совокупность выходных характеристик системы:

$$y_j \in Y, \quad j = \overline{1, n_y}.$$

При моделировании системы входные воздействия, воздействия внешней среды и внутренние параметры системы обычно являются независимыми (экзогенными) переменными, а выходные характеристики системы - зависимыми (эндогенными) переменными. В общем случае процесс функционирования экономической системы представляет собой процесс преобразования экзогенных переменных в эндогенные.

4.2. Методы и принципы моделирования экономических систем

При исследовании сложных экономических систем моделирование часто является единственно возможным подходом к их изучению. Концепция моделирования предполагает формирование некоторого условного образа (аналога) реальной системы и изучение его свойств с целью получения информации о реальной системе. Образ реальной системы называют моделью. Однако по сравнению с реальной системой (оригиналом) модель может иметь совершенно иную природу, поэтому между реальной системой и ее моделью должно быть установлено определенное соответствие (аналогия). От полноты этого соответствия зависит адекватность модели.

Классификация моделей и методов моделирования. научной литературе существует множество подходов классификации моделей и методов моделирования (рис.4.1).



Рис.4.1.

Различают материальное (предметное) и идеальное моделирование. Предметное моделирование предполагает использование в качестве модели некоторого материального

Идеальное моделирование основывается на мысленной аналогии реального объекта и его модели. По способу отражения реального объекта (или по глубине формализации) идеальное моделирование делится на знаковое (семиотическое) и интуитивное.

На множестве семиотических моделей различают математическое, логическое, графическое и другие виды моделирования. Математическое моделирование играет определяющую роль среди других форм знакового моделирования. Однако довольно трудно четко отделить логическое и графическое моделирование от математического. Математическое вычисления показателей, отношений и т.д. методы математического моделирования делят на аналитические и алгоритмические. Аналитическое моделирование предполагает использование математической модели реального объекта в форме алгебраических, дифференциальных, интегральных и других уравнений, связывающих выходные переменные с входными и дополненных системой ограничений (в виде равенств или неравенств). При этом предполагается наличие однозначной вычислительной процедуры получения точного решения уравне-

При алгоритмическом подходе математическая модель использует обращение к различным рекуррентным методам и итеративным процедурам поиска решения. Такой подход к моделированию сложных систем является типичным.

Интуитивное моделирование проводится на вербальном (описательном) уровне. При этом методе не устанавливают строгие количественные соотношения между моделируемыми явлениями, ограничиваясь лишь анализом качественных обобщенных понятий, отражающих общие тенденции развития явлений, направления изменения свойств изучаемых объектов и

Различают следующие формы интуитивного моделирования: метод сценариев, операционные игры, мысленный эксперимент и др.

Основной формой системного анализа сложных экономических систем является имитационное исследование. Обычно имитация реализуется на ЭВМ. При этом стремятся к наиболее полному учету всех существенных факторов.

Имитационное моделирование, являясь своеобразным экспериментированием с моделью реальной системы, откры-

вает широкие возможности адекватного отображения исследуемых явлений. Оно синтезирует знаковое и интуитивное (иногда и материальное) моделирование. Таким образом, в имитационном моделировании используются практически все методы моделирования, представленные на рис.4.1.

Имитационное моделирование объединяет имитацию исследуемого явления и планирование имитационного эксперимента. Теория планирования эксперимента позволяет рационально организовать имитационный эксперимент.

Принципы моделирования. Моделирование в экономике - сложный, трудоемкий процесс, имеющий ярко выраженный творческий характер. Поэтому дать исследователю пригодные во всех случаях готовые рекомендации по моделированию невозможно. Однако существуют определенные, выработанные практикой принципы моделирования, придерживаясь которых осуществляют построение соответствующих моделей.

Принцип информационной достаточности связывают с критическим уровнем априорных сведений о системе (уровнем информационной достаточности), при достижении которого можно получить адекватную модель системы. Этот уровень определяется наличием информации об элементах системы и существенных связях между ними, которые формируют эмерджентные свойства системы. При отсутствии данных сведений моделирование не приведет к получению новой информации о системе, т.е. окажется бес-

Принцип параметризации. Некоторые относительно изолированные подсистемы характеризуются определенным параметром (возможно, векторным). Значения этого параметра могут зависеть от ситуаций, складывающихся в исследуемой системе. Такие подсистемы в модели можно заменять соответствующим параметром, а не описывать процесс их функционирования. Принцип параметризации позволяет иногда в значительной мере сократить объем и продолжительность моделирования исследуемой системы. Однако надо иметь в виду, что параметризация

снижает адекватность модели и должна употребляться с известной осторожностью.

Принцип агрегирования. В большинстве случаев сложную систему можно структурно представить состоящей из агрегатов (подсистем), для адекватного математического описания которых оказываются пригодными некоторые стандартные математические схемы. В единую имитационную модель агрегаты объединяются с помощью оператора сопряжения. Принцип агрегирования позволяет в рамках единой имитационной системы достаточно гибко перестраивать имитационную модель в зависимости от задач исследования.

Принцип осуществимости. Создаваемая модель должна обеспечивать достижение поставленной цели исследования.

Принцип рационального использования факторного пространства. Имитационное моделирование предполагает планирование компьютерного эксперимента. В пространстве управляемых переменных (факторном пространстве) точки, отображающие условия экспериментов, следует выбирать в соответствии с определенным (оптимальным) планом эксперимента. При фиксированном числе опытов (реализаций) оптимальный план приводит к наибольшему объему информации, полученной из эксперимента. Принцип рационального использования факторного пространства позволяет в значительной мере экономить время расчетов на

Принцип множественности моделей. Любая модель реальной системы учитывает не все факторы, действующие в системе. Модель как средство отражения реального явления как бы усиливает действие одних факторов, ослабляя действие других. При использовании любой конкретной модели познаются лишь некоторые стороны реальности, для более полного отражения действительности необходим ряд («веер») моделей, позволяющий с разных сторон и с разной степенью детализации (в зависимости от цели исследования) отражать изучаемое явление.

Виды моделей. Расширим схему классификации моделей. На первое место среди классификационных признаков моделей можно также поставить метод (способ) моделирования. На практике часто встречаются всевозможные комбинации различных знаковых (семиотических) моделей в виде, например, графоаналитических или логико-математических моделей. Программы для ЭВМ реализуют, как правило, логико-математическую модель. Важным классификационным признаком моделей является мощность множества состояний моделируемой системы. По этому признаку модели делят на

Модель называется статической, если множество возможных состояний моделируемой системы является единичным, т.е. содержит всего один элемент. Такая система не меняет своего состояния в течение рассматриваемого интервала времени.

Если состояния системы могут меняться во времени, то данную модель называют динамической.

Динамические модели в зависимости от мощности множества состояний 2 делят на модели с дискретными состояниями (множество состояний конечно или счетно, т.е. не более чем счетно) и модели с непрерывным множеством состояний.

Процесс смены состояний называют движением системы.

Смена состояний системы может происходить в фиксированные моменты времени, множество которых дискретно и заранее определено. Такой процесс смены состояний называют последовательностью. Последовательности задают обычно разностными уравнениями. Если множество моментов смены состояний системы непрерывно в пределах некоторого временного интервала, то процесс движения системы обычно описывают дифференциальными уравнениями. Кроме того, различают детерминированные и вероятностные модели.

При построении детерминированных моделей неопределенные факторы любой природы не рассматриваются. При учете стохастической неопределенности (случайных факто-

ров) используют вероятностные модели. Предмет исследования теории вероятностей связывают с явлениями природы, техническими, экономическими объектами или процессами, обладающими статистической устойчивостью. Подобные явления (факторы) принято называть случайными.

Случайные факторы в моделях систем учитываются в виде случайных событий, случайных величин и случайных функций. Случайные величины и случайные функции при необходимости могут быть выражены через соответствующие случайные события. В классе стохастических моделей особо выделяют статистические модели. Статистическая модель формируется по схеме эксперимента со случайным исходом. При этом случайное воздействие может подаваться на вход модели либо формироваться с помощью датчиков значений случайных переменных (имита-

Подобные датчики исключительно широко используются при моделировании больших экономических систем, например в имитационных моделях при формировании временных интервалов между различными состояниями объекта

Из подобной расширенной трактовки формализации вытекает значительное расширение форм представления моделей. Это и наборы экспериментальных данных, и тексты математических описаний, и экспертные высказывания, и графические образы, и готовые программы, и др.

Имитационная модель системы и соответствующее программное обеспечение для проведения вычислительных экспериментов с ней на ЭВМ составляет основу имитационной системы.

Имитационные системы - один из видов проблемно-ориентированных интерактивных систем.

К проблемно-ориентированным интерактивным системам относятся также оптимизационные и экспертные системы. Перечисленные виды систем образуют некоторое единство, границы между ними размыты.

Завершая рассмотрение основных видов моделей, используемых при исследовании систем, отметим, что содержание предметной области и вводимого результата операции также дает основу для содержательной классификации моделей систем. С этой точки зрения различают следующие установившиеся виды моделей: модели технико-экономического анализа, экономико-математические модели, модели строгого и нестрогого конфликта и т.д. По тому же принципу выделяют модели систем массового обслуживания, модели систем управления запасами и т.д.

Для учета при моделировании систем неопределенности нестохастического характера используются положения теории

4.3. Вычислительные эксперименты с моделями экономических систем

Введем общую схему эксперимента (рис. 4.2). На объект экспериментального исследования в качестве входных переменных воздействует группа факторов X:

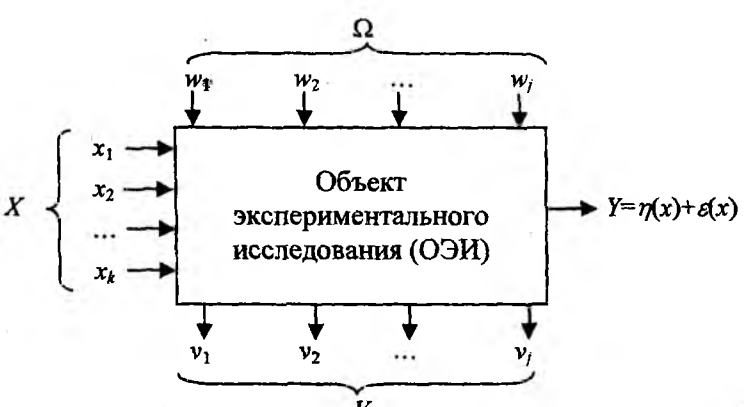


Рис. 4.2.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_k \end{bmatrix}$$

Эксперимент проводится при определенных фиксированных значениях входных переменных. Совокупность значений этих переменных, или уровней факторов, составляет комплекс условий эксперимента. Результат эксперимента описывается случайной переменной Y, которая на рис. 2 показана как выходная переменная. В общем случае Y может быть вектором:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_j \\ \dots \\ y_s \end{bmatrix}$$

Эксперимент заключается в наблюдении за переменной Y, т.е. в определении значения переменной Y при реализации определенного комплекса условий.

Случайный характер выходной переменной обусловлен действием на объект экспериментального исследования группы неконтролируемых факторов. Действие части из них носит случайный, нерегулярный характер. На схеме эксперимента (см. рис. 2) случайные факторы изображены в виде вектора помех Ω с компонентами w_1, w_2, ..., w_j. Случайные помехи образуют еще одну группу входных переменных. Часто в различного рода экспериментах наряду с основной выходной переменной Y приходится следить за группой неосновных выходных переменных, значения которых также в общем случае зависят от комплекса условий эксперимента.

Вектор неосновных выходных переменных обозначим V, его компоненты - $v_1, v_2, ..., v_\nu$. На этот вектор обычно налагаются различные ограничения, определяющие наряду с другими условиями вид эксперимента.

Многомерное пространство, координатами которого служат контролируемые переменные (факторы), называется факторным пространством.

Будем полагать, что результат эксперимента Y функционально связан с комплексом условий эксперимента X и случайным вектором помех Ω. Таким образом,

$$Y = \eta(X, \Omega).$$

Действие помех приводит к тому, что однозначная функциональная зависимость результата эксперимента Y от комплекса условий X, свойственная экспериментам с идеальной воспроизводимостью, нарушается добавлением случайной переменной $\varepsilon(x)$. Будем называть $\varepsilon(x)$ ошибкой опыта и предполагать, что она суммируется с некоторой регулярной (неслучайной) составляющей $\eta(x)$:

$$Y = \eta(x) + \varepsilon(x).$$

Выражение $Y = \eta(x) + \varepsilon(x)$ называют моделью наблюдения. Результат опыта Y является случайной переменной, так как ошибка опыта $\varepsilon(x)$ есть случайная переменная. Регулярную (неслучайную) часть Y, т.е. $\eta(x)$, называют функцией отклика. Функция отклика отражает сущность исследуемого процесса, ибо она связывает результат эксперимента с основными факторами.

Получить по результатам экспериментов представление о функции отклика - одна из основных задач эксперимента. Простейшим примером функции отклика является функция потребления:

$$\ln C = B_0 + B_1 \ln Y + B_2 \ln P,$$

где C - потребление некоторого пищевого продукта на душу населения в рассматриваемом году;

Y - реальный доход на душу населения в рассматриваемом году;

P - индекс цен на продукт;

B_0, B_1, B_2 - параметры модели.

В связи с этим простейшим, на первый взгляд, выражением у серьезного исследователя, несомненно, возникает ряд вопросов:

1. Все ли переменные, которые влияют на результат эксперимента, учтены в данной модели?

2. Все ли переменные, перечисленные в модели, являются существенными? Можно ли упростить модель, убрав ту или иную переменную?

3. Какой метод использовать для оценки коэффициентов B_0, B_1, B_2?

4. Адекватна ли данная модель реальному экономическому процессу?

Приведенная модель является статической, т.е. не учитывает влияние такого фактора, как время. Введение фактора времени превратит ее в динамическую модель.

Наиболее широко в эконометрике представлены такие типы моделей, как:

- модели временных рядов (оценивают тренд, направление процесса, сезонность и т.д.);
- регрессионные модели (позволяют аппроксимировать опытные данные полиномами);
- модели корреляционного анализа (устанавливают зависимость между переменными, оценивают интенсивность этой зависимости);
- модели дисперсионного анализа (устанавливают значимость качественного фактора для значения наблюдаемой переменной);
- модели факторного анализа (оценивают значимость тех или иных факторов и их вклад в наблюдаемую переменную; помогают выявить латентные (скрытые) факторы) и др.

К настоящему времени в связи с интенсивным развитием компьютерной техники существует достаточно много пакетов прикладных программ, как по прикладной статистике, так и по эконометрике. Вместе с тем все эти программы являются бесполезными, если их пользователь не знает основ теории.

В ряде случаев исследователь в процессе эксперимента имеет возможность не только контролировать входные переменные (компоненты вектора X), но и управлять ими, т.е. по своей воле устанавливать факторы на различные уровни. Такой эксперимент называют активным. В пассивном эксперименте исследователь лишен возможности управлять факторами.

Вычислительный эксперимент всегда связан с использованием информации, которую принято подразделять на входную, внутреннюю, выходную.

Требованиями к информации являются: своевременность, достоверность, ценность, полнота, доступность, определенность, краткость, глубина, убедительность и др. Степень выполнения этих требований сказывается на эффективности вычислительного эксперимента.

4.4. Эффективность вычислительного эксперимента с эконометрической моделью

В полемике о первых глобальных моделях американские исследователи отмечали, что в результате «вульгарного» подхода к моделированию можно получить не модель реального объекта, а модель собственного невежества. При этом традиционный критерий качества моделей сложных систем - непротиворечив здравому смыслу - признан

Модель сложной системы - также система, состоящая из моделей ее элементов и моделей взаимодействий между ними. В этой связи оправданным является введение понятий «качество модели» и «эффективность моделирования» экономической системы.

Эффективность моделирования связана со способностью достигать цели исследования, для которого построена модель. Из двух альтернативных моделей более предпочтительной является та, результаты использования которой по прямому назначению лучше. В частности, качество объясняющих моделей тем выше, чем правильней они описывают закономерности связей факторов и показателей. Качество предсказывающих моделей прямо пропорционально точности предсказанных значений функ-

Оценка качества модели заключается в выработке оценочного суждения относительно пригодности ее к решению определенного круга задач на основе измерения (оценивания) эффективности вычислительного (машинного) эксперимента на ней.

Выбор варианта модели производится в результате оценивания и сопоставления возможных альтернатив или вариантов по эффективности.

Показатель эффективности. Показатель эффективности $W(U)$ модели есть мера степени соответствия реального результата моделирования требуемому. [9, 10, 12].

Основным требованием при выборе показателя эффективности является соответствие показателю цели, который отображается требуемым результатом $Y_{тр}$. Помимо указанного требования показатель эффективности должен удовлетворять требованиям содержательности и интерпретируемости, измеримости и соответствия системе предпочтений исследователя (оперирующей стороны). Для описания соответствия реального результата $Y(U)$ моделирования требуемому $Y_{тр}$ на множестве результатов

$$\rho = \rho\left(Y(U),\ Y_{тр}\right), \qquad (1.6)$$

которую назовем функцией соответствия.

Введение функции соответствия позволяет принять ее в качестве показателя эффективности, если $Y(U)$ и $Y_{тр}$ являются неслучайными переменными:

$$W(U) = \rho\left(Y(U), Y_{\text{тр}}\right). \qquad (1.7)$$

Если среди переменных имеются случайные, то в качестве показателя эффективности следует принять математическое ожидание функции соответствия, т.е.

$$W(U) = M\left[\rho\left(Y(U), Y_{\text{тр}}\right)\right]. \qquad (1.8)$$

Частными видами математического ожидания функции соответствия являются:

1) показатель среднего результата, используемый в тех случаях, когда цель операции выражается скалярной пере-

2) показатель вероятностной гарантии, определяющий вероятность получения результата не меньше требуемого уровня;

3) показатель вероятностно-гарантированного результата, определяющий минимальный результат Y_α, получаемый с заданной (как правило, высокой) ве-

Для случая, когда имеет место неопределенность результата Y, обусловленная факторами $v \in V$ нестохастического характера (например, поведенческая неопределенность), вводится, например, показатель эффективности следующего вида

$$W(U) = \min_{v \in V} M\left[\rho\left(Y(U, v), Y_{\text{тр}}\right)\right]. \qquad (1.9)$$

Смысл данного показателя заключается в том, что он является гарантированным уровнем показателя эффективности операции (хуже не бывает).

Для сопоставления вариантов организации вычислительного эксперимента, характеризующихся различной степенью достижения цели (эффективностью), и осуществления направленного выбора модели для него из множества допустимых вводят соответствующее правило сопоставления. Данное правило называют критерием эффективности. Критерий эффективности вводится на основе концепции рационального

Существуют три концепции рационального поведения: пригодности, оптимизации и адаптивизации. При выборе модели на их множестве в основе решения задачи, как правило,

лежит концепция оптимизации. С учетом данной концепции различают:

1. Критерий наибольшего результата. Оптимальную модель выбирают из условия

$$U^* : \max_{u \in U} Y(U).$$

2. Критерий наибольшего среднего результата. Данный критерий рекомендует выбирать в качестве оптимальной модели U^*, для которой

$$U^* : \max_{U \in V} M[Y(U)].$$

3. Критерий наибольшей вероятностной гарантии результата. При указанном критерии оптимальной считается модель U^* такая, что

$$U^* : \max_{U \in V} P\{Y(U) \geq Y_{\text{тр}}\}.$$

4. Критерий наибольшего вероятностно-гарантированного результата. Вероятностно-гарантированным результатом называют уровень результата $Y_\alpha(U)$, не ниже которого будет получен реальный результат с заданной вероятностью

$$\alpha = P\{Y(U) \geq Y_\alpha(U)\}.$$

Согласно критерию наибольшего вероятностно-гарантированного результата оптимальную модель выбирают из условия

$$U^* : \max_{u \in V} Y_\alpha(U).$$

5. Критерий гарантированного результата. При этом критерии, используемом при наличии неопределенных факторов V нестохастического характера, оптимальную модель выбирают из условия

$$U^* : \max_{u \in U} \min_{v \in V} M[\rho(v(u,v) \geq Y_{\text{тр}})].$$

Это условие отражает принцип максимина, а модель U^*, соответствующую данному критерию, называют максиминной.

Оценка эффективности модели. Проверка и обоснование модели - необходимые составные части системного исследования эффективности вычислительного эксперимента.

Достаточно общий формальный подход к анализу эффективности процесса моделирования большой системы может быть получен с использованием модели проблемы принятия решения В.В. Подиновского, в которой:

U - множество вариантов организации и построения модели вычислительного эксперимента;

Λ - множество значений определенных и неопределенных факторов;

G - множество исходов моделирования;

Y - вектор характеристик (признаков) исхода $g \in G$, т.е. количественное выражение результатов реализации проекта;

ψ - отображение, ставящее в соответствие множеству моделей U и факторов Λ множество результатов Y;

W - показатель эффективности;

K_r - критерий эффективности;

ρ - модель предпочтений ЛПР на элементах множества:

$$D=<U, \Lambda, G, Y, W, K_r>;$$

θ - остальная информация о проблемной ситуации.

С учетом приведенных обозначений достаточно общая модель оценивания эффективности вычислительного эксперимента представляется в виде системы:

$$<U, \Lambda, G, Y, \psi, W, K_r, \rho, \theta>.$$

Как следует из анализа данной системы, наиболее существенной частью исследований, связанных с оцениванием качества модели системы и эффективности моделирования, является выбор и обоснование системы показателей и критериев эффективности вычислительного

К настоящему времени достаточно полного, отвечающего современным требованиям исследования по оцениванию эффективности моделирования не существует. Однако положения, изложенные выше, позволяют сделать некоторые выводы:

1) чтобы получить количественное описание системы, нужно найти адекватное математическое описание лишь ее существенных особенностей, т.е. составить адекватную математическую модель системы;

2) нужно всегда проявлять осторожность при сопоставлении результатов расчетов с физическим явлением, ибо математическая модель никогда не бывает тождественна наблюдаемому явлению. В этой связи трудно переоценить роль экспертного оценивания.

Проверка соответствия модели своему назначению. Поскольку ядро имитационной модели связывают с триадой «математическая модель, алгоритм, программа», то и оценка качества имитационной модели сопряжена с анализом качества каждой из перечисленных составляющих.

В этой связи рассматривают: целевые, эксплуатационные, модификационные и другие свойства имитационной модели.

Целевыми называются свойства модели, характеризующие степень ее соответствия целям и задачам конкретного исследования. К целевым свойствам моделей относят адекватность, устойчивость, точность, полезность, результатив-

Эксплуатационными называются свойства моделей систем, определяющие удобство эксплуатации модели пользователем. К ним относятся производительность, надежность, защищенность, эргономичность, завершенность

Модификационными называются свойства моделей, определяющие удобство внесения изменений в модель, т.е. ее модификации при развитии и совершенствовании исследуемой системы. К модификационным свойствам относятся понятность, структуризованность, расширяемость, доступность и др.

Перечисленные группы свойств достаточно полно определяют возможность использования модели по

Существует несколько стадий проверки соответствия модели своему назначению:

1. Верификация - подтверждение того, что модель ведет себя так, как было задумано.

Проверка адекватности - сопоставление поведения двух объектов: системы и модели, эталонной и приближенной моделей.

2. Проблемный анализ - формирование на основе экспериментов с моделью выводов, содержательно и статистически значимых.

3. Систематическая проверка сохранности программной реализации модели и ее базы данных на ЭВМ, которая выполняется тестированием или решением контрольных задач.

Очень общий подход к проверке моделей вытекает из идеи Тьюринга об «игре в имитацию». Результаты моделирования реальной (имевшей место в прошлом) ситуации предоставляются квалифицированному эксперту с реальной, информацией. Модель достаточно адекватна реальной системе, если эксперт не может различить, какая часть информации получена на модели, а какая - из реальной

Оценка адекватности модели - наиболее ответственный этап оценки ее качества.

Под адекватностью модели понимают ее соответствие изучаемому явлению. Адекватность, как правило, измеряется в качественной шкале: модель признается либо адекватной, либо неадекватной. В некоторых случаях могут использоваться и количественные показатели, позволяющие оценить степень совпадения векторов характеристик реальной системы и

Расхождение между векторами вызывается, в частности, следующими причинами:

- нестабильностью неопределенных факторов, влияющих на эффективность системы;
- некритичностью выходного показателя к экзогенным переменным;
- недостоверностью исходных данных;
- нерепрезентативностью выборки, используемой для построения модели и др.

Адекватность модели тесно связана с теми положениями, на основе которых было осуществлено ее построение. Важную роль играют также уровень стабильности структуры связей между факторами, экзогенными и эндогенными переменными модели, а также выбор оптимального набора переменных, учитываемых в модели. Количественная оценка адекватности модели системы в большинстве практически важных случаев может быть определена лишь косвенно. В настоящее время для этого используются ретроспективный анализ, логико-математический анализ, экспертное оценивание и др.

Ретроспективный анализ заключается в сравнении фактических данных, полученных за некоторый период наблюдения (эксплуатации, применения и т.д.), с результатами расчетов для того же периода, полученными с помощью оцениваемой модели. Хотя, строго говоря, совпадение результатов для прошлого никоим образом не гарантирует правильности предсказания (расчетов) в будущем, тем не менее ретроспективный анализ полезен для подтверждения того факта, что в модели в целом правильно учтены закономерности описываемых ею процессов.

При проведении ретроспективного анализа для оценки степени, соответствия результатов расчета и ретроспективных данных используются различные методы, например, статистические процедуры.

Логико-математический анализ модели заключается в проверке положений и гипотез, принятых при разработке модели, а также: правильности преобразования информации в модели от входа к выходу. Проверке подлежат:

- выполнение тех или иных постулатов при математическом описании систем и процессов;
- непротиворечивость смыслу гипотез относительно поведения соответствующих систем;
- правильность основных математических соотношений в модели;

• полнота учета внешних (возмущающих) воздействий и др.

Логико-математический анализ в настоящее время является основным методом оценки адекватности таких моделей, для которых отсутствуют данные натурного эксперимента и ретроспективных наблюдений.

Проведение логико-математического анализа целесообразно выполнять лицам, не принимающим непосредственного участия в разработке модели (оппонентам).

Экспертная оценка адекватности модели заключается в оценивании группой экспертов результатов расчетов так называемых «тестовых» задач (соответствующих, как правило, наиболее типичным и экстремальным ситуациям). [4, 29, 31, 38].

Экспертная оценка адекватности выполнима для любых моделей и с этой точки зрения является универсальным методом. Недостаток экспертной оценки адекватности - малая надежность выводов при исследовании моделей, описывающих функционирование принципиально новых, не имеющих аналогов экономических систем.

Перечень методов, которые позволяют сравнить модели систем по адекватности, может быть существенно расширен за счет привлечения к решению данной задачи различных методов статистического анализа.

Оценка полезности модели. Адекватная модель системы является важным инструментом проведения системных исследований. Однако сходные по адекватности альтернативные модели системы могут существенно отличаться по своей

Под полезностью модели будем понимать ценность информации, генерируемой в ходе моделирования.

В общем случае ценность информации определяют как свойство, характеризующее ее пригодность к использованию в соответствующей области целенаправленной деятельности че-

Ясно, что ценность информации зависит от той цели, к которой стремится принимающий информацию объект (или субъект). Считается, что цель ставится извне, а информация

нужна лишь для того, чтобы достичь цель наискорейшим и оптимальным образом.

Очевидно, что ценность информации, получаемой с использованием компьютерных моделей систем, также является важным свойством, характеризующим их качество и определяющим эффективность вычислительного эксперимента с

За меру ценности информации А.А. Харкевич предложил принять количество информации, необходимое для достижения поставленной цели. Так, если до получения информации вероятность достижения цели равнялась P_0 а после ее получения – P_1,то ценность информации определяется как логарифм отношения P_1/P_0. Ценность информации при этом измеряется в битах. Заметим, что на практике возможно получить лишь весьма приближенные оценки этих вероятностей.

Подход А.А. Харкевича к оценке полезности информации развит в работах Р.Л. Стратоновича, Б.А. Гришанина и М.К. Гавурина, где понятие ценности информации базируется на статистической теории информации и теории решений. Сущность метода состоит в том, что, кроме вероятностных характеристик неопределенности объекта до и после получения информации, вводятся функции штрафов или потерь. Максимальной ценностью обладает то количество информации, которое уменьшает потери до минимума при

В том варианте теории ценности информации, который предложил Н.М.Бонгарт, предполагается, что получаемое количество информации может не иметь никакой ценности или его ценность может быть отрицательной. При этом можно рассмотреть случай, когда при моделировании генерируется ложная информация (дезинформация) и неопределенность не сокращается, а возрастает.

Таким образом, информация считается полезной, если она уменьшает неопределенность сведений об объекте исследования.

Различные подходы к решению проблемы ценности информации имеют принципиально общие черты: предлагается измерять ценность информации через ее количество, связывается ценность информации с поставленной задачей.

Следует также отметить попытки построить семантическую теорию информации, согласно которой для понимания, исследования и использования полученной информации исследователь должен обладать определенным запасом знаний.

В теории информации существует специальный термин «тезаурус». Он означает информацию нижнего уровня, которая необходима для рецепции (и/или генерации) информации на верх-

Если назвать имеющиеся у получателя знания о предмете исследования «тезаурусом» (т.е. неким сводом слов, понятий, названий объектов, соединенных смысловыми связями), то количество информации, содержащееся в некотором сообщении, можно оценит) степенью изменения индивидуального «тезауруса» под воздействием данного сообщения. В связи с этим появилось понятие общечеловеческого тезауруса, относительно которого можно было бы измерять семантическую ценность научной информации. Это сделано в попытках найти такую меру ценности информации, которая не зависела бы от состояния

Таким образом, информация может быть денной (или неценной) в зависимости от преследуемой цели. Ценной информацией считается та, которая помогает достижению цели. Известны два основные метода определения количественной меры ценности информации.

Первый состоит в оценке условных «штрафов» (или затрат времени, средств и других ресурсов) и измеряется снижением затрат ресурсов в результате ее получения.

Мерой ценности во втором методе является логарифм отношения вероятностей достижения цели до получения информации (P_0) и после него (P_1):

$$c_{\text{inf}} = \log_2 \frac{P_1}{P_0}.$$

В обоих случаях ценность может быть как положительной, так отрицательной.

Оценка точности моделирования. Вычислительный эксперимент неизбежно связан с появлением погрешностей. При этом принят различать следующие их виды:

- погрешности методов;
- погрешности округления (вычислительные погрешности);
- погрешности вычислительной техники;
- погрешности, возникающие из-за неточности исходных данных (неустранимые погрешности) и др.

За исключением нескольких очень простых случаев, исследование погрешностей требует информации о промежуточных или конечных результатах (точных или приближенных). Следовательно, априорное изучение погрешностей, вообще говоря, невозможно. Кроме того, часто не делают различий между терминами «погрешность» и «ошибка». В этой связи отметим, что всякий результат моделирования есть только приближенный результат, содержащий некоторую погрешность. Ошибку же будем связывать прежде всего с неверным использованием математических методов, вычислительной техники и т.д. Наличие погрешностей в результатах вычислительного эксперимента устанавливается путем соответствующей проверки. Подобную проверку будем называть оценкой точности вычислительного эксперимента с

Оценивание точности моделирования представляет собой заданную совокупность операций, при помощи которых в ходе вычислительного эксперимента или по его завершении можно получить представление о его точности.

Вообще говоря, не существует общего метода, который позволял бы осуществить рассматриваемую проверку во всех практически важных случаях модельных исследований. Не-

Очевидно, что эта характеристика при соответствующей постановке задачи исследования модели может рассматриваться и как характеристика ее адекватности.

Так, если цель компьютерного эксперимента в том, чтобы возможно точнее воспроизвести моделируемый процесс, то об адекватности моделирования можно судить по множеству оценок точности, рассчитанных для всех рассматриваемых точек факторного пространства. Образно говоря, в данном случае оценка точности модели есть локальная оценка ее адекватности, а оценка адекватности представляет собой интегральную оценку точности модели для рассматриваемой области факторного пространства. Вместе с тем, неточная модель может быть и адекватной. Это, например, имеет место в случае, когда целью эксперимента является выявление тенденций изменения эндогенных (выходных) переменных при изменении входных параметров модели, а сами значения выходных

Подобная ситуация имеет место при компьютерном экспериментировании с большинством концептуальных моделей сложных экономических систем.

При сравнении значений выходных переменных двух моделей (или исследуемой модели с известными фактическими данными) используют также и такую характеристику точности как среднее абсолютное значение погрешности

$$\overline{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| y_i^* - \hat{y}_i \right|}{n},$$

где y_i^*, $\hat{y}_i$ - значения выходной переменной Y сравниваемых моделей;

n - число рассматриваемых точек факторного пространства.

Количественной характеристикой точности является также и среднеквадратическое отклонение значений выходной перемен-

ной одной модели относительно значений выходной переменной другой модели (или фактических данных):

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left| y_i^* - \hat{y}_i \right|^2}{n}},$$

Между двумя показателями $\overline{\Delta}$ и σ_R существует связь, выражаемая приблизительной зависимостью

$$\sigma_R \approx 1{,}25\overline{\Delta}.$$

Отметим, что наряду со средним абсолютным значением погрешности применяют также среднее относительное значение погрешности, которое рассчитывают по

$$\overline{\Delta}_{отн} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left| y_i^* - \hat{y}_i \right|}{y_i^*}.$$

Различные значения $\overline{\Delta}_{отн}$ содержательно интерпретируют следующим образом.

Значения $\overline{\Delta}_{отн}$	Интерпретация
0,1	Высокая точность
0,1-0,2	Хорошая точность
0,2-0,5	Удовлетворительная точность
0,5	Неудовлетворительная точность

При сравнении результатов моделирования с фактическими данными может оказаться полезным и коэффициент несоответствия

$$K = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i^* - \hat{y}_i \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(\overline{y} - \hat{y}_i \right)^2}},$$

где

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^*}{n}$$

Если K близок к 1, то рассматриваемая модель может быть просто заменена средним значением выходной переменной.

Рассмотренные целевые свойства модели далеко не исчерпывают их полного перечня. Например, при рассмотрении прогнозных моделей непротиворечивой является такая модель, которая на двух различных репрезентативных выборках из одной и той же генеральной совокупности дает сходные результаты прогноза или идентификации. Возможно рассмотрение и других целевых качеств имитационных моделей.

Алгоритмизация модели. После того как задача поставлена и формализована, возникает необходимость в разработке эффективных алгоритмов ее решения.

Под алгоритмом принято понимать конечный набор правил, обеспечивающий решение любой задачи из некоторого заданного класса задач.

Выбор алгоритма зависит от характера решаемой задачи.

Общая схема определения термина «алгоритм» была предложена академиком А.Н. Колмогоровым. Она позволила, в частности, доказать эквивалентность ранее данных определений. В рамках этой схемы возможны различные уточнения определения понятия «алгоритм» с учетом особенности решаемых классов задач.

Один и тот же алгоритм может быть реализован различными способами. Каждому алгоритму можно поставить в соответствие его имитатор, который выполняет те же операции, что и данный алгоритм.

В связи с тем, что общие свойства алгоритмов и требования к ним рассматриваются в специальном разделе математики - теории алгоритмов, остановимся лишь на тех из них, которые имеют принципиальное значение для дальнейшего изложения.

Алгоритм характеризуется следующими основными свойствами: детерминированностью, массовостью, результативностью, реализуемостью, сложностью.

Детерминированность означает, что правила, образующие алгоритм, должны быть строго определенными, однозначными и непротиворечивыми. Этим обеспечивается его независимость от исполнителя, будь то человек или компьютер.

Результативность - это свойство алгоритма обеспечивать решение задачи за конечное число шагов. В противном случае считается, что алгоритм неприменим для решения данной задачи. Результативный алгоритм характеризуется конечностью времени его выполнения. Оно связано с числом шагов, приводящих к решению задачи.

Массовость - это свойство алгоритма обеспечивать решение не одной конкретной задачи, а целого множества задач.

Физическая реализуемость алгоритма - свойство алгоритма, характеризуемое оценками минимальных величин различных ресурсов, необходимых для его реализации.

Сложность алгоритма определяется сложностью его описания и в ряде случаев оценивается минимально возможной длиной отображающей его программы.

Алгоритм всегда описывается в терминах выполнения каких-то действий над какими-то объектами. Поэтому в действительности разработчик алгоритма явно или неявно предполагает существование некоторой реальной или гипотетической инструментальной машины (автомата, ЭВМ и т.п.), на которой может выполняться интересующая его

Если инструментальная машина описана полностью и непротиворечиво, то запись алгоритма на соответствующем данной машине языке должна восприниматься данной машиной, вообще говоря, однозначно.

Для реализации любого алгоритма на компьютере необходимо его представить в какой-либо форме. И как для задачи важна ее формулировка, так и для алгоритма чрезвычайно

важна форма его записи. Она должна быть по возможности наглядной, но главное - однозначно понятной исполнителю, будь то человек или компьютер.

Этим требованиям удовлетворяет словесно-формульная форма записи алгоритмов.

Для графического представления структуры алгоритмов часто используются блок-схемы. Данная форма записи представляет собой унифицированный набор геометрических блоков (прямоугольников, ромбов и т.п.), соединенных стрелками. Наглядность представления алгоритма также может быть отнесена к его свойствам.

Таким образом, алгоритм есть последовательность предписаний, после выполнения которых можно перейти за конечное число шагов от условий задачи к ее решению. При этом каждый алгоритм характеризуется определенным набором показателей, учет которых позволяет сравнивать альтернативные алгоритмы между собой.

Сложность постановки и решения задачи оценивания качества машинной программы обусловлена тем, что техника программирования не базируется на какой-либо определенной фундаментальной теории и скорее является искусством. Действительно, для решения конкретной задачи можно предложить несколько программ, разработанных разными программистами и отличающихся друг от друга последовательностью логических операций, временем вычислений, степенью использования оперативной памяти компьютера и т.д.

Чаще всего при оценке качества программ рассматривают сразу несколько характеристик, которые могут быть противоречивыми. В этих условиях бывает трудно сформулировать однозначный критерий выбора программы на множестве альтернативных вариантов.

Очевидно, можно ввести целый комплекс требований, являющихся общими для программ любого вида. К ним в первую очередь относится надежность программы, затем ее

структурированность и модульность. Важным качеством является возможность модификации программы. Особым случаем модификации программы служит перенос ее на другой тип компьютера, более совершенный, чем предыдущий.

В качестве наиболее часто используемых характеристик качества программ можно также назвать документированность, простоту и удобство эксплуатации, мобильность, совместимость, стоимость, релевантность, результативность и другие характеристики качества программного обеспечения вычислительного эксперимента.

Таким образом, из изложенного следует, что в общем случае модель системы также является системой, и оценка эффективности вычислительного эксперимента с моделью экономической системы - зачастую задача того же порядка сложности, что и оценка эффективности самой системы.

4.5. Моделирование сезонных и циклических колебаний

Существует несколько основных методов моделирования сезонных и циклических колебаний. К ним

- расчет сезонной компоненты и построение аддитивной или мультипликативной модели временного ряда;
- применение сезонных фиктивных переменных;
- анализ сезонности с помощью автокорреляционной функции;
- использование рядов Фурье.

Рассмотрим подробнее каждый из указанных методов на примере моделирования сезонных колебаний, так как циклические колебания моделируются аналогично.

Расчет сезонной компоненты и построение модели временного ряда. Если амплитуда сезонных колебаний не меняется во времени, то применяют аддитивную модель временного ряда следующего вида:

$$y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t,$$

где T - трендовая компонента; S - сезонная компонента; ε - случайный шум.

Если амплитуда сезонных колебаний со временем изменяется, то применяется мультипликативная модель временного ряда следующего вида:

$$y_t = T_t \cdot S_t + \varepsilon_t,$$

Рассмотрим временной ряд X_{ij}, где i - номер сезона (периода времени внутри года, например месяца или квартала), здесь $i = \overline{1, L}$ (L - число сезонов в году); j - номер года, $j = \overline{1, m}$ (m - общее количество лет). Таким образом, количество уровней исходного ряда равно $L \cdot m = n$.

При построении модели временного ряда сезонная компонента всегда рассчитывается первой, а затем определяется трендовая составляющая. Такой порядок обязателен для всех временных зависимостей.

В качестве сезонной составляющей для аддитивной модели временного ряда применяют абсолютное отклонение Sa_i, а для мультипликативной - индекс сезонности Is_i. Данные сезонные компоненты должны удовлетворять следующим требованиям:

1) в случае аддитивной модели сумма всех сезонных компонент (абсолютных отклонений Sa_i) должна быть равна

2) в случае мультипликативной модели произведение всех сезонных компонент (индексов сезонности Is_i должно быть равно единице.

Перед расчетом сезонной составляющей исходный временной ряд подвергают процедуре выравнивания. Чаще всего используются методы механического выравнивания (метод скользящих средних, экспоненциальное, или медианное, сглаживание и др.). В результате получают ряд выровненных значений $\widetilde{X}_{ij}$ который не содержит сезонной компоненты.

Абсолютное отклонение в i-м сезоне рассчитывается как среднее арифметическое отклонений фактического и выровненного уровней ряда:

$$Sa_i = \frac{\sum_{j=1}^{m}\left(X_{ij} - \widetilde{X}_{ij}\right)}{m}.$$

Индекс сезонности в t-м сезоне рассчитывается как среднее арифметическое отношений фактического уровня ряда к выровненному:

$$Is_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{X_{ij}}{\widetilde{X}_{ij}}.$$

При дальнейшем расчете трендовой составляющей временного ряда используется метод аналитического выравнивания с помощью функций времени или кривых роста. Этот метод применяется не к исходному фактическому динамическому ряду, а к ряду, из которого удалена сезонная компонента. Таким образом, начальные уровни ряда корректируются на величину сезонной компоненты. В случае аддитивной модели из исходных уровней вычитаются абсолютные отклонения Sa_i. При наличии мультипликативной модели начальные уровни временного ряда делятся на индексы сезонности Is_i.

Если при построении аддитивной модели сумма всех абсолютных отклонений не равна нулю, то рассчитывают скорректированные значения сезонных компонент:

$$Sa_{i\,\text{скоррект}} = Sa_i - \frac{\sum_{i=1}^{L} Sa_i}{L},$$

где L - общее количество сезонных компонент.

Использование сезонных фиктивных компонент при моделировании сезонных колебаний. При этом подходе строится регрессионная модель, в которую помимо фактора времени включаются сезонные фиктивные переменные.

Фиктивной переменной называется атрибутивный, или качественный фактор, представленный с помощью определенного цифрового кода. Самый распространенный пример применения фиктивных переменных - это определение разрыва в заработной плате у мужчин и женщин. Допустим, что построена регрессионная зависимость заработной платы рабочих у от их возрастах:

$$y = a_0 + a_1 x.$$

Однако данная регрессионная зависимость не способна в полной мере отразить вариацию результативного признака.

Поэтому в модель необходимо ввести дополнительный фактор, например пол. Это предположение основывается матом, что у мужчин в среднем заработная плата выше, чем у женщин. Так как пол является качественным признаком, то нужно представить данную переменную в виде фиктивной:

$$D = \begin{cases} 1, & \text{мужчина}, \\ 0, & \text{женщина}. \end{cases}$$

Тогда регрессионную модель можно записать с учетом нового фактора:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 D,$$

где параметр a_2 будет отражать в среднем разницу в заработной плате у мужчин и женщин.

Регрессионная модель, включающая в качестве фактора (факторов) фиктивную переменную, называется регрессионной моделью с переменной структурой.

Число сезонных фиктивных переменных в такой модели всегда должно быть на единицу меньше сезонов внутри года, т.е. должно быть равно величине L-1. Так, при моделировании годовых данных регрессионная модель помимо фактора времени должна содержать 11 фиктивных компонент (12-1). При моделировании поквартальных данных регрессионная модель должна содержать три фиктивные компоненты (4-1) и т.д.

Каждому из сезонов соответствует определенное сочетание фиктивных переменных. Сезон, для которого значения всех фиктивных переменных равны нулю, принимается за базу сравнения. Для остальных сезонов одна из фиктивных переменных принимает значение, равное единице. Например, если имеются поквартальные данные, то фиктивные переменные D_2, D_3, D_4 будут принимать следующие значения для каждого из кварталов:

Квартал	Фиктивные значения	D_2	D_3	D_4
1	.....	0	0	0
2	.....	1	0	0
3	.....	0	1	0
4	.....	0	0	1

Общий вид регрессионной модели с переменной структурой в данном случае будет следующим:

$$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 D_2 + a_3 D_3 + a_4 D_4 + \varepsilon_t .$$

Построенная модель регрессии является разновидностью аддитивной модели временного ряда. Для исследуемой регрессионной зависимости базисным будет уравнение тренда для первого квартала:

$$y_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t .$$

Частными случаями регрессионной зависимости будут уравнения трендов для остальных кварталов:

$y_t = a_0 + a_1 t + a_2 + \varepsilon_t$ - для второго квартала;

$y_t = a_0 + a_1 t + a_3 + \varepsilon_t$ - для третьего квартала;

$y_t = a_0 + a_1 t + a_4 + \varepsilon_t$ - для четвертого квартала.

Коэффициент a_1 в данной регрессионной зависимости характеризует среднее абсолютное изменение уровней динамического ряда под влиянием основной тенденции. Оценку сезонной компоненты для каждого сезона можно рассчитать как разность между средним значением свободных членов всех частных регрессионных уравнений и величиной постоянного члена одного из уравнений.

Среднее значение свободных членов всех регрессионны уравнений вычисляется по формуле

$$\bar{a}_0 = \frac{a_0 + (a_0 + a_2) + (a_0 + a_3) + (a_0 + a_4)}{4}.$$

Тогда оценки сезонных отклонений при наличи поквартальных данных могут быть рассчитаны следующим об

$(a_0 - \bar{a}_0)$ - для первого квартала;

$(a_0 + a_2 - \bar{a}_0)$ - для второго квартала;

$(a_0 + a_3 - \bar{a}_0)$ - для третьего квартала;

$(a_0 + a_4 - \bar{a}_0)$ - для четвертого квартала.

В рассмотренной аддитивной модели сумма сезонны отклонений также должна равняться нулю.

Анализ сезонности с помощью автокорреляционно функции. Сезонные компоненты временного ряда могут бы определены с помощью графика автокорреляционно функции - коррелограммы. Интерес представляют значимы выбросы или сильные автокорреляции, которые четк прослеживаются на коррелограмме.

При анализе коррелограммы следует учитывать, чт автокорреляции последовательных лагов формальн зависимы между собой. В связи с этим применени разностных операторов k-го порядка позволит выявить динамическом ряду скрытые периодические зависимости. начале с помощью разностного оператора первого порядк удаляется тренд. После этого строится коррелограмм динамического ряда с удаленным трендом, по которо можно будет определить наличие и период сезонно компоненты, присутствующей в изучаемом временном ряду.

Сезонная и циклическая компоненты являются периоди ческими с разными периодами. Обычно, в экономически временных рядах на длиннопериодическую циклическую со ставляющую накладывается сезонная волна или волны боле высоких частот. При этом выдвигаем предположение о том

что эти волны не влияют друг на друга и можно использовать аддитивную модель их совместного существования.

Изучение экономических причин возникновения периодических колебаний требует специальных исследований. В эконометрической литературе таких исследований явно недостаточно. Известны пятилетние циклы, связанные с переизбранием президентов, десятилетние периоды смены устаревшего оборудования; 50-летние конъюнктурные циклы Кондратьева.

Аналитическое представление экономического периодического колебания в эконометрической, как в учебной, так и в научной литературе, чаще всего связывают с разложением его в ряд Фурье, которое имеется в большинстве статистических пакетов прикладных программ и в *Excel* ("Анализ данных").

Разложение в ряд Фурье справедливо для воспроизведения физически существующих стоячих волн, которые возникают в замкнутых системах, например, струна; мембрана; колокол; электрический колебательный контур. Стоячие волны, или гармоники, имеют периоды, кратные основному периоду колебания.

Применение разложения временного экономического ряда в ряд Фурье приводит к появлению следующих проблем:

- экономический временной ряд за определенный период не является замкнутой системой, и там не могут возникнуть стоячие волны, так как нет отражения волны от концов среды ее существования и прошлое не зависит от текущего времени;
- выделенные гармоники не имеют экономического содержания;
- при изменении длины временного ряда изменяются длины периодов всех ее гармонических составляющих;
- если временной ряд достаточно гладкий, то разложение его в ряд Фурье приводит к точному его воспроизведению с ошибкой, равной нулю. Тогда прогнозирование сведется к точному воспроизведению исходного ряда на следующий

период, что является абсурдным для экономических временных рядов при наличии случайной составляющей;

• может случиться, что гармоника будет равна действительно существующей периодической составляющей экономического временного ряда, но нет гарантии обнаружения всех периодических составляющих временного

Одним их методов аналитического представления периодических составляющих временного ряда является построение ее периодограммы и фильтрация существующих периодических колебаний. Можно предложить методику определения всех периодических составляющих временного ряда, в том числе сезонных и длиннопериодических, определить их достоверность и затем включить в модель.

Процесс моделирования сезонной и циклической компонент выполняется в такой последовательности.

Шаг 1. Выбор модели для выявления периодических составляющих.

Для выявления периодических составляющих временного ряда используется следующая модель:

$$Y_t = a_0 + a_1 t + a_2 \sin(2\pi t / T) + a_3 \cos(2\pi t / T) + e_t,$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 - коэффициенты, определяемые методом наименьших квадратов;

$a_0 + a_1 t = f(t)$ - линейная функция (тренд), которая приводит временной ряд к стационарному виду с нулевым средним значением, без искажения периодических составляющих ос-

$\sin(2\pi t/T)$, $\cos(2\pi t/T)$ - тригонометрические функции периодической составляющей временного ряда, сумма которых позволяет учесть начальную фазу колебания;

t - порядковый номер времени;

T - период или длина волны циклической составляющей временного ряда.

Длительность периода T исследователь задает в интервале от трех единиц до удвоенной длинны временного ряда. Дальнейшее увеличение длинны волны приводит к тому, что

небольшие отрезки этой волны начинают описывать нециклические тенденции временного ряда;

$(2\pi/T)$ - аргумент тригонометрической функции, выраженный в радианах;

$1/T$ - частота, численно равная количеству колебаний в единицу времени;

$$a_2 \sin(2\pi t / T) + a_3 \cos(2\pi t / T) = c \times \cos(2\pi t / T + \varphi),$$

где φ - начальная фаза колебания;

$\varphi = \text{arctg}(a_1/a_2)$;

c - коэффициент, определяемый по формуле

Шаг 2. Создается база данных.

$X_1 = t$ - время;

$X_2 = \sin(2\pi/T)$;

$X_3 = \cos(2\pi/T)$;

Y - значения показателя временного ряда;

где T - период циклической составляющей, значение которого вводит исследователь в пределах от 3 до удвоенной длины временного ряда.

Шаг 3. Вычисление ошибки E модели

$$Y_t = a_0 + a_1 t + a_2 \sin(2\pi t / T) + a_3 \cos(2\pi t / T) = e_t,$$

с помощью статистической функции "Линейн".

Переход к шагу 2 с изменением периода T.

Шаг 4. Построение графика зависимости ошибки модели E временного ряда от периода T циклического фактора, включенного в модель.

Строится график периодограммы зависимости ошибки модели E от T.

Шаг 5. Определение периодических составляющих временного ряда. Определяются такие значения периодов T, при которых ошибка модели E имеет глобальный и локальные минимумы. Обнаруженные периоды характеризуют периодические составляющие временного ряда, среди которых надо исключить ложные периоды. Ложная периодичность от-

носится к периодам (эхам), которые являются кратными величине основного периода. Основной период имеет наименьшую ошибку модели, а кратные периоды или ложные периоды имеют увеличенную ошибку модели. Например, квартальная периодическая составляющая 3 мес. порождает эхо на периодах: 3x2 = 6 мес. или полугодовой период, 3x3 = 9 мес., 3x4 = 12 мес. или годовой период и т.д.

Шаг 6. Определение достоверных периодических составляющих временного ряда.

Для определения достоверности периодических составляющих неавтоматизированным способом строится модель

$$Y_t = a_0 + a_1 t + a_2 \sin(2\pi t / T_1) + a_3 \cos(2\pi t / T_1) + \\ + a_4 \sin(2\pi t / T_2) + a_5 \cos(2\pi t / T_2) + ... + e_t,$$

где T_1 и T_2 - периоды выделенных периодических составляющих.

Анализ характеристик многофакторной модели производится обычным образом. Коэффициенты модели, достоверные по критерию Стьюдента, укажут на достоверность наличия соответствующей периодической составляющей времен-

Шаг 7. Построение модели временного ряда.

Окончательная модель временного ряда с включением всех компонент может иметь следующий вид

$$Y_t = a_0 + a_1 t + a_2 \sin(2\pi t / T_1) + a_3 \cos(2\pi t / T_1) + \\ + a_4 \sin(2\pi t / T_2) + a_5 \cos(2\pi t / T_2) + ... + e_t,$$

где $a_0 + a_1 t = f_{1t}$ - тренд;

$a_2 \sin(2\pi t / T_1) + a_3 \cos(2\pi t / T_1) = f_{2t}$ - сезонная компонента;

T_1 - период сезонной компоненты;

$a_4 \sin(2\pi t / T_2) + a_5 \cos(2\pi t / T_2) = f_{3t}$ - циклическая компонента;

T_2 - период циклической компоненты;

e_t - остатки модели.

Коэффициенты модели рассчитываются методом наименьших квадратов.

Многолетний опыт применения изложенной методики моделирования временных рядов для различных экономических переменных позволяет судить о ее высокой эффективности.

Однако существуют следующие проблемы предложенной модели временного ряда:

• обнаруженные периодические составляющие временного ряда должны иметь экономическое обоснование и механизм их возникновения;

• если возникают трудности в экономической интерпретации тенденций временного ряда (периодических составляющих), то можно использовать алгоритмические методы. Если временной ряд имеет некоторую тенденцию, то эти методы способны ее воспроизвести. А вот почему существует такая тенденция во временном ряду, это вопрос к экономистам, а не к математикам;

• для построения доверительных интервалов регрессии и прогноза необходимо считать более точным не среднее значение временного интервала, а его последнее более свежее значение. К сожалению, в большинстве эконометрической литературы не делается различия в расчетах доверительных интервалов регрессии и прогноза для пространственных и временных рядов.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте понятие экономической системы и перечислите свойства сложных систем.
2. В чем заключается смысл моделирования экономических систем и факторов, влияющих на их эффективность?
3. Перечислите методы моделирования экономических систем.
4. В чем заключаются принципы моделирования экономических систем?

5. Почему имитационное моделирование - основной метод исследования экономических систем?
6. Представьте общую схему эксперимента с экономической системой.
7. Дайте определение и перечислите показатели эффективности моделирования.
8. По каким критериям оценивается эффективность моделирования?
9. Какие целевые свойства модели вам известны?
10. Как осуществляется проверка точности вычислительного эксперимента?
11. Назовите характеристики точности модели.
12. Каковы основные этапы алгоритмизации имитационной модели?

ГЛАВА 5. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

5.1. Методология построения комплексных эконометрических моделей

Построение комплексной эконометрической модели представляет собой многоступенчатый процесс последовательного усовершенствования и расширения модели на основе статистического анализа и экспериментальной верификации результатов. Этапы построения комплексной модели изображены на рис.5.1.

Очевидно, что определению численных оценок модели должен предшествовать теоретический эконометрический анализ, отбор переменных и связей между ними, предварительная обработка статистических рядов. Уравнения и переменные могут быть представлены в нескольких вариантах. Экспериментальная проверка вариантов может привести к рассмотрению новых переменных, новых уравнений и повои их верификации. Следующий затем экспериментальный анализ модели в целом снова может внести коррективы и вызвать необходимость дополнительных проверок.

Опыт работы с моделями показал, что построений комплексной модели лучше начинать с анализа простых малоразмерных моделей. Простое укрупненные модели помогают глубже понять экономические процессы и связи. Малоразмерная модель должна быть комплексной в смысле выражения взаимных связей всех фаз процесса воспроизводства.

Комплексная эконометрическая модель представляет собой совокупность уравнений, описывающих связи между некоторыми макроэкономическими показателями. Соотношения между переменными могут носить стохастический и де-

терминированный характер. Стохастические связи реализуются с некоторой степенью вероятности и описываются регрессионными уравнениями.

Детерминированные соотношении выражаются тождествами и не содержат случайных величин.



Рис.5.1. Процесс построения, квантификации, верификации и применения комплексной эконометрической модели

Примером детерминированной связи может быть соотношение между валовым национальным доходом и валовыми доходами отдельных отраслей.

При определении алгебраическою вида регрессионных уравнений и тождеств чаще всего пользуются линейными, степенными и логарифмическими функциями.

Для многоразмерных моделей с нелинейными связями получение численных оценок параметров и изучение их свойств - довольно сложная задача. Поэтому в комплексных эконометрических моделях предпочтение обычно отдается линейным уравнениям. При этом нелинейность некоторых связей аппроксимируется линейными соотношениями.

Динамика экономических связей обычно учитывается с помощью временных лагов показателей или введением в модель уравнений, характеризующих тренды.

Линейное регрессионное уравнение имеет вид:

$$Y_t = b_0 + b_1 x_{1t} + b_2 x_{2t} + \ldots + b_m x_{mt} + u_t, \qquad (1)$$

где Y_t - зависимая переменная;

$x_{1t}, \ldots, x_{mt}$ - независимые переменные;

u_t - случайное отклонение (остаток);

$b_0, b_1, \ldots, b_m$ - параметры регрессионного уравнения.

Зависимая переменная Y_t в других уравнениях может выступать в роли независимой переменной. С этой точки зрения разделим все переменные модели на эндогенные и экзогенные. К эндогенным относятся все показатели, которые могут быть определены из системы уравнений. Число этих показателей не может превышать числа всех уравнений и тождеств модели.

Все остальные переменные, входящие в модель, называются экзогенными или предетерминированными. Обозначим эндогенные переменные через Y_{it} и предположим, что

число их равно числу всех уравнений и тождеств модели. Тогда модель можно записать в виде

$$\begin{cases} Y_{1t} = a_{11}Y_{1t} + \ldots + a_{1k}Y_{kt} + b_{10}x_{0t} + \ldots + b_{1m}x_{mt} + u_{1t}; \\ Y_{2t} = a_{21}Y_{1t} + \ldots + a_{2k}Y_{kt} + b_{20}x_{0t} + \ldots + b_{2m}x_{mt} + u_{2t}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_{kt} = a_{k1}Y_{1t} + \ldots + a_{kk}Y_{kt} + b_{k0}x_{0t} + \ldots + b_{km}x_{mt} + u_{kt}; \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $x_{0t} = 1$. Отдельные коэффициенты $a_{11},\ldots,a_{kk}$ и $b_{10},\ldots,b_{km}$ могут равняться нулю, если соответствующая переменная не входит в уравнения. Остатки u_{it}, $i = \overline{1,k}$, также могут равняться нулю, если данное уравнение носит детерминированный характер и описывается тождеством.

Систему (2) можно переписать в матричном виде:

$$y = Ay + Bx + u, \quad (3)$$

где $y = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{kt} \end{pmatrix}$ - вектор эндогенных переменных размерности k;

$y = \begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{mt} \end{pmatrix}$ - вектор экзогенных переменных размерности m;

$y = \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{kt} \end{pmatrix}$ - вектор остатков размерности k:

A - квадратная матрица порядка k;

B - прямоугольная матрица порядка $k \times m$.

Если матрица A имеет треугольный вид, то система называется рекурсивной.

Основные блоки переменных и их связи в комплексной эконометрической модели представлены на рис. 5.2.

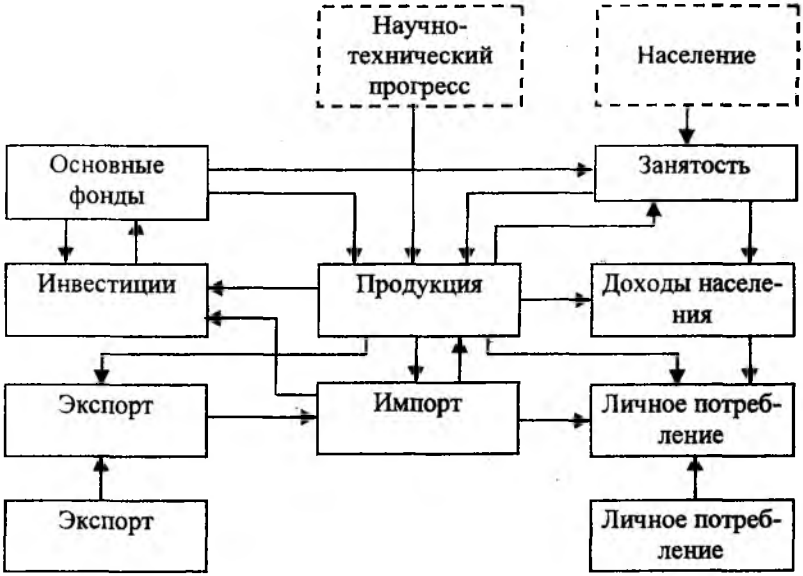


Рис. 5.2 Основные блоки переменных и их связи в комплексной эконометрической модели

5.2. Статистические характеристики эконометрической модели

Корректность построения эконометрической модели проверяется чаще всего с помощью следующих характеристик:

1) стандартных ошибок для каждого уравнения;

2) коэффициента детерминации (или множественной корреляции) для каждого уравнения;

3) стандартных ошибок параметров;

4) автокорреляции остатков. Чем больше автокорреляция остатков (для разных лагов), тем больше уверенность в том, что существует некоторый неучтенный фактор, объясняющий движение эндогенных переменных, и тем ниже эффективность оценивания по обычному и двухшаговому методам наименьших квадратов;

5) показателей мультиколлинеарности между переменными из правой части системы. Полная корреляция между двумя какими-либо факторами из правой части уравнения делает невозможным вычисление параметров, ни одним из приведенных выше способов. Частичная мультиколлинеарность ведет к увеличению стандартных ошибок параметров и, следовательно, к снижению эффективности оценок;

6) показателей корректности всей модели в целом. Эти показатели представляют собой функции от всех статистических характеристик для отдельных уравнений.

Результаты тестов вместе с экономической интерпретацией параметров могут служить основой для дальнейших экспериментов с моделью, ведущих к ее усовершенствованию.

Стандартная ошибка уравнения. Стандартная ошибка уравнения, коэффициенты множественной детерминации и корреляции являются характеристиками, с помощью которых проверяется правильность выбора независимых переменных уравнения.

Стандартная (среднеквадратическая) ошибка зависимой переменной y вычисляется из соотношения

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}, \qquad (1)$$

где

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t . \qquad (2)$$

Стандартная ошибка с поправкой на число степеней свободы оценивается по формуле:

$$\bar{S}_y = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}. \qquad (3)$$

Аналогичным образом вычисляются стандартные ошибки уравнения:

$$S_u = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t^2};. \qquad (4)$$

$$\overline{S}_u = \sqrt{\frac{1}{n-(m+1)}\sum_{i=1}^{n} u_i^2};. \qquad (5)$$

Формулы (4), (5) становятся очевидными, если вспомнить, что средняя остатков должна равняться 0, а число степеней свободы должно быть уменьшено на число независимых переменных.

Стандартная ошибка остатков уравнения с поправкой на число степеней свободы (5) характеризует абсолютную величину разброса случайной составляющей регрессионного уравнения.

Часто в целях сравнения остатка со средним значением эндогенной переменной вычисляют следующие относительные величины: $\frac{S_u}{\bar{y}}$, $\frac{\overline{S}_u}{\bar{y}}$.

Коэффициент детерминации. Коэффициенты детерминации так же, как и стандартные ошибки, вычисляются с поправкой на число степеней свободы и без нее. Коэффициент детерминации без учета числа степеней свободы равен отношению дисперсии зависимой переменной $S_{\hat{y}}^2$, вычисленной по уравнению, к истинной дисперсии S_y^2. Это отношение показывает, какая часть движения зависимой переменной описывается данным регрессионным уравнением. Принимая во внимание, что $S_{\hat{y}}^2 = S_y^2 - S_u^2$, получим для коэффициента детерминации (без поправки на число степеней свободы) следующую формулу:

$$R^2 = \frac{S_{\hat{y}}^2}{S_y^2} = \frac{S_y^2 - S_u^2}{S_y^2} = 1 - \frac{S_u^2}{S_y^2}. \qquad (6)$$

Коэффициент детерминации с учетом числа степеней свободы вычисляется так:

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{\overline{S}_u^2}{\overline{S}_y^2}, \qquad (7)$$

где $\overline{S}_u^2$ и $\overline{S}_y^2$ - стандартные ошибки с поправкой па число степеней свободы.

Коэффициент детерминации с учетом числа степеней свободы связан с коэффициентом детерминации, не поправленным на число степеней свободы, соотношением

$$\overline{R}^2 = 1-(1-R^2)\frac{n-1}{n-(m+1)}. \qquad (8)$$

При сравнении регрессионных уравнений с разным числом независимых переменных решающими критериями служат стандартная ошибка уравнения и коэффициент детерминации, учитывающие число степеней свободы.

Коэффициенты множественной корреляции (с учетом и без учета числа степеней свободы) определяются как квадратные корпи из коэффициентов детерминации, т. е.

$$R=\sqrt{R^2},\quad \overline{R}=\sqrt{\overline{R}^2}.$$

Коэффициент множественной корреляции выражает меру связи зависимой переменной со всеми независимыми факторами. Максимальное его значение равно 1. Величина $1-R^2$ характеризует степень влияния на зависимую переменную случайных остатков.

Статистическая значимость коэффициента детерминации проверяется с помощью *F*-критерия следующим образом. Вычисляется величина

$$F=\frac{R^2}{1-R^2}\cdot\frac{n-(m+1)}{m}, \qquad (9)$$

где R - коэффициент детерминации с учетом числа степеней свободы; n - число наблюдений; m - число независимых переменных в правой части уравнения.

Если вычисленное по (9) значение F больше табличного значения $F_\alpha(m,v)$, где α - уровень значимости, m - число независимых переменных и $v = n-(m+1)$,то коэффициент детерминации считается статистически значимым.

Аналогичный критерий можно применить к стандартной ошибке уравнения. При этом эмпирическое значение F вычисляется по формуле

$$F = \frac{S_y^2 - S_u^2}{S_u^2} \cdot \frac{n-(m+1)}{m}. \qquad (10)$$

Стандартные ошибки параметров. Статистическую значимость оцененных параметров регрессионного уравнения оценивают с помощью стандартных ошибок параметров. Вклад каждой независимой переменной в дисперсию зависимого фактора определяется с помощью так называемых β-коэффициентов. Для оценки β-коэффициентов необходимо вычислить средние $\bar{x}_j$, $\bar{y}_j$ и стандартные ошибки S_{x_j}, S_{y_j}. для каждой независимой переменной и эндогенного фактора.

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_{j,t}; \quad \bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_{j,t}; \quad j = \overline{1,m}; \qquad (11)$$

$$S_{y_j} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(y_j' \cdot y_j\right) - \bar{y}_j}; \quad S_{x_j} = \sqrt{\frac{1}{n}\left(x_j' \cdot x_j\right) - \bar{x}_j}; \quad j = \overline{1,m} \qquad (12)$$

тогда

$$\beta = \frac{S_{x_j}}{S_{y_j}}. \qquad (12')$$

Ковариационная матрица параметров S_{bb} определяется соотношением

$$S_{bb} = \bar{S}_u^2 \left(X' \cdot X\right)^{-1}. \qquad (13)$$

Матрица S_{bb} имеет размерность $(m+1)\times(m+1)$, так как она содержит дисперсию постоянного члена. Стандартная ошибка параметра b_j равна квадратному корню из диагонального элемента матрицы S_{bb}, т. е.

$$\tilde{S}_j = \sqrt{S_{jj}}, \quad j = 0,1,\ldots,m. \qquad (14)$$

Статистическая зависимость параметров проверяется с помощью *t*-критерия. Для этого вычисляем отношения:

$$\frac{|b_j|}{\widetilde{S}_j}, \quad j = 1,2,...,m, \qquad (15)$$

где b_j - оценка параметра; $\widetilde{S}_j$ - дисперсия b_j.

Параметр b_j считается значимым, если отношение (15) больше, чем критическое значение *t*. Например, для двух независимых переменных при 95%-ной уровне вероятности параметры должны быть в 2,16 раза больше их стандартных ошибок. В практическом анализе часто пользуются грубой оценкой при требовании, чтобы стандартные ошибки составляли 45—50% значений параметров.

Стандартные ошибки показывают статистическую значимость параметров. С их помощью можно построить доверительные границы параметров.

В качестве примера рассмотрим результаты оценивания параметров производственной функции для строительства. В скобках под каждым параметром указаны стандартные ошибки. Ниже стандартных ошибок показаны β-коэффициенты, выраженные в процентах. Величина $\overline{S}_u$ представляет собой поправленную на число степеней свободы стандартную ошибку уравнения (в скобках рядом приведено процентное отношение стандартной ошибки уравнения к средней величине зависимой переменной), $\overline{R}^2$ - поправленный на число степеней свободы коэффициент детерминации, *AR* - коэффициент автокорреляции остатков.

$$H_t = -5,89 + 0,7885F_t + 62,6Z_t + 0,0822(X_t + X_{t-1});$$

$$(3,82) \quad (1,261) \quad (48,6) \quad (0,046)$$

$$\overline{S}_u = 0,528; \ \overline{R}^2 = 0,9693; \ AR = 0,39,$$

где H_t – валовой продукт, созданный в строительстве; F_t - объем машинного оборудования, применяемого в строитель-

стве; Z_t - число занятых в строительстве; X_t - темпы роста промышленного производства.

Отношения параметров к их стандартным ошибкам следующие: 0,586 - для машинного оборудования; 1,383 - для числа занятых; 2,688 - для темпов роста промышленного производства. Сравнивая эти величины с табличными критическими значениями, которые при 16 степенях свободы (20 наблюдений минус 4) и 95%-ном уровне вероятности составляют 2,245, приходим к выводу, что статистически значимым можно считать лишь влияние промышленного производства. С другой стороны, этот фактор имеет самый низкий β-коэффициент. Напомним, что β-коэффициент показывает, насколько соответствующий ему фактор объясняет дисперсию зависимой переменной. Из уравнения следует, что темп роста промышленного производства обусловливает лишь 15,6% дисперсии валового продукта в строительстве. Таким образом, хотя два оставшихся фактора - объем применяемого оборудования F и число запятых Z - статистически незначимы, они объясняют 86,6% изменения валового продукта, создаваемого в строительстве. Если рассмотреть регрессии валового продукта отдельно на факторы F_t и Z_t, то можно убедиться, что оценки коэффициентов при них будут статистически значимыми. Искажение оценок параметров и увеличение их стандартных ошибок в уравнении, учитывающем три фактора F_t, Z_t и $X_t + X_{t-1}$, вызвано наличием мультиколлинеарности между переменными F_t и Z_t.

Для улучшения результатов оценивания применим условный метод наименьших квадратов. На основе предварительного анализа зафиксируем соотношения между параметрами этих переменных и подставим в производственную функцию новую переменную, представляющую собой линейную комбинацию факторов F_t и Z_t вида $F_t + 48{,}3Z_t$.

(Применив к новой регрессии обычный метод наименьших квадратов, получим следующие оценки:

$$H_t = -4{,}59 + 1{,}0933(F_t + 48{,}3Z_t) + 0{,}2041(X_t + X_{t-1});$$

$$(0{,}88) \quad (1{,}067) \qquad\qquad (0{,}038)$$

$$\overline{S}_u = 0{,}577\,; \quad \overline{R}^2 = 0{,}9701; \quad AR = 0{,}42.$$

Отношения параметров к их стандартным ошибкам составляют 20,921 - для $F_t + 48{,}3Z_t$ и 3,628 - для $X_t + X_{t-1}$. Оба отношения много больше критического значения *t*-критерия и, следовательно обе переменные в новом уравнении статистически значимы.

Число степеней свободы этот коэффициент для данного уравнения составлял $R^2 = 0{,}2087$. Статистическую значимость этого коэффициента проверим с помощью *F*-статистики:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}\,\frac{n-(m+1)}{m} = \frac{0{,}2087}{0{,}7913}\cdot\frac{20-3}{2} = 2{,}2418.$$

Табличное значение *F*-критерия при 2 и 15 степенях свободы и 95%-ном уровне вероятности $F^2_{15}(0{,}05) = 3{,}68$. Эмпирическое значение 2,418<3,68. Следовательно, коэффициент детерминации этого уравнения статистически незначим.

5.3. Введение искусственных переменных

На движение некоторых показателей могут оказывать влияние факторы; которые трудно выразить в форме статистического ряда. Например, в нашем распоряжении иногда имеется информация о наступлении или ненаступлении какого-либо события в определенный момент.

Иногда известно, что хотя некоторый фактор и может быть выражен статистическим рядом, однако влияние его па какой-либо процесс определяется не непосредственным из-

менением его численных значений, а изменением его качественных характеристик (например, рост или снижение).

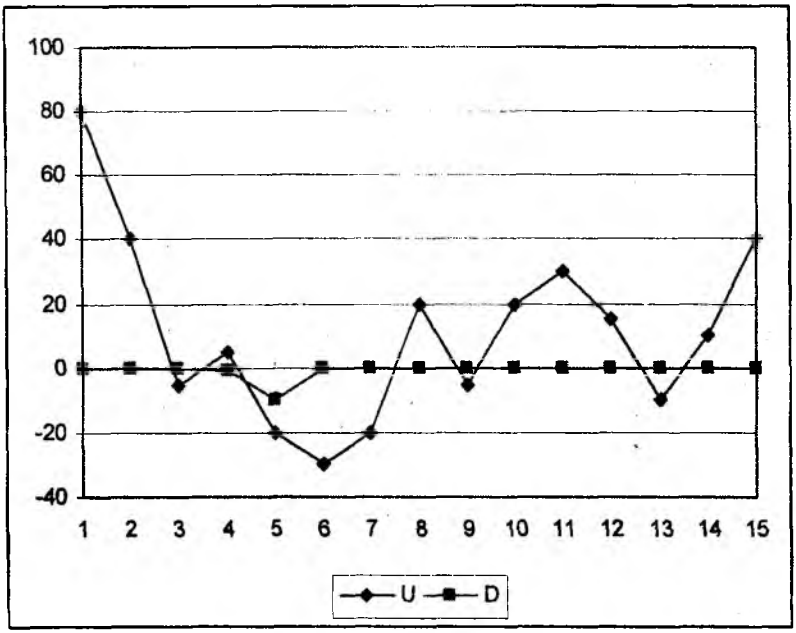


Рис. 5.3. Остатки для функции занятости в сельском (*u*) и динамика искусственной (*d*)

Во всех этих случаях вводятся искусственные переменные, некоторым образом описывающие влияние исследуемых факторов и принимающие одно из двух значений - ноль или единицу. Иногда эти переменные называют также качественными или фиктивными.

Потребность введения искусственных переменных может возникнуть в процессе оценки регрессионных уравнений. В этом случае экономическая их интерпретация может быть неоднозначной. Например, имеет смысл введение искусственных переменных, если для зависимой переменной характерны единичные скачки, не объясняемые никакими

факторами в правой части регрессионного уравнения. Действительно, эта переменная полагается равной нулю вне интервала, где наблюдался скачок, и, следовательно, она не оказывает никакого влияния на прогноз показателя, ее роль состоит в «очищении» параметров остальных переменных от искажений, вызванных единичными скачками.

Приведем пример введения искусственной переменной в уравнение занятости в сельском хозяйстве РУз.

$$Z_t = \underset{(54,82)}{40,26} + \underset{(5,485)}{8,302}\,\Delta Y_t + \underset{(0,0528)}{0,988}\,Z_{t-1} + u_t, \qquad (4)$$

где Z_t - занятость;

ΔY_t - прирост дохода в сельском хозяйстве.

В скобках указана стандартная ошибка параметра. Очевидно, что коэффициент при ΔY_t незначим. Коэффициент Дарбина-Уотсона, показывающий автокорреляцию остатков, равен 0,89, что говорит о присутствии автокорреляции в u_t. Ряд u_t изображен на рис.5.3.

На рисунке видно, что остаток u_t показывает выброс в на 6-й период. Если ввести в уравнение (4) искусственную переменную $П^{(6)}$ положив ее равной 1 в 6-ом периоде и нулю в остальных случаях, то регрессионное уравнение после оценки примет вид:

$$Z_t = \underset{(59,31)}{28,55} + \underset{(4,33)}{8,452}\,\Delta Y_t + \underset{(0,043)}{0,962}\,Z_{t-1} - \underset{(38,86)}{122,48}\,П^{(6)} + u_t', \qquad (5)$$

После введения $П^{(6)}$ коэффициент при ΔY_t стал значим, коэффициент Дарбина-Уотсона возрос до 1,55, что показывает отсутствие автокорреляции в u_t'. Стандартное отклонение уравнения (5) также меньше, чем стандартное отклонение уравнения (4).

5.4. Проблемы мультиколлинеарности

Формулировка проблемы и основные методы. Регрессионное уравнение удовлетворительно описывает движение зависимой переменной, когда коэффициент множественной корреляции достаточно высок, а корреляция между независимыми факторами незначительна. Мультиколлинеарность независимых переменных ведет к смещению оценок параметров и, следовательно, к невозможности корректной интерпретации результатов. Явления мультиколлинеарности подробно исследованы Фришем, Клейном, Тинтнером.

Существование полной линейной зависимости между какими-либо факторами в правой части уравнения делает невозможным применение для оценивания метода наименьших квадратов, так как в этом случае матрица XX вырождена. Если зависимость не полная, но статистически значимая, то, хотя теоретически оценивание методом наименьших квадратов возможно, оно может привести к таким искажениям параметров, что само уравнение теряет смысл.

В эконометрических моделях, представленных системой регрессионных уравнений, необходимо исследовать на мультиколлинеарность каждое уравнение в отдельности.

Из ранних работ, посвященных проблемам мультиколлинеарности, наиболее известна работа Фриша. Предложенный им конфлюентный метод основывается на графическом анализе частных коэффициентов корреляции.

Андерсон и Тинтнер нашли закон распределения для корней характеристического многочлена. Вычисления основываются па предположении, что каждый независимый фактор представляется в виде суммы систематической части и случайной ошибки. При решении характеристического уравнения предполагается, что все случайные компоненты факторов распределены нормально. Если систематическая составляющая описывается полиномом, то мультиколлинеарность можно исключить разно-

стным преобразованием и по формуле, аналогичной (20), найти оценки дисперсий всех случайных составляющих факторов. Подставляя полученные значения дисперсий в характеристическое уравнение, мы можем по его корням установить значимость мультиколлинеарности.

Под мультиколлинеарностью понимают тесную линейную связь между факторными показателями уравнения регрессии. Д.Феррар и Р.Глобер разделяют исследователей по их отношению к мультиколлинеарности на три группы.

Одни считают, что никакой проблемы мультиколлинеарности не существует, поскольку коэффициенты регрессии полученные методом наименьших квадратов, являются «наилучшими несмещенными линейными оценками».

Другие считают, что мультиколлинеарность порождает существенные неточности в математическом описании модели и что недостаточно точное математическое описание затрудняет получение «наилучших линейных несмещенных оценок» на мультиколлинеарных множествах независимых переменных.

Третья группа исследователей считает, что иногда мультиколлинеарность имеет «пагубное влияние», иногда нет.

Можно считать, что мультиколлинеарность все-таки причиняет много трудностей, основные из которых следующие:

1) выяснение существенных факторов затруднено;

2) экономическая интерпретация коэффициентов регрессии связана с большим риском принятия неправильных решений;

3) определение коэффициентов регрессии методом наименьших квадратов затруднено, так как определитель матрицы системы нормальных уравнений имеет значение, близкое к нулю.

Для определения наличия и устранения влияния мультиколлинеарности существует несколько методов. Самым простым из них является удаление из модели одного фактора, из имеющих между собой связь теснотой больше чем 0,8 или 0,9. второй метод заключается в сравнении парных коэффициентов корреляции факторов r_{ij} с множественным коэффи-

циентом корреляции R_y. Если $r_{ij} > R_y$, то говорят, что мультиколлинеарность является «пагубной». Третий метод состоит в введении искусственной ортогональности.

Во всяком случае проблему мультиколлинеарности следует считать все еще нерешенной, и поэтому все работы, проводимые в этой области, следует только приветствовать.

Феррар и Глобер предложили другие статистики. С помощью этих статистик проверяется мультиколлинеарность не только всего набора независимых факторов, но и каждой из пар. Мультиколлинеарность всего уравнения устанавливается с помощью величины χ^2, вычисленной на основе оценок взаимной корреляционной матрицы независимых переменных. Для проверки мультиколлинеарности каждой из независимых переменных вычисляются статистики F_j. Далее приведен алгоритм метода Феррара-Глобера.

Алгоритм метода Феррара-Глобера.

1. *Нормализация переменных*

Обозначим векторы независимых переменных отдельного регрессионного уравнения через $x_1,$. Элементы нормализованных векторов вычислим по формуле:

$$x^*_{tk} = \frac{x_{tk} - \bar{x}_k}{\sqrt{n}\sigma_{xk}},\ t = \overline{1,n};\ k = \overline{1,m}, \qquad (1)$$

где n - число наблюдений каждого вектора;

m - число независимых переменных;

$\bar{x}_k$ - арифметическая средняя вектора x_k;

σ_{xk} - стандартная ошибка переменной x_k.

Обозначим матрицу, составленную из нормализованных векторов, через X^*.

2. Вычисление корреляционной матрицы

Взаимная корреляционная матрица оценивается из соотношения

$$S = \left(X^{*'} X^{*}\right). \qquad (2)$$

Эта матрица симметрична и имеет размерность $m \times m$.

3. Вычисление определителя корреляционной матрицы и значения χ^2.

Если обозначить определитель корреляционной матрицы через $|S| = |X^{*'} X^{*}|$, то

$$\chi_v^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m + 5)\right] \ln |X^{*'} X^{*}|. \qquad (3)$$

Эта величина сравнивается со значениями χ^2 для $\frac{1}{2}m(m-1)$ степеней свободы и уровнем значимости α.

4. Вычисление матрицы, обратной к $X^{*'} X^{*}$

$$R = \left(X^{*'} X^{*}\right)^{-1} \qquad (4)$$

5. Вычисление F_i - статистик

Величины F_i вычисляются по формуле:

$$F_i = \left(r^{ii} - 1\right)\frac{n-m}{m-1}, \qquad (5)$$

где r^{ii} - диагональные элементы матрицы R. Значения F_i сравниваются с критическими величинами F-критерия при n-m и m-1 степенях свободы.

Коэффициент детерминации для каждой переменной x_i вычисляется как

$$R_{x_i}^2 = 1 - \frac{1}{r^{ii}}. \qquad (6)$$

6. Нахождение частных коэффициентов корреляции.

Эти коэффициенты вычисляются с помощью внедиагональных элементов обратной корреляционной матрицы R:

$$r_{ij} = \frac{-r^{ij}}{\sqrt{r^{ii} \cdot r^{jj}}}. \qquad (7)$$

7. Вычисление *t*-статистики

$$t_{ij} = \frac{r_{ij}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{ij}^2}}. \qquad (8)$$

Приведенные расчеты можно интерпретировать следующим образом.

а) Значения элементов матрицы $X^{*'}X^{*}$ дают нам первую информацию о мультиколлинеарности независимых факторов. Недиагональные элементы равны коэффициентам корреляции для каждой из пар независимых факторов, они должны быть меньше коэффициента множественной корреляции для всего уравнения.

б) Мерой общей мультиколлинеарности служит величина χ_v^2. Этот показатель не должен превышать табличного значения χ_α^2 при заданном уровне значимости и $v = \frac{1}{2}m(m-1)$ степенях свободы.

в) Величины F_i показывают, какие переменные мультиколлинеарны. Если некоторые из F_i больше табличных значений *F*-статистики при *n-m* и *m*-1 степенях свободы, то соответствующие им независимые факторы мультиколлинеарны.

г) С помощью значений t_{ij} можно уточнить, какие из пар независимых факторов мультиколлинеарны. Если некоторое t_{ij} превышает табличное значение критерия Стьюдента при *n-m* степенях свободы, то мультиколлинеарность наблюдается между парой переменных x_i и x_j.

Наиболее простой способ исключения мультиколлинеарности в эконометрической модели заключается в отбрасывании одной из переменных у мультиколлинеарной пары. Однако на практике исключение какого-либо фактора часто противоречит логике экономических связей. В этих случаях следует заменить один из мультиколлинеарных показателей

другим (например, вместо объема основных средств производства в сельском хозяйстве берут ряд, характеризующий мощность тракторного парка) или преобразовать его (исходный ряд заменяют абсолютными или относительными приростами). Если ни один из указанных способов не приводит к уменьшению мультиколлинеарности, то при оценивании параметров следует применить условный метод наименьших квадратов. В этом случае величина одного из параметров фиксируется на основе априорной информации.

При определении фиксированных значений параметров часто применяют структурные (пространственные) регрессии. Вычисленные с их помощью параметры затем используются в условном методе наименьших квадратов.

Далее приводятся примеры, иллюстрирующие процедуры проверки мультиколлинеарности и се исключение при оценивании параметров. После оценивания обычным методом наименьших квадратов производственная функция для сельского хозяйства следующим образом:

$$Y^{p0} = -1{,}789 + 0{,}0521Z^{p0} - 0{,}0023S^{h} - 0{,}008T^{j} + 0{,}201M^{j} + u;$$
$$(4{,}38)\ (0{,}0018) \quad (0{,}002) \quad (0{,}0012)\ (0{,}0052)$$
$$R = 0{,}919;\ DW = 1{,}978;\ \chi_v^2 = 29{,}586, \qquad (9)$$

где Y^{p0} - объем национального дохода, созданный в сельском хозяйстве; Z^{p0} - число занятых в сельском хозяйстве; S^{h} - использование химических удобрений; T^{j} - площадь пахотной земли, приходящаяся на один трактор; M^{j} - метеорологическая переменная.

В скобках приведены стандартные ошибки параметров, R - коэффициент множественной корреляции, DW - коэффициент Дарбина-Уотсона. Значение χ_v^2 необходимо нам для проверки мультиколлинеарности.

Анализ предварительных результатов показывает, что почти все полученные оценки параметров статистически незначимы и не интерпретируются с точки зрения экономиче-

ской теории (параметр при S^4 имеет отрицательный знак, что явно противоречит реальному смыслу).

При отсутствии мультиколлинеарности величина χ_v^2 не должна превышать 12,6 (табличное значение χ^2 при 95%-ном уровне вероятности и $\frac{1}{2}(4-1)\cdot 4 = 6$ степенях свободы). В нашем случае она больше чем в 2 раза превышает эту границу.

Y_n - вектор действительных значений эндогенных переменных в момент времени n размерности k.

Динамические прогнозы эндогенных переменных, вычисленные по приведенной форме модели с учетом экстраполяции параметров, описываются схемой:

$$\hat{Y}_{n+t} = R_{y1}\hat{Y}_{n+t-1} + R_x\hat{Y}_{n+t} + V_{n+t}, \qquad (10)$$

где

$$V_{n+t} = \left(1 - \frac{t}{p}\right)V_n, \qquad (11)$$

R_{y1}, R_x - матрицы, определенные в 5.4, а V_n - вектор остатков приведенной формы в момент времени n.

Минимальный и максимальный варианты вычисляются по аналогичной схеме, только все значения экзогенных переменных соответствуют минимальному или максимальному варианту развития.

Подводя итоги, заметим, что значения основных вариантов прогноза полностью определяются следующими моментами:

а) видом причинных и динамических связей между основными экономическими показателями, установленными с помощью регрессионного анализа временных или структурных рядов;

б) видом балансовых и опосредствованных взаимосвязей. Опосредствованные взаимосвязи включают обратные связи между переменными и оцениваются с помощью совокупных методов оценивания;

в) тенденциями развития факторов интенсивности. К факторам интенсивности относятся, например, такие факторы, как производительность труда, показатели использования основных фондов и т. д. Их тенденции развития оцениваются с помощью экстраполяции параметров регрессионных уравнений;

г) тенденциями развития регулярных факторов. Динамика этих факторов описывается с помощью линейных и нелинейных трендов, а также авторегрессионных переменных. Экстраполяция регулярных факторов рассматривается обычно в трех основных вариантах;

д) начальным (перед прогнозом) состоянием экономики. Это состояние описывается действительными значениями эндогенных переменных в последний базовый год модели и ошибками приведенной формы модели за этот же год.

5.5. Производственные функции

Производственными функциями называются такие явные функции, левой части которых стоит зависимая переменная, обозначаемая обычно y, а в правой части - сколь угодно много независимых переменных, обозначаемых вектором x. Обозначив зависимость между x и y через F, сможем записать производственные функции в следующем общем виде:

$$y = F(x). \qquad (1)$$

Формула (1) выдвигает на первый план чисто технические особенности производственных функций. Желая подчеркнуть их содержательные особенности, можно сказать, что производственные функции – это такие зависимости между производством, и факторами, которые результаты деятельности отдельных хозяйственных единиц объясняют производственными факторами.

Производственные функции могут быть классифицированы в зависимости от их технических и смысловых особенностей. С технической точки зрения число независимых переменных и характер зависимости y от x являются двумя основными отличительными признаками производственных функций. По числу переменных они делятся на функции одной переменной (если число независимых переменных равно единице), двух переменных и n переменных. По характеру зависимости y от x производственные функции делятся на линейные, показательные, логарифмические, гиперболические и т. д.

Содержательные и технические особенности производственных функций можно различать лишь в определенных пределах. Действительно, вопрос о том, сколько независимых переменных входят в ту или иную производственную функцию, можно отнести к техническим свойствам этой функции, но выбор независимых переменных уже имеет непосредственное отношение к ее содержанию. Экономическое содержание независимых переменных, спецификация факторов - это уже вопросы собственно содержания факторов.

Особенности независимых переменных в общем случае определяются качеством зависимой переменной. Последнее же зависит не только от того, что собственно исследуется - произведенный национальный доход или созданные материальные блага, - но и от того, на каком уровне проводится данное исследование. Уровень, на котором проводится анализ, одновременно характеризует и степень агрегации. Следовательно, по масштабам рассматриваемых экономических единиц производственные функции делятся на микро- и макрофункции. Микрофункции, как правило, представляют деятельность одного предприятия или завода, в то время как макрофункции описывают деятельность объединений, предприятий или заводов, подотраслей и отраслей национальной экономики и даже национальной экономики в целом. Функции можно классифицировать и по тому, в каких единицах

измеряется зависимая переменная: в стоимостном или в каком-нибудь натуральном выражении. Об измерениях в натуральных единицах речь может идти лишь для микрофункций, описывающих деятельность небольших экономических единиц, производящих однородные продукты.

Более важной особенностью производственных функций следует считать то, что определение вида функций может существенно изменить зависимость между производством и его факторами, выражаемую производственной функцией, и даже придать ей совершенно новый смысл. Действительно, определение вида функции задает характер и возможность связи между зависимой и независимыми переменными. Из показателей, выражающих эти связи, наиболее значительными и поэтому наиболее часто изучаемыми являются те, которые позволяют судить об эластичности производства относительно производственных затрат, дифференциальной и средней производительности производства и его факторов, а также об эластичности и взаимозаменяемости факторов.

Эластичностью производства относительно затрат *i*-й переменной называется изменение производства (в %), вызванное изменением *i*-го фактора на 1%, при условии, что остальные факторы остаются количественно неизменными.

Дифференциальным приращением, или выходом, *i*-го фактора называется измеренное в первоначальных единицах приращение производства, вызванное увеличением *i*-го фактора на одну единицу, при условии, что значения всех остальных факторов остались неизменными.

Общим доходом факторов производства называется выраженное в процентах изменение производства, вызванное одновременным изменением всех факторов на 1%.

Эластичностью взаимозаменяемости называется относительное изменение количественных соотношений факторов, обусловленное изменением на 1% дифференциальной производительности факторов производства.

Из широкого набора производственных функций, отличающихся по упоминавшимся выше техническим и содержательным особенностям, рассмотрим лишь три типа функций и кратко сравним их свойства. Это функция Кобба-Дугласа (КД), функция типа ПЭВ (Эрроу-Ченери, Минхаса и Солоу) и функция ППУ (Бруно), являющаяся в некотором отношении обобщенным вариантом функции типа ПЭВ.

Функция Кобба-Дугласа (КД). В общем случае функцию КД можно представить в виде

$$Y = AL^{\alpha}K^{\beta}, \qquad (2)$$

где Y - объем производства; L — численность занятых; K - объем капитала (основных фондов); α и β - параметры, характеризующие относительное участие живого труда и основных фондов в увеличении объема производства; A - коэффициент пропорциональности.

В одном из более детально разработанных вариантов функция КД содержит параметр научно-технического развития:

$$Y = AL^{\alpha}K^{\beta}e^{\lambda}, \qquad (3)$$

где λ - среднегодовой темп прироста объема производства в результате воздействия фактора научно-технического прогресса.

Функция типа ПЭВ. По первому определению, функцию типа ПЭВ можно представить в виде

$$Y = A\left[\delta L^{-\rho} + (1-\delta)K^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}, \qquad (4)$$

где δ - параметр, выражающий соотношение участия двух факторов - труда и капитала (основных фондов) - в увеличении объема производства; ρ - параметр взаимозаменяемости, зависящий от эластичности замещения; A - коэффициент пропорциональности.

В более общую по сравнению с приведенной выше форму функций ПЭВ входит параметр, выражающий научно-техническое развитие. В такой форме в обобщенной функции типа ПЭВ общий доход факторов производства, или сумма

относительного участия факторов в увеличении физического объема производства, не обязательно равен единице:

$$Y = Ae^{\lambda t}\left[\delta L^{-\rho} + (1-\delta)K^{-\rho}\right]^{-\frac{\eta}{\rho}}, \qquad (5)$$

где неизвестный параметр η - общий доход факторов производства.

Функция типа ППУ. В общем случае функцию типа ППУ можно представить в виде

$$Y = AL^{\alpha}K^{\beta} - mL, \qquad (6)$$

где смысл параметров соответствует смыслу параметров функции КД. Единственный не входивший в функцию КД параметр m называется параметром несбалансированности, поскольку его значение показывает, каковы масштабы несбалансированности на «рынке» труда и капитала, т.е. в какой мере спрос на труд и капитал (основные фонды) не уравновешивает их цены с предельной производительностью этих факторов.

Бруно разработал три варианта функции ППУ. Каждый вариант исходит из того предположения, что средняя производительность труда связана с заработной платой линейной зависимостью. (При построении функции ПЭВ предполагалось, что средняя производительность труда линейно зависит от логарифма заработной платы.) Зависимость между заработной платой и средней производительностью труда можно представить в виде

$$\frac{Y}{L} = c\omega + d. \qquad (7)$$

Кроме того, первый вариант функции ППУ предполагает, что дифференциальная производительность труда и производительность основных фондов равны ценам этих факторов производства. При этом предположении получается функция

$$Y = AL^{\alpha}K^{1-\alpha} - mL, \qquad (8)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{c}; \quad m = \frac{d}{c-1}.$$

Во втором варианте предполагается, что на так называемом рынке капитала нет сбалансированности, т. е. ставка процента не равна дифференциальной «производительности» основных фондов (капитала). В этом случае функция ППУ имеет вид

$$Y = AL^{\alpha}K^{\beta} - mL, \qquad (9)$$

$$\alpha = \frac{1}{c}; \quad m = \frac{d}{c-1}.$$

В третьем, варианте равновесие не достигается ни на так называемом рынке труда, ни на рынке капитала. Тем не менее предполагается, что

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = p\omega + q.$$

В результате функция принимает вид

$$Y = AL^{\alpha}K^{\beta} - mL, \qquad (10)$$

где $\alpha = \frac{p}{c}; \quad m = \frac{dp - cq}{c - p}.$

Перечисленные выше типы функций обладают многими **общими и отличительными** свойствами. Все их можно разделить на две группы. К первой группе относятся те из них, которые являются следствиями используемого вида функций, т.е. свойства, которые можно считать объективными. Вторую группу образуют свойства, относящиеся к взаимосвязям между ценой и производительностью факторов производства, которые не зависят от формы взаимосвязи между зависимыми и независимыми переменными. Эти свойства, позаимствованные из теории равновесия, верны или неверны вне зависимости от производственных функций. То, что эти свойства оказались связанными с производственными функциями, необходимыми главным образом для оценки некоторых параметров, - следствие субъективного решения.

Перечислим сначала общие особенности свойств, входящих в первую группу, а затем перейдем к их отличиям. Для характеристики экономического развития наибольшее

значение имеют следующие шесть объективных свойств выбранных нами производственных функций. [4, 7, 13, 17, 29].

1. Каждая из функций КД, ПЭВ и ППУ зависит от двух переменных: труда и основных фондов. Следовательно, все три производственные функции предполагают, что на объем выпуска (производства) практически оказывают влияние только затраты труда и основных фондов. Необходимо также заметить, что уточненные варианты функций КД и ПЭВ (см. формулы (3) и (5)) содержат еще один параметр, выражающий научно-технический прогресс.

2. Существуют такие варианты всех трех функций, для которых сумма участия факторов в увеличении производства постоянна и равна единице. Следовательно, используя эти формы производственных функций, необходимо предположить, что изменения труда и основных фондов, происходящие одновременно и одинаковыми темпами, вызывают изменение производства теми же темпами, т.е. совместная отдача факторов не зависит от масштабов производства.

3. Существуют такие варианты всех трех функций, для которых сумма участия факторов в увеличении производства не равна единице. Для функции КД - это в соответствии с формулой (2), для функции ПЭВ - в соответствии с формулой (5), для функции ППУ при условии, что $\alpha + \beta \geq 1$ или $\alpha + \beta < 1$, соответственно характерны возрастающая и убывающая эффективность использования факторов. При возрастающей эффективности факторов темпы роста производства опережают общие темпы роста факторов, а при снижающейся эффективности факторов темпы роста производства отстают от общих темпов роста факторов.

4. Для всех трех функций взаимозаменяемость факторов может иметь место до тех пор, пока один из факторов не обратится в нуль. По предположению, каждый из факторов необходим для проведения производственного процесса, но допустимы любые комбинации факторов.

5. Эластичность производства относительно затрат факторов для функции КД постоянна, а для функций ПЭВ и ППУ - не постоянна. Следовательно, используя функции КД, мы исходим из предположения, что если производительность труда и «производительность» основных фондов меняются на 1%, а все остальные условия останутся прежними, то объем производства также изменится на 1%. Для функции ПЭВ эластичность производства от затрат отдельных факторов может изменяться по-разному, но сумма их участия (отдача) остается постоянной. Для функции ППУ эластичность производства от обеих производственных затрат может меняться. В некоторых вариантах этой функции общая производительность факторов производства постоянна, а в других вариантах - не постоянна.

6. Эластичность взаимозаменяемости для функции КД является постоянной и равна единице, для функции ПЭВ - постоянна и (обязательно!) не равна единице, а для функции ППУ - не постоянна. Следовательно, используя функцию КД, мы исходим из предположения о том, что поскольку на изменение количественных пропорций между факторами производства дифференциальные производительности факторов «реагируют» такими же изменениями пропорций, то эластичность замещения единицы живого труда основными фондами (или наоборот) не зависит от соотношения труда и основных фондов.

При использовании функции ПЭВ также следует предположить, что эластичность взаимозаменяемости постоянна, т.е. ее масштабы остаются неизменными на протяжении всего рассматриваемого периода времени. Отличие функции ПЭВ от функции КД сводится к тому, что для функции ПЭВ эластичность взаимозаменяемости может отличаться от единицы. Поскольку отличная от единицы эластичность взаимозаменяемости означает, что процентное изменение пропорций между объемами факторов не обязательно соответствует процентному изменению пропорций между пределами замещения этих факторов, то функция ПЭВ позволяет изучать

взаимосвязь между соотношением дифференциальных производительностей факторов и изменением соотношений объемов факторов. С точки зрения эластичности взаимозаменяемости функция ППУ является еще более общей, чем функция ПЭВ. Для функции ППУ эластичность взаимозаменяемости не только может отличаться от единицы, но и не должна быть постоянной, т.е. величина ее может изменяться на протяжении всего анализируемого периода времени.

Перечислив шесть объективных свойств производственных функций, уместно упомянуть об одном субъективном их свойстве, в особенности потому, что не всем трем типам производственных функций оно присуще в одинаковой мере.

7. Применение функций КД и ПЭВ, как правило, предполагает, что на так называемых рынках труда и капитала имеется равновесие, т.е. оплата труда соответствует (равна по размерам) дифференциальной производительности труда, а ставка процента за используемые основные фонды - дифференциальной «производительности» основных фондов. В одном из вариантов функции ППУ (формула (10)), правда, предполагается, что ни в отношении фактора трудовых ресурсов, ни в отношении основных фондов такого соответствия (сбалансированности) нет, однако и в этом случае предполагается, что между оплатой труда и дифференциальной производительностью труда существует известная (притом линейная) зависимость.

5.6. Результаты расчетов, произведенных при помощи производственных функций

Наиболее характерные для промышленности в целом и ее основных отраслей результаты расчетов, произведенных с помощью производственных функций, представлены в табл. 1, 2, 3. В этих таблицах приведены лишь те из относящихся к различным периодам и полученных при расчетах на основе различных про-

изводственных функций результатов, относительная ошибка которых не достигает 100%. Те из оцененных значений, относительная ошибка которых меньше 100, но больше 50%, отмечены звездочкой. Параметры со звездочкой из-за их меньшей надежности реже использовались в анализе.

Для каждого типа функций выбрана лишь одна комбинация затрат, для которой коэффициент тотальной корреляции имеет наибольшее значение. Это было обусловлено тем, что значения параметров, получаемые при различных расчетах, как правило, мало различаются.

В таблицах для обозначения вариантов затрат приняты следующие сокращения: все основные фонды - *воф C*, использованные основные фонды - *исп C*, списочный состав занятых в промышленности - *ссзп L*, списочный состав рабочих - *сср L*. В расчетах, относящихся к периоду 1990-2010 гг., *рвзп L* означает затраченное рабочее время занятых в промышленности.

Таблица 5.1.

Результаты расчетов, произведенных при помощи производственных функций, для промышленности в целом

Рассматриваемый период	Выпуск	Затраты	Тип функции	Параметры функции					Коэффициент множественной корреляции
				α	β	$\alpha+\beta$	λ	m	
1990-2010	ЧП	*ссзп L воф K*	$Y = AL^{\alpha}K^{\beta}$	1,02 (0,34)	0,57 (0,20)	1,59	-	-	0,998
		ссзп L воф K	$Y = Ae^{\lambda t}L^{\alpha} \times K^{1-\alpha}$	1,0 (0,28)		1,02	0,06 (0,01)	-	0,981
1990-2010	ВВП	*рвзп L исп K*	$Y = AL^{\alpha}K^{\beta}$	0,6 (0,3)	0,64 (0,15)	1,24	-	-	0,892

Как показывают результаты расчетов, проведенных с использованием производственных функций и охвативших период с 1990 по 2010 увеличение списочного состава заня-

тых на 1% сопровождалось таким же увеличением (1%) национального дохода. Эластичность производства чистой продукции промышленности по списочному составу занятых можно считать весьма стабильной, величина ее изменяется сколько-нибудь существенно ни по мере перехода от одного типа функции к другому, ни по мере перехода от одного типа функции к другому, ни по мере перехода от одного варианта затрат к другому варианту.

Эластичность производства чистой продукции промышленности по изменению списочного состава всех занятых в промышленности или списочного состава рабочих можно считать одинаковой. Однако за совпадением эластичности национального состава по этим двум типам затрат кроются различные темпы изменения объемов или средней производительности факторов. Списочный состав занятых в промышленности возрастает в среднем за год несколько медленнее, чем списочный состав рабочих, соответственно па 5,6 и 5,8%. Однако насколько медленнее возрастает число занятых в промышленности по сравнению с числом рабочих, настолько быстрее возрастает производительность их труда. Среднегодовые темпы роста национального дохода на одного занятого в промышленности составляют 5,6%, что на 0,2% больше индекса производительности труда рабочих (4,8%).

В расчетах, относящихся к 1990-2010 гг., был использован более интенсивный показатель затрат труда, чем списочный состав занятых, а именно число отработанных часов. Увеличение числа отработанных часов на 1 % приводит к увеличению выпуска на 0,8%. Следовательно, эластичность производства по затраченному рабочему времени на 40% меньше эластичности производства по списочному составу занятых. Этот результат показывает, что в рассматриваемый период в промышленности увеличение затрат труда по своему характеру носило экстенсивный характер и происходило оно главным образом за счет роста списочного состава занятых.

Относительная дифференциальная «производительность» (отдача) всех промышленных основных фондов в рассматриваемый период составляла 0,8%, т. е. увеличение затрат основного фонда на 1 % приводило к увеличению объема выпуска продукции на 0,8%.

Во всех комбинациях затрат, относившихся к 1990-2010 гг., дифференциальная «производительность» использованных основных фондов была выше, чем общего объема основных фондов. Различие можно отнести за счет меньшей эластичности производства от неиспользованной части основных фондов, чем в среднем от всех основных фондов.

При расчетах, производимых при помощи специальной функции Кобба-Дугласа, дифференциальную производительность можно считать равной нулю для всех основных фондов и близкой к нулю – для использованных основных фондов.

В 2010 г. Промышленностью республики произведено продукции в действующих ценах на сумму 8074,8 млрд. сум, что составляет 109,4 % к 2009 г.

Выпущено потребительских товаров на 2405,1 млрд. сум или 113,4 по сравнению с 2009 годом. Из них продовольственных товаров выпущено на 1030,2 млрд. сум, или 109,9% к уровню 2009 г., непродовольственных товаров соответственно на 1212,2 млрд. сум или 118,6% к уровню 2009 г.

Удельный вес продукции произведенными предприятиями негосударственного сектора составил 79,3% от общего объема.

Увеличение производства носило не сугубо экстенсивный характер, но имело место также вовлечение в производство известных резервов в области роста производительности труда, и, в частности, использование этих резервов позволило достигнуть весьма большого прироста чистой продукции промышленности и почти на 8% увеличить валовую продукцию отрасли.

Машиностроение и металлообработка. Машиностроение и металлообработка обладает наибольшим весом внутри

всей промышленности и в рассматриваемые периоды накладывала наиболее глубокий отпечаток на развитие всей промышленности по сравнению с другими отраслями. Это проявилось в том, что параметры производственных функций для тяжелой промышленности по своим значениям ближе к соответствующим параметрам всей промышленности, чем параметры, характеризующие отдельные отрасли.

Результаты расчетов для машиностроения и металлообработки представлены в табл. 5.2. Помимо специальной (с суммой относительного участия факторов в увеличении производства, равной 1, и с учетом параметра так называемого нереализованного технического прогресса) и общей формы функции Кобба-Дугласа для периода 1990-2010 гг. была также рассчитана функция ППУ.

Таблица 5.2.

Результаты расчетов, произведенных при помощи производственных функций для машиностроения и металлообработке

Рассматриваемый период	Выпуск	Затраты	Тип функции	Параметры функции					Коэффициент множественной корреляции
				α	β	$\alpha+\beta$	λ	m	
1990-2010	ЧП	*ссзп L* *воф K*	$Y = AL^{\alpha}K^{\beta}$	0,95 (0,51)	0,72 (0,31)	1,67	-	-	0,986
		ссзп L *воф K*	$Y = Ae^{\lambda t}L^{\alpha} \times$ $\times K^{1-\alpha}$	0,88 (0,8)	0,12	1,0	0,08 (0,02)	-	0,981
1990-2010	ВВП	*рвзп L* *исп K*	$Y = AL^{\alpha}K^{\beta}$	0,76 (0,26)	0,66 (0,12)	1,42	-	-	0,983

Эластичность производства по списочному составу занятых в машиностроении и металлообработке также велика, хотя и несколько меньше, чем в среднем во всей промышленности. Увеличение затрат труда на 1% в среднем по всем вариантам приводит к увеличению выпуска на 0,8%.

Дифференциальная производительность списочного состава занятых в машиностроении и металлообработке гораздо менее стабильна, чем в среднем по всей промышленности. Величина ее колеблется от 0,6 до 1,5 в зависимости от типа функций или от рядов данных, используемых в расчете. Разброс результатов можно охарактеризовать следующим образом: дифференциальная производительность списочного состава рабочих выше дифференциальной производительности всех занятых в тяжелой промышленности; дифференциальная производительность списочного состава занятых выше дифференциальной производительности труда по затраченному рабочему времени; эластичность производства по затратам труда при использовании специальной функции Кобба-Дугласа больше, чем при применении функции Кобба-Дугласа общего вида. Из-за большего коэффициента тотальной корреляции и более низкого уровня ошибок в оценках параметров специальная функция Кобба-Дугласа более пригодна для описания зависимостей, чем функция Кобба-Дугласа общего вида. Последняя занижает в итоге эластичность производства по затратам труда в тяжелой промышленности.

Легкая промышленность. Результаты расчетов, проведенных при помощи производственных функций для легкой промышленности, менее однозначны, чем приведенные выше результаты для всей промышленности в целом и для тяжелой промышленности. Они представлены в табл. 3. Дисперсия параметров функций в зависимости от выбора типа функции, периода и комбинации видов затрат в легкой промышленности гораздо сильнее, чем в тяжелой или во всей промышленности.

Эластичность производства чистой продукции по списочному составу занятых за 1990-2010 г. составляла в среднем по всем вариантам 1 %, в отличие от 1990-2010 гг., когда она достигала 2-4%. Необычайно высокую дифференциальную производительность списочного состава занятых во второй половине рассматриваемого периода можно интерпретировать как показатель значительной нехватки рабочей силы.

Значения параметра претерпевали достаточно заметные изменения и в зависимости от разновидностей комбинаций затрат. Общая особенность этих изменений состояла в том, что дифференциальная производительность занятых в легкой промышленности во всех случаях была выше дифференциальной производительности списочного состава рабочих.

Эластичность производства по списочному составу, как правило, была выше, если затраты труда комбинировались с затратами всех основных фондов, и ниже, если затраты труда комбинировались с использованными основными фондами. Это объясняется тем, что в легкой промышленности, так же как и во всей промышленности в целом и в тяжелой промышленности, дифференциальная «производительность» использованных основных фондов выше дифференциальной «производительности» всех основных фондов.

1990-2010 гг. дифференциальная производительность использованных основных фондов была положительной, а ее величина составляла в среднем менее 0,5%. Во второй половине этого периода (между 1990 и 2010 г.) дифференциальная производительность стала отрицательной и увеличение производства чистой продукции на 1% сопровождалось тогда уменьшением основных фондов на 0,2-0,4%.

К совершенно иным результатам мы пришли, анализируя самый продолжительный период - 1990-2010 гг. Замена показателей чистой продукции показателем валовой продукции и показателя списочного состава занятых в легкой промышленности показателем рабочего времени занятых в этой отрасли позволила установить, что эластичность производства по труду составляла менее 0,3%, а эластичность производства по основным фондам превысила 1 %.

Эффективность факторов и в легкой промышленности больше единицы. В длительный период увеличение суммарной дифференциальной производительности двух видов затрат в среднем на 1% приводило к увеличению выпуска на 1,6%, а в

короткий период суммарная дифференциальная производительность в большинстве случаев была гораздо выше.

Таблица 5.3.

Результаты расчетов, произведенных при помощи производственных функций, для легкой промышленности

Рассматриваемый период	Выпуск	Затраты	Тип функции	Параметры функции					Коэффициент множественной корреляции
				α	β	$\alpha+\beta$	λ	m	
1990-2010	ЧП	*ссзп L воф K*	$Y = AL^{\alpha}K^{\beta}$	1,16 (0,36)	0,58 (0,38)	1,74	-	-	0,988
		ссзп L воф K	$Y = Ae^{\lambda t}L^{\alpha} \times K^{1-\alpha}$	0,91 (0,38)	0,2	1,0	0,03 (0,02)	-	0,882
1990-2010	ВВП	*рвзп L исп K*	$Y = AL^{\alpha}K^{\beta}$	0,21 (0,18)	1,52 (0,13)	1,43	-	-	0,981

Для функции ППУ с параметром m=90 были получены значения c=0,6 и p= 3,8. Следовательно, в легкой промышленности разрыв между средней и дифференциальной производительностью, а также разрыв между заработной платой и производительностью больше, чем в тяжелой промышленности. Таким образом, уже упоминавшаяся относительная нехватка рабочей силы проявляется не только в высокой эластичности производств, но и в том, что заработная плата возрастает вдвое быстрее средней производительности труда, и, кроме того, в том, что дифференциальная производительность возрастает вдвое быстрее средней производительности труда.

По нашему мнению, различия в единицах измерения факторов в расчетах с помощью производственных функций необходимо рассматривать в качестве таких предпосылок, которые в общих чертах определяют соотношение эластичностей производства по отдельным факторам, называемое в дальнейшем стандартным соотношением. Стандартное соотношение зависит от того, чем измеряются затраты. Если за-

траты труда исчисляются численностью занятых, а основные фонды оцениваются по стоимости, то в большинстве случаев при вычислениях по методу производственных функций стандартное соотношение составляет 3:1. Это означает, что увеличение списочного состава занятых в производстве на 1% приводит к втрое большему (в %) росту выпуска, чем увеличение на 1% объема основных фондов.

При анализе экономического развития на основе эластичностей затрат факторов помимо сказанного следует иметь в виду, что эти параметры выражают средние тенденции «поведения» факторов на какой-то предельной точке. Поясним свою мысль. Если какой-то из факторов оказывается ограниченным, то эта ограниченность характеризует весь рассматриваемый период и, следовательно, по существу выражает тенденцию экономического развития за прошедший период. С другой стороны, ограниченность становится ощутимой на предельной точке или реализуется лишь при дальнейшем росте затрат данного фактора. Однако возможность распространения на настоящее или будущее замеченных особенностей развития зависит от многих других факторов и обстоятельств. Поэтому полученные результаты более целесообразно относить также к прошлому периоду.

5.7. Применение эконометрических моделей для имитации и прогноза

Как вытекает из всего предыдущего анализа, комплексные эконометрические модели представляют собой ценный инструмент при исследовании национальной экономики. Особенно хороших результатов можно добиться, совмещая методы моделирования с экспертными оценками. Важную информацию об экономическом развитии можно получить также с помощью методов стохастических и вариантных имитаций.

В основе стохастических имитаций лежат численные оценки параметров, их стандартные ошибки и ошибки уравнений. Этот вид имитаций применяется при вычислении минимальных и максимальных вариантов, он показывает возможный разброс прогнозных значений.

Имитация вариантов экономических решений исходит из таких имитационных операторов, которые выражают цели экономической политики. Этот вид имитаций можно разделить на две группы:

а) факторная имитация, в основе которой лежат различные варианты экзогенных переменных и исследуется их влияние па движение эндогенных переменных;

б) целевая имитация, при которой накладываются некоторые ограничения на движение эндогенных переменных и ищутся необходимые для этого комбинации экзогенных переменных.

Имитационные процедуры в отношении применяемой техники можно разделить на два класса:

а) процедуры, при которых изменяются значения переменных при некоторых параметрах;

б) процедуры, при которых изменяются сами параметры.

Стохастическая имитация требует большого количества расчетов и при этом дает лишь ориентировочные оценки границ максимального рассеяния вокруг тренда. С другой стороны, имитация экономических вариантов проста в интерпретации и поэтому она имеет практическое значение. Когда речь идет об анализе прошлого, то имеют в виду факторную имитацию, при планировании же чаще всего используют целевую имитацию.

Объективный статистический прогноз должен учитывать прежде всего возможный отход от прошлых тенденций развития. С помощью имитационной техники (изменяя значения некоторых параметров и тренды экзогенных переменных) можно исследовать влияние соответствующих сдвигов па экономику и сравнить соответствующие им прогнозные зна-

чения эндогенных факторов с основными вариантами прогноза. Большим достоинством комплексных эконометрических моделей является их способность реагировать на каждое изменение комплексно. Это дает возможность глобально исследовать результаты различных альтернатив экономической политики, установить основные пропорции между важнейшими показателями и обеспечить взаимную их согласованность в разных вариантах плана.

ГЛАВА 6. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

6.1. Теория дисперсии и ошибки

Количественное исследование в терминах теории вероятностей представляет интерес для специалиста-эконометрика как средство оценки предсказательной полезности полученных данных. Что можно ожидать в последовательном развитии некоторого процесса и, следовательно, что можно предвидеть в этом отношении - вот вопросы, на которые статистико-вероятностный анализ должен дать ответ. Пробабилистика, потому что она ничего точно не знает об исследуемом объекте, а знает лишь статистику его поведения, содержит элемент ошибки. Поэтому при эмпирических исследованиях теория вероятностей интересна прежде всего тем, что она предоставляет идеи и методы теории ошибок измерения и предвидения. [9, 10, 11, 12, 16, 37].

Средние и ошибки. примитивное предсказание значений, которые может принять переменная в каком-то будущем моменте или эксперименте, исходит из средних значений, которые она принимала в прошлом. В случае дискретной переменной $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$, где x_i представляет собой значения, принимаемые переменной, а n - число рассмотренных случаев.

В повседневной жизни, мы постоянно пользуемся этим понятием, и часто, возможно, ошибочно. Нет сомнения в том, что две переменные, имеющие одну и ту же среднюю, могут иметь совершенно различные ряды значений, и, следовательно, этот показатель в состоянии охарактеризовать только один и не всегда наиболее важный аспект явления.

Нет сомнения также в том, что следующие два ряда:

y=(8; 8,5; 7,25; 7,75; 8; 9,25; 8; 7,25);

z = (3,5; 6; 8,25; 9,75; 11; 9; 11,5; 5),

представляющие измерение процессов у и г и имеющие одну и ту же среднюю $\bar{y} = \bar{z} = 8$, не оправдывают ожидания идентичности их будущих величин. Это видно с первого взгляда. Так, вероятность того, что в будущем значения у будут близки к среднему, очень велика: P=1 для интервала $y = 7{,}25 - y = 9{,}25$ (или 9,75). Для того же интервала значений вероятность г равна всего лишь 0,375.

Следует отметить, что непосредственное различие между этими двумя рядами составляет существенная дисперсия их компонентов. Этот показатель естественным способом дополняет наше представление об этих двух явлениях. Мы увидим далее, что чем больше дисперсия значений переменной, имеющей определенную среднюю, тем менее вероятно, что она примет в будущем значение, близкое к среднему, и тем слабее наши надежды на появление в будущем некоторого значения, близкого к средней. До сих пор условия были очень простыми; относительно просты и методы, которые применяют в статистике для измерения отклонений от средней в разных аспектах. Однако смысл этих методов при построении эконометрических моделей несколько отличается от того, который им придается в обычных обстоятельствах.

Но вначале еще задержимся на некоторых определениях и формулах.

Рассмотрим переменную x, значения которой имеют следующее распределение:

$$x : \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ p_1, p_2, \ldots, p_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Можно доказать, что отклонения от средней арифметической $\bar{x}$ $\left(\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$ имеют такое же распределение:

$$x-\bar{x}:\begin{pmatrix} x_1-\bar{x}, x_2-\bar{x}, \ldots, x_n-\bar{x} \\ p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Условия таковы, что среднее отклонение от средней арифметической равно нулю и, таким образом, эта средняя из отклонений не характеризует различия двух переменных с одинаковыми арифметическими средними. Действительно,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=(x_1-\bar{x})p_1+(x_2-\bar{x})p_2+\ldots+(x_n-\bar{x})p_n=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}p_n=\bar{x}-\bar{x}=0 \qquad (3$$

Доказательство (3) дает логическое основание для сомнения относительно средних величин в экономической статистике, о которых созданы многочисленные совершенно ненаучные мифы. Наиболее известны, конечно, те, которые относятся к «средним доходам» и которые маскируют явное неравенство. Теория статистических группировок направлена на преодоление таких заблуждений, но сама она не является начальным этапом эконометрического анализа, и ее можно считать предэкономической.

Другие проблемы возникают в связи с различными искусственными средними (геометрическая, гармоническая), применяемыми при исчислении средних ритмов в динамических процессах. О предсказательной ценности этих средних можно сказать не более чем о каждой другой средней;

1) вероятность их остается действительной только ceteris paribus;

2) если значения, принимаемые рассматриваемой переменной, имеют большое рассеяние, вся «игра» в вычисления средних величин является лишь игрой и больше ничем. И это в равной мере справедливо как для предсказаний, так и для сравнений.

Так как среднее отклонение от средней арифметической не может быть непосредственно приемлемым показателем

различий, общепринято выражать колеблемость дисперсией, представляющей среднюю из квадратов отклонений от средней арифметической

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2, \qquad (4)$$

или

$$\sigma^2 = (x_1 - \bar{x})^2 p_1 + (x_2 - \bar{x})^2 p_2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 p_n =$$
$$= (x_1^2 - 2\bar{x}x_1 + \bar{x}^2)p_1 + (x_2^2 - 2\bar{x}x_2 + \bar{x}^2)p_2 + \ldots +$$
$$+ (x_n^2 - 2\bar{x}x_n + \bar{x}^2)p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^{n} p_i =$$
$$= \bar{x}^2 - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2 = \bar{x}^2 - \bar{x}^2. \qquad (5)$$

Следовательно:

$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 =$ (средняя из квадратов) - (квадрат средней).

Дисперсия является основным показателем во всяком статистическом анализе, и ряд отношений, которые нас особенно интересуют, может быть из нее выведен. Первая величина, которая нас интересует, - это корень квадратный из дисперсии, т. е. среднеквадратическое отклонение, называемое также стандартным отклонением:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x - \bar{x})^2} \equiv D(x). \qquad (6)$$

Стандартное отклонение играет решающую роль в значительной части эконометрического анализа; это станет очевидным, как только мы займемся непосредственными проблемами эконометрического исследования.

По существу, в определенном смысле все анализируемые ранее показатели - простая средняя дисперсия или стандартное отклонение (среднеквадратическое отклонение) - в том или ином виде представляют тот или другой вид средней. Однако они показывают не средние значения, прини-

маемые переменной, а среднюю колеблемость или рассеяние этих значений, указывая, таким образом, вероятную Ошибку предполагаемой средней. Кроме того, в случае измерений нескольких групп среднеквадратическое отклонение становится стандартной ошибкой соответствующих выборок:

$$\sigma\bar{x}_i = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (\bar{x}_i - \mu)^2} \quad . \qquad (7)$$

где μ - средняя всей популяции, а $\bar{x}_i$ - средняя *i*-й выборочной группы. Мы вернемся к этим проблемам позднее, здесь нужно лишь сказать, что «малая» величина стандартного отклонения означает, что можно «доверять» средней, которая вычислена. Вспомнив пример из предыдущей главы, можно утверждать, что если величина $\sigma_{\bar{\alpha}}$ - мала, то в уравнении потребления угля допустимо использование без описания величины $\bar{\alpha}_{ij}$.

Различие между стандартным отклонением и стандартной ошибкой является вопросом интерпретации: первое относится ко всей совокупности данных, в то время как вторая - только к определенной выборке, «образцу» или пробе (или к ряду выборок). Последняя относится, следовательно, к случаям, когда делается несколько выборок из очень большой популяции. Таково положение в экспериментальных науках, где сравниваются группы повторных измерений. Экспериментальные ситуации возникают также в некоторых областях экономической деятельности. Но экономические науки вообще и дополняющая их эконометрия в частности имеют дело главным образом с неэкспериментальными ситуациями, о которых информирует статистика.

Даже если статистические данные относятся только к - «образцу» (например, несколько тысяч семейных бюджетов для изучения структуры потребления всего населения), они все-таки составляют «целое», «полную популяцию». В подобных случаях экономист не делает различия между (6) и (7).

Моменты. Понятие стандартной ошибки (формула 7) имеет значение главным образом в выборочном анализе, когда следует сравнить много последовательных стандартных ошибок, относящихся к группам последовательных измерений по выборкам, взятым из той же популяции. Техника и логика подобных измерений выходит, однако, за пределы наших интересов в данной работе.

Мы видели, что различие между стандартным отклонением и стандартной ошибкой состоит в том, что последняя исходит не из средней, выведенной из всего рассматриваемого множества или всей популяции, а из средней одной выборки, распространяя вывод на всю популяцию. Это вопрос истолкования - и мы можем принять подобную интерпретацию - считать каждую статистику некоторой переменной x, даже «сплошную», только выборкой из популяции, образованной всеми возможными значениями, которые переменная могла бы иметь. Сказанное относится и к изучению эволюции во времени переменных $x(t)$ ($t = 1, 2, \ldots, T$), когда мы располагаем данными для T периода. Установив среднюю, дисперсию и придавая соответствующее значение каждому ряду $x(t)$ ($t = T+1, \ldots, 2T$), допустим, что проведено измерение в выборке из популяции $x(t)$($t=T+1, \ldots, 2T$), состоящей из $2T$ элементов ($t = 1, 2, \ldots, T, T+1, T+2, \ldots, 2T$). В этих случаях средняя из различных отклонений от получаемых средних называется моментом, или, точнее, центральным моментом случайной переменной.

Начальным моментом переменной будет сама средняя $\bar{x}$.

Центральным моментом первого порядка является среднее отклонение

$$\frac{1}{n}\sum_i (x_1 - \bar{x}) = 0. \qquad (8)$$

Центральным моментом второго порядка будет дисперсия

$$m_{xx} = \frac{1}{n}\sum_i (x_1 - \bar{x})^2 = D^2(x) \equiv \sigma_x^2. \qquad (9)$$

Мы взяли здесь специальное обозначение для момента второго порядка - m_{xx}, условно принятое в эконометрической литературе для этого наиболее распространенного типа центрального момента. Обозначение $D^2(x)$ чаще встречается в статистической литературе (аналогично $D^r(x)$ - для момента r-го порядка).

Таким образом, центральный момент r-го порядка будет обозначаться

$$D^r(x) = \frac{1}{n}\sum_i (x_1 - \bar{x})^r , \qquad (10)$$

более общее обозначение

$$D^r(x) = \sum_i (x_1 - \bar{x})^r p(x_i), \qquad (11)$$

где $p(x)$ - вероятность появления переменной x_i. В случае непрерывной функции имеем

$$D^r(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \bar{x}) p(x_i) dx. \qquad (12)$$

6.2. Дисперсия как ошибка измерения и вариация переменной

Рассмотрим два ряда данных:

x=(8; 8,5; 7,25; 8; 8; 8,25; 8,25; 7,75; 7,75; 8,25);

y=(5,0; 5,6; 5,8; 7,7; 7,1; 7,4; 8,4; 9,9; 11,2; 11,9).

Средняя в обоих рядах та же: $\bar{x} = \bar{y} = 8$. Эти данные получены из измерений двух разных объектов и показывают различия между ними. В случае x исследуемый объект имеет очень мало колеблющиеся значения. Малая дисперсия измеряемых величин позволяет считать, что реальная величина рассматриваемого объекта равна примерно 7,75-8,25 или даже 8. Отклонения от этой величины могут иметь различные причины, но они кажутся несистематическими, «случайными» и, следовательно, могут рассматриваться как ошибки

измерения. Таким же образом можно оценить компоненты ряда y. В этом случае , ясно не только то, что величины не концентрируются вокруг средней, но также и то, что очень большая вариация переменной (m_{yy}=2,993 по сравнению с m_{xx}=0,3525) объясняется тем, что в измеряемом объекте в десяти последовательных отсчетах имел место процесс возрастания. Следовательно, есть серьезные причины предполагать, что существует не случайный, а систематически действующий внешний фактор, обусловливающий все изменения.

Действительно, слишком большая вариация не случайная, и, следовательно, источник этого явления надо искать в каком-то систематическом внешнем факторе.

Мы увидим, что главное для построения эконометрических моделей - ответ на вопрос: изменяется ли переменная величина случайно (стохастически), например в результате ошибки измерения, или, напротив, систематически.

Пример. Предположим, что из инженерной практики известно, что для производства единицы продукции в отрасли j необходимо, чтобы отрасль i поставила количество k_{ij} продукции своего производства. На всю продукцию q_j следовательно, будет израсходовано $q_{ij}=k_{ij}q_j$ продукции отрасли i.

Таковы первоначальные технические данные. Если нужно проверить точность этих расчетов, то можно установить, что для того же количества q_j в n различных случаях расходовалось:

$$\begin{cases} q_{ij}^{(1)} = k_{ij}q_j + u_1; \\ q_{ij}^{(2)} = k_{ij}q_j + u_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{ij}^{(n)} = k_{ij}q_j + u_n. \end{cases} \qquad (13)$$

где

$$u_i = q_{ij} - q_{ij}^{(i)}.$$

Предполагая, что инженерные данные (k_{ij}) правильны, попытаемся установить, произошли ли во время производственного процесса систематические изменения или, наоборот,

имели место лишь случайные потери, случайные ошибки исчисления и т. д. В этом последнем случае u_i - ошибка, и она не может быть приписана каким-либо определенным систематически действующим факторам.

Существует много критериев проверки, может ли подобное отклонение рассматриваться как ошибка, а не как систематическое изменение. Мы рассмотрим их поочередно в настоящей главе, причем два из них в этом разделе,

Прежде всего, переменная u_i должна иметь среднее значение, равное нулю. По существу, u_i считается отклонением от среднего. Если принять величину q_{ij}, данную инженером, как среднюю

$$q_{ij} \equiv \bar{q}_{ij},$$

тогда

$$u_i = \left(q_{ij}^{(i)} - \bar{q}_{ij}\right) \qquad (14)$$

Но средняя случайной переменной, равная нулю, не может нас удовлетворить по уже известным причинам. Следующим необходимым критерием (но все же еще недостаточным) будет то, что дисперсия u_i

$$u_i^2 = \frac{1}{n}\sum\left(q_{ij}^{(i)} - \bar{q}_{ij}\right)^2. \qquad (15)$$

должна быть константной во времени. Под «константной» в этом смысле понимаются допустимые изменения. Как иллюстрацию (хотя и не очень убедительную) можно взять пример, приведенный в начале раздела, и предположить, что значения x и y измерялись в два этапа: Первый этап

x=(8; 8,5; 7,25; 8; 8); $\bar{x}(1) = 7{,}95$;

y=(5,0; 5,6; 5,8; 7,7; 7,1); $\bar{y}(1) = 6{,}24$.

Второй этап

x=(8,25; 8,25; 7,75; 7,75; 8,25); $\bar{x}(2) = 8{,}05$;

y = (7,4; 9,3; 9,9; 11,2; 11,9); $\bar{y}(2) = 9{,}94$.

Можно вычислить следующие варианты или моменты:

$$m_{xx}(1) = 0{,}162;\ m_{yy}(1) = 1{,}0024;$$
$$m_{xx}(2) = 0{,}060;\ m_{yy}(2) = 2{,}6616.$$

Величина дисперсии очень меняется в зависимости от выборки для переменной y в дисперсии x различия намного меньше, хотя и здесь она не является константной. Однако ее можно принять как данную. Условие константности дисперсии должно приниматься с определенной толерантностью: оно действительно, когда наблюдение достаточно многочисленно, и, следовательно, оно не относится к данному случаю. Но иногда его можно допустить гипотетически, «на глаз». Так выглядит наш пример. (Мы увидим даже, что есть случаи, когда допущение этой гипотезы станет условием возможности каждого измерения.) Если сделать из этих двух полных рядов x и y группы из всех комбинаций по пяти, то можно видеть, что последовательные серии переменной x, в свою очередь, дадут ряд с малой дисперсией, подтверждая гипотезу об их константности. Совсем не таким будет результат для y.

6.3. Ковариация и корреляция

Когда дисперсия очень велика, причину ищут в одной или многих независимых переменных или в экзогенных переменных, которые должны объяснить рассматриваемое явление. Тогда выдвигается гипотеза ковариации между переменными x и z:

$$m_{xz} \equiv \sigma_{xz} \equiv \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z}). \qquad (16)$$

Это первый шаг на пути к измерению связи между переменными. При измерении подобных связей следует помнить о двух - количественном и качественном - аспектах подобных связей. С количественной точки зрения измерение типа вариации или ковариации хотя и полезно, но далеко не удовлетворительно, ибо в

нем оперируют такими неточными понятиями, как «большой», «малый», «больший», «меньший» и т. д.

Для измерения связи принята более точная мера - корреляция. Ее значение в эконометрических исследованиях вторичное и обозначается

$$R(x,y)=\frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_1-\bar{x})^2\cdot\frac{1}{n}\sum(y_i-\bar{y})^2}}. \qquad (17)$$

Для упрощения расчетов можно пользоваться одной из двух эквивалентных формул:

$$R(x,y)=\frac{\sum x_i y_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum x_i^2-n\bar{x}^2\right)\left(\sum y_i^2-n\bar{y}^2\right)}}; \qquad (18)$$

$$R(x,y)=\frac{n\sum x_i y_i-\sum x_i\sum y_i}{\sqrt{\left[n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2\right]\left[n\sum y_i^2-\left(\sum y_i\right)^2\right]}}. \qquad (19)$$

Без доказательства отметим, что величина R варьирует между -1 и +1, давая, таким образом, кажущееся более точным измерение связи между двумя переменными. Если значение R близко к -1 или +1, то это означает, что существует тесная связь между переменными; если оно приближается к 0, то связь слабая.

Таковы внешние качества коэффициента корреляции. Его истинное достоинство содержится, к сожалению, не во внешнем проявлении, и поэтому мы не будем на нем останавливаться, поскольку оно рассматривается в большинстве учебников, трактатов и курсов по статистике, математике и экономике. Напротив, учитывая требования эконометрических исследований, мы настаиваем на ограниченной интерпретации этого показателя, в противном случае совершенно неинтересного.

Не следует забывать (это касается качественного аспекта анализа), что когда корреляция приближается к 1, еще нет уверенности в том, что мы имеем реальную связь между пе-

ременными; в то же время, даже если корреляция равна нулю, нет гарантии отсутствия связи.

Фактически коэффициент корреляции не указывает на наличие структурной связи между двумя переменными.

«Связь» и «корреляция» - это два весьма различных понятия в статистике вообще и в эконометрии в частности. Когда начинают вычислять корреляцию двух рядов данных, следует заранее знать (или, по крайней мере, предполагать), что существует связь между переменными, которую наблюдаемые количества только иллюстрируют. Например, если кто-нибудь будет изучать связь между урожаем и осадками, то наличие причинного соотношения между этими переменными бесспорно, даже если при неизвестной деформации рядов данных корреляция была бы маленькой. Корреляция, а не связь, ибо связь существует и мы знаем о том, что она существует.

Точно так же тот, кто верит, что сделал великое открытие, установив корреляцию 0,90 между осадками и урожаем (маловероятная цифра), конечно, создает иллюзии. Связь между факторами и процессами может существовать даже в том случае, если данные, в которых она отражена, не свидетельствуют о слишком большой корреляции. Поэтому когда мы измеряем корреляцию, то делаем это не для установления структурной связи, а для того, чтобы узнать, достаточно ли «чисты» отражающие ее данные для более точного определения вида связи. Таким образом, в отличие от подавляющего большинства наших работ по статистике, в которых корреляции придается значение эвристического метода или еще большее, мы считаем, что она играет роль вторичного помощника для различных методов.

Проблематика этого раздела рассматривается в разных аспектах в последующих главах этой книги. Резюмируем это в нескольких строках. Явления имеют свой механизм с определенной структурой. Во многих случаях эта структура может быть определена не непосредственно, а лишь по имеющимся в нашем распоряжении статистическим данным отно-

сительно некоторых ее внешних проявлений. Корреляция между ними - это один из показателей, призванных улавливать связь не просто между этими данными, а между элементами и действиями некоторого механизма, которые он в большей или меньшей степени отражает. Если корреляция «большая», тогда делается предположение - не более и не менее чем предположение - что ясно отражена существующая связь, которая может существовать и тогда, когда она отражается более слабо.

6.4. Источники статистических ошибок

Ошибка - одно из основных понятий эконометрии. Определение и сведение ее к минимуму в наших измерениях считается предварительным условием построения моделей для предвидения.

До сих пор мы все время предполагали, что ошибки происходят от несовершенства способов измерения. Иногда в самом деле это так. Мы говорим здесь не об ошибочных методах измерения, а о правильных, хорошо подобранных методах, но имеющих границы точности, содержащиеся в их природе. Существуют также «ошибки», содержащиеся в природе самого измеряемого процесса; здесь ошибка не является ошибкой, а она указывает на тот факт, что следует искать объяснение причины слишком больших вариаций. В таких случаях ошибка существует *in res*, т.е. измеряемый процесс обнаруживает независимое влияние.

Прежде всего, остановимся на тех ошибках, источник которых - технические погрешности, возникающие в процессе самого измерения. Отметим две, наиболее важные из них. Первая связана с неполной спецификацией исследуемого объекта. Возвратимся к нашему примеру и предположим, что между q_{ij} и q_j существует пропорциональное отношение, на самом же деле форма $q_{ij}=f(q_j)$ отлична от пропорциональной.

В этом случае и $u_i = f(q_{ij})$ определенной формы - и именно эту форму должна определить эконометрия. Ошибки измерения очень часты тогда, когда все доверие возлагают на структурные отношения, выведенные из единичных измерений, забывая, что они могут скрывать статистические отношения, которые можно выявить лишь путем повторных измерений.

Типичный случай представляют измерения типа «затраты-выпуск», основанные на регистрации единичных данных некоторых структурных отношений. Эти отношения могут быть намного сложнее, чем те, которые следуют из простой зависимости

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}.$$

Ошибки агрегирования наиболее велики в отраслевой макроэкономической модели. Как мы уже указывали, основная цель эконометрических исследований - восстановление структур, не поддающихся непосредственному наблюдению, которые связывают между собой экономические переменные. С другой стороны, мы знаем, что наряду с эконометрией существует и другой метод количественного исследования экономических отношений, а именно - путем прямого измерения структурных данных. Так как ни один из методов нас не может удовлетворить полностью, нам кажется, что эти два метода должны дополнять друг друга.

6.5. Законы случайных вариаций в эконометрии

Основная гипотеза, согласно которой переменная случайна (например, ошибки), постулирует закон, свойственный этой переменной. Когда не открыт закон, свойственный некоторой переменной, то предполагается, что ее движение определяется вариацией некоторых внешних факторов, некото-

рых других независимых переменных. Вообще допускают, что переменная является случайной, когда она подчиняется некоторому закону распределения или рассеяния.

Известно, что существует статистическое распределение, однако, неизвестно, каково его значение для эконометрических исследований. Вся проблема состоит в том, что когда определяются связи между различными переменными и когда специфицируется форма связи определенных переменных, то неспецифицированными останутся лишь случайные переменные.

Статистике известны различные законы распределения, и они имеют разнообразное применение в экономике, особенно в операционных исследованиях. Но в эконометрии имеет значение преимущественно нормальное распределение или распределение Гаусса-Лапласа. Его формула известна из учебников статистики:

$$p(u) = \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi}} \exp - \frac{1}{2} \sum \frac{(u - \bar{u})^2}{\sigma_u^2}. \qquad (20)$$

Графически оно описывается колоколообразной кривой распределения некоторой случайной переменной около нулевой средней.

Понятие нормального распределения - главное в эконометрии и вполне позволяет определить ошибку.

Резюмируем. Как было отмечено, ошибка представляет собой разность между ожидаемой величиной переменной и ее реальной величиной. Определяя ее таким образом, следует иметь в виду, что не каждая разность между ожидаемой и реальной величинами может быть отнесена к этой категории. Некоторые ошибки являются погрешностями специфицирования или агрегирования, и их следует объяснять другими факторами. Только ошибкам-остаткам приписываются законы распределения. Для того чтобы их трактовать как остаточные величины, а не как погрешности, они должны иметь следующие отличительные черты:

1) осуществляться нерегулярно и величина каждой ошибки должна характеризоваться коэффициентом вероятности. Например, уровень производства угля не случаен; он зависит от производства электроэнергии, стали, богатства ресурсов, производительности труда и т. д. Следовательно, мы не можем приписывать некоторый коэффициент вероятности различным величинам продукции угля. Напротив, извлечение красного или белого шара из урны, содержащей неизвестное вначале число тех или иных шаров, осуществляется случайно. После определенного числа извлечений красные и белые шары будут иметь свои коэффициенты вероятности;

2) обладать нулевой средней величиной - легко удовлетворяемое условие в случае отклонения от арифметической средней. Однако вопрос не так прост, ибо требуется также, чтобы

3) вариация была постоянной для любого множества будущих величин случайной переменной и чтобы

4) распределение ошибки было нормальным.

Ожидание и ошибки. Для того чтобы понять подлинный смысл упомянутых четырех условий, необходимо разъяснить понятие ожидания, которое мы использовали только в его особой форме средней.

Мы отмечали, что дисперсия переменной измеряется показателем, который дает средняя из суммы квадратов отклонений переменной от ее средней:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})^2. \qquad (21)$$

Но почему только по отношению к средней? Потому что по определенным мотивам мы ожидали получения средней величины как результата измерения. Таким образом, в нашем примере мы имели основания ожидать, что величина x, в области каждого измерения, будет равна своей средней арифметической $\bar{x} = 8$. Но так рассуждать нельзя в случае у, где переменная обнаруживает возрастающую динамику и где нет

никакого серьезного мотива ожидать при каждом будущем измерении величину близкую к средней арифметической.

Рассмотрим теперь пример и представим себе ряд величин, растущих в определенном среднем ритме, с очень небольшими изменениями. Например, ряд индексов

I	II	III	IV	V	
100,0	110,0	121,0	133,1	146,41	и т.д.

постоянно растет на 10%. У нас есть основания считать, что элементы VI и VII будут иметь величины 161,051 и 173,156. Если все-таки случится так, что измеряемые величины составят 160 и 179, то тогда скажем, что в ряде произошла вариация около некоторого определенного ожидания. Разумеется, в подобных случаях вариация должна каждый раз измеряться по отношению к ожидаемой величине. Таким образом, в случае рядов данных, отражающих эволюционные процессы, вариация исчисляется так:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum\left(x - E(x)\right)^2. \qquad (22)$$

где $E(x)$ - ожидаемая величина (E - ожидание) x. $E(x)$ может быть переменной и определяется иногда как функция одной или нескольких переменных. Например, можно предсказать (на том или ином основании) величину переменной x как функцию $z : x = f(z)$, т. е. ожидать, что в каждый момент t величина x определяется этой функцией:

$$x_t = f(z_t).$$

Если это строго детерминировано, то

$$\left(x_1 - f(z_1)\right) = \left(x_2 - f(z_2)\right) = \ldots = \left(x_n - f(z_n)\right) = 0.$$

Однако в случае, когда x не вполне определяет z, говорят, что функция стохастическая и подразумевает ошибку

$$u_t = x_t - f(z_t).$$

Эта ошибка не является данной, когда она соответствует четырем изложенным выше условиям, которым теперь можно дать полное объяснение, необходимое для установления эконометрических функций.

Условие 1. Ошибка должна быть случайной. Пример, приведенный в предыдущем абзаце, можно сделать теперь более ясным. Предположим, что продукция угля x определяется n переменными $z_1, z_2, ..., z_n$ почти полностью, но имеются некоторые колебания в моменты измерений t:

$$u_t = x_t - f_t(z_{1t}, z_{2t}, ..., z_{nt}) \neq 0$$

(по крайней мере, для одного t). Если элементы ряда u_t, относящиеся к периодам (1)-(T-1), имеют сходные частоты (в принципе идентичные) с элементами ряда для периодов (T+1)-(2T), тогда дисперсия u_t случайная. Можно сказать, что из урны, содержащей отклонения x_t-f_t (для t=T+1; T+2,..., 2T), извлекаются различные шары, на которых нанесены величины u_t, с той же частотой, что и в период 1, 2, ..., T.

Условие 2. Ошибка должна иметь нулевую среднюю величину. Подразумевается, что речь идет об алгебраической сумме отклонений не от средней, а от ожидаемой величины.

Здесь уместно обратить внимание на одну из наиболее обычных неправильностей статистического анализа динамических рядов. Исчисляется мнимая дисперсия по отношению к средней арифметической динамического ряда; затем исчисляется дисперсия отрезков того же ряда по отношению к их собственным средним арифметическим и делается вывод о том, что дисперсия за «определенные, более короткие интервалы» меньше. Обычный вывод заключается в том, что определенные, более короткие интервалы выявляют большую «стабильность».

Мы не может анализировать здесь различные случаи, часто рассматриваемые в публикациях последних лет, но считаем целесообразным сделать несколько уточнений относительно этих сравнений между динамическим рядом и его отрезками. Речь идет о следующем положении: в ряде растущих данных чем длиннее

ряд, тем больше дисперсия по отношению к средней арифметической (а не дисперсия как таковая). Это весьма просто - квадрат большей цифры больше квадрата меньшей.

Если бы надо было в самом деле вычислить разность между дисперсиями двух подпериодов того же динамического ряда, то это следовало бы сделать в соответствии с ожидаемыми значениями переменных, т. е. исчислить дисперсию по отношению к тренду:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{n}\sum_t [x_t - f(t)]^2, \qquad (23)$$

где x_t - данные реального ряда в момент t и $f(t)$ - тренд для x.

Легко можно представить очень стабильный ряд, т.е. с темпами роста, почти константно колеблющимися вокруг 10%: 9,5-10,5%. Чем длиннее будет этот ряд, очень стабильный во всех своих отрезках, тем больше его средняя арифметическая, тем больше разности того и другого знака по отношению к средней и тем больше квадрат отклонений. И чем больше будет этот квадрат (геометрическая прогрессия), тем больше средняя арифметическая (возрастание называется пропорциональным). А дисперсия в различные периоды могла бы быть измерена как отклонение годового темпа от среднего, который мог бы быть вычислен как средний арифметический, если бы колебания были не слишком сильными. Среднее отклонение получилось бы равным нулю.

Условие 3. Ошибка должна иметь константную дисперсию (это вытекает из условий 1 и 2).

Условие 4. Распределение должно быть нормальным. Последние два условия теоретически допустимы, однако, к сожалению, не всегда соблюдаются.

Упомянутые условия интересны, их часто предполагают выполненными, хотя фактически они не соблюдаются. Иногда располагают недостаточным числом наблюдений или измерений, и последующие ошибки-остатки не могут быть удовлетворительным образом сгруппированы по вероятностным критериям со-

гласно определенным видам статистического распределения. В самом деле, известно, что статистический закон выполняется лишь при «достаточно большом» числе наблюдений. Однако имеются случаи, когда даже по недостаточному числу наблюдений можно заключить, что ошибки возникают с определенными свойствами, и тогда это постулируют при оценках.

Пусть переменная x зависит от переменной z. Зависимость можно выразить функцией, форма которой исходит из гипотезы, но величины ее параметров неизвестны.

Нашими рядами являются:

$$\begin{matrix} x_1, x_2, ..., x_n; \\ z_1, z_2, ..., z_n. \end{matrix} \qquad (24)$$

и предполагается, что они аппроксимационно связаны линейной функцией, имеющей параметры a_1 и b_1. Поскольку связь стохастическая, вероятно, должен быть остаток их:

$$\begin{matrix} u_1^{(1)} = x_1 - a_1 - b_1 z_1; \\ u_2^{(1)} = x_2 - a_1 - b_1 z_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n^{(1)} = x_n - a_1 - b_1 z_n. \end{matrix} \qquad (25)$$

Если $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, ..., u_n^{(1)}$ не отвечают нашим четырем условиям, естественно было бы найти еще одну экспликативную переменную или, если это невозможно, заменить a_1 и b_1 определенными a_2 и b_2.

Получим новый ряд ошибок:

$$\begin{matrix} u_1^{(2)} = x_1 - a_2 - b_2 z_1; \\ u_2^{(2)} = x_2 - a_2 - b_2 z_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n^{(2)} = x_n - a_2 - b_2 z_n. \end{matrix} \qquad (26)$$

Так можно идти до бесконечности, пока не найдены ошибки, соответствующие нашим условиям. Однако практически поступают иначе: сначала постулируют точно условия ошибок и, исходя из них, определяют величины a и b.

6.6. Основные предположения дисперсионного анализа

1. Случайные величины ε_{ij} независимы и нормально распределены с параметрами $M\left[\varepsilon_{ij}\right]=0,\ D\left[\varepsilon_{ij}\right]=\sigma^2=\text{const}$ (дисперсии однородны).

2. Для модели с фиксированными уровнями (т.е. только заданными значениями) $\sum_{j=1}^{K}\alpha_j=0.$

3. Для модели со случайными уровнями величины α_j - независимые нормально распределенные случайные величины с параметрами $M\left[\alpha_j\right]=0,\ \ D\left[\varepsilon_{ij}\right]=\sigma^2=const.$

Для этой модели величина *x* принимает значения, являющиеся выборочными из некоторой совокупности.

Из модели дисперсионного анализа можно получить основное уравнение дисперсионного анализа:

$$\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{ij}-\bar{y}_{..}\right)^2=\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\bar{y}_{.j}-\bar{y}_{..}\right)^2+\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_j}\left(y_{ij}-\bar{y}_{.j}\right)^2,\ (27)$$

где $\bar{y}_{.j}$ - средняя величина *y*, соответствующая *j*-му уровню фактора *x* (символ «.» означает, что произошло суммирование по данному индексу);

$\bar{y}_{..}$ - общее среднее *y* по всем измерениям (оценка для *y*).

Выражение (27) представляет собой разложение суммы квадратов отклонений от общего среднего на сумму квадратов отклонений средних по уровням фактора от общего среднего и сумму квадратов отклонений от средних по уровням фактора.

Нулевая гипотеза дисперсионного анализа $H_0:\alpha_j=0$ для всех *j*, т.е. предполагается, что не существует влияния (всех уровней) фактора *x*. Тогда модель принимает вид $y_{ij}=\mu+\varepsilon_{ij}$. Если

выдвинута нулевая гипотеза и справедливы все предположения дисперсионного анализа, то можно проверить гипотезу о существенности влияния данного фактора, рассчитав

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\cdot\cdot}\right)^2/(K-1)}{\sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n_j}\left(\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{\cdot j}\right)^2/(N-K)}. \quad (28)$$

Если $F<F_{1-q}$, то нулевую гипотезу следует принять. Если $F>F_{1-q}$, то нулевую гипотезу следует отвергнуть и попарным сравнением средних выяснить наиболее существенные уровни фактора x.

При расчетах удобно пользоваться таблицей дисперсионного анализа, в последнем столбце которой приводятся математические ожидания выборочных дисперсий, являющиеся характеристиками влияния соответствующих факторов. Так, для однофакторного дисперсионного анализа при $n_1 = n_2 = \ldots = n_K = n$ эта таблица имеет вид табл. 6.1.

Таблица 6.1.

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Средний квадрат отклонения	Математическое ожидание средних квадратов отклонений
Различия между уровнями α_j	$K-1$	$\frac{S_\alpha^2}{K-1}$	$\sigma^2(\varepsilon)+n\sigma^2(\alpha)$
Ошибка ε_{ij}	$N-K$	$\frac{S_\varepsilon^2}{N-1}$	$\sigma^2(\varepsilon)$
$S_\varepsilon^2 = \sum_i\sum_j\left(y_{ij}-\bar{y}_{\cdot j}\right)^2;\quad S_\alpha^2 = \sum_i\sum_j\left(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y}_{\cdot\cdot}\right)^2$			

Величина F-критерия находится как отношение оценок дисперсий (28). При этом из последнего столбца таблицы видно, что генеральная дисперсия $M\left[S_\alpha^2/(K-1)\right] = \sigma^2(\varepsilon)+n\sigma^2(\alpha)$.

При нулевой гипотезе $\alpha_j = 0$ $(j = 1,...,K)$ величина $\sigma^2(\alpha) = 0$. Тогда отношение (28) подчиняется распределению Фишера, поскольку статистики $\frac{S_\alpha^2}{K-1}$ и $\frac{S_\varepsilon^2}{N-1}$ при нулевой гипотезе являются оценкой одной и той же дисперсии $\sigma^2(\varepsilon)$. Последний столбец таблицы дисперсионного анализа используют также и для других целей. Например, дисперсия, характеризующая вклад фактора *x*, согласно таблице равна

$$\sigma^2(\alpha) = \left[\frac{S_\alpha^2}{K-1} - \frac{S_\varepsilon^2}{N-K}\right] / n.$$

Для иллюстрации применения однофакторного дисперсионного анализа рассмотрим пример.

Пример. Исследовалось влияние четырех различных регионов на цену единицы конкретного товара. Модель дисперсионного анализа имеет вид:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}, \quad (i = 1,...,5; \quad j = 1,...,4),,$$

где *y* - цена единицы товара; α_j - вид (наименование) региона.

Это модель с фиксированными уровнями, т.е. исследуются именно данные четыре региона. Число параллельных наблюдений для каждого типа региона одинаково и равно $n_1 = n_2 = ... = n_4 = 5.$.

Результаты наблюдений сведены в табл. 6.2.

Таблица 6.2.

Тип региона			
I	II	III	IV
56	64	45	42
55	61	46	39
62	50	45	45
59	55	39	43
60	56	43	41

Результаты дисперсионного анализа отражены в табл. 6.3, в последнем столбце которой приводятся выражения для математических ожиданий соответствующих выборочных дисперсий.

Таблица 6.3.

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат отклонения	Математическое ожидание средних квадратов отклонений
Между типами	3	1135,0	378,3	$\sigma^2(\varepsilon)+5\sigma^2(\alpha)$
Для каждого типа (ε_{ij})	16	203,2	2,7	$\sigma^2(\varepsilon)$
Сумма	19	1338,2	-	-

Эти выражения необходимы для правильного составления F-отношения. Для рассмотренного примера это отношение выражается формулой (28).

Таким образом, проверка нулевой гипотезы $H_0:\alpha_j=0$ для $j=1,...,4$, т.е. гипотезы о том, что тип региона не влияет на цену единицы товара, осуществляется с помощью F-отношения.

$F=378{,}3/12{,}7=29{,}3$. Эта величина больше табличной $F_{0,05}(3,16)=3{,}24$, поэтому следует сделать вывод, что цена единицы товара зависит от вида региона.

6.7. Методика дисперсионного анализа

Процедуру однофакторного дисперсионного анализа удобно представлять в виде следующего алгоритма.

1. Все данные располагают в табл. 4, в которой через $\tilde{y}_{a_j}$ обозначена сумма наблюдений по j-му столбцу.

Таблица 6.4.

Номер наблюдения, i	Уровень фактора, j			
	α_1	α_2	…	α_K
1	y_{11}	y_{21}	…	y_{K1}
2	y_{12}	y_{22}	…	y_{K2}
…	…	…	…	…
N	y_{1n}	y_{2n}	…	y_{Kn}
$\widetilde{y}_{\alpha_j}$	$\widetilde{y}_{\alpha_1}$	$\widetilde{y}_{\alpha_2}$	…	$\widetilde{y}_{\alpha_K}$

2.Находят сумму квадратов всех наблюдений:

$$Q_1 = \sum_{j=1}^{K}\sum_{i=1}^{n} y_{ij}^2. \qquad (29)$$

3. Находят сумму квадратов итогов по столбцам, деленных на число наблюдений в соответствующем столбце:

$$Q_2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{y_{\alpha_j}^2}{n_j}. \qquad (30)$$

4. Находят квадрат общего итога, деленный на число всех наблюдений:

$$Q_3 = \frac{1}{N}\left(\sum_{j=1}^{K} y_{\alpha_j}^2\right)^2. \qquad (31)$$

5. Вычисляют оценки дисперсии фактора σ_{Φ}^{*2} с и дисперсии $\sigma_{(\varepsilon)}^{*2}$ вязанной со случайностью, по формулам:

$$\sigma_{(\varepsilon)}^{*2} = \frac{Q_1 - Q_2}{N - K}; \qquad \sigma_{\Phi}^{*2} = \frac{Q_2 - Q_3}{K - 1}.;$$

6. Проверяют значимость отношения $\sigma_{\Phi}^{*2} / \sigma_{(\varepsilon)}^{*2}$ по критерию Фишера, исходя из h_1=K-1 и h_2=N-K степеней свободы.

Если это отношение незначимо, то рассчитывают оценку генеральной дисперсии $\sigma^{*2} = \frac{Q_1 - Q_2}{N - 1}$, имеющую N-1 степеней свободы.

Таблица 6.5.

Номер наблюдения	Ферганский вилоят	Наманганский вилоят	Андижанский вилоят	Сырдарьинский вилоят	Джизакский вилоят	Ташкентский вилоят	Самаркандский вилоят
1	6,5	5,0	2,0	2,1	10,0	6,0	3,0
2	2,1	2,0	3,5	6,0	7,5	10,0	1,8
3	3,0	8,0	4,0	2,0	15,0	12,0	2,0
4	4,1	4,0	3,0	3,0	5,0	5,0	2,0
5	4,0	4,0	1,4	5,0	5,0	6,0	1,6
6	4,0	1,5	1,2	5,0	6,0	5,0	1,5
7	2,0	2,2	4,5	7,0	5,0	6,5	3,0
8	1,0	1,8	3,0	6,0	6,5	8,0	5,0
9	2,0	1,0	2,0	2,7	3,0	5,0	4,8
10	-	1,0	3,0	7,0	3,0	2,0	1,0
11	-	1,5	2,5	5,5	5,2	3,0	0,83
12	-	1,75	3,0	2,0	13,0	10,0	1,0
13	-	1,2	4,5	5,0	3,0	5,0	3,0
14	-	1,0	1,25	5,0	2,9	6,0	2,0
15	-	1,5	-	2,0	-	4,0	1,0
16	-	1,5	-	1,5	-	8,0	2,0
17	-	2,5	-	1,5	-	15,0	-
18	-	2,0	-	1,6	-	6,0	-
19	-	2,5	-	2,2	-	-	-
20	-	3,0	-	-	-	-	-
21	-	2,0	-	-	-	-	-
22	-	2,0	-	-	-	-	-
23	-	2,5	-	-	-	-	-
Итого	28,7	56,45	38,85	72,1	90,1	122,5	37,53

Пример. Для семи вилоятов республики требуется оценить значимость (влияние) такого фактора, как тип региона, для сроков окупаемости инвестиционных проектов (или же расхождения в средних сроках окупаемости по регионам считать случайным).

Исходные данные задачи представлены в табл. 6.5.

Решение.

1. Находим сумму квадратов всех наблюдений: $Q_1 = 2661{,}17$.
2. Находим сумму квадратов итогов по столбцам, деленных на число наблюдений в соответствующем столбце: $Q_2 = 2107{,}3$.
3. Находим квадрат общего итога, деленный на число всех наблюдений: $Q_3 = 1746{,}28$.
4. Вычисляем оценки дисперсии фактора и дисперсии, связанной со случайностью, по формулам:

$$\sigma_{\Phi}^{*2} = \frac{Q_2 - Q_3}{K-1} = \frac{2107{,}3 - 1746{,}28}{6} = 60{,}17;$$

$$\sigma_{(\varepsilon)}^{*2} = \frac{Q_1 - Q_2}{N-K} = \frac{2661{,}17 - 2107{,}3}{114-7} = \frac{553{,}87}{107} = 5{,}18,$$

где K=7, N=114.

5. Рассчитываем значение F-статистики (статистики Фишера) как отношение двух дисперсий по формуле:

$$F = \frac{\sigma_{\Phi}^{*2}}{\sigma_{(\varepsilon)}^{*2}} = \frac{60{,}17}{5{,}18} = 11{,}6.$$

6. Входим в таблицы распределения Фишера и по уровню значимости q и соответствующим числам степеней свободы определяем табличное значение F-статистики: q=0,05; h_1=K-1=6; h_2=N-K=107.

Табличное значение F-статистики равно 2,34 ($F_т$=2,34).

7. Применяем статистический критерий: поскольку $F_т \le F$, то исследуемый фактор считаем значимым.

Строим диаграмму средних значений сроков окупаемости для всех рассматриваемых регионов (рис. 1).

Из диаграммы следует, что по данному показателю приоритетной является Самаркандский вилоят.

Перейдем теперь к рассмотрению многофакторного дисперсионного анализа.

Пусть в эксперименте на величину отклика влияют два фактора α и β. При этом фактор α варьируется на i уров-

нях, а фактор β на j уровнях. В этом случае математическая модель дисперсионного анализа имеет вид:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_{ik} + \beta_{jk} + \gamma_{ijk} + \varepsilon, \qquad (33)$$

где γ_{ijk} - эффект взаимодействия факторов в k-м опыте, когда фактор α находился на i-м уровне, а фактор β - на j-м уровне;

α_{ik}, β_{jk} - эффекты факторов α и β на i-м и j-м уровнях соответственно в опыте с номером k.

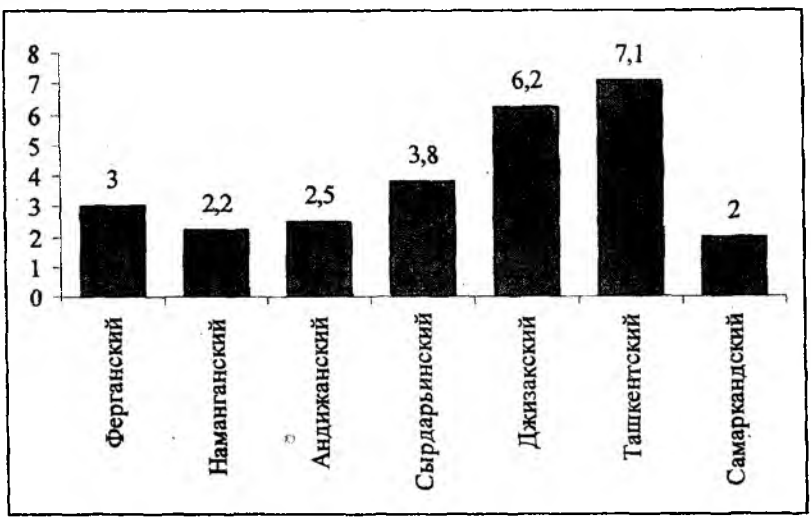


Рис. 6.1.

Для рассматриваемой модели значимость соответствующих эффектов можно оценить с помощью F-критерия. Дисперсии оценивают по зависимостям:

$$\sigma_{\alpha}^{*2} \approx (I-1)^{-1} J \sum_i \hat{\alpha}_i^2, \quad \hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...};$$

$$\sigma_{\beta}^{*2} \approx (J-1)^{-1} I \sum_i \hat{\beta}_i^2, \quad \hat{\beta}_i = \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...};$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{*2} \approx (I-1)^{-1}(J-1)^{-1} \sum_i \sum_j \hat{\gamma}_{ij}^2,$$

$$\hat{\gamma}_{ij} = (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...}). \qquad (35)$$

Основное уравнение двухфакторного дисперсионного анализа имеет вид:

$$S_{ij}^2 = S_\alpha^2 + S_\beta^2 + S_{\alpha\beta}^2 + S_\varepsilon^2, \qquad (36)$$

где

$$S_\alpha^2 = \sum_i \hat{\alpha}_i^2; \; S_\beta^2 = \sum_j \hat{\beta}_j^2; \; S_{\alpha\beta}^2 = \sum_i \sum_j \gamma_{ij}^2.$$

При нулевой гипотезе $H_0 : \alpha_i = 0, \; i = \overline{1, I}; \; \beta_j = 0, \; j = \overline{1, J};$ $\sigma = \sigma_\beta = 0$. Тогда отношения

$$\begin{matrix} \left[S_\alpha^2/(I-1)\right] / \left[S_\varepsilon^2 / IJ(n-1)\right], \\ \left[S_\beta^2/(J-1)\right] / \left[S_\varepsilon^2 / IJ(n-1)\right], \end{matrix} \qquad (37)$$

подчиняются распределению Фишера, поскольку при нулевой гипотезе средние квадраты являются оценками одной и той же дисперсии σ_ε^2.

В общем случае F-отношение может быть получено как отношение оценок соответствующих дисперсий к дисперсии ошибки наблюдения:

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \left[S_\alpha^2/(I-1)\right] / \left[S_\varepsilon^2/(IJ(n-1))\right]; \\ F_\beta &= \left[S_\beta^2/(J-1)\right] / \left[S_\varepsilon^2/(IJ(n-1))\right]; \\ F_{\alpha\beta} &= \left[S_{\alpha\beta}^2/(I-1)(J-1)\right] / \left[S_\varepsilon^2/(IJ(n-1))\right] \end{aligned} \qquad (38)$$

Таким образом, методика двухфакторного дисперсионного анализа может быть сведена к выполнению следующих операций:

1) вычисление суммы квадратов всех наблюдений:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} y_{ij}^2; \qquad (39)$$

2) вычисление суммы квадратов итогов по столбцам, деленной на число наблюдений в столбце:

$$Q_2 = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^{I} \tilde{y}_i^2, \qquad (40)$$

где

$$\widetilde{y}_i = \sum_{j=1}^{J} y_{ij};$$

3) вычисление суммы квадратов итогов по строкам, деленной на число наблюдений в строке:

$$Q_3 = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} \overset{\Delta}{y}{}_i^2, \qquad (41)$$

где

$$\overset{\Delta}{y}_i = \sum_{i=1}^{I} y_{ij};$$

4) вычисление квадрата общего итога, деленного на число всех наблюдений:

$$Q_4 = \frac{1}{IJ}\left(\sum_{i=1}^{I} \widetilde{y}_i\right)^2 = \frac{1}{IJ}\left(\sum_{j=1}^{J} \overset{\Delta}{y}_j\right)^2 \qquad (42)$$

(для расчетов рекомендуется использовать обе формулы, что позволяет проверить правильность вычислений);

5) вычисление оценок дисперсий:

$$\sigma_\varepsilon^{*2} = \frac{Q_1 + Q_4 - Q_2 - Q_3}{(I-1)(J-1)};$$

$$\sigma_\alpha^{*2} = \frac{Q_2 - Q_4}{I-1};$$

$$\sigma_\beta^{*2} = \frac{Q_3 - Q_4}{J-1}; \qquad (43)$$

6) выбор уровня значимости q и проверка гипотезы о значимости факторов α и β.

Если влияние фактора α признано незначимым, то обе дисперсии σ_α^{*2} и σ_ε^{*2} являются оценками генеральной дисперсии, которая в этом случае оценивается по зависимости:

$$\sigma_y^{*2} = \frac{(I-1)\sigma_\alpha^{*2} + (I-1)(J-1)\sigma_\varepsilon^{*2}}{(I-1) + (I-1)(J-1)}. \qquad (44)$$

В случае незначимости фактора β используется аналогичный подход. Если же незначимыми оказываются оба фактора, то генеральная дисперсия оценивается с использованием выражения

$$\sigma_y^{*2} = \frac{(I-1)\sigma_\alpha^{*2} + (J-1)\sigma_\beta^{*2} + (I-1)(J-1)\sigma_\varepsilon^{*2}}{(I-1)+(J-1)+(I-1)(J-1)}. \quad (45)$$

В случае, когда факторы α и β являются независимыми, решение задачи можно считать законченным. Если же между ними имеет место взаимодействие, то ему соответствует дисперсия $\sigma_{\alpha\beta}^2$. В изложенной методике расчетов дисперсия $\sigma_{\alpha\beta}^2$ как составная часть войдет в дисперсию σ_ε^2. Выделить оценку дисперсии $\sigma_{\alpha\beta}^2$ из оценки дисперсии σ_ε^2 без параллельных наблюдений невозможно (для двухфакторного дисперсионного анализа). При анализе трех и более факторов отдельные эффекты взаимодействия удается оценить и без параллельных наблюдений.

Для отделения эффекта взаимодействия от эффекта случайности вычисляют сумму квадратов всех наблюдений:

$$Q_5 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{K=1}^{n} y_{ijK}^2. \quad (46)$$

Значения величин Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 рассчитываются по зависимостям, приведенным выше. Однако при этом оперируют не значениями отклика y_{ij}, а их средними значениями, полученными для каждого сочетания i и j по n параллельным измерениям, т.е. в методике осуществляется замена y_{ij} на $\bar{y}_{ij}$. Тогда

$$\sigma_{\alpha\beta}^{*2} = \frac{n\sigma_\varepsilon^{*2} - \sigma^{*2}}{n}, \quad (47)$$

где

$$\sigma^{*2} = \frac{Q_5 - nQ_1}{IJ(n-1)}. \quad (48)$$

Если эффект взаимодействия признан незначимым, дисперсия воспроизводимости оценивается по зависимости

$$\sigma_y^{*2} = \frac{Q_4 + Q_5 - Q_2 - Q_3}{IJn - I - J + 1}. \quad (49)$$

Результативность дисперсионного анализа во многом определяется способом получения экспериментальных данных. Один из таких способов рассмотрим на следующем примере.

Пример. Пусть испытания трех каналов продвижения товара проводят три менеджера по маркетингу по трем различным рынкам. Обозначим через A, B, C каналы продвижения, a, b, c - менеджеров, P, R, S - рынки. Таким образом, имеем три фактора, каждый из которых варьируется на трех уровнях. Обозначим их соответственно Φ_1; Φ_2, Φ_3 и установим значимость перечисленных факторов.

Можно использовать специфический план дисперсионного анализа, именуемый латинским квадратом. Это такой план, в котором каждый вариант испытаний появляется один и только один раз в каждой строке и один и только один раз в каждом столбце (рис. 6.2).

Φ_1

Φ_2	A	B	C
P	a	b	c
R	b	c	a
S	c	a	b

Φ_3 (внутри таблицы)

Рис. 6.2.

В итоге получаем эксперимент с числом опытов, равным девяти. При этом информация о взаимодействии факторов теряется. Модель дисперсионного анализа имеет вид:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i^{\Phi_1} + \alpha_j^{\Phi_2} + + \alpha_k^{\Phi_3} + \varepsilon_{ijkl},$$

где Φ_1; Φ_2, Φ_3 - обозначения, а не степень.

При перестановке столбцов (строк) латинского квадрата снова получаем латинский квадрат. При фиксированной первой строке для m факторов и m уровней имеем $m!\{m-1)!$ латинских квадратов. Это число еще необходимо умножить на количество так называемых стандартных квадратов, получаемых перестановкой столбцов, приводящей к первой строке вида (1, 2, ..., m), и последующей перестановкой строк, приводящей к первому столбцу вида (1, 2, ..., m), при этом первая строка остается неизменной. Для m=3 стандартный квадрат имеет вид:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}$$

Наблюдение y_{ijk} является наблюдением в исследуемой совокупности условий с i-м уровнем фактора Φ_1, j-м уровнем Φ_2, k-м уровнем Φ_3. Тройка (i, j, k) принимает только m_3^2 значений, заданных частным латинским квадратом, который был выбран для эксперимента. Случайные величины $\varepsilon_{ijkl}(\forall i,j,k,l)$ независимы и имеют распределение $N(0,\sigma^2)$.

Математические ожидания средних квадратов, приведенных в табл. 6, оцениваются по зависимостям:

$$\sigma^2_{\Phi_1} \approx \frac{S^2_{\Phi_1}}{m-1};\ \sigma^2_{\Phi_2} \approx \frac{S^2_{\Phi_2}}{m-1};\ \sigma^2_{\Phi_3} \approx \frac{S^2_{\Phi_3}}{m-1}. \quad (49)$$

Для проверки ноль-гипотезы составляются F-отношения:

$$\begin{aligned} F_1 &= \left[S^2_{\Phi_1}/(m-1)\right]/\left[S^2_{\varepsilon}/\left(m^2-3m+2\right)\right], \\ F_2 &= \left[S^2_{\Phi_2}/(m-1)\right]/\left[S^2_{\varepsilon}/\left(m^2-3m+2\right)\right], \\ F_3 &= \left[S^2_{\Phi_3}/(m-1)\right]/\left[S^2_{\varepsilon}/\left(m^2-3m+2\right)\right]. \end{aligned} \quad (50)$$

Таблица дисперсионного анализа имеет следующий вид (табл. 6.6).

Таблица 6.6.

Источник изменчивости	Сумма квадратов	Степень свободы	Математическое ожидание средних квадратов
Φ_1	$S^2_{\Phi_1} = m\sum_i (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$	m-1	$\sigma^2_\varepsilon + m\sigma^2_{\Phi_1}$
Φ_2	$S^2_{\Phi_2} = m\sum_j (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2$	m-1	$\sigma^2_\varepsilon + m\sigma^2_{\Phi_2}$
Φ_3	$S^2_{\Phi_3} = m\sum_j (\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})^2$	m-1	$\sigma^2_\varepsilon + m\sigma^2_{\Phi_3}$
Остаток	$S^2 = \sum_{i,j,k} (\bar{y}_{ijk} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + 2\bar{y}_{...})^2$	m^2+3m+2	σ^2_ε
Полная сумма квадратов	$S^2_n = \sum_{i,j,k} (\bar{y}_{ijk} - \bar{y}_{...})^2$	m^2-1	

Таким образом, как следует из приведенных положений, методы дисперсионного анализа используются для оценки значимости факторов.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите основные предположения дисперсионного анализа.
2. Как осуществляется проверка гипотезы о существенности влияния фактора с помощью *F*-критерия в случае однофакторного дисперсионного анализа?
3. Какова методика многофакторного дисперсионного анализа?
4. Какова методика однофакторного дисперсионного анализа?
5. Перечислите основные уравнения двухфакторного дисперсионного анализа.
6. Объясните методику двухфакторного дисперсионного анализа.
7. Что такое латинский квадрат и каковы его свойства?
8. Как осуществляется проверка ноль-гипотезы *F*-отношения?

ГЛАВА 7.ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

7.1. Понятие о факторном анализе

Даже приближенное описание многих сложных систем зачастую оказывается затруднительным или вообще невозможным из-за так называемого «барьера сложности». Это препятствие вызвано тем, что реальная система, как правило, описывается огромным количеством переменных, всю совокупность которых человек не в состоянии мысленно охватить. Именно такими являются, например, макроэкономические системы.

Снижение размерности в подобных задачах осуществляется путем выделения из исходного множества переменных немногочисленных, наиболее существенных и относительно независимых показателей - факторов.

Для упрощения изложения постановку задачи факторного анализа рассмотрим на примере, в котором в качестве объекта исследования возьмем такую сложную систему, как инвестиционный проект. Очевидно, что можно назвать более 100 различных параметров, или переменных, характеризующих его и предприятие-реципиент. Требуется из этого множества переменных выделить небольшое число новых, наиболее существенных и относительно независимых переменных, которые позволили бы легко сравнивать между собой различные проекты. Такая задача крайне важна при выборе соответствующего проекта в качестве объекта инвестиций. Исходные данные нашего примера можно представить в виде табл. 7.1.

Работать с таким массивом информации очень трудно. Поэтому и возникает необходимость в ее сжатии, т.е. в переходе от m переменных к L факторам. Для рассматриваемого примера можно, например, выделить два фактора:

- внутреннюю норму доходности;
- индекс рентабельности.

Очевидно, что предложенные факторы впитали в себя практически всю исходную информацию, представленную в табл. 7.1.

Таблица 7.1.

Характеристики качества инвестиций {переменные}		Инвестиционные проекты					
		1	2	...	*j*	...	*n*
1	Объем инвестиций	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1n}
2	Срок окупаемости	x_{21}	x_{22}	...	x_{2j}	...	x_{2n}
3	Годовой оборот проекта	x_{31}	x_{32}	...	x_{3j}	...	x_{3n}
...	...	...	...	...	...	...	...
i	Годовой объем чистой прибыли	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{in}
...	...	...	...	...	...	...	...
100	Чистый дисконтированный доход	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...
m	Внутренняя норма доходности	x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mj}	...	x_{mn}

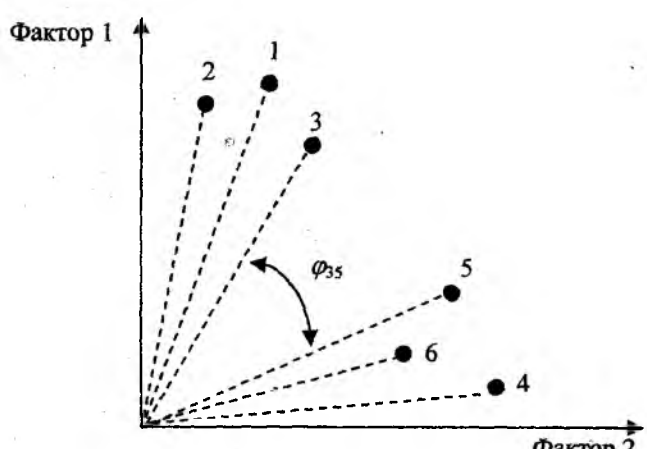


Рис.7.1.

1. Число выделяемых факторов соответствует пространству наименьшей размерности, в котором можно в виде векторов изобразить т переменных исходной матрицы данных. Преимущества перехода от пространства переменных к факторному пространству легко проиллюстрировать (рис. 1).

На рис. 7.1 факторами являются координатные оси. Возьмем шесть переменных. При этом три из них пусть преимущественно связаны с фактором 1, а остальные - с фактором 2. Тогда для центрированных переменных и факторов справедливы следующие соотношения:

$d_i = \sqrt{\sum_{l=1}^{L} \alpha_{il}}$ - длина l-го вектора-переменной;

α_{il} - факторная нагрузка; проекция l-го вектора-переменной на ось l (соответствует коэффициенту корреляции i-й переменной с фактором l);

$\cos y_{ik} = r_{ik}$ - коэффициент корреляции между i-й и k-й переменными.

При переходе к факторному пространству отчетливо проявились основные закономерности внутри исследуемого множества переменных. Так, угол между двумя векторами-переменными равен коэффициенту корреляции между ними.

Проекция вектора-переменной на ось координат называется факторной нагрузкой соответствующей переменной и определяет величину коэффициента корреляции между переменной и фактором. Квадрат длины каждого i-го вектора соответствует той доле дисперсии i-й переменной, которая определяется выделенными факторами. Таким образом, в факторном L-мерном пространстве возможно представление всех m переменных матрицы исходных данных и описание всех основных связей между ними. При этом $L<<m$.

Как видно из рис. 1, специфика факторного анализа состоит в том, что сильная корреляция между переменными объясняется существованием некоторого фактора, не под-

дающегося непосредственному измерению, но с помощью которого возможно объяснить наблюдаемые связи. Таким образом, фактор можно определить как расчетную переменную, т.е. новую характеристику изучаемого множества (факторы называют также латентными переменными).

7.2. Методика факторного анализа

Пусть дана совокупность n объектов исследования, каждый объект в которой описывается т переменными. Представим имеющуюся информацию в виде двухмерной матрицы данных:

	Объекты				
Переменные	x_{11}	...	x_{1j}	...	x_{1n}
	x_{21}	...	x_{2j}	...	x_{2n}
	...	...	...	...	...
	x_{i1}	...	x_{ij}	...	x_{in}
	...	...	...	...	...
	x_{m1}	...	x_{mj}	...	x_{mn}

Строки матрицы соответствуют переменным, а столбцы - объектам исследования. Представленная матрица данных суммирует наблюдения по двум позициям: переменные - объекты. Если учесть изменения переменных во времени, матрица становится трехмерной.

Исходной точкой факторного анализа является матрица исходных данных. Для устранения влияния размерности матрицу исходных данных приводят к стандартной форме:

$$Z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_i}{\sigma_i}$$

где Z_{ij} - элемент стандартизованной матрицы исходных данных;

x_{ij} - элемент матрицы исходных данных;

$\bar{x}_i$ - математическое ожидание i-й переменной;

σ_i - среднеквадратическое отклонение i-й переменной;

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}; \quad \sigma_i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_i)^2}.$$

Цель факторного анализа состоит в представлении переменной в виде линейной комбинации нескольких гипотетических переменных-факторов:

$$Z_{ij} = a_{i1}P_{1j} + a_{i2}P_{2j} + ... + a_{iL}P_{Lj}, \quad (2)$$

где P_{ij} - значение фактора с номером i и j-го объекта.

В матричной форме для всех Z_{ij} получим:

$$\begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1j} & \cdots & z_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{i1} & \cdots & z_{ij} & \cdots & z_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mj} & \cdots & z_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1L} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sj} & \cdots & a_{sL} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mL} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i1} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{L1} & \cdots & p_{Lj} & \cdots & p_{Ln} \end{vmatrix}$$

$$Z = A \cdot P, \quad (3)$$

где Z - матрица стандартизованных исходных данных размера $m \times n$;

A - матрица факторных нагрузок, или факторное отображение; отражает связи между переменными и факторами;

P - матрица значений всех L выделенных факторов у всех n объектов (тоже построчно пронормирована).

В зависимости (3) элементы матриц A и P неизвестны. Известна лишь матрица исходных данных Z. Очевидно, что уравнение без введения дополнительных ограничений имеет бесчисленное множество решений. Определение характера этих ограничений представляет собой самостоятельную задачу факторного анализа, на которой мы остановимся позже.

Основным обстоятельством, вследствие которого факторный анализ был причислен к многомерным статистическим методам, является использование в его модели так называемой редуцированной корреляционной матрицы, полученной из матрицы исходных данных. Элементами такой матрицы, кроме диагональных,

являются коэффициенты парной корреляции. Для стандартизованных исходных данных элемент корреляционной матрицы рассчитывается по зависимости:

$$r_{ik} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} Z_{ij} Z_{kj}, \qquad (4)$$

а диагональный элемент r_{ii} приравнивается к так называемой общности h_i^2, которая представляет собой квадрат коэффициента множественной корреляции i-й переменной и всех L выделенных факторов:

$$r_{ii} = h_i^2. \qquad (5)$$

Значение общности h_i^2 определяется по формуле:

$$h_i^2 = a_{i1}^2 + \ldots + a_{il}^2 + \ldots + a_{iL}^2. \qquad (6)$$

По своей сути общность является составляющей единичной дисперсии i-й переменной:

$$D_i = 1 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n} Z_{ij} = h_i^2 + u_i^2, \qquad (7)$$

где u_i^2 - характерность, т.е. часть единичной дисперсии i-й переменной, не связанная с выделенными общими факторами.

Для корреляционной матрицы имеет место следующее соотношение:

$$R = \frac{1}{n-1} ZZ'. \qquad (8)$$

Подставив выражение для Z из (3) в (8), получим:

$$R = \frac{1}{n-1} AP(AP)' = A\frac{1}{n-1} PP'A'.$$

По аналогии с (8) можно считать, что $C = \frac{1}{n-1} PP'$, т.е. C является корреляционной матрицей, отражающей связи между факторами. Тогда

$$R = ACA'. \qquad (9)$$

Если наложить на выражение (.9) условие некоррелированности факторов, т.е. $C=I$, где I - единичная матрица, то

$$R_n = AA'. \qquad (10)$$

Выражения (9) и (10) представляют собой математическую формулировку фундаментальной теоремы факторного анализа.

Теорема. Корреляционная матрица может быть воспроизведена с помощью факторного отображения и корреляций между факторами.

Выражения (9) и (10) соответственно представляют два равноправно существующих направления в факторном анализе. В данном случае постулируется ортогональность факторов, т.е. в дальнейших рассуждениях за основу берется выражение (10).

Задача факторного анализа состоит в отыскании факторного отображения или матрицы A. Ее элементы называются факторными нагрузками и обозначаются a_{il}, $i=\overline{1,m}$; $l=\overline{1,L}$. Для случая ортогональных факторов $-1 < a_{il} < 1$.

По своей сути факторная нагрузка a_{il} является коэффициентом корреляции i-й переменной с фактором под номером l. Существо принятой гипотезы о факторном отображении, например, для трех факторов принято изображать следующим образом (рис. 7.2).

	Факторы		
	A	*B*	*C*
1	+	+	
2	+	+	
3	+	+	
4	+	+	+
5	+	+	+
6	+		+
7	+		+
8	+		+
9	+		+

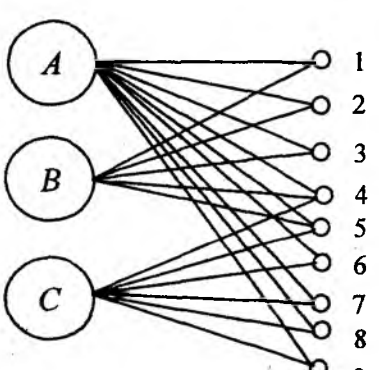


Рис. 7.2.

Процедура выполнения основных вычислительных операций в факторном анализе представлена на рис.7.3.

Прямоугольники на рис. 7.3 соответствуют матрицам, горизонтальные стрелки указывают последовательность отдельных этапов факторного анализа, вертикальные - свидетельствуют о четырех основных проблемах, возникающих в ходе реализации метода.

Любой вид факторного анализа начинается с матрицы исходных данных *X*.

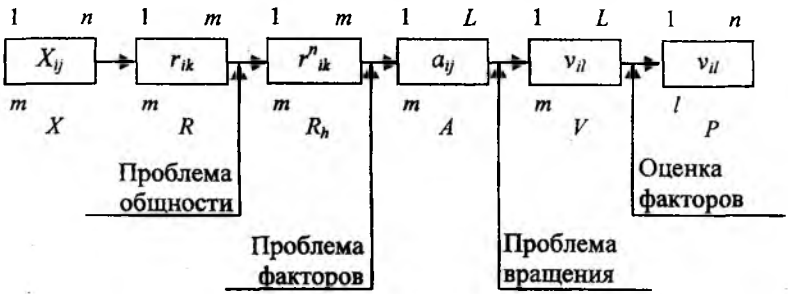


Рис. 7.3.

По матрице *X* вычисляется корреляционная матрица *R*. Поставив на главной диагонали матрицы *R* оценки общностей h_i^2, получают редуцированную корреляционную матрицу. Получение оценок h_i^2 составляет проблему общности. Из редуцированной корреляционной матрицы R_h, с помощью соответствующих методов извлекают факторы. Данный шаг соответствует проблеме факторов. В результате получают матрицу факторного отображения *A*. Число матриц *A*, каждая из которых воспроизводит матрицу R_h, может быть велико. Из этого множества по некоторому правилу выбирается одна, что составляет проблему вращения. Решение проблемы вращения состоит в получении матрицы *V*.

Последняя проблема касается оценки значений факторов для каждого объекта. Если посмотреть на начало и конец

схемы факторного анализа, то становится очевидным упрощение, которое достигается этим методом. Матрица X имеет размерность (mxn), а матрица P - (Lxn). При этом $m>>L$, т.е. m переменных, измеренные у n объектов, сводятся к L факторам. Решение проблемы факторов геометрически соответствует уменьшению размерности.

Остановимся подробнее на этапах факторного анализа (рис. 7.3). Составляем матрицу исходных данных. По соответствующим зависимостям приводим ее элементы к стандартной форме. Затем из стандартизованной матрицы исходных данных получают корреляционную матрицу. [9, 10, 21, 24].

Заменив единицы на главной диагонали матрицы R общностями, получают редуцированную корреляционную матрицу R_h. Существует несколько способов приближенной оценки значений общностей. Наиболее простой из них состоит в том, что за значение оценки общности i-й переменной принимается максимальный коэффициент корреляции данного столбца матрицы R, взятый с положительным знаком, т.е.:

$$h_i^2 = (r_{ik})\max < 1, \quad k = \overline{1,m}, \qquad (11)$$

Проблема факторов состоит в переходе от изображения n объектов в пространстве m переменных к представлению тех же n объектов в пространстве L факторов, т.е. в снижении размерности исходного массива информации. Эта проблема решается, как правило, методом главных факторов либо центроидным методом. Каждому методу присущи свои ограничения, введение которых позволяет получать однозначные решения для выражения:

$$R_h = AA'.$$

Метод главных факторов. В основе метода главных факторов лежит следующее условие: сумма квадратов нагрузок первого выделенного фактора должна составлять максимум от полной дисперсии всех m переменных, т.е. максимизирует функцию:

$$S_1 = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}^2 \right) \max \qquad (12)$$

при $\frac{m(m-1)}{2}$ независимых условиях $r_{ik} = a_{i1}a_{k1}$; $i,k = \overline{1,m}$.

Максимизация выражения (12) с учетом ограничений, осуществляемая с помощью метода множителей Лагранжа, приводит к следующей задаче: найти собственный вектор α_1 матрицы R_h, отвечающий ее максимальному собственному значению λ_1. При этом нагрузки переменных на первый общий фактор получаются из компонент этого вектора $\left(\alpha_{i1};\ i = \overline{1,m}\right)$ нормированием:

$$\alpha_{i1} = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1}^2}} \alpha_{i1} \qquad (13)$$

Далее можно показать, что максимуму целевой функции S_2 соответствует собственный вектор α_2 матрицы R_{1h}, отвечающий ее максимальному собственному значению λ_2. Матрица R_{1h} получается из матрицы R_h исключением первого фактора:

$$R_{1h} = R_h - A_1, \qquad (14)$$

где

$$A_1 = \begin{Vmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{Vmatrix} \times \| a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1} \|.$$

Нагрузки переменных на второй общий фактор определяются в соответствии с выражением (13).

Цепочка этих задач обрывается на таком шаге L, после которого

$$R_{(l-1)h} \approx 0.$$

В результате выделяют L общих факторов и матрицу факторных нагрузок A.

Центроидный метод выделения факторов принципиально сходен с методом главных факторов. Задача метода та же - однозначно определить выражение

$$R_h = AA'.$$

Однако если в методе главных факторов требовалось, чтобы вдоль первой выделенной оси системы координат (соответствует первому фактору) лежал максимум полной дисперсии m переменных, то в центроидном методе первая выделенная ось должна проходить через центр тяжести скопления точек, соответствующих m переменным (рис. 7.4).

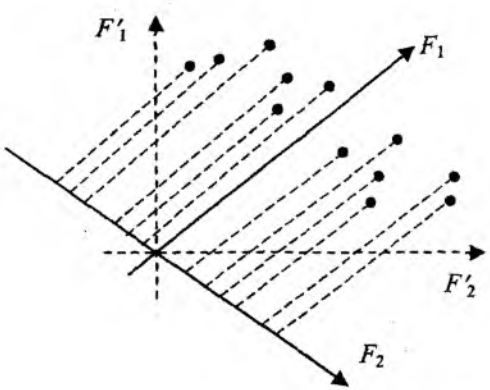


Рис. 7.4.

Проблема вращения. Факторы, выделенные одним из выбранных методов, задают систему координат, в которой достаточно полно воспроизводится матрица исходных данных. Однако распределение долей дисперсии переменных по факторам произвольно и определяется не исходными данными, а выбранным методом. Полученную систему координат зачастую невозможно содержательно интерпретировать.

Этих недостатков можно избежать, решив проблему вращения. В алгебраических терминах суть ее состоит в следующем. Существует бесчисленное количество матриц A, которые позволяют получить матрицу R_h.

В факторном анализе преобразование матрицы A ведут до достижения так называемой простой структуры. Цель вращения состоит в перераспределении данных на группы, которые лежат как можно дальше друг от друга и как можно ближе к осям координат.

Доказано, что подобное разбиение данных на группы соответствует максимальному значению суммы дисперсий квадратов факторных нагрузок:

$$\max_{l} \sum_{l=1}^{L} D_l, \qquad (15)$$

$$D_l = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(a_{il}^2\right)^2 - \frac{1}{m^2}\left[\sum_{i=1}^{m} a_{il}^2\right]^2. \qquad (16)$$

Если разделить факторные нагрузки на соответствующие общности и, кроме того, умножить выражение (16) на m^2, то получим модифицированный варимакс-критерий:

$$m\sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{m}(b_{il})^4 - \sum_{l=1}^{L}\left[\sum_{i=1}^{m} b_{il}^2\right]^2, \quad (17)$$

где

$$b_{il} = \frac{a_{il}^2}{h_i^2}.$$

Нахождение максимума варимакс-критерия приводит к однозначному определению положения системы координат в пространстве факторов, т.е. к решению проблемы вращения.

Оценка значений факторов. Последний этап факторного анализа - оценка значений выделенных факторов для каждого объекта. Если в выражении

$$Z=AP \qquad (18)$$

известна матрица A, то можно приступать к определению матрицы P. В факторном анализе оценка значений факторов производится с использованием множественного регрессионного анализа на основе метода наименьших квадратов по зависимости:

$$\hat{P} = B'Z, \qquad (19)$$

где $\hat{P}$ - матрица оценок значений факторов размерности (Lxm);

B' - матрица коэффициентов регрессии факторов по переменным размерности (Lxm);

Z - матрица стандартизованных переменных размерности (mxn).

Матрица B' стандартизованных переменных определяется по формуле:

$$B' = A'R_h^{-1},$$

где R_h^{-1} - обратная редуцированная корреляционная матрица.

Оценкой значений выделенных факторов заканчиваются основные этапы факторного анализа.

В настоящее время факторный анализ как один из многомерных статистических методов интенсивно развивается. В этой связи значительный теоретический и практический интерес представляет любая попытка приложения факторного анализа к решению экономических задач.

7.3. Компонентный анализ или метод главных компонент

Компонентный анализ применяется для того, чтобы систему, состоящую из исходных, частично зависимых переменных, как можно точнее описать минимальным числом независимых друг от друга факторов. Предположим, что переменные можно представить в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
z_{1t} &= a_{11}f_{1t} + a_{12}f_{2t} + \ldots + a_{1p}f_{pt} + \ldots + a_{1m}f_{mt};\\
z_{2t} &= a_{21}f_{1t} + a_{22}f_{2t} + \ldots + a_{2p}f_{pt} + \ldots + a_{2m}f_{mt};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_{jt} &= a_{j1}f_{1t} + a_{j2}f_{2t} + \ldots + a_{jp}f_{pt} + \ldots + a_{jm}f_{mt};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_{nt} &= a_{n1}f_{1t} + a_{n2}f_{2t} + \ldots + a_{np}f_{pt} + \ldots + a_{nm}f_{mt},
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

где z_{jt} - t-е наблюдение j-й переменной; f_{pt} - t-е значение p-го фактора; a_{jp} - факторный коэффициент (или нагрузка), относящийся к p-му фактору j-й переменной.

Существует много способов, позволяющих оценить факторные коэффициенты. Общая, важная с точки зрения интерпретации результатов особенность этих методов состоит в том, что они исходят из матрицы корреляций, указывающей на существование зависимостей между исходными переменными.

Коэффициенты при факторах указывают на связь при помощи метода, который будет изложен ниже. Что же собой представляют эти коэффициенты, или, как их еще называют, нагрузки? Компонентный анализ открывает для определения нагрузок две весьма простые возможности: одна из них относится к интерпретаций самих нагрузок, другая основана на использовании квадратов этих нагрузок. [21, 22].

Можно доказать, что нагрузка p-го фактора в j-й переменной совпадает с коэффициентом корреляции между j-й переменной и p-м фактором:

$$a_{jp} = r_{zj}f_p. \qquad (2)$$

Коэффициенты при факторах указывают, насколько тесно связаны между собой переменные и факторы. Большое значение нагрузки указывает на сильную связь с переменной, малое значение - на слабую связь. Нулевое или близкое к нулю значение нагрузки означает, что между соответствующей переменной и рассматриваемым фактором связь отсутствует.

Вторая интерпретация нагрузки связана с понятием квадратичного отклонения (дисперсий). Дисперсия *j*-й переменной из-за отсутствия попарной корреляции между факторами равна сумме квадратов факторных коэффициентов:

$$\sigma^2_{z_j} = a^2_{j1} + a^2_{j2} + ... + a^2_{jp} + ... + a^2_{jm}, \quad (3)$$

где $\sigma^2_{z_j}$ - дисперсия *j*-й переменной.

В силу нормированности (стандартизации) переменных $\sigma^2_{z_j}$ =1. Следовательно, квадрат коэффициента корреляции a_{jp} показывает, какую долю (в %) *p*-й фактор вносит в квадратичное отклонение *j*-й переменной. Чем больше величина коэффициента a_{jp}, тем большее влияние оказывает *p*-й фактор на изменение значений *j*-й переменной. В предельном случае, когда коэффициент a_{jp} равен единице, знания одного лишь *p*-го фактора достаточно для описания хода изменения *j*-й переменной.

В формуле (1) переменные представлены в виде линейных комбинаций факторов. Поэтому связи между переменными и факторами можно интерпретировать с точки зрения переменных. Однако при интерпретации результатов факторизации в центре внимания находятся не исходные переменные, а сами факторы. С весьма простым определением факторов мы уже встретились в приведенном выше примере. Там факторы были определены при помощи переменных, связанных между собой зависимостью. В дальнейшем нам понадобится более уточненный вариант этого определения. Поэтому рассмотрим, каким образом в компонентном анализе можно записать зависимости между отдельными факторами и переменными. Для простоты запишем зависимость, полностью аналогичную линейным соотношениям (1) лишь для *p*-го фактора:

$$f_{pt} = \frac{a_{1p}}{\sigma^2_{f_p}} z_{1t} + \frac{a_{2p}}{\sigma^2_{f_p}} z_{2t} + ... + \frac{a_{np}}{\sigma^2_{f_p}} z_{nt}, \quad (4)$$

где $\sigma^2_{f_p}$ - дисперсия *p*-то фактора.

Итак, факторы можно представить в виде линейных комбинаций переменных. Эти комбинации представлены факторными коэффициентами и дисперсиями факторов. Поскольку мы с самого начала предположили, что совокупность факторов определяет значения каждой переменной в отдельности и всех переменных, взятых вместе (см. формулу (5)), то сумма квадратичного отклонения всех факторов равна сумме квадратичного отклонения всех переменных, которая в силу нормирования (стандартизации) равна числу переменных:

$$\sum_{p=1}^{m} \sigma_{f_p}^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{z_j}^2 = n. \qquad (5)$$

Из равенства (5) следует, что, разделив дисперсию *p*-го фактора на число переменных, мы получим величину относительного (выраженного в %) вклада *p*-го фактора в общее отклонение (рассеивание) всех переменных.

Вычисление значений дисперсий факторов или их относительной величины наряду с факторными коэффициентами позволяет получить еще один важный результат. Дисперсия факторов равна сумме квадратов отличных от нуля факторных коэффициентов, связывающих данные факторы с различными переменными. Следовательно, дисперсия *p*-го фактора равна:

$$\sigma_{f_p}^2 = \sum_{j=1}^{n} a_{jp}^2. \qquad (6)$$

Факторы можно упорядочить в ряд, расположив их по величине квадратичного отклонения. На практике принято называть первым фактор с наибольшим квадратичным отклонением, вторым - фактор со следующим по величине квадратичным отклонением и т. д.

Зависимости между переменными и факторами показаны в табл. 7.2.

Таблица 7.2.

Схема расположения результатов компонентного анализа в виде таблицы по величине дисперсии

Переменные	Факторы				Дисперсия
	f_1	f_2	…	f_m	$\sigma^2_{z_j}$
Z_1	a^2_{11}	a^2_{12}	…	a^2_{1m}	1
Z_2	a^2_{21}	a^2_{22}	…	a^2_{2m}	1
…	…	…	…	…	…
Z_n	a^2_{n1}	a^2_{n2}	…	a^2_{nm}	1
$\sigma^2_{f_p}$	$\sigma^2_{f_1}$	$\sigma^2_{f_2}$	…	$\sigma^2_{f_m}$	n

Матрицу исходных переменных $\underset{(j,t)}{Z}$ позволяют проанализировать следующие итоговые показатели, входящие в табл. 1 и формулу 1.

1. Число факторов показывает, сколько линейно-зависимых групп переменных характерно для полного набора исходных переменных.

2. Квадратичные отклонения факторов показывают, сколь большое значение имеют отдельные факторы для всей системы переменных.

3. Факторные коэффициенты позволяют судить о том, насколько сильны зависимости между переменными и факторами.

4. Построчный анализ квадратов факторных коэффициентов показывает, какие факторы и с каким весом играют роль в формировании отдельных переменных.

5. Анализ квадратов факторных коэффициентов по столбцам показывает, какие переменные играют решающую роль в формировании отдельных факторов.

Так называемая идентификация факторов, или, иначе говоря, придание определенного смысла отдельным факторам,

возможна лишь для конкретной задачи. Действительно, как следует из сказанного выше, в формировании отдельного фактора участвуют связанные с ним переменные. До тех пор пока переменные не специфицированы, выяснить конкретное значение факторов не представляется возможным.

Следовательно, относительно идентификации факторов компонентные анализ не позволяет прийти ни к каким заключениям, кроме самого общего утверждения о том, что факторы выражают свойства, присущие всем связанным с ним переменным.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте понятие латентной переменной.
2. Какова специфика факторного анализа?
3. Приведите общую схему проведения факторного анализа.
4. Каково назначение факторного анализа?
5. Что такое факторная нагрузка?
6. Каково назначение матрицы стандартизованных исходных данных?
7. Каким образом осуществляется переход от реальных переменных к стандартизованным?
8. Приведите основное уравнение факторного анализа.
9. Поясните алгоритм факторного анализа.
10. К чему сводится метод главных факторов?
11. Перечислите этапы факторного анализа.
12. Приведите процедуру оценки выделенных факторов и матрицы факторных нагрузок.

ГЛАВА 8. ПАРНАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ И РЕГРЕССИЯ.

8.1. Общие замечание

В эконометрике широко используются методы статистики. Ставя цель дать количественное описание взаимосвязей между экономическими переменными, эконометрика прежде всего связана с методами корреляции и регрессии.

В зависимости от количества факторов, включенных в уравнение регрессии, принято различать простую (парную) и множественную регрессии.

Простая регрессия представляет собой регрессию между двумя переменными - y и x, т. е. модель вида.

$$y = \hat{f}(x),$$

где y - зависимая переменная (результативный признак);

x - независимая, или объясняющая, переменная (признак-фактор).

Множественная регрессия соответственно представляет собой регрессию результативного признака с двумя и большим числом факторов, т. е. модель вида

$$y = \hat{f}(x_1, x_2, ..., x_k).$$

Любое эконометрическое исследование начинается со спецификации модели, т.е. с формулировки вида модели, исходя из соответствующей теории связи между переменными. Иными словами, исследование начинается с теории, устанавливающей связь между явлениями.

Прежде всего из всего круга факторов, влияющих на результативный признак, необходимо выделить наиболее существенно влияющие факторы. Парная регрессия достаточна, если имеется доминирующий фактор, который и используется в качестве объясняющей переменной. Предположим, что выдвигается гипотеза о том, что величина спроса y на то-

вар A находится в обратной зависимости от цены x, т.е. $\hat{y}_x = a - b \cdot x$. В этом случае необходимо знать, какие остальные факторы предполагаются неизменными, возможно, в дальнейшем их придется учесть в модели и от простой регрессии перейти к множественной.

Уравнение простой регрессии характеризует связь между двумя переменными, которая проявляется как некоторая закономерность лишь в среднем в целом по совокупности наблюдений. Так, если зависимость спроса y от цены x характеризуется, например, уравнением y=3000 – 2·x, то это означает, что с ростом цены на 1 д.е. спрос в среднем уменьшается на 2 д. е. В уравнении регрессии корреляционная по сути связь признаков представляется в виде функциональной связи, выраженной соответствующей математической функцией. Практически в каждом отдельном случае величина y складывается из двух слагаемых:

$$y_j = \hat{y}_{x_j} + \varepsilon_j \qquad (1)$$

где y_j - фактическое значение результативного признака;

$\hat{y}_{x_j}$ - теоретическое значение результативного признака, найденное исходя из соответствующей математической функции связи y и x, т. е. из уравнения регрессии;

ε_j - случайная величина, характеризующая отклонения реального значения результативного признака от теоретического, найденного по уравнению регрессии.

Случайная величина ε называется также возмущением. Она включает влияние не учтенных в модели факторов, случайных ошибок и особенностей измерения. Ее присутствие в модели порождено тремя источниками: спецификацией модели, выборочным характером исходных данных, особенностями измерения переменных.

Приведенное ранее уравнение зависимости спроса y от цены x точнее следует записывать как

$$y = 3000 - 2 \cdot x + \varepsilon,$$

ибо всегда есть место для действия случайности. Обратная зависимость спроса от цены не обязательно характеризуется линейной функцией

$$\hat{y}_x = a - bx.$$

Возможны и другие соотношения, например:

$$\hat{y}_x = a \cdot x^b; \quad \hat{y}_x = a + \frac{b}{x}; \quad \hat{y}_x = \frac{1}{a + b \cdot x}.$$

Поэтому от правильно выбранной спецификации модели зависит величина случайных ошибок: они тем меньше, чем в большей мере теоретические значения результативного признака $\hat{y}_x$ подходят к фактическим данным y.

К ошибкам спецификации будут относиться не только неправильный выбор той или иной математической функции для $\hat{y}_x$, но и недоучет в уравнении регрессии какого-либо существенного фактора, т. е. использование парной регрессии вместо множественной. Так, спрос на конкретный товар может определяться не только ценой, но и доходом на душу населения.

Наряду с ошибками спецификации могут иметь место ошибки выборки, поскольку исследователь чаще всего имеет дело с выборочными данными при установлении закономерной связи между признаками. Ошибки выборки имеют место и в силу неоднородности данных в исходной статистической совокупности, что, как правило, бывает при изучении экономических процессов. Если совокупность неоднородна, то уравнение регрессии не имеет практического смысла. Для получения хорошего результата обычно исключают из совокупности единицы с аномальными значениями исследуемых признаков. И в этом случае результаты регрессии представляют собой выборочные характеристики.

Использование временной информации также представляет собой выборку из всего множества хронологических

дат. Изменив временной интервал, можно получить другие результаты регрессии. [4, 5, 6, 7, 24, 25].

Наибольшую опасность в практическом использовании методов регрессии представляют ошибки измерения. Если ошибки спецификации можно уменьшить, изменяя форму модели (вид математической формулы), а ошибки выборки - увеличивая объем исходных данных, то ошибки измерения практически сводят на нет все усилия по количественной оценке связи между признаками. Особенно велика роль ошибок измерения при исследовании на макроуровне. Так, в исследованиях спроса и потребления в качестве объясняющей переменной широко используется «доход на душу населения». Вместе с тем статистическое измерение величины дохода сопряжено с рядом трудностей и не лишено возможных ошибок, например в результате наличия сокрытых доходов.

Приведем еще один пример: в настоящее время органы государственной статистики получают балансы предприятий, достоверность которых никто не подтверждает. Последующее обобщение такой информации может содержать ошибки измерения. Исследуя, например, в качестве результативного признака прибыль предприятий, мы должны быть уверены, что предприятия показывают в отчетности адекватные реальной действительности величины.

Предполагая, что ошибки измерения сведены к минимуму, основное внимание в эконометрических исследованиях уделяется ошибкам спецификации модели.

В парной регрессии выбор вида математической функции $\hat{y}_x = f(x)$ может быть осуществлен тремя методами:

- графическим;
- аналитическим, т.е. исходя из теории изучаемой взаимосвязи;
- экспериментальным.

При изучении зависимости между двумя признаками графический метод подбора вида уравнения регрессии доста-

точно нагляден. Он основан на поле корреляции. Основные типы кривых, используемые при количественной оценке связей, представлены на рис. 8.1.

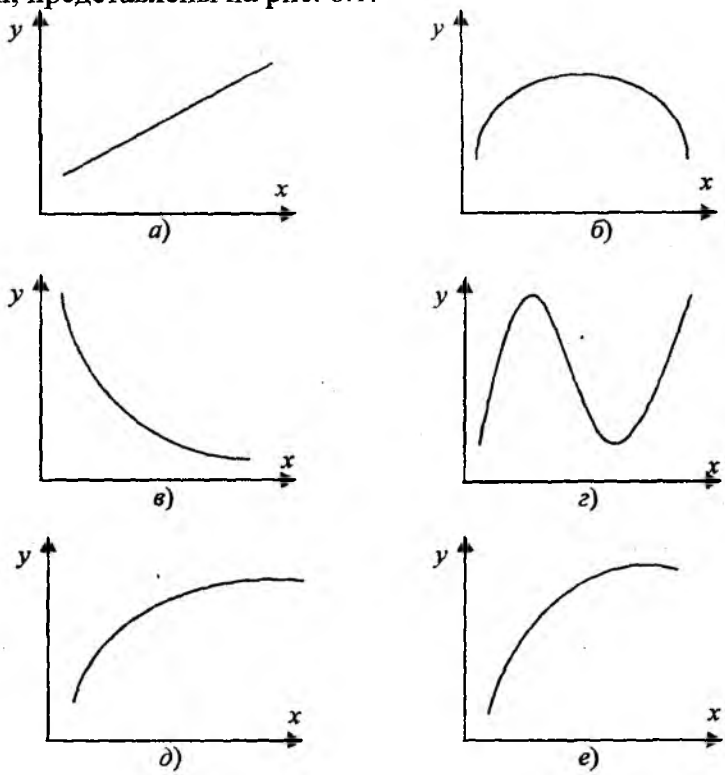


Рис. 8.1. Основные типы кривых, используемые при количественной оценке связей между двумя переменными:

а) $\hat{y}_x = a + b \cdot x$; б) $\hat{y}_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2$;

в) $\hat{y}_x = a + b/x$; г) $\hat{y}_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2$;

д) $\hat{y}_x = a \cdot x^b$; г) $\hat{y}_x = a \cdot b^x$.

Класс математических функций для описания связи двух переменных достаточно широк. Кроме уже указанных используются и другие типы кривых:

$$\hat{y} = \frac{1}{a + b \cdot x}; \qquad \hat{y} = a + b \cdot x + c \cdot \frac{1}{x}; \qquad \hat{y} = a + b \cdot \lg x;$$

$$\hat{y} = \frac{1}{a + b \cdot x + c \cdot x^2}; \qquad \hat{y} = \frac{a}{a + b \cdot e^{-c \cdot x}};$$

$$\lg \hat{y} = a + b \cdot x + c \cdot x^2.$$

Значительный интерес представляет аналитический метод выбора типа уравнения регрессии. Он основан на изучении материальной природы связи исследуемых признаков.

Пусть, например, изучается потребность предприятия в электроэнергии y в зависимости от объема выпускаемой продукции x.

Все потребление электроэнергии y -можно подразделить на две части:

- не связанное с производством продукции a;
- непосредственно связанное с объемом выпускаемой продукции, пропорционально возрастающее с увеличением объема выпуска $(b \cdot x)$.

Тогда зависимость потребления электроэнергии от объема продукции можно выразить уравнением регрессии вида

$$\hat{y}_x = a + b \cdot x.$$

Если затем разделить обе части уравнения на величину объема выпуска продукции (x), то получим выражение зависимости удельного расхода электроэнергии на единицу продукции $\left(z = \frac{y}{x}\right)$ от объема выпущенной продукции (x) в виде уравнения равносторонней гиперболы:

$$\hat{z}_x = b + \frac{a}{x}.$$

Аналогично затраты предприятия могут быть подразделены на условно-переменные, изменяющиеся пропорционально изменению объема продукции (расход материала, оплата труда и др.) и условно-постоянные, не изменяющиеся с изменением объема производства (арендная плата, содержание администрации и др.). Соответственно зависимость за-

трат на производство (y) от объема продукции (x) характеризуется линейной функцией:

$$y = a + b \cdot x,$$

а зависимость себестоимости единицы продукции (z) от объема продукции - равносторонней гиперболой

$$\hat{z}_x = b + \frac{a}{x}.$$

При обработке информации на компьютере выбор вида уравнения регрессии обычно осуществляется экспериментальным методом, т.е. путем сравнения величины остаточной дисперсии $D_{ост}$, рассчитанной при разных моделях.

Если уравнение регрессии проходит через все точки корреляционного поля, что возможно только при функциональной связи, когда все точки лежат на линии регрессии $\hat{y}_x = f(x)$, то фактические значения результативного признака совпадают с теоретическими $y = \hat{y}_x$, т. е. они полностью обусловлены влиянием фактора x. В этом случае остаточная дисперсия $D_{ост}$=0. В практических исследованиях, как правило, имеет место некоторое рассеяние точек относительно линии регрессии. Оно обусловлено влиянием прочих не учитываемых в уравнении регрессии факторов. Иными словами, имеют место отклонения фактических данных от теоретических ($y - \hat{y}_x$). Величина этих отклонений и лежит в основе расчета остаточной дисперсии:

$$D_{ост} = \frac{1}{n}\sum (y - \hat{y}_x)^2. \qquad (2)$$

Чем меньше величина остаточной дисперсии, тем в меньшей мере наблюдается влияние прочих не учитываемых в уравнении регрессии факторов лучше уравнение регрессии подходит к исходным данным. При обработке статистических данных на компьютере перебираются разные математические функции в автоматическом режиме и из них выбирается та, для которой остаточная дисперсия является наименьшей.

Если остаточная дисперсия оказывается примерно одинаковой для нескольких функций, то на практике предпочтение отдается более простым видам функций, ибо они в большей степени поддаются интерпретации и требуют меньшего объема наблюдений. Результаты многих исследований подтверждают, что число наблюдений должно в 6-7 раз превышать число рассчитываемых параметров при переменной x. Это означает, что искать линейную регрессию, имея менее 7 наблюдений, вообще не имеет смысла. Если вид функции усложняется, то требуется увеличение объема наблюдений, ибо каждый параметр при x должен рассчитываться хотя бы по 7 наблюдениям. Значит, если мы выбираем параболу второй степени:

$$\hat{y}_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2,$$

то требуется объем информации уже не менее 14 наблюдений. Учитывая, что эконометрические модели часто строятся по данным рядов динамики, ограниченным по протяженности (10, 20, 30 лет), при выборе спецификации модели предпочтительна модель с меньшим числом параметров при x.

8.2. Оценка параметров линейной регрессии и корреляции

Линейная регрессия находит широкое применение в эконометрике в виде четкой экономической интерпретации ее параметров. Линейная регрессия сводится к нахождению уравнения вида

$$\hat{y}_x = a + b \cdot x \text{ или } y = a + b \cdot x + \varepsilon. \qquad (3)$$

Уравнение вида $\hat{y}_x = a + b \cdot x$ позволяет по заданным значениям фактора x иметь теоретические значения результативного признака, подставляя в него фактические значения фактора x. На графике теоретические значения представляют линию регрессии (рис. 8.2).

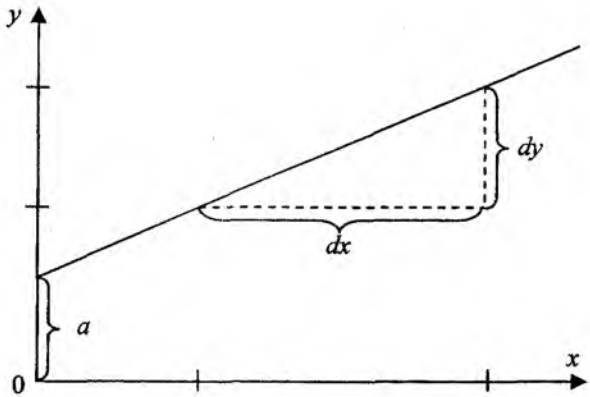


Рис. 8.2. Графическая оценка параметров линейной регрессии

Построение линейной регрессии сводится к оценке ее параметров - a и b. Оценки параметров линейной регрессии могут быть найдены разными методами. Можно обратиться к полю корреляции и, выбрав на графике две точки, провести через них прямую линию (см. рис.8.2). Далее по графику можно определить значения параметров. Параметр a определим как точку пересечения линии регрессии с осью $0y$, а параметр b оценим, исходя из угла наклона линии регрессии, как dy/dx, где dy - приращение результата y, а dx - приращение фактора x, т.е.

$$\hat{y}_x = a + b \cdot x .$$

Классический подход к оцениванию параметров линейной регрессии основан на методе наименьших квадратов (МНК).

МНК позволяет получить такие оценки параметров a и b, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака (y) от расчетных (теоретических) $\hat{y}_x$ минимальна:

$$\sum_i \left(y_i - \hat{y}_{x_i}\right)^2 \to \min. \qquad (4)$$

Иными словами, из всего множества линий линия регрессии на графике выбирается так, чтобы сумма квадратов расстояний по вертикали между точками и этой линией была бы минимальной (рис. 8.3):

$$\varepsilon_i = y_i - \hat{y}_x,$$

следовательно,

$$\sum_i \varepsilon_i^2 \to \min.$$

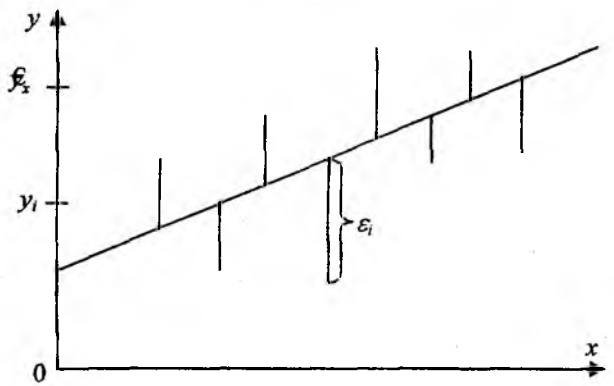


Рис. 8.3. Линия регрессии с минимальной дисперсией остатков

Чтобы найти минимум функции (4), надо вычислить частные производные по каждому из параметров a и b и приравнять их к нулю.

Обозначим $\sum \varepsilon_i^2$ через S, тогда:

$$S = \sum (y_i - \hat{y}_x)^2 = \sum (y - a - b \cdot x)^2;$$

$$\frac{dS}{da} = -2\sum y + 2 \cdot n \cdot a + 2 \cdot b \sum x = 0;$$

$$\frac{dS}{db} = -2\sum y \cdot x + 2 \cdot a \sum x + 2 \cdot b \sum x^2 = 0. \qquad (5)$$

Преобразуя формулу (5), получим следующую систему нормальных уравнений для оценки параметров a и b:

$$\begin{cases} na + b\sum x = \sum y, \\ a\sum x + b\sum x^2 = \sum y \cdot x. \end{cases} \qquad (6)$$

Решая систему нормальных уравнений (6) либо методом последовательного исключения переменных, либо методом определителей, найдем искомые оценки параметров a и b. Можно воспользоваться следующими готовыми формулами:

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}.$$

Формула (7) получена из первого уравнения системы (6), если все его члены разделить на n.

$$b = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x^2},$$

где $\mathrm{cov}(x, y)$ - ковариация признаков;

σ_x^2 - дисперсия признака x.

Ввиду того, что $\mathrm{cov}(x, y) = \overline{yx} - \bar{y} \cdot \bar{x}$, а $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ получим следующую формулу расчета оценки параметра b:

$$b = \frac{\overline{yx} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \qquad (8)$$

Параметр b называется коэффициентом регрессии. Его величина показывает среднее изменение результата с изменением фактора на одну единицу. Так, если в функции издержек $\hat{y}_x = 2000 + 2x$ (y - издержки (тыс. сум), x - количество единиц продукции), то, следовательно, с увеличением объема продукции (x) на 1 ед. издержки производства возрастают в среднем на 2 тыс. сум, т.е. дополнительный прирост продукции на 1 ед. потребует увеличения затрат в среднем на 2 тыс. сум.

Возможность четкой экономической интерпретации коэффициента регрессии сделала линейное уравнение регрессии достаточно распространенным в эконометрических исследованиях.

Формально a - значение y при x=0. Если признак-фактор x не имеет и не может иметь нулевого значения, то вышеука-

занная трактовка свободного члена a не имеет смысла. Параметр a может не иметь экономического содержания. Попытки экономически интерпретировать параметр a могут привести к абсурду, особенно при $a<0$.

Интерпретировать можно лишь знак при параметре a. Если $a>0$, то относительное изменение результата происходит медленнее, чем изменение фактора. Иными словами, вариация результата меньше вариации фактора - коэффициент вариации по фактору x выше коэффициента вариации для результата y: $Vx>Vy$. Для доказательства данного положения сравним относительные изменения фактора x и результата y:

$$\frac{dy}{y}<\frac{dx}{x} \text{ или } \frac{dy}{dx}<\frac{y}{x};\ \frac{b\cdot dx}{dx}<\frac{a+b\cdot x}{x};\ b\cdot x<a+b\cdot x.$$

Откуда $0<a$.

Предположим по группе предприятий, выпускающих один и тот же вид продукции, рассматривается функция издержек: $y=a+bx+e$. Информация, необходимая для расчета оценок параметров a и b, представлена в табл. 8.1.

Таблица 8.1.

Расчетная таблица

№ предприятия	Выпуск продукции, тыс. ед. (x)	Затраты на производство, млн. сум (y)	$y\cdot x$	x^2	y^2	$\hat{y}_x$
1	1	30	30	1	900	31,1
2	2	70	140	4	4900	67,9
3	4	150	600	16	22500	141,6
4	3	100	300	9	10000	104,7
5	5	170	850	25	28900	178,4
6	3	100	300	9	10000	104,7
7	4	150	600	16	22500	141,6
Итого	22	770	2820	80	99700	770,0

Система нормальных уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} 7a + 22b = 770, \\ 22a + 80b = 2820. \end{cases}$$

Решая ее, получим;

$$a=-5{,}79;\ b=36{,}84.$$

Запишем уравнение регрессии:

$$\hat{y}_x = -5{,}79 + 36{,}84 \cdot x.$$

Подставив в уравнение значения x, найдем теоретические значения y (см. последнюю графу табл. 1).

В данном случае величина параметра a не имеет экономического смысла.

В рассматриваемом.примере имеем:

$$\bar{x} = 3{,}14;\ \sigma_x = 1{,}25;\ V_x = 39{,}8\%;$$

$$\bar{y} = 110;\ \sigma_y = 46{,}29;\ V_y = 42{,}1\%.$$

То, что $a<0$, соответствует опережению изменения результата над изменением фактора: $V_y > V_x$.

Если переменные x и y выразить через отклонения от средних уровней, то линия регрессии на графике пройдет через начало координат:

$$\bar{y}' = b \cdot x',$$

где $y' = y - \bar{y}$ и $x' = x - \bar{x}$.

Оценка коэффициента регрессии при этом не изменится.

Оценку коэффициента регрессии можно получить проще, не обращаясь к методу наименьших квадратов. Альтернативную оценку параметра b можно найти исходя из содержания данного коэффициента: изменение результата $\Delta y = y_n - y_1$ сопоставляют с изменением фактора $\Delta x = x_n - x_1$.

В нашем примере такого рода альтернативная оценка параметра b составит

$$b' = \frac{170 - 30}{5 - 1} = 35.$$

Эта величина является приближенной, ибо большая часть информации, имеющейся в данных, не используется

при ее расчете. Она основана только на мини-максных значениях переменных.

Парная линейная регрессия используется в эконометрике нередко при изучении функции потребления:

$$C = K \cdot y + L,$$

где C - потребление;

y - доход;

K и L - параметры функции.

Данное уравнение линейной регрессии используется обычно в увязке с балансовым равенством:

$$y = C + I - r,$$

где I - размер инвестиций; r - сбережения.

Для простоты предположим, что доход расходуется на потребление и инвестиции. Таким образом, рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} C = K \cdot y + L, \\ y = C + I. \end{cases}$$

Наличие в данной системе балансового равенства накладывает ограничение на величину коэффициента регрессии, которая не может быть больше единицы, т. е. $K \leq 1$.

Предположим, что функция потребления составила:

$$\hat{C} = 1{,}9 + 0{,}65 \cdot y.$$

Коэффициент регрессии характеризует склонность к потреблению. Он показывает, что из каждой тысячи дохода на потребление расходуется в среднем 650 сум, а 350 сум инвестируются. Если рассчитать регрессию размера инвестиций от дохода, т.е. $\hat{I} = a + b \cdot y$, то уравнение регрессии составит: $\hat{I} = 1{,}9 + 0{,}35 \cdot y$. Это уравнение можно и не определять, ибо оно выводится из функции потребления. Коэффициенты регрессии этих двух уравнений связаны равенством: 0,65+0,35=1.

Если коэффициент регрессии оказывается больше 1, то $y<(C+1)$, т.е. на потребление расходуются не только доходы, но и сбережения.

Коэффициент регрессии в функции потребления используется для расчета мультипликатора:

$$m = \frac{1}{1-b},$$

где m - мультипликатор;

b - коэффициент регрессии в функции потребления.

В нашем примере m=1/(1-0,65)=2,86. Это означает, что дополнительные вложения в размере 1 тыс. сум на длительный срок приведут при прочих равных условиях к дополнительному доходу в 2,86 тыс. сум.

Уравнение регрессии всегда дополняется показателем тесноты связи. При использовании линейной регрессии в качестве такого показателя выступает линейный коэффициент корреляции r_{xy}. Существуют разные модификации формулы линейного коэффициента корреляции. Некоторые из них приведены ниже:

$$r_{xy} = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{\overline{yx} - \bar{y}\cdot\bar{x}}{\sigma_x\sigma_y}. \quad (9)$$

Как известно, линейный коэффициент корреляции находится в границах: $-1<r_{xy}<1$.

Если коэффициент регрессии $b>0$, то $0<r_{xy}<1$, и, наоборот, при $b<0$, $-1<r_{xy}<0$.

По данным табл. 1 величина линейного коэффициента корреляции составила 0,991, что достаточно близко к 1 и означает наличие очень тесной зависимости затрат на производство от величины объема выпущенной продукции.

Следует иметь в виду, что величина линейного коэффициента корреляции оценивает тесноту связи рассматриваемых признаков в ее линейной форме. Поэтому близость абсолютной величины линейного коэффициента корреляции к

нулю еще не означает отсутствие связи между признаками. При иной спецификации модели связь между признаками может оказаться достаточно тесной.

Для оценки качества подбора линейной функции рассчитывается квадрат линейного коэффициента корреляции r_{yx}^2, называемый коэффициентом детерминации. Коэффициент детерминации характеризует долю дисперсии результативного признака y, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака:

$$r_{yx}^2 = \frac{\sigma_{y\text{объясн.}}^2}{\sigma_{y\text{общ.}}^2}. \qquad (10)$$

Соответственно величина $1\text{-}r^2$ характеризует долю дисперсии у, вызванную влиянием остальных не учтенных в модели факторов.

В нашем, примере r^2=0,982. Следовательно, уравнением регрессии объясняется 98,2% дисперсии результативного признака, а на долю прочих факторов приходится лишь 1,8% ее дисперсии (т.е. остаточная дисперсия). Величина коэффициента детерминации служит одним из критериев оценки качества линейной модели. Чем больше доля объясненной вариации, тем соответственно меньше роль прочих факторов, и, следовательно, линейная модель хорошо аппроксимирует исходные данные и ею можно воспользоваться для прогноза значений результативного признака. Так, полагая, что объем продукции предприятия может составить 5 тыс. ед., прогнозное значение для издержек производства окажется 178,4 тыс. сум.

После того как найдено уравнение линейной регрессии, проводится оценка значимости как уравнения в целом, так и отдельных его параметров.

Оценка значимости уравнения регрессии в целом дается с помощью F-критерия Фишера. При этом выдвигается нулевая гипотеза, что коэффициент регрессии равен нулю, т. е. b=0, и, следовательно, фактор x не оказывает влияния на результат y.

Непосредственному расчету F-критерия предшествует анализ дисперсии. Центральное место в нем занимает разложение общей суммы квадратов отклонений переменной y от среднего значения y на две части - «объясненную» и «необъясненную»:

$$\sum(y-\bar{y})^2 = \sum(\hat{y}_x-\bar{y})^2 + \sum(y-\hat{y}_x)^2 \quad (11)$$

Общая сумма квадратов отклонений	=	Сумма квадратов отклонений, объясненная регрессией	+	Остаточная сумма квадратов отклонений

Общая сумма квадратов отклонений индивидуальных значений результативного признака y от среднего значения $\bar{y}$ вызвана влиянием множества причин. Условно разделим всю совокупность причин на две группы: изучаемый фактор x и прочие факторы. Если фактор не оказывает влияния на результат, то линия регрессии на графике параллельна оси $0x$ и $\bar{y}=\hat{y}$. Тогда вся дисперсия результативного признака обусловлена воздействием прочих факторов и общая сумма квадратов отклонений совпадет с остаточной. Если же прочие факторы не влияют на результат, то y связан с x функционально и остаточная сумма квадратов равна нулю. В этом случае сумма квадратов отклонений, объясненная регрессией, совпадает с обшей суммой квадратов.

Поскольку не все точки поля корреляции лежат на линии регрессии, то всегда имеет место их разброс как обусловленный влиянием фактора x, т.е. регрессией y по x, так и вызванный действием прочих причин (необъясненная вариация). Пригодность линии регрессии для прогноза зависит от того, какая часть общей вариации признака у приходится на объясненную вариацию. Очевидно, что если сумма квадратов отклонений, обусловленная регрессией, будет больше остаточной суммы квадратов, то уравнение регрессии статистически значимо и фактор x оказывает существенное воздейст-

вие на результат y. Это равносильно тому, что коэффициент детерминации r_{xy}^2 будет приближаться к единице.

Любая сумма квадратов отклонений связана с числом степеней свободы, т.е. с числом свободы независимого варьирования признака. Число степеней свободы связано с числом единиц совокупности n и с числом определяемых по ней констант. Применительно к исследуемой проблеме число степеней свободы должно показать, сколько независимых отклонений из n возможных $[(y_1-\bar{y}),(y_2-\bar{y}),...,(y_n-\bar{y})]$ требуется для образования данной суммы квадратов. Так, для общей суммы квадратов $\sum(y-\bar{y})^2$ требуется (n-1) независимых отклонений, ибо по совокупности из n единиц после расчета среднего уровня свободно варьируют лишь (n-1) число отклонений. Например, имеем ряд значений y: 1, 2, 3, 4, 5. Среднее из них равно 3, и тогда n отклонений от среднего составят: -2; -1; 0; 1; 2. Так как $\sum(y-\bar{y})=0$, то свободно варьируют лишь четыре отклонения, а пятое отклонение может быть определено, если предыдущие четыре известны.

При расчете объясненной или факторной суммы квадратов $\sum(\hat{y}_x-\bar{y})^2$ используются теоретические (расчетные) значения результативного признака $\hat{y}_x$, найденные по линии регрессии: $\hat{y}_x=a+bx$.

В линейной регрессии $\sum(\hat{y}_x-\bar{y})^2=b^2\cdot\sum(x-\bar{x})^2$. В этом нетрудно убедиться, обратившись к формуле линейного коэффициента корреляции:

$$r_{xy}=b\frac{\sigma_x}{\sigma_y}. \qquad (12)$$

Из формулы (12) видно, что

$$r_{xy}^2=b^2\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}, \qquad (13)$$

где σ_y^2 - общая дисперсия признака y;

$b^2 \cdot \sigma_x^2$ - дисперсия признака y, обусловленная фактором x.

Соответственно сумма квадратов отклонений, обусловленных линейной регрессией, составит:

$$\sum (\hat{y}_x - \bar{y})^2 = b^2 \cdot \sum (x - \bar{x})^2 .$$

Поскольку при заданном объеме наблюдений по x и y факторная сумма квадратов при линейной регрессии зависит только от одной константы коэффициента регрессии b, то данная сумма квадратов имеет одну степень свободы. К этому же выводу придем, если рассмотрим содержательную сторону расчетного значения признака y, т.е. $\hat{y}_x$. Величина $\hat{y}_x$ определяется по уравнению линейной регрессии: $\hat{y}_x = a + bx$. Параметр a можно определить как $a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$. Подставив выражение параметра a в линейную модель, получим:

$$\hat{y}_x = \bar{y} - b \cdot \bar{x} + b \cdot x = \bar{y} - b \cdot (x - \bar{x}).$$

Отсюда видно, что при заданном наборе переменных y и x расчетное значение $\hat{y}_x$ является в линейной регрессии функцией только одного параметра - коэффициента регрессии. Соответственно и факторная сумма квадратов отклонений имеет число степеней свободы, равное 1.

Существует равенство между числом степеней свободы общей, факторной и остаточной суммами квадратов. Число степеней свободы остаточной суммы квадратов при линейной регрессий составляет n-2. Число степеней свободы для общей суммы квадратов определяется числом единиц, и поскольку мы используем среднюю вычисленную по данным выборки, то теряем одну степень свободы, т. е. $df_{общ} = n - 1$.

Итак, имеем два равенства:

$$\sum (y - \bar{y})^2 = \sum (\hat{y}_x - \bar{y})^2 + \sum (y - \hat{y}_x)^2, \quad (14)$$

$$n\text{-}1 = 1 + (n\text{-}2).$$

Разделив каждую сумму квадратов на соответствующее ей число степеней свободы, получим средний квадрат отклонений, или, что то же самое, дисперсию на одну степень свободы D.

$$D_{\text{общ}} = \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n-1};$$

$$D_{\text{факт}} = \frac{\sum (\hat{y}_x - \bar{y})^2}{n-1};$$

$$D_{\text{ост}} = \frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2}{n-2}.$$

Определение дисперсии на одну степень свободы приводит дисперсии к сравнимому виду. Сопоставляя факторную и остаточную дисперсии в расчете на одну степень свободы, получим величину F-отношения (F -критерий):

$$F = \frac{D_{\text{факт}}}{D_{\text{ост}}}. \qquad (15)$$

где F-критерий для проверки нулевой гипотезы $H_0 : D_{\text{факт}} = D_{\text{ост}}$.

Если нулевая гипотеза справедлива, то факторная и остаточная дисперсии не отличаются друг от друга. Для H_0 необходимо опровержение, чтобы факторная дисперсия превышала остаточную в несколько раз. Английским статистиком Снедекором разработаны таблицы критических значений F-отношений при разных уровнях существенности нулевой гипотезы и различном числе степеней свободы. Табличное значение F-критерия - это максимальная величина отношения дисперсий, которая может иметь место при случайном их расхождении для данного уровня вероятности наличия нулевой гипотезы. Вычисленное значение F-отношения признается достоверным (отличным от единицы), если оно больше табличного. В этом случае нулевая гипотеза об отсутствии

связи признаков отклоняется и делается вывод о существенности этой связи: $F_{факт} > F_{табл}$. H_0 отклоняется.

Если же величина окажется меньше табличной $F_{факт} < F_{табл}$, то вероятность нулевой гипотезы выше заданного уровня (например, 0,05) и она не может быть отклонена без серьезного риска сделать неправильный вывод о наличии связи. В этом случае уравнение регрессии считается статистически незначимым. H_0 не отклоняется.

В рассматриваемом примере:

$\sum(y-\bar{y})^2 = \sum y^2 - n\cdot\bar{y} = 99700 - 7\cdot 110^2 = 15000$ - общая сумма квадратов;

$\sum(\hat{y}_x-\bar{y})^2 = b^2\sum(x-x)^2 = 36{,}840^2\cdot(80-7\cdot(22:7)^2) = 14735$ - факторная сумма квадратов;

$\sum(y-\hat{y}_x)^2 = 15000-14735 = 256$ - остаточная сумма квадратов;

$D_{факт} = 14735;$

$D_{ост} = 265:5 = 53;$

$F_{\alpha=0,05} = 6{,}61;\quad F_{\alpha=0,01} = 16{,}26.$

Поскольку $F_{факт} > F_{табл}$. как при 1%-ном, так и при 5%-ном уровне значимости, то можно сделать вывод о значимости уравнения регрессии (связь доказана).

Величина F-критерия связана с коэффициентом детерминации r^2. Факторную сумму квадратов отклонений можно представить как

$$\sum(\hat{y}_x-\bar{y})^2 = r^2\cdot\sigma_y^2\cdot n,$$

а остаточную сумму квадратов - как

$$\sum(y-\hat{y}_x)^2 = (1-r^2)\cdot\sigma_y^2\cdot n.$$

Тогда значение F-критерия можно выразить как

$$F = \frac{r^2}{1-r^2}\cdot(n-2).$$

В нашем примере r^2=0,982. Тогда $F = \frac{0{,}982}{1-0{,}982} \cdot (7-2) = 273$ (некоторое несовпадение с предыдущим результатом объясняется ошибками округления).

Оценка значимости уравнения регрессии обычно дается в виде таблицы дисперсионного анализа (табл. 8.2).

Таблица 8.2.

Дисперсионный анализ результатов

Источники вариации	Число степеней свободы	Сумма квадратов отклонений	Дисперсия на одну степень свободы	F-отношение	
				фактическое	табличное при $\alpha = 0{,}05$
Общая	6	15000	-	-	-
Объясненная	1	14735	14735	278	6,61
Остаточная	5	265	53	1	-

В линейной регрессии обычно оценивается значимость не только уравнения в целом, но и отдельных его параметров. С этой целью по каждому из параметров определяется его стандартная ошибка: m_b и m_a.

Стандартная ошибка коэффициента регрессии определяется по формуле

$$m_b = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2 / (n-2)}{\sum (x - \bar{x})^2}} = \sqrt{\frac{S^2}{\sum (x - \bar{x})^2}}, \qquad (17)$$

где S^2 - остаточная дисперсия на одну степень свободы.

Для нашего примера величина стандартной ошибки коэффициента регрессии составила:

$$m_b = \sqrt{\frac{53}{10{,}857}} = 2{,}21.$$

Величина стандартной ошибки совместно с *t*-распределением Стьюдента при *n*-2 степенях свободы применяется для проверки существенности коэффициента регрессии и для расчета его доверительных интервалов.

Для оценки существенности коэффициента регрессии его величина сравнивается с его стандартной ошибкой, т.е. определяется фактическое значение *t*-критерия Стьюдента: $t_b = \frac{b}{m_b}$, которое затем сравнивается с табличным значением при определенном уровне значимости α и числе степеней свободы (n-2).

В рассматриваемом примере фактическое значение *t*-критерия для коэффициента регрессии составило:

$$t_b = \frac{36{,}84}{2{,}21} = 16{,}67.$$

Этот же результат получим, извлекая квадратный корень из найденного ранее *F*-критерия, т. е.

$$t_b = \sqrt{F} = \sqrt{278} = 16{,}67.$$

Покажем справедливость равенства $t_b^2 = F$:

$$t_b^2 = \frac{b^2}{m_b^2} = b^2 / \frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2 /(n-2)}{\sum (x - \bar{x})^2} = \frac{b^2 \cdot \sum (x - \bar{x})^2}{\sum (y - \hat{y}_x)^2 /(n-2)} =$$

$$\frac{\sum (\hat{y}_x - \bar{y})^2}{\frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2}{(n-2)}} = \frac{D_{\text{факт}}}{D_{\text{ост}}} = F.$$

При $\sum \alpha = 0{,}05$ (для двустороннего критерия) и числе степеней свободы 5 табличное значение t_b=2,57. Так как фактическое значение *t*-критерия превышает табличное, то, следовательно, гипотезу о несущественности коэффициента регрессии можно отклонить. Доверительный интервал для коэффициента регрессии определяется как $b \pm t \cdot m_b$. Для коэффициента регрессии b в примере 95 %-ные границы составят:

$$36{,}8 \pm 2{,}57 \cdot 2{,}21 = 36{,}84 \pm 5{,}68,$$

т. е.

$$31{,}16 \le b \le 42{,}52.$$

Поскольку коэффициент регрессии в эконометрических исследованиях имеет четкую экономическую интерпретацию, то доверительные границы интервала для коэффициента регрессии не должны содержать противоречивых результатов, например, $-10<b<40$. Такого рода запись указывает, что истинное значение коэффициента регрессии одновременно содержит положительные и отрицательные величины И даже ноль, чего не может быть.

Стандартная ошибка параметра a определяется по формуле:

$$m_a = \sqrt{\frac{\sum(y-\hat{y}_x)^2}{n-2} \cdot \frac{\sum x^2}{n \cdot \sum(x-\bar{x})^2}} = \sqrt{S^2 \cdot \frac{\sum x^2}{n \cdot \sum(x-\bar{x})^2}}. \quad (18)$$

Процедура оценивания существенности данного параметра не отличается от рассмотренной выше для коэффициента регрессии; вычисляется t-критерий: $t_a = \frac{a}{m_a}$, его величина сравнивается с табличным значением при $df = n-2$ степенях свободы.

Значимость линейного коэффициента корреляции проверяется на основе величины ошибки коэффициента корреляции m_r:

$$m_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}.$$

Фактическое значение t-критерия Стьюдента определяется как

$$t_r = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \sqrt{n-2}. \quad (20)$$

Данная формула свидетельствует, что в парной линейной регрессии $t_r^2 = F$, ибо, как уже указывалось, $F = \frac{r^2}{1-r^2} \cdot (n-2)$. Кроме того, $t_b^2 = F$: Следовательно, $t_r^2 = t_b^2$.

Таким образом, проверка гипотез о значимости коэффициентов регрессии и корреляции равносильна проверке гипотезы о существенности линейного уравнения регрессии.

В рассматриваемом примере t_r не совпало с t_b в результате ошибок округлений. Величина t_r=16,73 значительно превышает табличное значение 2,57 при $\alpha = 0{,}05$. Следовательно, коэффициент корреляции существенно отличен от нуля и зависимость является достоверной.

Рассмотренная формула оценки коэффициента корреляции рекомендуется к применению при большом числе наблюдений и если r не близко к +1 или -1. Если же величина коэффициента корреляции близка к +1, то распределение его оценок отличается от нормального или распределения Стьюдента, так как величина коэффициента корреляции ограничена значениями от -1 до +1. Чтобы обойти это затруднение, Р.Фишером было предложено для оценки существенности r ввести вспомогательную величину z, связанную с коэффициентом корреляции следующим отношением:

$$z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}.$$

При изменении r от -1 до +1 величина z изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, что соответствует нормальному распределению. Математический анализ доказывает, что распределение величины z мало отличается от нормального даже при близких к единице значениях коэффициента корреляции. Стандартная ошибка величины z определяется по формуле

$$m_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}, \qquad (22)$$

где n - число наблюдений.

При r=0,991, z=0,5·ln[(1+0,991):(1-0,991)]=2,699, а $m_z = 1:\sqrt{(7-3)} = 0{,}5$. Величину z можно не рассчитывать, а воспользоваться готовыми таблицами z -преобразования, в

которых приведены значения величины z для соответствующих значений r.

Далее выдвигаем нулевую гипотезу H_0, которая состоит в том, что корреляция отсутствует, т.е. теоретическое значение коэффициента корреляции равно нулю. Коэффициент корреляции значимо отличен от нуля, если $\frac{z}{m_z} = t_z > t_{\alpha=0,05}$, т.е. если фактическое значение t_z превышает его табличное значение, на уровне значимости α=0,05 или α=0,01.

Иными словами, если $z \cdot \sqrt{n-3} > t_{\alpha=0,05}$, то коэффициент корреляции значимо отличен от нуля, что имеет место в рассмотренном примере:

$$z \cdot \sqrt{n-3} = 2,699\sqrt{7-3} = 5,398 \text{ при } t_{\alpha=0,05}=2,57$$

Ввиду того, что r и z связаны между собой приведенным выше соотношением, можно вычислить критические значения r, соответствующие каждому из значений z. Таблицы критических значений r разработаны для уровней значимости 0,05 и 0,01 и соответствующего числа степеней свободы. Критические значения r предполагают справедливость нулевой гипотезы, т.е. r мало отлично от нуля. Если фактическое значение коэффициента корреляции по абсолютной величине превышает табличное, то данное значение r считается существенным. Если же r оказывается меньше табличного, то фактическое значение r несущественно.

В рассматриваемом примере при числе степеней свободы n-2=5 критическое значение r при α=0,05 составляет 0,754, а при α=0,01 составляет 0,874, что ниже фактической величины r_{xy}= 0,991. Следовательно, как было уже доказано, полученное значение r существенно отлично от нуля.

8.3. Интервалы прогноза по линейному уравнению регрессии

В прогнозных расчетах по уравнению регрессии определяется предсказываемое (y_p) значение как точечный прогноз $\hat{y}_x$ при $x_p=x_k$, т. е. путем подстановки в уравнение регрессии $\hat{y}_x = a + b \cdot x$ соответствующего значения x. Однако точечный прогноз явно не реален. Поэтому он дополняется расчетом стандартной ошибки $\hat{y}_x$, т.е. $m_{\hat{y}_x}$ и соответственно интервальной оценкой прогнозного значения (y^*)

$$\hat{y}_x - m_{\hat{y}_x} \le y^* \le \hat{y}_x + m_{\hat{y}_x}.$$

Чтобы понять, как строится формула для определения величин стандартной ошибки $\hat{y}_x$, обратимся к уравнению линейной регрессии: $\hat{y}_x = a + b \cdot x$. Подставим в это уравнение выражение параметра a:

$$a = \bar{y} - b \cdot \bar{x},$$

тогда уравнение регрессии примет вид:

$$\hat{y}_x = \bar{y} - b \cdot \bar{x} + b \cdot x = \bar{y} + b \cdot (x - \bar{x}).$$

Отсюда вытекает, что стандартная ошибка $m_{\hat{y}_x}$ зависит от ошибки $\bar{y}$ и ошибки .коэффициента регрессии b, т. е.

$$m^2_{\hat{y}_x} = m^2_{\bar{y}} + m^2_b (x - \bar{x})^2. \qquad (23)$$

Из теории выборки известно, что $m^2_{\bar{y}} = \dfrac{\sigma^2}{n}$. Используя в качестве оценки σ^2 остаточную дисперсию на одну степень свободы S^2, получим формулу расчета ошибки среднего значения переменной y:

$$m^2_{\bar{y}} = \frac{S^2}{n}. \qquad (24)$$

Ошибка коэффициента регрессии, как уже было показано, определяется формулой

$$m_b^2 = \frac{S^2}{\sum (x - \bar{x})^2}.$$

Считая, что прогнозное значение фактора $x_p = x_k$ получим следующую формулу расчета стандартной ошибки предсказываемого по линии регрессии значения, т. е. $m_{\hat{y}_x}$:

$$m_{\hat{y}_x}^2 = \frac{S^2}{n} + \frac{S^2}{\sum (x - \bar{x})^2} \cdot (x_k - \bar{x})^2 = S^2 \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2} \right). \quad (25)$$

Соответственно $m_{\hat{y}_x}$ имеет выражение:

$$m_{\hat{y}_x} = S \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}}. \quad (26)$$

Рассмотренная формула стандартной ошибки предсказываемого среднего значения *y* при заданном значении x_k характеризует ошибку положения линии регрессии. Величина стандартной ошибки $m_{\hat{y}_x}$, как видно из формулы, достигает минимума при $x_k = \bar{x}$, и возрастает по мере того, как «удаляется» от *x* в любом направлении. Иными словами, чем больше разность между x_k и *x*, тем больше ошибка $m_{\hat{y}_x}$ с которой предсказывается среднее значение *y* для заданного значения x_k. Можно ожидать наилучшие результаты прогноза, если признак-фактор *x* находится в центре области наблюдений *x* и нельзя ожидать хороших результатов прогноза при удалении x_k от *x*. Если, же значение x_k оказывается за пределами наблюдаемых значений *x*, используемых при построении линейной регрессии, то результаты прогноза ухудшаются в зависимости от то, насколько x_k отклоняется от области наблюдаемых значений фактора *x*.

Для нашего примера $m_{\hat{y}_x}$ составит:

$$m_{\hat{y}_x} = \sqrt{53\left(\frac{1}{7} + \frac{(x_k - 3{,}143)^2}{10{,}857} \right)}.$$

При $x_k = \bar{x}$

$$m_{\hat{y}_x} = \sqrt{53:7} = 2{,}75.$$

При x_k=4

$$m_{\hat{y}_x} = \sqrt{53\left(\frac{1}{7} + \frac{(4-3{,}143)^2}{10{,}857}\right)} = 3{,}34.$$

Соответственно $m_{\hat{y}_x}$ составит эту же величину и при x_k=2,286. Для прогнозируемого значения $\hat{y}_x$ 95%-ные доверительные интервалы при заданном x_k определяются выражением

$$\hat{y}_{x_k} \pm t_\alpha \cdot m_{\hat{y}_x},$$

т.е. $\hat{y}_{x_k} \pm 2{,}57 \cdot 3{,}34$, или $\hat{y}_{x_k} \pm 8{,}58$.

При x_k=4, прогнозное значение y составит:

$$y_p = -5{,}79 + 36{,}84 \cdot 4 = 141{,}57,$$

которое представляет собой точечный прогноз.

Прогноз линии регрессии в интервале составит:

$$132{,}99 \le \hat{y}_{x_k} \le 150{,}15.$$

На графике доверительные границы для $\hat{y}_{x_k}$ представляют собой гиперболы, расположенные по обе стороны от линии регрессии (рис. 8.4).

Рис. 8.4 показывает, как изменяются пределы в зависимости от изменения x_k: две гиперболы по обе стороны от линии регрессии определяют 95 %-ные доверительные интервалы для среднего значения y при заданном значении x.

Однако фактические значения y варьируют около среднего значения $\hat{y}_x$ Индивидуальные значения y могут отклоняться от $\hat{y}_x$ на величину случайной ошибки ε, дисперсия которой оценивается как остаточная дисперсия на одну степень свободы S^2. Поэтому ошибка предсказываемого инди-

видуального значения y должна включать не только стандартную ошибку $m_{\hat{y}_x}$, но и случайную ошибку S.

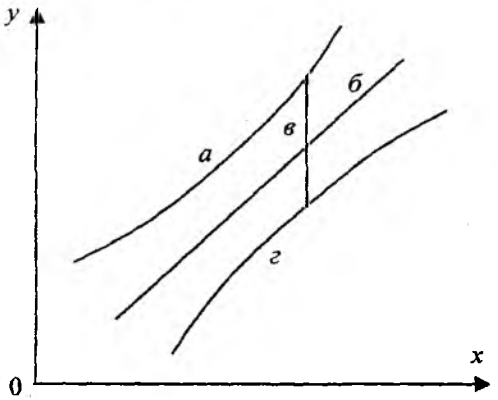


Рис.8.4. Доверительный интервал линии регрессии:
а - верхняя доверительная граница;
б - линия регрессии;
в - доверительный интервал для $\hat{y}_x$ при x_k;
г - нижняя доверительная граница

Средняя ошибка прогнозируемого индивидуального значения y $m_{y_{i(x_k)}}$ составит:

$$m_{y_{i(x_k)}} = s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}}. \qquad (27)$$

По данным рассматриваемого примера получим:

$$m_{y_{i(x_k)}} = \sqrt{53 \cdot \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{(4 - 3{,}143)^2}{10{,}857}\right)} = 8{,}01$$

Доверительные интервалы прогноза индивидуальных значений y при x_k=4 с вероятностью 0,95 составят: $141{,}57 \pm 2{,}57 \cdot 8{,}01$, или $141{,}57 \pm 20{,}59$, это означает, что $120{,}98 \le y_p \le 162{,}16$.

Интервал достаточно широк прежде всего за счет малого объема наблюдений.

При прогнозирований на основе уравнения регрессии следует помнить, что величина прогноза зависит не только от стандартной ошибки индивидуального значения y, но и от точности прогноза значения фактора x. Его величина может задаваться на основе анализа других моделей исходя из конкретной ситуации, а также из анализа динамики данного фактора.

Рассмотренная формула средней ошибки индивидуального значения признака y $\left(m_{y_{i(x_k)}}\right)$ может быть использована также для оценки существенности различия предсказываемого значения исходя из регрессионной модели и выдвинутой гипотезы развития событий.

Предположим, что в нашем примере с функцией издержек выдвигается предположение, что в предстоящем году в связи со стабилизацией экономики при выпуске продукции в 8 тыс. ед. затраты на производство не превысят 250 млн. сум. Означает ли это действительно изменение найденной закономерности или же данная величина затрат соответствует регрессионной модели?

Чтобы ответить на этот вопрос, найдем точечный прогноз при x=8, т.е.

$$\hat{y}_{x=8} = -5{,}79 + 36{,}84 \cdot 8 = 288{,}93.$$

Предполагаемое же значение затрат, исходя из экономической ситуации, - 250,0. Для оценки существенности различия этих величин определим среднюю ошибку прогнозируемого индивидуального значения:

$$m_{y_{i(x_k)}} = s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_k - \overline{x})^2}{\sum (x - \overline{x})^2}} = \sqrt{53 \cdot \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{(8 - 3{,}143)^2}{10{,}857}\right)} = 13{,}26.$$

Сравним ее с величиной предполагаемого снижения издержек производства, т.е, 38,93:

$$t = \frac{-38{,}93}{13{,}26} = -2{,}93.$$

Поскольку оценивается значимость только уменьшения затрат, то используется односторонний t-критерий Стьюдента. При ошибке в 5% с пятью степенями свободы $t_{табл}$=2,015. Следовательно, предполагаемое уменьшение затрат значимо отличается от прогнозируемого по модели при 95 %-ном уровне доверия. Однако если увеличить вероятность до 99 %, при ошибке в 1 % фактическое значение t-критерия оказывается ниже табличного 3,365, и рассматриваемое различие в величине затрат статистически не значимо.

8.4. Нелинейная регрессия

Если между экономическими явлениями существуют нелинейные соотношения, то они выражаются с помощью соответствующих нелинейных функций: например, равносторонней гиперболы $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$, параболы второй степени $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2$ и др.

Различают два класса нелинейных регрессий:

- регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам;
- регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам.

Примером нелинейной регрессии по включаемым в нее объясняющим переменным могут служить следующие функции:

- полиномы разных степеней - $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon$, $\hat{y}_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + d \cdot x^3 + \varepsilon$;
- равносторонняя гипербола - $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$.

К нелинейным регрессиям по оцениваемым параметрам относятся функции:

- степенная - $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$;
- показательная - $y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$;
- экспоненциальная - $y = e^{a+b^x} \cdot \varepsilon$.

Нелинейная регрессия по включенным переменным не таит каких-либо сложностей в оценке ее параметров. Она определяется, как и в линейной регрессии, методом наименьших квадратов (МНК), ибо эти функции линейны по параметрам. Так, в параболе второй степени

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \varepsilon;$$

заменяя переменные $x=x_1$, $x^2=x_2$, получим двухфакторное уравнение линейной регрессии:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \varepsilon,$$

для оценки параметров которого, как будет показано в гл. 3, используется МНК.

Соответственно для полинома третьего порядка

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \varepsilon;$$

при замене $x=x_1$, $x^2=x_2$, $x^3=x_3$ получим трехфакторную модель линейной регрессии:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \varepsilon,$$

а для полинома k-го порядка

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k + \varepsilon;$$

получим линейную модель множественной регрессии с k объясняющими переменными:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{3k} x_k + \varepsilon.$$

Следовательно, полином любого порядка сводится к линейной регрессии с ее методами оценивания параметров и проверки гипотез. Как показывает опыт большинства исследователей, среди нелинейной полиномиальной регрессии чаще всего используется парабола второй степени; в отдельных случаях - полином третьего порядка. Ограничения в использовании полиномов более высоких степеней связаны с требованием однородности исследуемой совокупности: чем

выше порядок полинома, тем больше изгибов имеет кривая и соответственно менее однородна совокупность по результативному признаку.

Парабола второй степени целесообразна к применению, если для определенного интервала значений фактора меняется характер связи рассматриваемых признаков: прямая связь меняется на обратную или обратная на прямую. В этом случае определяется значение фактора, при котором достигается максимальное (или минимальное) значение результативного признака: приравниваем к нулю первую производную параболы второй степени:

$$\hat{y}_x = a + b \cdot x + c \cdot x^2; \text{ т.е. } b + 2 \cdot c \cdot x = 0 \text{ и } x = \frac{b}{2 \cdot c}.$$

Если же исходные данные не обнаруживают изменения направленности связи, то параметры параболы второго порядка становятся трудно интерпретируемыми, а форма связи часто заменяется другими нелинейными моделями.

Применение МНК для оценки параметров параболы второй степени приводит к следующей системе нормальных уравнении.

$$\begin{cases} na + b\sum x + c\sum x^2 = \sum y \\ a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3 = \sum yx \\ a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4 = \sum yx^2 \end{cases}$$

Решение ее возможно методом определителей:

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta}; \quad b = \frac{\Delta b}{\Delta}; \quad c = \frac{\Delta c}{\Delta},;$$

где Δ - определитель системы;

Δa, Δb, Δc - частные определители для каждого из параметров.

При $b>0$ и $c<0$ кривая симметрична относительно высшей точки, т.е. точки перелома кривой, изменяющей направление связи, а именно рост на падение. Такого рода функцию

можно наблюдать в экономике труда при изучении зависимости заработной платы работников физического труда от возраста - с увеличением возраста повышается заработная плата ввиду одновременного увеличения опыта и повышения квалификации работника. Однако с определенного возраста ввиду старения организма и снижения производительности труда дальнейшее повышение возраста может приводить к снижению заработной платы работника. Если параболическая форма связи демонстрирует сначала рост, а затем снижение уровня значений результативного признака, то определяется значение фактора, при котором достигается максимум. Так, предполагая, что потребление товара A (единиц) в зависимости от уровня дохода семьи (тыс. сум.) характеризуется уравнением вида $\hat{y}_x = 5 + 6x - x^2$. Приравнивая к нулю первую производную $\hat{y}'_x = 6 - 2x$, найдем величину дохода, при которой потребление максимально, т.е. при x=3 тыс. сум.

При b<0 и c>0 парабола второго порядка симметрична относительно своей низшей точки, что позволяет определять минимум функции в точке, меняющей направление связи, т.е. снижение на рост. Так, если в зависимости от объема выпуска продукции затраты на производство характеризуются уравнением $\hat{y}_x = 1200 - 60x + 2x^2$, то наименьшие затраты достигаются при выпуске продукции x=15 ед., т.е. $-60 + 2 \cdot 2 \cdot x = 0$..

В этом можно убедиться, подставляя в уравнение значения x.

x	10	11	12	13	14	15	16	17
y	800	782	768	758	752	750	752	758

Ввиду симметричности кривой парабола второй степени далеко не всегда пригодна в конкретных исследованиях. Чаще исследователь имеет дело лишь с отдельными сегментами параболы, а не с полной параболической формой. Кроме того, параметры параболической связи не всегда могут быть логически истолкованы. Поэтому если график зависимости

не демонстрирует чётко выраженной параболы второго порядка (нет смены направленности связи признаков), то она может быть заменена другой нелинейной функцией, например степенной. В частности, в литературе часто рассматривается парабола второй степени для характеристики зависимости урожайности от количества внесенных удобрений. Данная форма связи мотивируется тем, что с увеличением количества внесенных удобрений урожайность растет лишь до достижения оптимальной дозы вносимых удобрений. Дальнейший же рост их дозы оказывается вредным для растения, и урожайность снижается. Несмотря на несомненную справедливость данного утверждения, следует отметить, что внесение в почву минеральных удобрений производится на основе учета достижений агробиологической науки. Поэтому на практике часто данная зависимость представлена лишь сегментом параболы, что и позволяет использовать другие нелинейные функции. В качестве примера рассмотрим табл.8.3.

Таблица 8.3.

Зависимость урожайности пшеницы от количества внесенных удобрений

Внесено минеральных удобрений, ц на 1 га, x	Урожайность, ц на 1 га, y	x^2	x^3	x^4	yx	yx^2	$\hat{y}_x$
1	6	1	1	1	6	6	6,2
2	9	4	8	16	18	36	8,5
3	10	9	27	81	30	90	10,4
4	12	16	64	256	48	192	11,9
5	13	25	125	625	65	325	13,0
$\Sigma 15$	50	55	225	979	167	649	50,0

По данным табл. 8.3 система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} 15a + 15b + 55c = 50, \\ 15a + 55b + 225c = 167, \\ 55a + 225b + 979c = 649. \end{cases}$$

Решая ее методом определителей, получим: Δ=700, Δa=2380, Δb=2090, Δc=-150. Откуда параметры искомого уравнения составят: a=3,4; b=2,986; c=-0,214, а уравнение параболы второй степени примет вид:

$$\hat{y}_x = 3{,}4 + 2{,}986 \cdot x - 0{,}214 \cdot x^2.$$

Подставляя в это уравнение последовательно значения x, найдем теоретические значения $\hat{y}_x$ (см. табл. 3, гр. 8).

Как видно из табл. 3, уравнение параболы второго порядка хорошо описывает рассматриваемую зависимость. Сумма квадратов отклонений остаточных величин $\sum(y - \hat{y}_x)^2 = 0{,}46$. Ввиду того, что данные табл. 3 демонстрируют лишь сегмент параболы второго порядка, то рассматриваемая зависимость может быть охарактеризована и другой функцией. Используя, в частности, степенную функцию $\hat{y}_x = a \cdot x^b$, было получено уравнение регрессии $\hat{y}_x = 6{,}136\, x^{0{,}474}$. Для него $\sum(y - \hat{y}_x)^2 = 0{,}43$, что означает еще лучшую сходимость фактических и расчетных значений y.

Среди класса нелинейных функций, параметры которых без особых затруднений оцениваются МНК, следует назвать хорошо известную в эконометрике равностороннюю гиперболу: $\hat{y}_x = a + b/x$.

Она может быть использована для характеристики связи удельных расходов сырья, материалов, топлива с объемом выпускаемой продукции, времени обращения товаров от величины товарооборота, т.е. на микроуровне, но и на макроуровне. Классическим ее примером является кривая Филлипса, характеризующая нелинейное соотношение между нормой безработицы x и процентом прироста заработной платы y:

$$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon.$$

Английский экономист А.В. Филлипс, анализируя данные более чем за 100-летний период, в конце 50-х гг. XX в. установил обратную зависимость процента прироста заработной платы от уровня безработицы.

Для равносторонней гиперболы вида $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$, заменив $\frac{1}{x}$ на z, получим линейное уравнение регрессии $y = a + b \cdot z + e$, оценка параметров которого может быть дана МНК. Система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} na + b\sum\frac{1}{x} = \sum y, \\ a\sum\frac{1}{x} + b\sum\frac{1}{x^2} = \sum\frac{y}{x}. \end{cases}$$

При $b>0$ имеем обратную зависимость, которая при $x \to \infty$ характеризуется нижней асимптотой, т.е. минимальным предельным значением y, оценкой которого служит параметр a. Так, для кривой Филипса $\hat{y}_x = 0{,}00679 + 1{,}1842\frac{1}{x}$ величина параметра a равная 0,00679, означает, что с ростом уровня безработицы темп прироста заработной платы в пределе стремится к нулю. Соответственно можно определить тот уровень безработицы, при котором заработная плата оказывается стабильной и темп ее прироста равен нулю.

При $b<0$ имеем медленно повышающуюся функцию с верхней асимптотой при $x \to \infty$, т.е. с максимальным предельным уровнем y, оценку которого в уравнении $\hat{y} = a + \frac{b}{x}$ дает параметр a.

Примером может служить взаимосвязь доли расходов на товары длительного пользования и общих сумм расходов (или доходов). Математическое описание подобного рода

взаимосвязей получило название кривых Энгеля. В 1857 г. Немецкий статистик Э.Энгель на основе исследования семейных расходов сформулировал закономерность – с ростом дохода доля доходов, расходуемых на продовольствие, уменьшается. Соответственно, с увеличением дохода доля доходов, расходуемых на непродовольственные товары, будет возрастать. Однако, это увеличение не беспредельно, ибо на все товары сумма долей не может быть больше единицы, или 100%, а на отдельные непродовольственные товары этот предел может характеризоваться величиной параметра a для уравнения вида

$$\hat{y}_x = a - \frac{b}{x},$$

где y – доля расходов на непродовольственные товары;

x – доходы (или общая сумма расходов на индикатор дохода).

Правомерность использования равносторонней гиперболы $\hat{y}_x = a - \frac{b}{x}$, для кривой Энгеля довольно легко доказывается.

Соответственно можно определить границу величины дохода, дальнейшее увеличение которого не приводит к росту доли расходов на отдельные непродовольственные товары.

Вместе с тем равносторонняя гипербола $\hat{y}_x = a - \frac{b}{x}$ не является единственно возможной функцией для описания кривой Энгеля. В 1943 г. Уоркинг и в 1964 г. Лизер для этих целей использовали полулогарифмическую кривую $\hat{y}_x = a + b\ln x + \varepsilon$.

Заменив $\ln x$ на z, опять получим линейное уравнение: $y = a + b\ln x + \varepsilon$. Данная функция, как и предыдущая, линейна по параметрам и нелинейна по объясняющей переменной x. Оценка параметров a и b может быть найдена МНК. Система нормальных уравнений при этом окажется следующей:

$$\begin{cases} na + b\sum \ln x = \sum y, \\ a\sum \ln x + b\sum (\ln x)^2 = \sum y \cdot \ln x. \end{cases}$$

Применим полулогарифмическую функцию зависимости доли расходов на товары длительного пользования в общих расходах семьи от дохода семьи (табл. 8.4).

Таблица 8.4.

Доля расходов на товары длительного пользования в зависимости от дохода семьи

Среднемесячный доход семьи, тыс. долл. США , x	1	2	3	4	5	6
Процент расходов на товары длительного пользования, Y	10	13,4	15,4	16,5	18,6	19,1

Решая систему нормальных уравнений

$$\begin{cases} 6a + 6{,}57925b = 93, \\ 6{,}57925a + 9{,}40991b = 113{,}23881. \end{cases}$$

мы получили уравнение регрессии $\hat{y}_x = 9{,}876 + 5{,}129 \cdot \ln x$, которое достаточно хорошо описывает исходные соотношения дохода семьи и доли расходов на товары длительного пользования, что видно из сравнения фактических и теоретических значений y:

$\hat{y}_x$	9,9	13,4	15,5	17,0	18,1	19,1	сумма
$y - \hat{y}_x$	0,1	0,0	-0,1	-0,5	0,5	0,0	0,0
$(y - \hat{y}_x)^2$	0,01	0,0	0,01	0,25	0,25	0,0	0,52*
* При более точном подсчете $\hat{y}_x$ эта величина составит 0,4864							

Возможны и иные модели, нелинейные по объясняющим переменным. Например, $y = a + b\sqrt{x} + \varepsilon$. Соответственно система нормальных уравнений для оценки параметров составит:

$$\begin{cases} na + b\sum\sqrt{x} = \sum y, \\ a\sum\sqrt{x} + b\sum x = \sum y \cdot \sqrt{x}. \end{cases}$$

Уравнения с квадратными корнями использовались в исследованиях урожайности, трудоемкости сельскохозяйственного производства. В работе Н.Дрейпера и Г.Смита[1] справедливо отмечено, что если нет каких-либо теоретических обоснований в использовании данного вида кривых, то основная цель подобных преобразований состоит в том, чтобы для преобразованных переменных получить более простую модель регрессии, чем для исходных данных.

Иначе обстоит дело с регрессией, нелинейной по оцениваемым параметрам. Данный класс нелинейных моделей подразделяется на два типа: нелинейные модели внутренне линейные и нелинейные модели внутренне нелинейные. Если нелинейная модель внутренне линейна, то она с помощью соответствующих преобразований может быть приведена к линейному виду. Если же нелинейная модель внутренне нелинейна, то она не может быть сведена к линейной функции. Например, в эконометрических исследованиях при изучении эластичности спроса от цен широко используется степенная функция:

$$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon,$$

где y - спрашиваемое количество; x - цена; ε - случайная ошибка.

Данная модель нелинейна относительно оцениваемых параметров, ибо включает параметры a и b неаддитивно. Однако ее можно считать внутренне линейной, ибо логарифмирование данного уравнения по основанию e приводит его к линейному виду:

$$\ln y = \ln a + b \cdot \ln x + \ln \varepsilon.$$

[1] Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. –М.: 1973.

Соответственно оценки параметров a и b могут быть найдены МНК. В рассматриваемой степенной функции предполагается, что случайная ошибка ε мультипликативно связана с объясняющей переменной x. Если же модель представить в виде $y = a \cdot x^b + \varepsilon,$, то она становится внутренне нелинейной, ибо ее невозможно превратить в линейный вид.

Внутренне нелинейной будет и модель вида

$$y = a \cdot x^c + \varepsilon,$$

или модель

$$y = a \cdot \left(1 - \frac{1}{1 - x^b}\right) + \varepsilon,$$

ибо эти уравнения не могут быть преобразованы в уравнения, линейные по коэффициентам.

В специальных исследованиях по регрессионному анализу часто к нелинейным относят модели только внутренне нелинейные по оцениваемым параметрам, а все другие модели, которые внешне нелинейны, но путем преобразований параметров могут быть приведены к линейному виду, относятся к классу линейных моделей. В этом плане к линейным относят, например, экспоненциальную модель $y = e^{a+bx} \cdot \varepsilon$, ибо логарифмируя ее по натуральному основанию, получим линейную форму модели

$$\ln y = a + b \cdot x + \ln \varepsilon.$$

Если модель внутренне нелинейна по параметрам, то для оценки параметров используются итеративные процедуры, успешность которых зависит от вида уравнений и особенностей применяемого итеративного подхода. Модели внутренне нелинейные по параметрам могут иметь место в эконометрических исследованиях. Однако гораздо большее распространение получили модели, приводимые к линейному виду. Решение такого типа моделей реализовано в стандартных пакетах прикладных программ. Среди них, в частности, можно назвать и обратную модель вида

$$y = \frac{1}{a + b \cdot x + \varepsilon}.$$

Обращая обе части равенства, получим линейную форму модели для переменной $\frac{1}{y}$:

$$\frac{1}{y} = a + b \cdot x + \varepsilon.$$

Приводима к линейному виду и логистическая функция

$$y = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-cx+\varepsilon}} \text{ или } \hat{y}_x = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-cx}}.$$

Обращая обе части равенства, получим:

$$1 + b \cdot e^{-cx+\varepsilon} = \frac{a}{y}$$

Вычитая 1, имеем: $b \cdot e^{-cx+\varepsilon} = \frac{a}{y} - 1.$

Прологарифмировав обе части по натуральному основанию, получим уравнение линейной формы:

$$\ln b - c \cdot x + \varepsilon = \ln\left(\frac{a}{y} - 1\right)$$

или

$$z = B - cx + \varepsilon,$$

где

$$z = \ln\left(\frac{a}{y} - 1\right) \text{ и } B = \ln b.$$

Среди нелинейных функций, которые могут быть приведены к линейному виду, в эконометрических исследованиях очень широко используется степенная функция $y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$. Связано это с тем, что параметр b в ней имеет четкое экономическое истолкование, т.е. он является коэффициентом эластичности. Это значит, что величина коэффициента b показывает, на сколько процентов изменится в среднем результат, если фактор изменится на 1%. Так, если зависимость спроса от цен

характеризуется уравнением вида $\hat{y}_x = 105{,}56 \cdot x^{-1{,}12}$, то, следовательно, с увеличением цен на 1% спрос снижается в среднем на 1,12%. О правомерности подобного истолкования параметра b для степенной функции $\hat{y}_x = a \cdot b^x$ можно судить, если рассмотреть формулу расчета коэффициента эластичности

$$Э = f'(x)\frac{x}{y},$$

где $f'(x)$ - первая производная, характеризующая соотношение приростов результата и фактора для соответствующей формы связи.

Для степенной функции она составит: $f'(x) = a \cdot b \cdot x^{b-1}$.. Соответственно коэффициент эластичности окажется равным:

$$Э = a \cdot b \cdot x^{b-1} \cdot \frac{x}{a \cdot x^b} = \frac{a \cdot b \cdot x^b}{a \cdot x^b} = b.$$

Коэффициент эластичности, естественно, можно определять и при наличии других форм связи, но только для степенной функции он представляет собой постоянную величину, равную параметру *b*. В других функциях коэффициент эластичности зависит от значений фактора *x*. Так, для линейной регрессий $\hat{y}_x = a + b \cdot x$ функция и эластичность следующие:

$$f'(x) = b \text{ и } Э = b \cdot \frac{x}{a + bx}.$$

В силу того что коэффициент эластичности для линейной функции не является величиной постоянной, а зависит от соответствующего значения *x*, то обычно рассчитывается средний показатель эластичности по формуле

$$\overline{Э} = b \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}}.$$

Для оценки параметров степенной функции $y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$ применяется МНК к линеаризованному уравнению $\ln y = \ln a + b \cdot \ln x + \ln \varepsilon$,, т.е. решается система нормальных уравнений:

$$\begin{cases} n\ln a + b\sum \ln x = \sum y, \\ \ln a\sum \ln x + b\sum (\ln x)^2 = \sum \ln y \cdot \ln x. \end{cases}$$

Параметр b определяется непосредственно из системы, а параметр a - косвенным путем после потенцирования величины $\ln a$. Так, решая систему нормальных уравнений зависимости спроса от цен, было получено уравнение $\ln y = 4{,}6593 - 1{,}1214 \cdot \ln x$. Если потенцировать его, получим:

$$\hat{y}_x = e^{4{,}6593} \cdot x^{-1{,}1214} = 105{,}56 \cdot x^{-1{,}1214}.$$

Поскольку параметр a экономически не интерпретируется, то нередко зависимость записывается в виде логарифмически линейной, т. е. $\ln y = 4{,}6593 - 1{,}1214 \cdot \ln x$. В виде степенной функции изучается не только эластичность спроса, но и предложения. При этом обычно эластичность спроса характеризуется параметром $b<0$, а эластичность предложения: $b>0$.

Поскольку коэффициенты эластичности представляют экономический интерес, а виды моделей не ограничиваются только степенной функцией, приведем формулы расчета коэффициентов эластичности для наиболее распространенных типов уравнений регрессии (табл. 8.5). (Свойства коэффициентов эластичности рассматриваются более подробно в п.8.4.3).

Несмотря на широкое использование в эконометрике коэффициентов эластичности, возможны случаи, когда их расчет экономического смысла не имеет. Это происходит тогда, когда для рассматриваемых признаков бессмысленно определение изменения значений в процентах. Например, вряд ли кто будет определять, на сколько процентов может измениться заработная плата с ростом стажа работы на 1%. Или, например, насколько процентов изменится урожайность пшеницы, если качество почвы, измеряемое в баллах, изменится на 1 %. В такой ситуации степенная функция, даже если она оказывается наилучшей по формальным соображени-

ям (исходя из наименьшего значения остаточной вариации), не может быть экономически интерпретирована.

Таблица 8.5.

Коэффициенты эластичности для ряда математических функций

Вид функции, y	Первая производная, y'_x	Коэффициент эластичности, $Э = y'_x \cdot \frac{x}{y}$
Линейная $y = a + bx + \varepsilon$	b	$Э = \frac{bx}{a+bx}$
Парабола второго порядка $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon$	$b + 2 \cdot c \cdot x$	$Э = \frac{(b+2cx) \cdot x}{a+bx+cx^2}$
Гипербола $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$	$-\frac{b}{x^2}$	$Э = \frac{-b}{ax+b}$
Показательная $y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$	$\ln b \cdot a \cdot b^x$	$Э = x \cdot \ln b$
Степенная $y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$	$a \cdot b \cdot x^{b-1}$	$Э = b$
Полулогарифмическая $y = a + b \cdot \ln x + \varepsilon$	$\frac{b}{x}$	$Э = \frac{b}{a + b \cdot \ln x}$
Логистическая $y = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-cx+\varepsilon}}$	$\frac{a \cdot b \cdot c \cdot e^{-cx}}{\left(1 + b \cdot e^{-cx}\right)^2}$	$Э = \frac{c \cdot x}{\frac{1}{b} e^{cx} 1}$
Обратная $Э = \frac{1}{a + b \cdot x + \varepsilon}$	$\frac{-b}{(a + b \cdot x)^2}$	$\frac{-b \cdot x}{a + b \cdot x}$

Например, изучая соотношение ставок межбанковского кредита y (в процентах годовых) и срока его предоставления x (в днях), было получено уравнение регрессии $\hat{y}_x = 11{,}684 \cdot x^{0{,}352}$ с очень высоким показателем корреляции

(0,9895). Коэффициент эластичности 0,352% лишен смысла, ибо срок предоставления кредита не измеряется в процентах. Значительно больший интерес для этой зависимости может представить линейная функция $\hat{y}_x = 21{,}1 + 0{,}403x$, имеющая более низкий показатель корреляции 0,85. Коэффициент регрессии 0,403 показывает в процентных пунктах изменение ставок кредита с увеличением срока их предоставления на один день.

В моделях, нелинейных по оцениваемым параметрам, но приводимых к линейному виду, МНК применяется к преобразованным уравнениям. Если в линейной модели и моделях, нелинейных по переменным, при оценке параметров исходят из критерия $\sum (y - \hat{y}_x)^2 \to \min$, то в моделях, нелинейных по оцениваемым параметрам, требование МНК применяется не к исходным данным результативного признака, а к их преобразованным величинам, т.е. ln*y*, 1/*y*. Так, в степенной функции $y = \alpha \cdot x^{\beta} \cdot \varepsilon$ МНК применяется к преобразованному уравнению $\ln y = \ln \alpha + \beta \ln x + \ln \varepsilon$.

Это значит, что оценка параметров основывается на минимизации суммы квадратов отклонений в логарифмах.

$$\sum (\ln y - \ln \hat{y}_x)^2 \to \min.$$

Соответственно если в линейных моделях (включая нелинейные по переменным) $\sum (y - \hat{y}_x) = 0$, то в моделях, нелинейных по оцениваемым параметрам,

$$\sum \left(\ln y - \ln \hat{y}_x \right) = 0, \quad \text{а} \quad \sum \left(y - anti \ln \hat{y}_x \right) \neq 0.$$

Вследствие этого оценка параметров для линеаризуемых функций МНК оказываются несколько смешенной.

Возьмем, например, показательную кривую: $\hat{y}_x = a \cdot x^b$ или равносильную ей экспоненту $\hat{y}_x = e^{a+bx}$. Прологарифмировав, имеем:

$$\ln y = \ln a + x \cdot \ln b.$$

Применяя МНК, минимизируем $\sum\left(\ln y-\ln \hat{y}_x\right)^2$. Система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} n\ln a+\ln b\sum x=\sum \ln y, \\ \ln a\sum x+\ln b\sum x^2=\sum x\cdot \ln y. \end{cases}$$

Из первого уравнения видно, что

$$\ln a=\frac{\sum \ln y}{n}-\ln b\frac{\sum x}{n}=\frac{\sum \ln y}{n}-\ln b\cdot \bar{x}.$$

Предположим, что фактические данные сложились так, что $\bar{x}=0$. Тогда $\ln a=\frac{\sum \ln y}{n}$ или $a=\sqrt[n]{y_1\cdot y_2\cdot ...y_n}$, т.е. параметр a представляет собой среднюю геометрическую из значений переменной y. Между тем в линейной зависимости $\hat{y}_x=a+b\cdot x$ при $\bar{x}=0$ параметр

$$a=\frac{\sum y}{n}=\bar{y},$$

т.е. средней арифметической. Поскольку средняя геометрическая всегда меньше средней арифметической, го и оценки параметров, полученные из минимизации $\sum\left(\ln y-\ln \hat{y}_x\right)^2$, будут несколько смещены (занижены).

Практическое применение экспоненты возможно, если результативный признак не имеет отрицательных значений. Поэтому если исследуется, например, финансовый результат деятельности предприятий, среди которых наряду с прибыльными есть и убыточные, то данная функция не может быть использована. Если экспонента строится как функция выравнивания по динамическому ряду для характеристики тенденции с постоянным темпом, то $y=a\cdot b^t$ где y - уровни динамического ряда; t - хронологические даты, параметр b означает средний за период

коэффициент роста. В уравнении $y = e^{a+bx}$ этот смысл приобретает величина антилогарифма параметра b.

При исследовании взаимосвязей среди функций, использующих $\ln y$, в эконометрике преобладают степенные зависимости - это и кривые спроса и предложения, и кривые Энгеля, и производственные функции, и кривые освоения для характеристики связи между трудоемкостью продукции и масштабами производства в период освоения выпуска нового вида изделий, и зависимость валового национального дохода от уровня занятости.

В отдельных случаях может использоваться и нелинейная модель вида

$$y = \frac{1}{a + bx + \varepsilon},$$

так называемая обратная модель, являющаяся разновидностью гиперболы. Но если в равносторонней гиперболе $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$ преобразованию подвергается объясняющая переменная $\frac{1}{x} = z$ и $z = a + bx + \varepsilon$, то для получения линейной формы зависимости в обратной модели преобразовывается y, а именно: $1/y = z$ и $z = a + bx + \varepsilon$. В результате обратная модель оказывается внутренне нелинейной и требование МНК выполняется не для фактических значений признака y, а для их обратных величин $1/y$, а именно $\sum (z - \hat{z}_x)^2 \to \min$.

Соответственно

$$\sum \left(\frac{1}{y}\right) = \sum \hat{z}_x, \text{ но } \sum y \neq \sum \hat{y}_x.$$

Проанализируем зависимость рентабельности продукции от ее трудоемкости по данным семи предприятий (табл. 8.6).

Таблица 8.6.

Зависимость рентабельности продукции y (%) от ее трудоемкости x (ч/ед.)

x	y	$\frac{1}{y}=z$	$\frac{x}{y}$	x^2	$\hat{z}_x$	$\hat{y}_x$	$z-\hat{y}_x$	$y-\hat{y}_x$
1,0	32	0,0312	0,0312	1,00	0,0285	35,1	0,0027	-3,1
1,2	28	0,0357	0,0428	1,44	0,0341	29,3	0,0016	-1,3
1,5	22	0,0455	0,0682	2,25	0,0424	23,6	0,0031	-1,6
2,0	20	0,0500	0,1000	4,00	0,0563	17,7	-0,0063	2,3
2,5	16	0,0625	0,1563	6,25	0,0703	14,2	-0,0078	1,8
2,7	15	0,0667	0,1800	7,29	0,0758	13,2	-0,0091	1,8
3,0	10	0,1000	0,3000	9,00	0,0842	11,9	0,0158	-1,9
13,9	143	0,3916	0,8785	31,23	0,3936	145,0	0,000	-2,0

Для оценки параметров функции $y=\frac{1}{a+bx+\varepsilon}$ по МНК система нормальных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} na + b\sum x = \sum \frac{1}{y}, \\ a\sum x + b\sum x^2 = \sum \frac{x}{y}. \end{cases}$$

Исходя из данных табл. 6, имеем:

$$\begin{cases} 7a + 13{,}9b = 0{,}3916, \\ 13{,}9a + 31{,}23b = 0{,}8785. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим оценки параметров искомой функции: a= 0,0007; b= 0,0278. Соответственно уравнение регрессии составит:

$$\hat{y}_x = \frac{1}{0{,}0007 + 0{,}0278\,x}.$$

Сравним последние две графы табл.8.6. Получим $\sum(y-\hat{y}_x)\neq 0$, тогда как для обратных значений эта величи-

на равна нулю. Кроме того, заметим, что положительные отклонения фактических и теоретических обратных значений сменяются на отрицательные значения для аналогичных показателей по исходным данным. Уравнение отражает обратную связь рассматриваемых признаков: чем выше трудоемкость, тем ниже рентабельность. Поскольку данное уравнение линейно относительно величин $1/y$, то если обратные значения $1/y$ имеют экономический смысл, коэффициент регрессии b интерпретируется, также как в линейном уравнении регрессии. Если, например, подподразумеваются затраты на 1 сум. продукции, а под x - производительность труда (выработка продукции на одного работника), то обратная величина характеризует затратоотдачу и параметр b имеет экономическое содержание средний прирост продукции в стоимостном измерении на 1 сум затрат с ростом производительности труда на единицу своего измерения.

Уравнение вида $\hat{y}_x = \dfrac{1}{a - bx}$ характеризует прямую зависимость результативного признака от фактора. Оно целесообразно при очень медленном повышении уровней результативного признака с ростом значений фактора.

Возможно и одновременное использование логарифмирования, и преобразование в обратные величины: $y = e^{a-b/x+\varepsilon}$. Прологарифмировав, получим: $\ln y = a - b/x + \varepsilon$. Далее заменим $\dfrac{1}{x}$ на z, и тогда для оценки параметров к линейному уравнению $\ln y = a - b \cdot z + \varepsilon$ может быть применен МНК.

При всех положительных значениях x функция возрастает; при $x=b/2$ кривая имеет точку перегиба - ускоренный рост при $x<b/2$ сменяется на замедленный рост при $x>b/2$. Подобного типа функции используются при анализе статистических данных о бюджетах потребителей, где выдвигается гипотеза о существовании асимптотического уровня расходов,

об изменении предельной склонности к потреблению товара, о существовании «порогового уровня дохода». В этом случае при $x \to \infty$, $y \to e^a$ (рис. 8.5).

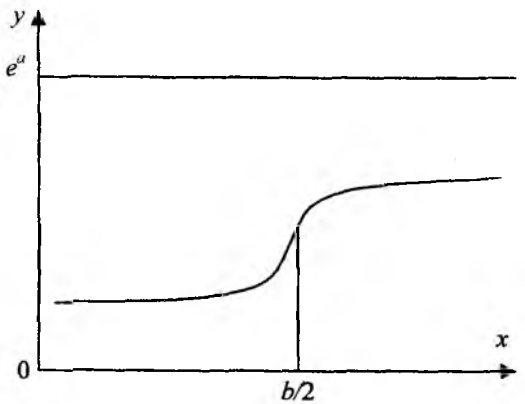


Рис. 8.5. Функция насыщения.

При использовании линеаризуемых функций, затрагивающих преобразования зависимой переменной y, следует особенно проверять наличие предпосылок МНК, чтобы они не нарушались при преобразовании. При нелинейных соотношениях рассматриваемых признаков, приводимых к линейному виду, возможно интервальное оценивание параметров нелинейной функции. Так, для показательной кривой $\hat{y}_x = a \cdot b^x$ сначала строятся доверительные интервалы для параметров нового преобразованного уравнения $\ln y = \ln a + x \cdot \ln b$, т. е. для $\ln a$ и $\ln b$. Далее с помощью обратного преобразования определяются доверительные интервалы для параметров в исходном соотношении. В степенной функции $\hat{y}_x = a \cdot b^x$ доверительный интервал для параметра b строится так же, как в линейной функции, т. е. $b \pm t_a \cdot m_b$. Отличие состоит лишь в том, что при опреде-

лении стандартной ошибки параметра b, m_b используются не исходные данные, а их логарифмы.

$$m_b = \left(\frac{\sum \left(\ln y - \ln \hat{y}_x \right)^2}{(n-2) \cdot \sum (\ln x - \ln \bar{x})^2} \right)^{1/2}.$$

Показательная, логарифмическая и экспоненциальная функции называются кривыми насыщения, потому что дальнейший прирост результативной переменной зависит от уже достигнутого уровня функции. Они используются в основном для описания процессов, которые имеют предел роста в изучаемом периоде, например в демографии.

Кривые Гомперца и Перла-Рида относятся к так называемым *S*-образным кривым, которые являются кривыми насыщения с точкой перегиба. Они описывают два последовательных процесса: один с ускорением развития, другой с замедлением достигнутого развития. Данный тип кривых применяется в демографии, страховании, при решении задач о спросе на новый товар.

Метод наименьших квадратов применим к линейным (относительно коэффициентов) аддитивным регрессионным уравнениям следующего вида:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_k x_k + e,$$

где коэффициенты регрессии являются линейными, переменные могут быть в любой степени и могут иметь любые математические преобразования, кроме одного ограничения - в степени переменной не должно быть определяемых коэффициентов.

Коэффициенты регрессии являются линейными, если выполняются два условия:

а) коэффициенты находятся в первой степени,

б) коэффициенты не являются степенью по отношению к другим коэффициентам или переменной.

Если к регрессионному уравнению не применим метод наименьших квадратов, то есть три пути решения данной проблемы:

1) предложить специально разработанные формулы расчетов коэффициентов уравнения регрессии;

2) использовать приближенные итеративные методы расчетов коэффициентов;

3) преобразовать его к линейному аддитивному виду.

Первый путь требует большого времени и изобретательности. Особенно много хлопот доставляет логистическая функция относительно оценки предела, к которому она стремится.

Второй путь можно реализовать с помощью пакетов прикладных программ. Известны программа "*Eureka*", а также программа "Поиск решения", входящая в состав *Excel*, которые с помощью итеративных методов могут рассчитать коэффициенты любых функций.

Третий путь реализуется с помощью использования несколько способов приведения функции к линейному виду.

8.4.1. Нелинейные зависимости, подчиняющиеся непосредственной линеаризации.

Известно много функций, которые можно привести к линейному аддитивному виду с помощью методов линеаризации.

Линеаризация - процесс преобразования функции к линейному аддитивную виду. Известны два метода линеаризации: логарифмирование функции и замена преобразованной переменной. Оба эти метода представлены в табл. 8.1.

Продемонстрируем технику расчетов коэффициентов степенной функции следующего вида: $y_p = a_0 x^{a_1 x}$ с помощью функции "Линейн".

Таблица 8.1

Список функций и их линеаризация

№ п/п	Вид функции	Название	Преобразование	Вид линейной функции
1	$y_p = a_0 + a_1 x$	Линейная	-	$y_p = a_0 + a_1 x$
2	$y_p = a_0 + a_1 x + a_1 x^2$	Парабола	$z = x^2$	$y_p = a_0 + a_1 x + a_2 z$
3	$y_p = a_0 + a_1 / x$	Гипербола 1	$z = 1/x$	$y_p = a_0 + a_1 z$
4	$y_p = a_0 + a_1 \ln x$	Логарифмическая 1	$z = \ln x$	$y_p = a_0 + a_1 z$
5	$y_p = 1/(a_0 + a_1 \ln x)$	Обратная логарифмическая 2	$z_1 = 1/y$ $z_2 = \ln x$	$z_1 = a_0 + a_1 z_2$
6	$y_p = a_0 a_1^x$	Экспоненциальная 1	$z_1 = \ln y$, $z_2 = \ln a_0$, $z_3 = \ln a_1$	$z_1 = z_2 + z_3 x$
7	$y_p = a_0 e^{a_1 x}$	Экспоненциальная 2	$z_1 = \ln y$, $z_2 = \ln a_0$	$z_1 = z_2 + a_1 x$
8	$y_p = e^{(a_0 + a_2 x)}$	Экспоненциальная 3	$z_1 = \ln y$	$z_1 = a_0 + a_1 x$
9	$y_p = a_0 x^{a_1}$	Экспоненциальная 4 Кривая Энгеля	$z_1 = \ln y$ $z_2 = \ln x$	$z_1 = a_0 + a_1 z_2$
10	$y_p = e^{(a_0 + a_2 / x)}$	Экспоненциальная 5 *S* образная	$z_1 = \ln y$ $z_2 = 1/x$	$z_1 = a_0 + a_1 z_2$
11	$y_p = a_0 + a_1 e^x$	Экспоненциальная 6	$z = e^x$	$y_p = a_0 + a_1 z$
12	$y_p = a_0 e^{a_1 / x}$	Экспоненциальная 7	$z_1 = \ln y$ $z_2 = \ln a_0$ $z_3 = 1/x$	$z_1 = z_2 + a_1 z_3$
13	$y_p = 1/(a_0 + a_1 e^{-x})$	Обратная экспоненциальная 8	$z_1 = 1/y$ $z_2 = e^{-x}$	$z_1 = a_0 + a_1 z_2$
14	$y_p = a_0 x^{a_1 x}$	Степенная 1	$z_1 = \ln y$ $z_2 = \ln a_0$ $z_3 = x \ln x$	$z_1 = z_2 + a_1 z_3$
15	$y_p = a_0 + a_1 x^{1/2}$	Степенная 2	$z = x^{1/2}$	$y_p = a_0 + a_1 z$
16	$y_p = 1/(a_0 + a_1 x)$	Гипербола 2	$z = 1/y$	$z = a_0 + a_1 x$
17	$y_p = x/(a_0 + a_1 x)$	Гипербола 3	$z = x/y$	$z = a_0 + a_1 x$
18	$y_p = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$	Кобба-Дугласа	$z_1 = \ln y$ $z_2 = \ln a_0$ $z_3 = \ln x_1$ $z_4 = \ln x_2$	$z_1 = z_2 + a_1 z_3 + a_2 z_4$

Шаг 1. Логарифмирование степенной функции позволяет получить выражение

$$\ln y = \ln a_0 + a_1 x \ln x .$$

Шаг 2. Произведем замену переменных и получим линейную модель с новыми переменными $z_1 = z_2 + a_1 z_3$,

где $z_1 = \ln y$, $z_2 = \ln a_0$, $z_3 = x \ln x$.

Шаг 3. Создадим базу данных значений x и y, в среде *Excel* введем значения x, y в таблицу, добавим к исходной базе данных две колонки ln$y$ и $x$ln$x$, в которые введем преобразованные значения.

Шаг 4. Выполним функцию "Линейн", в которой зависимой переменной будут значения колонки ln$y$, объясняемой переменной - значения колонки $x$ln$x$. Функция "Линейн" позволяет получить коэффициенты z_2, a_1 модели

$$z_1 = z_2 + a_1 z_3 .$$

Шаг 5. Вычисление коэффициентов a_0 и a_1. Коэффициент a_1 уже посчитан. Определяем коэффициент a_0 из соотношения $z_2 = \ln a_0$ при условии, что коэффициент z_2 известен. Тогда $a_0 = e^{z_2}$.

Шаг 6. Вычисление характеристик модели $y_p = a_0 x^{a_1 x}$ при условии, что коэффициенты a_0 и a_1 известны. Ошибку модели, критерий Фишера точечный и интервальный прогноз, доверительный интервал регрессии можно посчитать по формулам, предназначенным для линейной функции. Определение ошибок коэффициентов a_0 и a_1 требует научных исследований.

Нелинейные по параметрам регрессионные модели в свою очередь делятся на подлежащие и неподлежащие линеаризации модели. Примером моделей, которые можно свести к линейной форме, является показательная функция вида $y_i = a_0 \cdot a_1^{x_i} \cdot \varepsilon_i$, где случайная ошибка ε_i мультипликативно

связана с факторным признаком x_i. Данная модель нелинейна по параметру a_1. Для ее линеаризации вначале осуществим процесс логарифмирования:

$$\log y_i = \log a_0 + x_i \cdot \log a_1 + \log \varepsilon_i.$$

Затем воспользуемся методом замен. Пусть $\log y_i$; $\log a_0 = a$; $\log a_1 = b$; $\log \varepsilon_i = e$.

Тогда преобразованная показательная функция имеет следующий вид:

$$y_i = a + bx_i + e_i.$$

Следовательно, показательная функция $y_i = a_0 \cdot a_1^{x_i} \cdot \varepsilon_i$ является внутренне линейной, и оценки ее параметров могут быть найдены с помощью традиционного метода наименьших квадратов.

Если же взять показательную функцию, включающую случайную ошибку ε_i аддитивно, т.е.

$$y_i = a_0 \cdot a_1^{x_i} + \varepsilon_i,$$

то данную модель уже невозможно привести к линейному виду с помощью логарифмирования. Она является внутренне нелинейной.

Таким же образом можно рассмотреть степенную функцию, которая очень часто применяется при проведении эконометрических исследований. Степенными функциями являются кривые Энгеля, кривые спроса и предложения, производственные функции.

Пусть задана степенная функция вида $y_i = a_0 \cdot x_i^{a_1} \cdot \varepsilon_i$. Прологарифмируем обе части уравнения:

$$\ln y_i = \ln a_0 + a_1 \cdot \ln x_i + \ln \varepsilon_i.$$

Теперь воспользуемся методом замен: $\ln y_i = y_i$; $\ln a_0 = A$; $\ln x_i = x_i$; $\ln \varepsilon_i = e$.

Тогда преобразованная степенная функция имеет следующий вид:

$$y_i = a + a_1 x_i + e_i.$$

Степенная функция также является внутренне линейной, и ее оценки можно найти с помощью традиционного метода наименьших квадратов. Но если взять степенную функцию в виде уравнения $y_i = a_0 \cdot x_i^{a_1} \cdot \varepsilon_i$, где случайная ошибка аддитивно связана с факторной переменной, то модель становится внутренне нелинейной.

К регрессионным моделям, которые являются внутренне нелинейными, относятся модели бинарного выбора (логит- и пробит-регрессии), а также регрессионные модели с точками разрыва. К последним относятся кусочно-линейная регрессия и собственно регрессия с точками разрыва.

Существование кусочно-линейной регрессии вызвано тем, что нередко вид зависимости между зависимой переменной и независимыми факторами не одинаков в разных областях значений последних. Можно рассматривать, например, регрессионную зависимость себестоимости единицы какого-либо продукта от объема произведенной продукции за месяц. Она имеет линейный характер, т.е. с увеличением объема производства себестоимость единицы товара снижается. Однако в некоторых случаях себестоимость может меняться резко, скачкообразно. Так, если в производстве используются устаревшие модели станков, то с увеличением объема производства себестоимость может возрастать. Если старые станки применяются в производстве до того момента, когда его объем достигнет заданного значения (например, 300 ед. продукции), то данную зависимость можно аппроксимировать уравнением регрессии вида

$$y = a_0 + a_1 x \cdot (x \le 300) + a_2 x \cdot (x > 300),$$

где y - себестоимость единицы продукции; x - объем произведенной за месяц продукции; ($x \le 300$) и ($x > 300$) - логические

выражения, принимающие значения, равные единице, если они истинны, или нулю, если они ложны.

Данная регрессионная модель зависит от общего свободного члена a_0 и углового коэффициента, равного a_1 (если выражение ($x \leq 300$) истинно, т.е. равно единице) или a_2 (если выражение ($x>300$) истинно, т.е. равно единице). Если точка разрыва регрессионной кривой (в приведенном примере она равна 300 ед.) точно не определена, то можно оценить значение данной точки. Для этого в уравнение регрессии вместо логических выражений необходимо ввести дополнительный параметр a_3 их выражений:

$$y = a_0 + a_1 x \cdot (x \leq a_3) + a_2 x \cdot (x > a_3).$$

Данное регрессионное уравнение можно легко преобразовать к собственно регрессии с точками разрыва, которая характеризуется скачкообразными изменениями зависимой переменной в некоторых точках кривой. Так, при использовании старых машин в производстве наблюдался резкий скачок себестоимости единицы продукции, а затем она стала медленно снижаться при увеличении объемов производства данной продукции. В этом случае регрессионная зависимость примет вид

$$y = (a_0 + a_1 x) \cdot (x \leq 300) + (a_3 + a_2 x) \cdot (x > 300).$$

Одним из нетрадиционных методов линеаризации нелинейных регрессионных моделей является разбиение всего множества наблюдений на несколько частей, каждую из которых можно аппроксимировать линейной зависимостью. Может оказаться так, что линейные регрессии для подвыборок окажутся более эффективными, чем общая нелинейная модель регрессии. Проверка такого утверждения осуществляется с помощью теста или критерия Чоу.

Будем считать, что общая нелинейная регрессионная модель - это регрессионная модель без ограничений, которую обозначим через *UN* (unrestricted model), а отдельные

подвыборки - это частные (private) случаи регрессионной модели без ограничений, которые можно аппроксимировать линейной зависимостью. Примем, что PR_1 и PR_2 - первая и вторая подвыборки; $ESS(PR_1)$ и $ESS(PR_2)$ - суммы квадратов остатков для первой и второй подвыборок; $ESS(UN)$ - сумма квадратов остатков для общей регрессии; $ESS_{PR_1}^{UN}$ и $ESS_{PR_2}^{UN}$ суммы квадратов остатков для наблюдений первой и второй подвыборок в общей регрессионной модели. Для частных регрессионных моделей должны выполняться следующие условия:

$$ESS(PR_1) < ESS_{PR_1}^{UN};\ ESS(PR_2) < ESS_{PR_2}^{UN}$$

или

$$\left(ESS(PR_1) + ESS(PR_2)\right) < ESS(UN).$$

Для определения значимости частных регрессионных моделей используется критерий Фишера. В этом случае выдвигается основная гипотеза о том, что качество общей регрессионной модели без ограничений лучше качества частных регрессионных моделей, или подвыборок. Альтернативная гипотеза утверждает, что регрессионный анализ отдельных самостоятельных частей выборки дает результат лучше, чем регрессионный анализ выборки в целом. Наблюдаемое значение F-критерия определяется по формуле

$$F_{\text{набл}} = \frac{\left(ESS(UN) - ESS(PR_1) - ESS(PR_2)\right)}{m+1} : \frac{\left(ESS(PR_1) - ESS(PR_2)\right)}{n-2m-2},$$

где $\left(ESS(UN) - ESS(PR_1) - ESS(PR_2)\right)$ - величина, характеризующая улучшение качества модели регрессии после разделения ее на подвыборки; m - количество факторных переменных; n - объем общей выборочной совокупности.

Критическое значение F-критерия определяется по таблице распределения Фишера-Снедекора в зависимости от уровня значимости а и двух степеней свободы: $k_1 = m+1$ и $k_2 = n-2m-2$. Если наблюдаемое значение F-критерия больше критического ($F_{\text{набл}} > F_{\text{крит}}$), то основная гипотеза отклоня-

ется, и качество частных регрессионных моделей превосходит качество общей модели регрессии. Если наблюдаемое значение F-критерия меньше критического ($F_{\text{набл}}<F_{\text{крит}}$), то основная гипотеза принимается, и аппроксимировать отдельные подвыборки общей регрессии линейной зависимостью не имеет смысла.

Условие $(ESS(PR_1)+ESS(PR_2))=ESS(UN)$ возможно только в том случае, если коэффициенты частных регрессионных моделей и общей модели без ограничений будут одинаковы, но на практике такое совпадение встречается очень редко.

К оценке параметров регрессионных моделей, которые нельзя свести к линейным, применяются итеративные процедуры: квази-ньютоновский метод, симплекс-метод, метод Хука-Дживса, метод Розенброка и др.

8.4.2. Метод наименьших квадратов. Методы нелинейного оценивания регрессионных параметров

Метод наименьших квадратов можно применять к нелинейным регрессионным моделям только в том случае, если возможна их линеаризация, т.е. они нелинейными по факторным переменным или нелинейны по параметрам, но внутренне линейны.

Рассмотрим применение МНК для определения неизвестных параметров уравнения параболической зависимости следующего вида:

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \varepsilon_i.$$

Данный полином второго порядка (или второй степени) является нелинейным по факторным переменным x_i. Для нахождения неизвестных параметров уравнения регрессии a_0, a_1 и a_2 необходимо минимизировать с помощью МНК функционал F:

$$F = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 x_i - \tilde{a}_2 x_i^2\right)^2 \to \min.$$

Процесс минимизации функционала сводится к вычислению частных производных этой функции по каждому из оцениваемых параметров. Составим стационарную систему уравнений для данного функционала F, не пользуясь при этом методом замен:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right) \cdot x_i = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_2} = -2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2\right) \cdot x_i^2 = 0. \end{cases}$$

После элементарных преобразований стационарной системы уравнений получим

$$\begin{cases} n \cdot \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + \tilde{a}_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ \tilde{a}_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \tilde{a}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \tilde{a}_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \\ \tilde{a}_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \tilde{a}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \tilde{a}_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot y_i. \end{cases}$$

Данная система является системой нормальных уравнений относительно параметров a_0, a_1 и a_2 для параболической зависимости $y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \varepsilon_i$. Эта система является квадратной, т.е. количество уравнений равняется количеству неизвестных переменных. Коэффициенты a_0, a_1 и a_2 - можно найти с помощью метода Гаусса, если свести систему нормальных уравнений к линейному виду с помощью метода замен.

В общем случае полинома n-й степени

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_n x_i^n + \varepsilon_i$$

для нахождения неизвестных коэффициентов уравнения регрессии с помощью метода МНК необходимо минимизировать функционал следующего вида:

$$F = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \widetilde{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \widetilde{a}_0 - \widetilde{a}_1 x_i - \widetilde{a}_1 x_i^2 - \ldots - \widetilde{a}_n x_i^n\right)^2 \to \min.$$

Тогда систему нормальных уравнений можно записать таким образом:

$$\begin{cases} n \cdot \widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + \widetilde{a}_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \ldots + \widetilde{a}_n \sum_{i=1}^{n} x_i^n = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ \widetilde{a}_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \widetilde{a}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \widetilde{a}_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \ldots + \widetilde{a}_n \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \widetilde{a}_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^n + \widetilde{a}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} + \widetilde{a}_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+2} + \ldots + \widetilde{a}_n \sum_{i=1}^{n} x_i^{2n} = \sum_{i=1}^{n} x_i^n \cdot y_i. \end{cases}$$

Решением данной системы будут являться оценки коэффициентов регрессионной зависимости, выраженной полиномом *n*-го порядка.

Метод Гаусса применяется в большинстве случаев для решения систем линейных уравнений, когда число неизвестных параметров не совпадаете количеством уравнений. Однако его используют и для решения квадратных систем линейных уравнений.

Основная идея решения системы линейных уравнений методом Гаусса заключается в том, что исходную систему из *m* линейных уравнений с *n* неизвестными переменными необходимо преобразовать к треугольному виду. Для этого в одном из уравнений системы оставляют все неизвестные переменные. В другом сокращают одну из неизвестных переменных для того, чтобы их число стало (*n*-1). В следующем уравнении убирают две неизвестных переменных, чтобы их число уже было (*n*-2). В конце данного процесса система примет треугольный вид: первое уравнение содержит все, а

последнее - только (n-m) неизвестных, которые называются базисными. Остальные переменные называются свободными. Дальнейшее решение сводится к выражению свободных неизвестных переменных через базисные и получению общего решения системы линейных уравнений. Для осуществления базисного решения системы линейных уравнений свободные переменные приравнивают к нулю.

Рассмотрим применение метода наименьших квадратов для нахождения оценок коэффициентов нелинейного по параметрам (но внутренне линейного) уравнения регрессии на примере показательной функции

$$y_i = a_0 \cdot a_1^{x_i} \cdot \varepsilon_i,$$

где случайная ошибка регрессии ε_i мультипликативно связана с факторным признаком x_i.

Данная модель является нелинейной по параметру a_1. Для ее линеаризации вначале применим процесс логарифмирования:

$$\log y_i = \log a_0 + x_i \cdot \log a_1 + \log \varepsilon_i.$$

Затем воспользуемся методом замен: $\log y_i = y_i$; $\log a_0 = a$; $\log a_1 = b$; $\log \varepsilon_i = e$.

Тогда преобразованную показательную функцию можно записать в следующем виде:

$$y_i = a + bx_i + e_i.$$

В данном случае МНК применяется не к исходному нелинейному уравнению, а к его линеаризованной форме. Таким образом, в отличие от линейных регрессионных моделей минимизируется сумма квадратов отклонений логарифмов наблюдаемых значений результативного признака y от теоретических значений $\tilde{y}$ (значений, рассчитанных на основании уравнения регрессии), т.е. минимизируется функционал следующего вида:

$$F = \sum (\log y - \log \tilde{y})^2 \to \min.$$

Для нахождения оценок неизвестных параметров линеаризованного уравнения регрессии a и b решается система нормальных уравнений

$$\begin{cases} n \cdot a + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \log y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \log y_i. \end{cases}$$

Данная система является системой нормальных уравнений относительно коэффициентов a и b для линейной зависимости $y_i = a + bx_i + e_i$. МНК-оценки параметров для нелинейных регрессионных моделей, сводимых к линейному виду, не обладают свойством несмещенности.

Функционал вида $F = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2$ называется либо функцией ошибок, либо функционалом ошибок, либо функцией потерь, так как любые отклонения наблюдаемых величин от теоретических (т.е. рассчитанных с помощью уравнения регрессии) являются потерями в точности аппроксимации исходных данных. При применении МНК можно сказать, что целью является минимизация функции потерь, которая определяется как сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений от теоретических. Если эта функция ошибок достигает минимума, то найденные оценки коэффициентов регрессии являются оптимальными.

В качестве функции потерь для нелинейной регрессионной модели может быть также использована сумма модулей отклонений наблюдаемых значений результативного признака y от теоретических значений $\tilde{y}$ (т.е. рассчитанных на основании регрессионной функции $f(x)$): $F = \sum_{i=1}^{n} |y_i - f(x_i, b)|$ или $F = \sum_{i=1}^{n} |y_i - \tilde{y}_i|$.

Для минимизации функционала ошибок применяются различные итерационные методы. Однако для большинства из них существует следующая проблема: при небольшом изменении оцениваемого параметра функция потерь может практически не измениться, однако возможна вероятность того, что ошибочное значение оцениваемого параметра уравнения регрессии даст в результате значительное уменьшение функции ошибок. Подобное явление называется локальным минимумом. Такие минимумы приводят к неправдоподобно завышенным или заниженным оценкам регрессионных коэффициентов. Решить эту проблему можно путем повторения процедуры оценки функционала ошибок при измененных начальных условиях (ином шаге, ограничении исследуемых параметров и т.д.). Оптимальные оценки коэффициентов получаются тогда, когда функция ошибок достигает глобального минимума.

Для дальнейшего объяснения функционирования нелинейных методов оценки необходимо ввести понятие градиента. Пусть дана скалярная функция y от переменных x_i $(i=\overline{1,n})$: $y=f(x)$. Независимые переменные представлены в виде вектора $x=[x_1,x_2,...,x_n]^T$. Тогда по определению производной

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x)}{\partial x_2},...,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right],$$

т.е. первая производная от скалярной функции $y=f(x)$ векторному аргументу $x=[x_1,x_2,...,x_n]^T$. является вектором-строкой частных производных. Вектор-столбец

$$\nabla f(x)=\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right]^T.$$

называется градиентом функции $y=f(x)$ в точке x.

Одним из базисных нелинейных методов минимизации функции ошибок является метод Ньютона, Основной шаг для определения глобального минимума метода Ньютона рассчитывается по формуле

$$a_{k+1} = a_k - H_k^{-1} g_k,$$

где a_k - вектор значений оцениваемых параметров на k-й итерации; H - матрица вторых частных производных функции потерь, или матрица Гессе; g_k - вектор градиента на k-й итерации.

Для того чтобы избежать громоздких вычислений матрицы Гессе, существуют различные способы ее замены приближенными выражениями, что легло в основу так называемых квазиньютоновых методов. Их сущность заключается в том, что вычисляются значения функции ошибок в различных точках для определения первой и второй производной. Первая производная функции в заданной точке равна тангенсу угла наклона графика функции, а вторая - скорости его изменения. Эти данные затем используются для определения направления изменения параметров, а соответственно, и для минимизации функции ошибок.

8.4.3. Корреляция для нелинейной регрессии. Коэффициенты эластичности

Качество нелинейной регрессионной модели можно определить с помощью нелинейного показателя корреляции, который называется индексом корреляции для нелинейных форм связи. Для его определения необходимо воспользоваться теоремой о разложении дисперсии результативной переменной.

Общая дисперсия зависимой переменной может быть разложена на две составляющие - объясненную и не объясненную построенным уравнением регрессии дисперсии:

$$G^2(y) = \sigma^2(y) + \delta^2(y),$$

где $\sigma^2(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{y}_i - y_i)^2}{n}$ - доля объясненной с помощью построенного уравнения регрессии дисперсии переменной y в общей дисперсии $G^2(y)$: $\delta^2(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n}$ - доля необъясненной, или остаточной дисперсии переменной в общей дисперсии $G^2(y)$.

Индекс корреляции для нелинейных форм связи вычисляется на основе теоремы о разложении дисперсий:

$$R = \sqrt{\frac{\sigma^2(y)}{G^2(y)}} = \sqrt{1 - \frac{\delta^2(y)}{G^2(y)}}.$$

Помимо этого, R можно вычислить и на основе теоремы о разложении сумм квадратов. Сумма квадратов разностей между значениями результативной переменной и ее средним значением по выборке может быть представлена следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\tilde{y}_i - \bar{y})^2,$$

где $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ - общая сумма квадратов *TSS* (*Total Sum Square*); $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{y}_i)^2$ - сумма квадратов остатков *ESS* (*Error Sum Square*); $\sum_{i=1}^{n}(\tilde{y}_i - \bar{y})^2$ - сумма квадратов объясненной регрессии (*Regression Sum Square*).

На основании данной теоремы

$$R = \sqrt{\frac{RSS}{TSS}} = \sqrt{1 - \frac{ESS}{TSS}} = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.$$

Индекс корреляции для нелинейных форм связи изменяется в пределах [0;+1]. Чем ближе его значение к единице, тем сильнее взаимосвязь между изучаемыми переменными.

Если возвести индекс корреляции в квадрат, то полученная величина будет называться индексом детерминации для нелинейных форм связи:

$$R^2 = \frac{\sigma^2(y)}{G^2(y)} = \frac{RSS}{TSS}.$$

Индекс детерминации для нелинейных форм связи по характеристикам аналогичен обычному множественному коэффициенту детерминации. Индекс R показывает, насколько процентов построенная модель регрессии объясняет разброс значений зависимой переменной относительно среднего значения, т.е. какая доля общей дисперсии результативного признака объясняется вариацией факторных модельных признаков. Индекс детерминации можно назвать количественной характеристикой объясненной построенным уравнением регрессии дисперсии результативного признака. Чем больше значение данного показателя, тем лучше уравнение регрессии описывает выявленную взаимосвязь.

Кроме рассмотренных показателей, для изучения зависимости между результативной переменной и факторными признаками используются различные коэффициенты эластичности, которые позволяют оценить тесноту связи между переменными x и y.

Общий коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов приблизительно изменится результативный показатель y при изменении величины факторного при-

знака на 1%. Формула расчета общего коэффициента эластичности имеет вид

$$Э = y'_x \cdot \frac{x}{y} = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{\partial y}{\partial x} : \frac{y}{x},$$

где y'_x - первая производная результативной переменной по факторному признаку.

Коэффициент эластичности может быть вычислен для среднего значения факторного признака $\bar{x}$ по приведенной выше формуле:

$$Э(\bar{x}) = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\bar{x}}{y(\bar{x})},$$

где $y(\bar{x})$ - значение функции при среднем значении факторного признака.

Средний коэффициент эластичности характеризует процентное изменение результативного признака y относительно своего среднего значения при изменении факторного признака на 1% относительного $\bar{x}$. Такие коэффициенты рассчитываются по индивидуальным формулам для каждой разновидности функции. Для наиболее простой линейной зависимости вида $y_i = a_0 + a_1 x_i$ средний коэффициент эластичности вычисляется следующим образом:

$$Э(\bar{x}) = \frac{a_1 \bar{x}}{y(\bar{x})}.$$

Для полинома второго порядка (параболической функции) вида $y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \varepsilon_i$ средний коэффициент эластичности рассчитывается по формуле

$$Э(\bar{x}) = \frac{(2a_2 \bar{x} + a_1) \cdot \bar{x}}{y(\bar{x})}.$$

Для показательной функции вида $y_i = a_0 \cdot a_1^{x_i} \cdot \varepsilon_i$ средний коэффициент эластичности определяется как:

$$Э(\bar{x}) = \ln a_1 \cdot \bar{x}.$$

Основное достоинство степенной функции вида $y_i = a_0 \cdot x_i^{a_1} \cdot \varepsilon_i$ заключается в том, что средний коэффициент эластичности равен коэффициенту регрессии:

$$Э(\bar{x}) = a_1.$$

Только одна эта нелинейная функция обладает подобным свойством.

Помимо средних коэффициентов эластичности могут быть также рассчитаны точечные коэффициенты эластичности. Общая формула их расчета

$$Э(x_1) = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{x_1}{y(x_1)},$$

т.е. эластичность зависит от конкретного заданного значения факторного признака x_1.

Точечный коэффициент эластичности характеризует процентное изменение результативной переменной y относительно уровня функции $y(x_1)$ при изменении факторного признака на 1% относительно заданного уровня x_1.

Для линейной зависимости точечный коэффициент эластичности будет рассчитываться по формуле

$$Э(x_1) = \frac{a_1 x_1}{a_0 + a_1 x_1}.$$

Знаменателем данного показателя является значение линейной функции в точке x_1.

Для параболической функции точечный коэффициент эластичности находится следующим образом:

$$Э(x_1) = \frac{(2a_2 x_1 + a_1) \cdot x_1}{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2}.$$

Знаменателем данного показателя является значение параболической функции в точке x_1.

Для показательной функции точечный коэффициент эластичности определяется по формуле:

$$Э(x_1) = \ln a_1 \cdot x_1.$$

В случае степенной функции точечный коэффициент эластичности $Э(x_1)$ будет равен коэффициенту регрессии a_1,. Докажем данное утверждение. Запишем $Э(x_1)$ для степенной функции вида $y_i = a_0 \cdot x_1^{a_1} \cdot \varepsilon_i$ через первую производную результативной переменной по заданной факторной переменной x_1.

$$Э(x_1) = \frac{a_0 a_1 x_1^{a_1 - 1}}{\frac{a_0 x_1^{a_1}}{x_1}} = \frac{a_0 a_1 x_1^{a_1 - 1}}{a_0 x_1^{a_1 - 1}} = a_1,$$

таким образом, $Э(x_1) = a_1$, что и требовалось доказать.

Коэффициенты эластичности имеют очень большое значение при анализе производственных функций. Однако их расчет не всегда имеет смысл, потому что в некоторых случаях интерпретации факторных переменных в процентном отношении невозможна или бессмысленна.

8.4.4. Оценка существенности нелинейной регрессии

Если нелинейное по факторным переменным уравнение регрессии с помощью метода замен можно свести к парному линейному уравнению регрессии, то на это уравнение будут распространяться все методы проверки гипотез для парной линейной зависимости.

Проверка гипотезы о значимости индекса корреляции для нелинейных форм связи аналогична проверке гипотезы о значимости множественного коэффициента корреляции через *F*-критерий.

Проверка гипотезы о значимости нелинейной регрессионной модели в целом также осуществляется через *F*-критерий.

Выдвигается основная гипотеза H_0 о незначимости коэффициента детерминации для нелинейных форм связи, т.е. о незначимости полученного уравнения регрессии;

$$H_0: R^2=0.$$

Альтернативной является обратная гипотеза H_1 о значимости построенного уравнения регрессии:

$$H_1: R^2\neq 0.$$

Наблюдаемое значение F-критерия вычисляется по формуле

$$F_{\text{набл}} = \frac{R^2(n-l)}{(1-R^2)(l-1)},$$

где n - объем выборочной совокупности; l - число оцениваемых параметров по выборочной совокупности.

Критическое значение рассматриваемого критерия - $F_{\text{крит}}$ вычисляется по таблице распределения Фишера-Снедекора в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы $k_1 = l-1$ и $k_2 = n-l$. Если наблюдаемое значение F-критерия меньше критического $F_{\text{набл}}>F_{\text{крит}}$, то основная гипотеза отклоняется, следовательно, уравнение нелинейной регрессии является значимым. Если наблюдаемое значение F-критерия меньше критического ($F_{\text{набл}}<F_{\text{крит}}$), то основная гипотеза принимается и уравнение нелинейной регрессии признается незначимым.

Если существует возможность выбора между линейной и нелинейной регрессионными моделями при изучении конкретной зависимости между переменными, то предпочтение всегда отдается более простой линейной форме связи. Проверить предположение о вероятной линейной зависимости между изучаемыми переменными можно с помощью коэффициента детерминации r^2 и индекса детерминации для нелинейных форм связи R^2.

Выдвигается основная гипотеза H_0 о линейной зависимости между переменными. Альтернативной является гипотеза о их нелинейной связи. Проверка этих гипотез осущест-

вляется с помощью t-критерия Стьюдента. Наблюдаемое значение t-критерия

$$t_{\text{набл}} = \frac{R^2 - r^2}{v_{R-r}},$$

где v_{R-r} - величина ошибки разности $\left(R^2 - r^2\right)$ вычисляемая по формуле

$$v_{R-r} = \sqrt{\frac{\left(R^2 - r^2\right) - \left(R^2 - r^2\right) \cdot \left(2 - \left(R^2 + r^2\right)\right)}{n}}.$$

Критическое значение рассматриваемого критерия $t_{\text{крит}}$ определяется по таблице распределения Стьюдента в зависимости от уровня значимости α и числа степеней свободы $(n-l-1)$, где l - число оцениваемых параметров в регрессионной модели. Если наблюдаемое значение t-критерия больше критического ($t_{\text{набл}} > t_{\text{крит}}$), то основная гипотеза отклоняется и между изучаемыми переменными существует нелинейная взаимосвязь. Если наблюдаемое значение t-критерия меньше критического ($t_{\text{набл}} < t_{\text{крит}}$), то зависимость между переменными может быть аппроксимирована линейным регрессионным уравнением.

Если величина наблюдаемого значения t-критерия меньше двух, то разница между коэффициентом и индексом детерминации для нелинейных форм связи несущественна. В данном случае даже при предположении о некоторой нелинейности изучаемой связи между факторной и независимой переменными можно применять линейную форму регрессионного уравнения. На практике, если величина $\left(R^2 - r^2\right)$ не больше 0,1, предположение о линейной форме зависимости между изучаемыми переменными считается оправданным.

Другим эффективным методом выбора функциональной зависимости между переменными является тест Бокса-Кокса.

Регрессионные модели, имеющие разную функциональную форму, не подлежат сравнению по стандартным критериям (например, сравнение по множественному коэффици-

снту детерминации или суммам квадратов отклонений), которые позволили бы выбрать наиболее подходящее уравнение. При сравнении линейной и логарифмической регрессий оказывается, что общая сумма квадратов отклонений для логарифмической модели намного меньше, чем для линейной. Но значение логарифма результативной переменной $\log y$ намного меньше, чем соответствующее значение y, поэтому сравнение сумм квадратов отклонений моделей дает неадекватные результаты.

Коэффициент множественной детерминации для линейной регрессии характеризует объясненную регрессией долю дисперсии результативной переменной y. Коэффициент множественной детерминации для логарифмической модели характеризует объясненную регрессией долю дисперсии переменной $\log y$. Если значения коэффициентов множественной детерминации примерно равны, то сделать выбор между моделями на основе данного критерия также не представляется возможным.

Рассмотрим процедуру теста Бокса-Кокса на примере выбора между линейной и логарифмической регрессионными моделями. В его основе лежит утверждение о том, что $(y-1)$ и $\log y$ являются частными случаями функции

$$F=\frac{y^{\lambda}-1}{\lambda}.$$

Если параметр λ равен единице, то функция равна $F=y-1$. Если параметр λ стремится к нулю, то функция равна $F=\log y$. Для определения оптимального значения параметра λ проводятся эксперименты с множеством его значений. Эта процедура позволит найти такое значение параметра λ, которое дает минимальную величину суммы квадратов отклонений. Такой метод поиска оптимального значения параметра называется поиском на решетке, или на сетке, значений.

8.5. Корреляция для нелинейной регрессии

Уравнение нелинейной регрессии, так же как и в линейной зависимости, дополняется показателем корреляции, а именно индексом корреляции (R):

$$R = \left(1 - \frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_y}\right)^{1/2}$$

где σ^2_y - общая дисперсия результативного признака y;

$\sigma^2_{ост}$ - остаточная дисперсия, определяемая исходя из уравнения регрессии $\hat{y}_x = f(x)$.

Так как $\sigma^2_y = \frac{1}{n}\sum(y - \bar{y})^2$, а $\sigma^2_{ост} = \frac{1}{n}\sum(y - \hat{y}_x)^2$, то индекс корреляции можно выразить как

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum(y - \hat{y}_x)^2}{\sum(y - \bar{y})^2}}.$$

Величина данного показателя находится в границах: $0 \le R \le 1$, чем ближе к единице, тем теснее связь рассматриваемых признаков, тем более надежно найденное уравнение регрессии.

По данным табл. 3 для уравнения регрессии $\hat{y}_x = 3{,}4 + 2{,}986x - 0{,}214x^2$ индекс корреляции составил: $R = \sqrt{1 - \frac{0{,}46}{530{,}5 - 10^2}} = 0{,}9609$, свидетельствуя о достаточно тесной связи рассматриваемых признаков.

Парабола второй степени, как и полином более высокого порядка, при линеаризации принимает вид уравнения множественной регрессии. Если же нелинейное относительно объясняемой переменной уравнение регрессии при линеаризации принимает форму линейного уравнения парной регрессии, то для оценки тесноты связи может быть использован линейный коэффициент корреляции, величина которого

в этом случае совпадет с индексом корреляции $R_{xy} = r_{yz}$, где z - преобразованная величина признака-фактора, например $z = \frac{1}{x}$ или $z = \ln x$.

Обратимся для примера к равносторонней гиперболе $\hat{y}_x = a + b/x$. Заменив $1/x$ на z, имеем линейное уравнение $\hat{y}_z = a + bz$, для которого может быть определен линейный коэффициент корреляции: $r_{yz} = b \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_y}$ Возводя данное выражение в квадрат, получим:

$$r_{yz}^2 = b^2 \cdot \frac{\sigma_z^2}{\sigma_y^2},$$

где

$$\sigma_z^2 = \frac{\sum (z - \bar{z})^2}{n} \quad \text{и} \quad \sigma_y^2 = \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n}.$$

Преобразовывая далее, придем к следующему выражению для r_{yz}^2:

$$r_{yz}^2 = \frac{b^2 \cdot \sum (z - \bar{z})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}.$$

Как было показано ранее $b^2 \cdot \sum (z - \bar{z})^2 = \sum (\hat{y}_z - \bar{y})^2$ и соответственно

$$r_{yz}^2 = \frac{\sum (\hat{y}_z - \bar{y})^2}{\sum (y - \bar{y})^2}.$$

Но так как $\sum (y - \bar{y})^2 = \sum (\hat{y}_z - \bar{y})^2 + \sum (y - \hat{y}_z)^2$ и $\sum (\hat{y}_z - \bar{y})^2 = \sum (y - \bar{y})^2 - \sum (y - \hat{y}_z)^2$ то

$$r_{yz}^2 = \frac{\sum (y - \bar{y})^2 - \sum (y - \hat{y}_z)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}.$$

т. е. приходим к формуле индекса корреляции:

$$r_{yz}^2 = \left(1 - \frac{\sum (y - \hat{y}_z)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}\right)^{1/2}.$$

Заменив далее z на $1/x$, получим $\hat{y}_z = \hat{y}_x$, соответственно $y_{yz} = R_{yx}$.

Аналогичное положение имеем и для полулогарифмической кривой $\hat{y}_x = a + b \ln x$, ибо в ней, как и в предыдущем случае, преобразования в линейный вид (z=ln$x$) не затрагивают зависимую переменную, и требование МНК $\sum (y - \hat{y}_x)^2 \to \min$ выполнимо.

Убедиться в этом можно, обратившись к данным табл. 4:

$$\sum (y - \bar{y})^2 = 58{,}24; \quad \sum (y - \hat{y}_x)^2 = 0{,}4864.$$

Соответственно индекс корреляции окажется равным:

Найдем линейный коэффициент корреляции между переменными y и ln$x$:

$$r_{y\ln x} = \frac{\overline{y \cdot \ln x} - \bar{y} \cdot \overline{\ln x}}{\sigma_y \cdot \sigma_{\ln x}}.$$

Так как $\sum y \cdot \ln x = 113{,}23881$, $\sum y = 93$, $\sum \ln x = 6.57925$, $\sigma_y = 3{,}11555$, $\sum (\ln x)^2 = 9{,}409906$, $y_{\ln x} = 0{,}604908$, то $r_{y\ln x}$ составит:

$$r_{y\ln x} = \frac{113{,}23881 : 6 - 93 : 6 \cdot 6{,}57925 : 6}{3{,}11555 \cdot 0.604908} = 0{,}99581.$$

Что совпадает с индексом корреляции. Для данной зависимости имеем равенство: $b^2 \cdot \sum (\ln x - \overline{(\ln x)})^2 = \sum (\hat{y}_z - \bar{y})^2$.

По нашим расчетам $b = 5{,}1289$; $\sum (\ln x - \overline{\ln x})^2 = 2{,}19548$. Соответственно $\sum (\hat{y}_z - \bar{y})^2 = 57{,}7536$. Тогда

$$\sum (y - \hat{y}_z)^2 = \sum (y - \bar{y})^2 - \sum (\hat{y}_z - \bar{y})^2 = 58{,}24 - 57{,}7536 = 0{,}4864,$$

что совпадает с остаточной суммой квадратов, используемой в расчете индекса корреляции. Таким образом, несмотря на то, что коэффициент корреляции определялся не для y и x, а для $\ln x$, его величина позволяет определить факторную и остаточную суммы квадратов для признака y:

$$r_{yz}^2 \cdot \sum (y - \bar{y})^2 = b^2 \cdot \sum (\ln x - \overline{\ln x})^2 = 57{,}7536.$$

Соответственно линейный коэффициент корреляции и индекс корреляции совпадают.

Иначе обстоит дело, когда преобразования уравнения в линейную форму связаны с зависимой переменной. В этом случае линейный коэффициент корреляции по преобразованным значениям признаков дает лишь приближенную оценку тесноты связи и численно не совпадает с индексом корреляции. Так, для степенной функции $\hat{y}_x = a \cdot x^b$ после перехода к логарифмически линейному уравнению $\ln y = \ln a + b \ln x$ может быть найден линейный коэффициент корреляции не для фактических значений переменных x и y, а для их логарифмов, т.е. $r_{\ln y \ln x}$. Соответственно квадрат его значения будет характеризовать отношение факторной суммы квадратов отклонений к общей, но не для y, а для его логарифмов:

$$r_{\ln y \ln x}^2 = \frac{\sum \left(\hat{\ln y} - \overline{\ln y} \right)^2}{\sum \left(\ln y - \overline{\ln y} \right)^2} = 1 - \frac{\sum \left(\ln y - \hat{\ln y} \right)^2}{\sum \left(\ln y - \overline{\ln y} \right)^2}. \quad (32)$$

Между тем при расчете индекса корреляции используются суммы квадратов отклонений признака y, а не их логарифмов. С этой целью определяются теоретические значения результативного признака, т.е. $\hat{y}_x$, как антилогарифм рассчитанной по уравнению величины $\hat{\ln y}$ и остаточная сумма квадратов как $\sum (y - anti\log(\hat{\ln y}))^2$. Индекс корреляции определяется по формуле

$$R_{yx} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y - anti\log(\hat{\ln y}))^2}{\sum (y - \bar{y})^2}}. \quad (33)$$

В знаменателе расчета R^2_{yx} участвует общая сумма квадратов отклонений фактических значений y от их средней величины, а в расчете $r^2_{\ln y \ln x}$ участвует $\sum (\ln y - \overline{\ln y})^2$. Соответственно различаются и числители рассматриваемых показателей:

$\sum (y - \hat{y}_x)^2 = \sum (y - anti\log(\hat{\ln y}))^2$ - в индексе корреляции и

$\sum (\ln y - \hat{\ln y})^2$ — в коэффициенте корреляции.

Не совпадают данные показатели и для уравнения регрессии в виде экспоненты, ибо при преобразовании в линейную форму рассчитывается линейный коэффициент корреляции между *x* и логарифмом *y*, т.е. опять $\sum (y - \bar{y})^2$ заменяется на $\sum (\ln y - \overline{\ln y})^2$ и $\sum (y - anti\log(\hat{\ln y}))^2$ заменяется на $\sum (\ln y - \hat{\ln y})^2$. При использовании в преобразовании нелинейных соотношений в линейную форму обратных значений результативного признака, т.е. 1/*y*, индекс корреляции R_{xy} также не будет совпадать с линейным коэффициентом корреляции. В этом случае при определении индекса корреляции практически используется формула

$$R_{yx} = \sqrt{1 - \frac{\sum \left(y - 1/(1/\hat{y})^2 \right)}{\sum (y - \bar{y})^2}}, \quad (34)$$

т. е. теоретические значения $\hat{y}_x$ определяются не непосредственно по данным *y* и *x*, а на основе уравнения

$(1/y) = a + bx$, которое может быть дополнено линейным коэффициентом корреляции между x и $1/y$.

При определении $r_{x(1/y)}$ используется сумма квадратов отклонений $\sum(1/y - \overline{1/y})^2$, которая раскладывается на факторную и остаточную. Так, по данным табл. 6 $\sum(y-\bar{y})^2 = 351{,}714$, $\sum(y-\hat{y}_x)^2 = 29{,}24$ Соответственно $R_{yx} = 0{,}9575$, а $r_{x(1/y)} = 0{,}9278$.

Вследствие близости результатов и простоты расчета с использованием компьютерных программ для характеристики тесноты связи по нелинейным функциям широко используется линейный коэффициент корреляции. Несмотря на близость значений R_{yx} и $r_{\ln y \ln x}$ или R_{yx} и $r_{\ln y, x}$ в нелинейных функциях с преобразованием значений признака y, следует помнить, что если при линейной зависимости признаков один и тот же коэффициент корреляции характеризует регрессию как $\hat{y}_x = a + b \cdot x$, так и $\hat{x}_y = A + B \cdot y$, так как $r_{yx} = r_{xy}$, то при криволинейной зависимости R_{yx} для функции $y=j(x)$ не равен R_{xy} для регрессии $x=f(y)$.

Поскольку в расчете индекса корреляции используется соотношение факторной и общей суммы квадратов отклонений, то R^2 имеет тот же смысл, что и коэффициент детерминации. В специальных исследованиях величину R^2 для нелинейных связей называют индексом детерминации.

Оценка существенности индекса корреляции проводится, так же как и оценка надежности коэффициента корреляции.

Индекс детерминации используется для проверки существенности в целом уравнения нелинейной регрессии по F-критерию Фишера:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m}, \qquad (35)$$

где R^2 - индекс детерминации;

n - число наблюдений;

m - число параметров при переменных x.

Величина m характеризует число степеней свободы для факторной суммы квадратов, а $(n\text{-}m\text{-}1)$ - число степеней свободы для остаточной суммы квадратов.

Для степенной функции $\hat{y}_x = a \cdot x^b$ m=1 и формула F-критерия примет тот же вид, что и при линейной зависимости:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot (n-2).$$

Для параболы второй степени $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + \varepsilon$, m=2 и

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-3}{2},$$

Расчет F-критерия можно вести и в таблице дисперсионного анализа результатов регрессии, как это было показано для линейной функции.

Индекс детерминации R^2_{yx} можно сравнивать с коэффициентом детерминации r^2_{yx} для обоснования возможности применения линейной функции. Чем больше кривизна линии регрессии, тем величина коэффициента детерминации r^2_{yx} меньше индекса детерминации R^2_{yx}. Близость этих показателей означает, что нет необходимости усложнять форму уравнения регрессии и можно использовать линейную функцию. Практически если величина $(R^2_{yx} - r^2_{yx})$ не превышает 0,1, то предположение о линейной форме связи считается оправданным. В противном случае проводится оценка существенности различия R^2_{yx}, вычисленных по одним и тем же исходным данным, через t-критерий Стьюдента:

$$t = \frac{R_{yx}^2 - r_{yx}^2}{m_{|R-r|}}, \qquad (36)$$

где $m_{|R-r|}$ - ошибка разности между R_{yx}^2 и r_{yx}^2, определяемая по формуле

$$m_{|R-r|} = 2 \cdot \sqrt{\frac{(R^2 - r^2) - (R^2 - r^2)^2 \cdot (2 - (R^2 + r^2))}{n}}. \qquad (37)$$

Если $t_{факт} > t_{табл.}$, то различия между рассматриваемыми показателями корреляции существенны и замена нелинейной регрессии уравнением линейной функции невозможна. Практически если величина $t<2$, то различия между R_{yx}^2 и r_{yx}^2 несущественны, и, следовательно, возможно применение линейной регрессии, даже если есть предположения о некоторой нелинейности рассматриваемых соотношений признаков фактора и результата.

Предположим, что по данным табл. 4, где было найдено уравнение регрессии $\hat{y}_x = 9{,}876 + 5{,}1291 \ln x$, была использована линейная функция $\hat{y}_x = 9{,}28 + 1{,}777x$, коэффициент корреляции для которой составил 0,97416. Величина коэффициента корреляции оказалась меньше, чем величина индекса корреляции 0,99581. Оценим существенность различия данных показателей корреляции, используя приведенную формулу: $R^2 - r^2 = (0{,}99581)^2 - (0{,}97416)^2 = 0{,}04265$, т.е. применение нелинейной функции увеличивает долю объясненной вариации на 4,3 проц. пункта. Следовательно, если нет уверенности в правильности выбора полулогарифмической функции, то она может быть заменена линейной функцией.

Показательная, логарифмическая и экспоненциальная функции называются кривыми насыщения, потому что дальнейший прирост результативной переменной зависит от уже достигнутого уровня функции. Они используются в основном для описания процессов, которые имеют предел роста в изучаемом периоде, например в демографии.

Кривые Гомперца и Перла-Рида относятся к так называемым *S*-образным кривым, которые являются кривыми насыщения с точкой перегиба. Они описывают два последовательных процесса: один с ускорением развития, другой с замедлением достигнутого развития. Данный тип кривых применяется в демографии, страховании, при решении задач о спросе на новый товар.

Метод наименьших квадратов применим к линейным (относительно коэффициентов) аддитивным регрессионным уравнениям следующего вида:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_k x_k + e,$$

где коэффициенты регрессии являются линейными, переменные могут быть в любой степени и могут иметь любые математические преобразования, кроме одного ограничения - в степени переменной не должно быть определяемых коэффициентов.

Коэффициенты регрессии являются линейными, если выполняются два условия:

а) коэффициенты находятся в первой степени,

б) коэффициенты не являются степенью по отношению к другим коэффициентам или переменной.

Если к регрессионному уравнению не применим метод наименьших квадратов, то есть три пути решения данной проблемы:

4) предложить специально разработанные формулы расчетов коэффициентов уравнения регрессии;

5) использовать приближенные итеративные методы расчетов коэффициентов;

6) преобразовать его к линейному аддитивному виду.

Первый путь требует большого времени и изобретательности. Особенно много хлопот доставляет логистическая функция относительно оценки предела, к которому она стремится.

Второй путь можно реализовать с помощью пакетов прикладных программ. Известны программа "*Eureka*", а также программа "Поиск решения", входящая в состав *Excel*,

которые с помощью итеративных методов могут рассчитать коэффициенты любых функций.

Третий путь реализуется с помощью использования несколько способов приведения функции к линейному виду.

8.6. Средняя ошибка аппроксимации

Фактические значения результативного признака отличаются от теоретических, рассчитанных по уравнению регрессии, т.е. y и $\hat{y}_x$. Чем меньше это отличие, тем ближе теоретические значения подходят к эмпирическим данным, лучше качество модели. Величина отклонений фактических и расчетных значений результативного признака $(y-\hat{y}_x)$ по каждому наблюдению представляет собой ошибку аппроксимации. Их число соответствует объему совокупности. В отдельных случаях ошибка аппроксимации может оказаться равной нулю. Отклонения $(y-\hat{y}_x)$ несравнимы между собой, исключая величину, равную нулю. Так, если для одного наблюдения $y-\hat{y}_x=5$, а для другого она равна 10, то это не означает, что во втором случае модель дает вдвое худший результат. Для сравнения используются величины отклонений, выраженные в процентах к фактическим значениям. Так, если для первого наблюдения $y=20$, а для второго $y=50$, ошибка аппроксимации составит 25% для первого наблюдения и 20% - для второго.

Поскольку $(y-\hat{y}_x)$ может быть как величиной положительной, так и отрицательной, то ошибки аппроксимации для каждого наблюдения принято определять в процентах по модулю.

Отклонения $(y-\hat{y}_x)$ можно рассматривать как абсолютную ошибку аппроксимации, а

$$\left|\frac{(y-\hat{y}_x)}{y}\right|\times 100$$

- как относительную ошибку аппроксимации. Чтобы иметь общее суждение о качестве модели из относительных отклонений по каждому наблюдению, определяют среднюю ошибку аппроксимации как среднюю арифметическую простую:

$$A = \frac{1}{n} \cdot \sum \left| \frac{(y - \hat{y}_x)}{y} \right| \times 100. \qquad (38)$$

Представим расчет средней ошибки аппроксимации для уравнения $\hat{y}_x = 9{,}876 + 5{,}129 \ln x$ в табл. 8.2. $A = \frac{1}{6} \cdot 7{,}3 = 1{,}2\%$, что говорит о хорошем качестве уравнения регрессии, ибо ошибка аппроксимации в пределах 5-7% свидетельствует о хорошем подборе модели к исходным данным.

Таблица 8.2.

y	$\hat{y}_x$	$y - \hat{y}_x$	$\frac{\lvert y - \hat{y}_x \rvert}{y} \times 100$
10,0	9,9	0,1	1,0
13,4	13,4	0,0	0,0
15,4	15,5	-0,1	0,6
16,5	17,0	-0,5	3,0
18,6	18,1	0,5	2,7
19,1	19,1	0,0	0,0
Итого 93,0	93,0	0,0	7,3

Возможно и иное определение средней ошибки аппроксимации:

$$A = \frac{100}{y} \cdot \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2}{n}}. \qquad (39)$$

Для нашего примера эта величина составит:

$$A = \frac{100}{15{,}5} \cdot \sqrt{\frac{0{,}52}{6}} = 1{,}9\%.$$

В стандартных программах чаще используется первая формула для расчета средней ошибки аппроксимации.

Контрольные вопросы

1. В чем состоят ошибки спецификации модели?
2. Поясните смысл коэффициента регрессии, назовите способы его оценивания, покажите, как он используется для расчета мультипликатора в функции потребления.
3. Что такое число степеней свободы и как оно определяется для факторной и остаточной сумм квадратов?
4. Какова концепция *F*-критерия Фишера?
5. Как оценивается значимость параметров уравнения регрессии?
6. В чем отличие стандартной ошибки положения линии регрессии от средней ошибки прогнозируемого индивидуального значения результативного признака при заданном значении фактора?
7. Какой нелинейной функцией может быть заменена парабола второй степени, если не наблюдается смена направленности связи признаков?
8. Запишете все виды моделей, нелинейных относительно: включаемых переменных; оцениваемых параметров.
9. В чем отличие применения МНК к моделям нелинейным относительно включаемых переменных и оцениваемых параметров?
10. Как определяются коэффициенты эластичности по разным видам регрессионных моделей?
11. Назовите показатели корреляции, используемые при нелинейных соотношениях рассматриваемых признаков.
12. В чем смысл средней ошибки аппроксимации и как она определяется?

ГЛАВА 9. МНОЖЕСТВЕННАЯ РЕГРЕССИЯ И КОРРЕЛЯЦИЯ

9.1. Общие замечание

Парная регрессия может дать хороший результат при моделировании, если влиянием других факторов, воздействующих на объект исследования, можно пренебречь. Например, при построении модели потребления того или иного товара от дохода исследователь предполагает, что в каждой группе дохода одинаково влияние на потребление таких факторов, как цена товара, размер семьи, ее состав. Вместе с тем исследователь никогда не может быть уверен в справедливости данного предположения. Для того чтобы иметь правильное представление о влиянии дохода на потребление, необходимо изучить их корреляцию при неизменном уровне других факторов. Прямой путь решения такой задачи состоит в отборе единиц совокупности с одинаковыми значениями. всех других факторов, кроме дохода. Он приводит к планированию эксперимента - методу, который используется в химических, физических, биологических исследованиях. Экономист в отличие от экспериментатора-естественника лишен возможности регулировать другие факторы. Поведение отдельных экономических переменных контролировать нельзя, т.е. не удается обеспечить равенство всех прочих условий для оценки влияния одного исследуемого фактора. В этом случае следует попытаться выявить влияние других факторов, введя их в модель, т. е. построить уравнение множественной регрессии

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + + b_p x_p + \varepsilon \qquad (1)$$

Такого рода уравнение может использоваться при изучении потребления. Тогда коэффициенты b_j - частные производные потребления у по соответствующим факторам x_i:

$$b_1 = \frac{dy}{dx_1},\ b_2 = \frac{dy}{dx_2},\ldots,\ b_p = \frac{dy}{dx_p} \qquad (2)$$

в предположении, что все остальные x, постоянны.

В 30-е гг. XX в. Дж.М. Кейнс сформулировал свою гипотезу потребительской функции. С того времени исследователи неоднократно обращались к проблеме ее совершенствования. Современная потребительская функция чаще всего рассматривается как модель вида:

$$C = J(y, P, M, Z), \qquad (3)$$

где C - потребление; y - доход; P - цена, индекс стоимости жизни; M - наличные деньги; Z - ликвидные активы.

При этом $0 < \frac{dC}{dy} < 1$.

Множественная регрессия широко используется в решении проблем спроса, доходности акций, при изучении функции издержек производства, в макроэкономических расчетах и целого ряда других вопросов эконометрики. В настоящее время множественная регрессия - один из наиболее распространенных методов в эконометрике. Основная цель множественной регрессии - построить модель с большим числом факторов, определив при этом влияние каждого из них в отдельности, а также совокупное их воздействие на моделируемый показатель. [4, 17, 18, 24, 31, 40].

Построение уравнения множественной регрессии начинается с решения вопроса о спецификации модели. Суть *проблемы спецификации* рассматривалась применительно к парной зависимости. Она включает в себя два круга вопросов: отбор факторов и выбор вида уравнения регрессии. Их решение при построении модели множественной регрессии имеет некоторую специфику.

9.2. Отбор факторов при построении множественной регрессии

Включение в уравнение множественной регрессии того или иного набора факторов связано прежде всего с представлением исследователя о природе взаимосвязи моделируемого показателя с другими экономическими явлениями. Факторы, включаемые во множественную регрессию, должны отвечать следующим требованиям.

1. Они должны быть количественно измеримы. Если необходимо включить в модель качественный фактор, не имеющий количественного измерения, то ему нужно придать количественную определенность (например, в модели урожайности качество почвы задается в виде баллов; в модели стоимости объектов недвижимости учитывается место нахождения недвижимости: районы могут быть проранжированы).

2. Факторы не должны быть интеркоррелированы и тем более находиться в точной функциональной связи.

Включение в модель факторов с высокой интеркорреляцией, когда $R_{yx_1} < R_{x_1x_2}$ для зависимости $y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \varepsilon$ может привести к нежелательным последствиям - система нормальных уравнений может оказаться плохо обусловленной и повлечь за собой неустойчивость и ненадежность оценок коэффициентов регрессии.

Если между факторами существует высокая корреляция, то нельзя определить их изолированное влияние на результативный показатель и параметры уравнения регрессии оказываются не-интерпретируемыми. Так, в уравнении $y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \varepsilon$ предполагается, что факторы x_1 и x_2 независимы друг от друга, т.е. $r_{x_1x_2} = 0$. Тогда можно говорить, что параметр b_1 измеряет силу влияния фактора x_1 на результат y при неизменном значении фактора x_2. Если же $r_{x_1x_2} = 1$, то с изменением фактора x_1 фактор x_2 не может оставаться

неизменным. Отсюда b_1 и b_2 нельзя интерпретировать как показатели раздельного влияния x_1 и x_2 и на y.

Пример. Рассмотрим регрессию себестоимости единицы продукции (сум, y) от заработной платы работника (сум, x) и производительности его труда (единиц в час, z):

$$y = 20600 - 5x - 10z + \varepsilon. \qquad (4)$$

Коэффициент регрессии при переменной z показывает, что с ростом производительности труда на 1 ед. себестоимость единицы продукции снижается в среднем на 10 сум при постоянном уровне оплаты труда. Вместе с тем параметр при x нельзя интерпретировать как снижение себестоимости единицы продукции за счет роста заработной платы. Отрицательное значение коэффициента регрессии при переменной x в данном случае обусловлено высокой корреляцией между x и z:($r_{xz} = 0{,}95$). Поэтому роста заработной платы при неизменности производительности труда (если не брать во внимание проблемы инфляции) быть не может.

Включаемые во множественную регрессию факторы должны объяснить вариацию независимой переменной. Если строится модель с набором p факторов, то для нее рассчитывается показатель детерминации R^2, который фиксирует долю объясненной вариации результативного признака за счет рассматриваемых в регрессии p факторов. Влияние других не учтенных в модели факторов оценивается как $1\text{-}R^2$ с соответствующей остаточной дисперсией S^2.

При дополнительном включении в регрессию p+1 фактора коэффициент детерминации должен возрастать, а остаточная дисперсия уменьшаться:

$$R^2_{p+1} \geq R^2_p \text{ и } R^2_{p+1} \leq R^2_p. \qquad (5)$$

Если же этого не происходит и данные показатели практически мало отличаются друг от друга, то включаемый в анализ фактор x_{p+1} не улучшает модель и практически является лишним фактором. Так, если для регрессии, включаю-

щей пять факторов, коэффициент детерминации составил 0,857 и включение шестого фактора дало коэффициент детерминации 0,858, то вряд ли целесообразно дополнительно включать в модель этот фактор.

Насыщение модели лишними факторами не только не снижает величину остаточной дисперсии и не увеличивает показатель детерминации, но и приводит к статистической незначимости параметров регрессии по *t*-критерию Стьюдента.

Таким образом, хотя теоретически регрессионная модель позволяет учесть любое число факторов, практически в этом нет необходимости. Отбор факторов производится на основе качественного теоретико-экономического анализа. Однако теоретический анализ часто не позволяет однозначно ответить на вопрос о количественной взаимосвязи рассматриваемых признаков и целесообразности включения фактора в модель. Поэтому отбор факторов обычно осуществляется в две стадии: на первой подбираются факторы исходя из сущности проблемы; на второй - на основе матрицы показателей корреляции определяют *t*-статистики для параметров регрессии.

Коэффициенты интеркорреляции (т.е. корреляции между объясняющими переменными) позволяют исключать из модели дублирующие факторы. Считается, что две переменных явно коллинеарны, т.е. находятся между собой в линейной зависимости, если $r_{x_i x_j} \geq 0{,}7$.

Поскольку одним из условий построения уравнения множественной регрессии является независимость действия факторов, т.е. $R_{x_i x_j} = 0$. коллинеарность факторов нарушает это условие. Если факторы явно коллинеарны, то они дублируют друг друга и один из них рекомендуется исключить из регрессии. Предпочтение при этом отдается не фактору, более тесно связанному с результатом, а тому фактору, который при достаточно тесной связи с результатом имеет наименьшую тесноту связи с другими факторами. В этом требо-

нии проявляется специфика множественной регрессии как метода исследования комплексного воздействия факторов в условиях их независимости друг от друга.

Пусть, например, при изучении зависимости $y = f(x, z, v)$ матрица парных коэффициентов корреляции оказалась следующей:

	y	x	z	v
Y	1			
X	0,8	1		
Z	0,7	0,8	1	
V	0,6	0,5	0,2	1

Очевидно, что факторы x и z дублируют друг друга. В анализ целесообразно включить фактор z, а не x, так как корреляция z с результатом y слабее, чем корреляция фактора x с y ($r_{yz} < r_{yx}$), но зато слабее межфакторная корреляция $r_{yz} < r_{yx}$. Поэтому в данном случае в уравнение множественной регрессии включаются факторы z, v.

По величине парных коэффициентов корреляции обнаруживается лишь явная коллинеарность факторов. Наибольшие трудности в использовании аппарата множественной регрессии возникают при наличии мультиколлинеарности факторов, когда более чем два фактора связаны между собой линейной, зависимостью, т.е. имеет место совокупное воздействие факторов друг; на друга. Наличие мультиколлинеарности факторов может означать, что некоторые факторы будут всегда действовать в унисон. В результате вариация в исходных данных перестает быть полностью независимой, и нельзя оценить воздействие каждого фактора в отдельности. Чем сильнее мультиколлинеарность факторов, тем менее надежна оценка распределения суммы объясненной вариации по отдельным факторам с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

Если рассматривается регрессия $y = a + bx + yz + dv + \varepsilon$, то для расчета параметров, применяя МНК, предполагается равенство

$$S_y = S_{\text{факт}} + S_\varepsilon, \qquad (6)$$

где S_y - общая сумма квадратов отклонений $\sum(y_i - \bar{y})^2$;

$S_{\text{факт}}$ - факторная. (объясненная) сумма квадратов отклонений $\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$;

S_ε - остаточная сумма квадратов отклонений $\sum(y_i - \hat{y}_i)^2$.

В свою очередь, при независимости факторов друг от друга выполнимо равенство

$$S_{\text{факт}} = S_x + S_z + S_v,$$

где S_x, S_z, S_v - суммы квадратов отклонений, обусловленные влиянием соответствующих факторов.

Если же факторы интеркоррелированы, то данное равенство нарушается.

Включение в модель мультиколлинеарных факторов нежелательно в силу следующих последствий:

- затрудняется интерпретация параметров множественной регрессии как характеристик действия факторов в «чистом» виде, ибо факторы коррелированы; параметры линейной регрессии теряют экономический смысл;
- оценки параметров ненадежны, обнаруживают большие стандартные ошибки и меняются с изменением объема наблюдений (не только по величине, но и по знаку), что делает модель непригодной для анализа и прогнозирования.

Для оценки мультиколлинеарности факторов может использоваться определитель матрицы парных коэффициентов корреляции между факторами.

Если бы факторы не коррелировали между собой, то матрица парных коэффициентов корреляции между факторами была бы единичной матрицей, поскольку все недиаго-

нальные элементы $r_{x_i x_j}$ $(x_i \neq x_j)$ были бы равны нулю. Так, для включающего три объясняющих переменных уравнения

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \varepsilon, \qquad (7)$$

матрица коэффициентов корреляции между факторами имела бы определитель, равный единице.

$$Det|R| = \begin{vmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_2x_1} & r_{x_3x_1} \\ r_{x_1x_2} & r_{x_2x_2} & r_{x_3x_2} \\ r_{x_1x_3} & r_{x_2x_3} & r_{x_3x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

так как $r_{x_1x_1} = r_{x_2x_2} = r_{x_3x_3} = 1$, и $r_{x_1x_2} = r_{x_1x_3} = r_{x_2x_3} = 0$

Если же, наоборот, между факторами существует полная линейная зависимость и все коэффициенты корреляции равны единице, то определитель такой матрицы равен нулю:

$$Det|R| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Чем ближе к нулю определитель матрицы межфакторной корреляции, тем сильнее мультиколлинеарность факторов и ненадежнее результаты множественной регрессии. И, наоборот, чем ближе к единице определитель матрицы межфакторной корреляции, тем меньше мультиколлинеарность факторов.

Оценка значимости мультиколлинеарности факторов может быть проведена методом испытания гипотезы о независимости переменных $H_0 : Det|R| = 1$. Доказано, что величина $\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m+5) \lg DetR \right]$ имеет приближенное распределение $\chi^2 = c\frac{1}{2}n(n-1)$ степенями свободы. Если фактическое значение χ^2 превосходит табличное (критическое)

$\chi^2_{\text{факт}} > \chi^2_{\text{табл}(df,a)}$, то гипотеза H_0 отклоняется. Это означает, что $Det|R| \neq 1$, недиагональные ненулевые коэффициенты корреляции указывают на коллинеарность факторов. Мультиколлинеарность считается доказанной.

Через коэффициенты множественной детерминации можно найти переменные, ответственные за мультиколлинеарность факторов. Для этого в качестве зависимой переменной рассматривается каждый из факторов. Чем ближе значение коэффициента множественной детерминации к единице, тем сильнее проявляется мультиколлинеарность факторов. Сравнивая между собой коэффициенты множественной детерминации факторов

$$\left(R^2_{x_1|x_2x_3\ldots x_p}; R^2_{x_2|x_1x_3\ldots x_p} \text{ и тт.п}\right)$$

можно выделить переменные, ответственные за мультиколлинеарность, следовательно, можно решать проблему отбора факторов, оставляя в уравнении факторы с минимальной величиной коэффициента множественной детерминации.

Существует ряд подходов преодоления сильной межфакторной корреляции. Самый простой путь устранения мультиколлинеарности состоит в исключении из модели одного или нескольких факторов. Другой подход связан с преобразованием факторов, при котором уменьшается корреляция между ними. Например, при построении модели на основе рядов динамики переходят от первоначальных данных к первым разностям уровней $\Delta_t = y_t - y_{t-1}$, чтобы исключить влияние тенденции, или используются такие методы, которые сводят к нулю межфакторную корреляцию, т.е. переходят от исходных переменных к их линейным комбинациям, не коррелированных друг с другом (метод главных компонент).

Одним из путей учета внутренней корреляции факторов является переход к совмещенным уравнениям регрессии, т.е. к уравнениям, которые отражают не только влияние факто-

ров, но и их взаимодействие. Так, если $y = f(x_1, x_2, x_3)$, то возможно построение следующего совмещенного уравнения:

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + +b_{12}x_1x_2 + \\ + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + \varepsilon \qquad (8)$$

Рассматриваемое уравнение включает взаимодействие первого порядка (взаимодействие двух факторов). Возможно включение в модель и взаимодействий более высокого порядка, если будет доказана их статистическая значимость по F-критерию Фишера, например, $b_{123}x_1x_2x_3$ - взаимодействие второго порядка и т. д. Как правило, взаимодействия третьего и более высоких порядков оказываются статистически незначимыми, совмещенные уравнения регрессии ограничиваются взаимодействиями первого и второго порядков. Но и эти взаимодействия могут оказаться несущественными, поэтому нецелесообразно полное включение в модель взаимодействий всех факторов и всех порядков. Так, если анализ совмещенного уравнения показал значимость только взаимодействия факторов x_1 и x_3, то уравнение будет иметь вид:

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + +b_{13}x_1x_3 + \varepsilon.$$

Взаимодействие факторов x_1 и x_3 означает, что на разных уровнях фактора x_3 влияние фактора x_1 на у будет неодинаково, т.е. оно зависит от значений фактора x_3. На рис. 1 взаимодействие факторов представляется непараллельными линиями связи с результатом y. И, наоборот, параллельные линии влияния фактора x_1 на y при разных уровнях фактора x_3 означают отсутствие взаимодействия факторов x_1 и x_3.

Совмещенные уравнения регрессии строятся, например, при исследовании эффекта влияния на урожайность разных видов удобрений (комбинаций азота и фосфора).

Решению проблемы устранения мультиколлинеарности факторов может помочь и переход к уравнениям приведенной формы. С этой целью в уравнение регрессии произво-

дится подстановка рассматриваемого фактора через выражение его из другого уравнения.

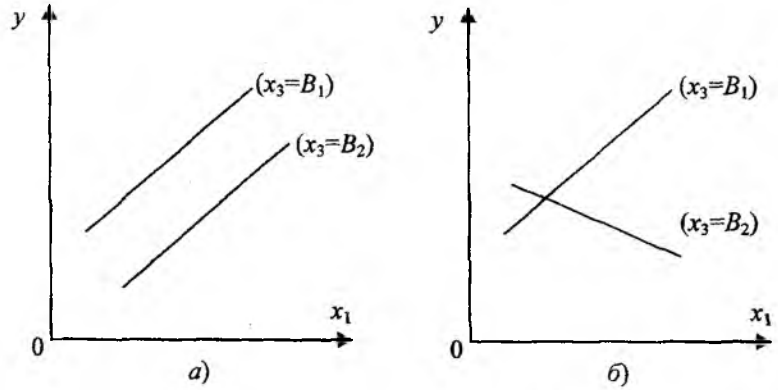


Рис. 1. Графическая иллюстрация взаимодействия факторов:

а) x_1 влияет на y, причем это влияние одинаково как при $x_3=B_1$ так и при $x_3=B_2$ (одинаковый наклон линий регрессии), что означает отсутствие взаимодействия факторов x_1 и x_3;

б) с ростом x_1 результативный признак y возрастает при $x_3=B_1$; с ростом x_1 результативный признак y снижается при $x_3=B_2$. Между x_1 и x_3 существует взаимодействие.

Пусть, например, рассматривается двухфакторная регрессия вида $\hat{y}_x = a + b_1x_1 + b_2x_2$, для которой факторы x_1 и x_2 обнаруживают высокую корреляцию. Если исключить один из факторов, то мы придем к уравнению парной регрессии. Вместе с тем можно оставить факторы в модели, но исследовать данное двухфакторное уравнение регрессии совместно с другим уравнением, в котором фактор (например, x_2) рассматривается как зависимая переменная. Предположим, известно, что $\hat{x}_2 = A + By + Cx_3$. Подставляя это уравнение в искомое вместо x_2, получим:

$$\hat{y}_x = a + b_1x_1 + b_2(A + By + Cx_3)$$

или

$$\hat{y}_x \cdot (1 - b_2B) = (a + b_2A) + b_1x_1 + Cb_2x_3. \qquad (10)$$

Если $(1-b_2B)\neq 0$(, то, разделив обе части равенства на $(1-b_2B)$, получаем уравнение вида

$$\hat{y}_x=\frac{(a+b_2A)}{(1-b_2B)}+\frac{b_1}{(1-b_2B)}\cdot x_1+\frac{Cb_2}{(1-b_2B)}\cdot x_3, \qquad (11)$$

которое представляет собой приведенную форму уравнения для определения результативного признака *y*. Это уравнение может быть представлено в виде

$$\hat{y}_x=a'+b_1'x_1+b_3'x_3.$$

К нему для оценки параметров может быть применен метод наименьших квадратов.

Отбор факторов, включаемых в регрессию, является одним из важнейших этапов практического использования методов регрессии. Подходы к отбору факторов на основе показателей корреляции могут быть разные. Они приводят построение уравнения множественной регрессии соответственно к разным методикам. В зависимости от того, какая методика построения уравнения регрессии принята, меняется алгоритм ее решения на ЭВМ.

Наиболее широкое применение получили следующие методы построения уравнения множественной регрессии:

- метод исключения;
- метод включения;
- шаговый регрессионный анализ.

Каждый из этих методов по-своему решает проблему отбора факторов, давая в целом близкие результаты - отсев факторов из полного его набора (метод исключения), дополнительное введение фактора (метод включения), исключение ранее введенного фактора (шаговый регрессионный анализ).

На первый взгляд может показаться, что матрица парных коэффициентов корреляции играет главную роль в отборе факторов. Вместе с тем вследствие взаимодействия факторов парные коэффициенты корреляции не могут в полной мере решать вопрос о целесообразности включения в модель того

или иного фактора. Эту роль выполняют показатели частной корреляции, оценивающие в чистом виде тесноту связи фактора с результатом. Матрица частных коэффициентов корреляции наиболее широко используется в процедуре отсева факторов. При отборе факторов рекомендуется пользоваться следующим правилом: число включаемых факторов обычно в 6-7 раз меньше объема совокупности, по которой строится регрессия. Если это соотношение нарушено, то число степеней свободы остаточной вариации очень мало. Это приводит к тому, что параметры уравнения регрессии оказываются статистически незначимыми, а F-критерий меньше табличного значения.

9.3. Выбор формы уравнения регрессии

Как и в парной зависимости, возможны разные виды уравнений множественной регрессии: линейные и нелинейные.

Ввиду четкой интерпретации параметров наиболее широко используются линейная и степенная функции. В линейной множественной регрессии $\hat{y}_x = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_p x_p$ упараметры при x называются коэффициентами «чистой» регрессии. Они характеризуют среднее изменение результата с изменением соответствующего фактора на единицу при неизмененном значении других факторов, закрепленных на среднем уровне.

Пример. Предположим, что зависимость расходов на продукты питания по совокупности семей характеризуется следующим уравнением:

$$\hat{y}_x = 0{,}5 + 0{,}45x_1 + 0{,}63x_2,$$

где y - расходы семьи за месяц на продукты питания, тыс. сум; x_1- месячный доход на одного члена семьи, тыс. сум; x_2- размер семьи, человек.

Анализ данного уравнения позволяет сделать выводы - с ростом дохода на одного члена семьи на 1 тыс. сум расходы на питание возрастут в среднем на 450. сум при том же среднем размере семьи. Иными словами, 45 % дополнительных семейных расходов тратится на питание. Увеличение размера семьи при тех же ее доходах предполагает дополнительный рост расходов на питание на 630 сум. параметр a не подлежит экономической интерпретации.

При изучении вопросов потребления коэффициенты регрессии рассматриваются как характеристики предельной склонности к потреблению. Например, если функция потребления C_t имеет вид

$$C_t = a + b_0 R_t + b_1 R_{t-1} + \varepsilon, \qquad (12)$$

то потребление в период времени (зависит от дохода того же периода R_t и от дохода предшествующего периода R_{t-1}. Соответственно коэффициент b_0 характеризует эффект единичного возрастания дохода R_t при неизменном уровне предыдущего дохода. Коэффициент b_0 обычно называют краткосрочной предельной склонностью к потреблению. Общим эффектом возрастания как текущего, так и предыдущего дохода будет рост потребления на $b=b_0+b_1$. Коэффициент b рассматривается здесь как долгосрочная склонность к потреблению. Так как коэффициенты b_0 и $b_1>0$, то долгосрочная склонность к потреблению должна превосходить краткосрочную b_0.

Функция потребления может рассматриваться также в зависимости от прошлых привычек потребления, т.е. от предыдущего уровня потребления C_{t-1}:

$$C_t = a + b_0 R_t + b_1 C_{t-1} + \varepsilon. \qquad (13)$$

В этом уравнении параметр b_0 также характеризует краткосрочную предельную склонность к потреблению, т.е. влияние на потребление единичного роста доходов того же периода R_t. Долгосрочную предельную склонность к потреблению здесь измеряет выражение $b_0/(1-b_1)$.

Так, если уравнение регрессии составило

$$C_t = 23{,}4 + 0{,}56R_t + 0{,}20C_{t-1} + \varepsilon.,$$

то краткосрочная склонность к потреблению равна 0,56, а долгосрочная - 0,7 (0,56/0,8).

В степенной функции $\hat{y}_x = a \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot x_p^{b_p}$ коэффициенты b_j являются коэффициентами эластичности. Они показывают, на сколько процентов изменяется в среднем результат с изменением соответствующего фактора на 1 % при неизменности действия других факторов. Этот вид уравнения регрессии получил наибольшее распространение в производственных функциях, в исследованиях спроса и потребления.

Предположим, что при исследовании спроса на мясо получено уравнение

$$\hat{y}_x = 0{,}82 \cdot x_1^{-2{,}73} \cdot x_2^{1{,}15} \text{ или } \hat{y}_x = 0{,}82 \cdot \frac{x_2^{1{,}15}}{x_1^{2{,}73}},$$

где y - количество спрашиваемого мяса; x_1 - цена; x_2 - доход.

Следовательно, рост цен на 1 % при том же доходе вызывает снижение спроса в среднем на 2,73 %. Увеличение дохода на 1% обусловливает при неизменных ценах рост спроса на 1,15%.

В производственных функциях вида

$$P = a \cdot F_1^{b_1} \cdot F_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot F_m^{b_m} \cdot \varepsilon, \quad (14)$$

где P - количество продукта, изготавливаемого с помощью m производственных факторов ($F_1, F_2, \ldots, F_m$);

b - параметр, являющийся эластичностью количества продукции по отношению к количеству соответствующих производственных факторов.

Экономический смысл имеют не только коэффициенты b каждого фактора, но и их сумма, т.е. сумма эластичностей: $B=b_1+b_2+\ldots+ b_m$. Эта величина фиксирует обобщенную характеристику эластичности производства. Производственная функция имеет вид

$$P = 2 \cdot F_1^{0,4} \cdot F_2^{0,3} \cdot F_3^{0,6} \cdot \varepsilon,$$

где P - выпуск продукции;

F_1 - стоимость основных производственных фондов;

F_2 - отработано человеко-дней;

F_3 - затраты на производство,

эластичность выпуска, по отдельным факторам производства составляет в среднем 0,4 % с ростом F_1 на 1 % при неизменном уровне других факторов; 0,3 % - с ростом F_2 на 1 % также при неизменности других факторов производства и 0,6 % с ростом F_3 на 1 % при неизменном уровне факторов F_1 и F_2. Для данного уравнения $B=b_1+b_2+b_3=1$. Следовательно, в целом с ростом каждого фактора производства на 1% коэффициент эластичности выпуска продукции составляет 1%, т.е. выпуск продукции увеличивается на 1%, что в микроэкономике соответствует постоянной отдаче на масштаб.

При практических расчетах не всегда $\sum_{j=1}^{m} b_j = 1$ Она может быть как больше, так и меньше единицы. В этом случае величина B фиксирует приближенную оценку эластичности выпуска с ростом каждого фактора производства на 1 % в условиях увеличивающейся ($B>1$) или уменьшающейся ($B<1$) отдачи на масштаб.

Так, если $\hat{P} = 2{,}4 \cdot F_1^{0,3} \cdot F_2^{0,7} \cdot F_3^{0,2}$, то с ростом значений каждого фактора производства на 1 % выпуск продукции в целом возрастает приблизительно на 1,2 %.

Возможны и другие линеаризуемые функции для построения уравнения множественной регрессии:

- экспонента - $y = e^{\alpha+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\ldots+\beta_p x_p+\varepsilon}$
- гипербола- $y = \dfrac{1}{\alpha+\beta_1 x_1+\beta_2 x_2+\ldots+\beta_p x_p}$, которая используется при обратных связях признаков.

Стандартные компьютерные программы обработки регрессионного анализа позволяют перебирать различные функции и выбрать ту из них, для которой остаточная дис-

персия и ошибка аппроксимации минимальны, а коэффициент детерминации максимален.

Если исследователя не устраивает предлагаемый стандартной программой набор функций регрессии, то можно использовать любые другие функции, приводимые путем соответствующих преобразований к линейному виду, например:

$$\hat{y}_x = a + b_1 x_1 + b_2 \frac{1}{x_2} + b_3 x_3^{1/2} + b_4 \ln x_4. \qquad (15)$$

Обозначив

$$z_1 = x_1;\ z_2 = 1/x_2;\ z_3 = x_3^{1/2};\ z_4 = \ln x_4,$$

получим линейное уравнение множественной регрессии.

$$y = a + b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 + b_4 z_4 + \varepsilon. \quad (16)$$

Однако чем сложнее функция, тем менее интерпретируемы ее параметры.

При сложных полиномиальных функциях с большим числом факторов необходимо помнить, что каждый параметр преобразованной функции является средней величиной, которая должна быть подсчитана по достаточному числу наблюдений. Если число наблюдений невелико, что, как правило, имеет место в эконометрике, то увеличение числа параметров функции приведет к их статистической незначимости и соответственно потребует упрощения вида функции. Если один и тот же фактор вводится в регрессию в разных степенях, то каждая степень рассматривается как самостоятельный фактор. Так, если модель имеет вид полинома второго порядка

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + b_{12} x_1 x_2 + \varepsilon, \qquad (17)$$

то после замены переменных $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_1^2$, $z_4 = x_2^2$, $z_5 = x_1 x_2$ получим линейное уравнение регрессии с пятью факторами:

$$y = a + b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 + b_4 z_4 + b_5 z_5 + \varepsilon. \quad (18)$$

Поскольку, как отмечалось, должно выполняться соотношение между числом параметров и числом наблюдений, для полинома второй степени требуется не менее 30-35 наблюдений.

В эконометрике регрессионные модели часто строятся на основе макроуровня экономических показателей, когда ставится задача оценки влияния наиболее экономически существенных факторов на моделируемый показатель при ограниченном объеме информации.

9.4. Оценка параметров уравнения множественной регрессии

Параметры уравнения множественной регрессии оцениваются, как и в парной регрессии, методом наименьших квадратов (МНК). При его применении строится система нормальных уравнений, решение которой и позволяет получить оценки параметров регрессии.

Так, для уравнения $\hat{y}_x = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_p x_p$ система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} na + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2 + ... + b_p \sum x_p = \sum y, \\ a \sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1 x_2 + ... + b_p \sum x_p x_1 = \sum y x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a \sum x_p + b_1 \sum x_1 x_p + b_2 \sum x_2 x_p + ... + b_p \sum x_p^2 = \sum y x_p. \end{cases} \quad (19)$$

Ее решение может быть осуществлено методом определителей:

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta},\ b_1 = \frac{\Delta b_1}{\Delta},\ ...,\ b_p = \frac{Дb_p}{Д},$$

где Д - определитель системы;

$Да$, $Дb_1$,..., $Дb_p$ - частные определители.

При этом

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum x_1 & \sum x_2 & \cdots & \sum x_p \\ \sum x_1 & \sum x_1^2 & \sum x_2 x_1 & \cdots & \sum x_p x_1 \\ \sum x_2 & \sum x_1 x_2 & \sum x_2^2 & \cdots & \sum x_p x_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum x_p & \sum x_1 x_p & \sum x_2 x_p & \cdots & \sum x_p^2 \end{vmatrix},$$

а $Да$, $Дb_1$,..., $Дb_p$ получаются путем замены соответствующего столбца матрицы определителя системы данными левой части системы.

Возможен и иной подход к определению параметров множественной регрессии, когда на основе матрицы парных коэффициентов корреляции строится уравнение регрессии в стандартизованном масштабе:

$$t_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + ... + \beta_p t_{x_p} + \varepsilon. \qquad (20)$$

где $t_y, t_{x_1}, ..., t_{x_p}$ - стандартизованные переменные: $t_y = \frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}$, $t_{x_i} = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_{x_i}}$, для которых среднее значение равно нулю: $\bar{t}_y = \bar{t}_{x_i} = 0$, а среднеквадратическое отклонение равно единице: $\sigma_{t_y} = \sigma_{t_x} = 1;;$

β - стандартизованные коэффициенты регрессии.

Применяя МНК к уравнению множественной регрессии в стандартизованном масштабе, после соответствующих преобразований получим систему нормальных уравнений вида

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 R_{x_2 x_1} + \beta_3 R_{x_3 x_1} + ... + \beta_p R_{x_p x_1} = R_{y x_1}, \\ \beta_1 R_{x_2 x_1} + \beta_2 + \beta_3 R_{x_3 x_2} + ... + \beta_p R_{x_p x_2} = R_{y x_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_1 R_{x_p x_1} + \beta_2 R_{x_p x_2} + \beta_3 R_{x_3 x_p} + ... + \beta_p = R_{y x_p}. \end{cases} \qquad (21)$$

Решая ее методом определителей, найдем параметры - стандартизованные коэффициенты регрессии (β - коэффициенты).

Стандартизованные коэффициенты регрессии показывают, на сколько сигм изменится в среднем результат, если соответствующий фактор x_i изменится на одну сигму при неизменном среднем уровне других факторов. В силу того, что все переменные заданы как центрированные и нормированные, стандартизованные коэффициенты регрессии β_i сравнимы между собой. Сравнивая их друг с другом, можно ранжировать факторы по силе их воздействия на результат. В этом основное достоинство стандартизованных коэффициентов регрессии в отличие от коэффициентов «чистой» регрессии, которые несравнимы между собой.

Пример. Пусть функция издержек производства y (тыс. сум) характеризуется уравнением вида

$$y = 200 + 1{,}5x_1 + 1{,}2x_2 + \varepsilon,$$

где x_1 - основные производственные фонды (тыс. сум); x_2 - численность занятых в производстве (чел.).

Анализируя его, мы видим, что при той же занятости дополнительный рост стоимости основных производственных фондов на 1 тыс. сум влечет за собой увеличение затрат в среднем на 1,5 тыс. сум, а увеличение численности занятых на одного человека способствует при той же технической оснащенности предприятий росту затрат в среднем на 1,2 тыс. сум. Однако это не означает, что фактор x_1 оказывает более сильное влияние на издержки производства по сравнению с фактором x_1. Такое сравнение возможно, если обратиться к уравнению регрессии в стандартизованном масштабе. Предположим, оно выглядит так:

$$t_y = 0{,}6t_{x_1} + 0{,}9t_{x_2}.$$

Это означает, что с ростом фактора x_1 на одну сигму при неизменной численности занятых затраты на продукцию

увеличиваются в среднем на 0,6 сигмы. Так как $\beta_1 < \beta_2$ (0,6<0,9), то можно заключить, что большее влияние оказывает на производство продукции фактор x_2, а не x_1, как кажется из уравнения регрессии в натуральном масштабе.

В парной зависимости стандартизованный коэффициент регрессии есть не что иное, как линейный коэффициент корреляции r_{xy}. Подобно тому, как в парной зависимости коэффициенты регрессии и корреляции связаны между собой, так и во множественной регрессии коэффициенты «чистой» регрессии b_i связаны со стандартизованными коэффициентами регрессии β_i, а именно:

$$b_i = \beta_i \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}}. \qquad (22)$$

Это позволяет от уравнения регрессии в стандартизованном масштабе

$$\hat{t}_y = \beta_1 t_{x_1} + \beta_2 t_{x_2} + ... + \beta_p t_{x_p} \quad (23)$$

переходить к уравнению регрессии в натуральном масштабе переменных:

$$\hat{y}_x = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_p x_p. \quad (24)$$

Параметр a определяется как

$$a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 - ... - b_p \bar{x}_p. \quad (25)$$

Рассмотренный смысл стандартизованных коэффициентов регрессии позволяет их использовать при отсеве факторов - из модели исключаются факторы с наименьшим значением β_j.

Компьютерные программы построения уравнения множественной регрессии в зависимости от использованного в них алгоритма решения позволяют получить либо только уравнение регрессии для исходных данных, либо, кроме того, уравнение регрессии в стандартизованном масштабе.

При нелинейной зависимости признаков, приводимой к линейному виду, параметры множественной регрессии также

определяются МНК с той лишь разницей, что он используется не к исходной информации, а к преобразованным данным. Так, рассматривая степенную функцию

$$y = a \cdot x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdot \ldots \cdot x_p^{b_p} \cdot \varepsilon, \qquad (26)$$

преобразовываем ее в линейный вид:

$$\lg y = \lg a + b_1 \lg x_1 + b_2 \lg x_2 + \ldots + b_p \lg x_p + \lg \varepsilon,$$

где переменные выражены в логарифмах.

Далее обработка МНК та же, что и описана выше: строится система нормальных уравнений и определяются параметры $\lg a$, b_1, b_1,..., b_p. Потенцируя значение $\lg a$, найдем параметр a и соответственно общий вид уравнения степенной функции.

Поскольку параметры степенной функции представляют собой коэффициенты эластичности, то они сравнимы по разным факторам.

Пример. При исследовании спроса на масло получено следующее уравнение:

$$\lg y = -1{,}35 - 0{,}981 \cdot \lg x_1 + 1{,}325 \cdot \lg x_2 + \varepsilon,$$

где y - количество масла надушу населения (кг); x_1, - цена (сум); x_2 - доход на душу населения (тыс. сум).

Анализируя уравнение, видим, что с ростом цены на 1 % при том же доходе спрос снижается в среднем на 0,981 %, а рост дохода на 1 % при неизменных ценах вызывает увеличение спроса в среднем на 1,325%. В виде степенной функции данное уравнение примет вид:

$$y = 0{,}058 \cdot x_1^{-0{,}981} \cdot x_2^{1{,}325} \cdot \varepsilon.$$

При других нелинейных функциях методика оценки параметров МНК осуществляется так же. В отличие от предыдущих функций параметры более сложных моделей не имеют четкой экономической интерпретации: они не являются показателями силы связи и ее эластичности. Это не исключает возможности их применения, но делает их менее привлекательными в практических расчетах.

9.5. Частные уравнения регрессии

На основе линейного уравнения множественной регрессии

$$\hat{y}_x = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_p x_p + \varepsilon. \qquad (27)$$

могут быть найдены частные уравнения регрессии:

$$\begin{cases} y_{x_1 \cdot x_2, x_3, ..., x_p} = f(x_1), \\ y_{x_2 \cdot x_1, x_3, ..., x_p} = f(x_2), \\ ..... \\ y_{x_p \cdot x_1, x_2, ..., x_{p-1}} = f(x_p), \end{cases} \qquad (28)$$

т.е. уравнения регрессии, которые связывают результативный признак с соответствующими факторами *x* при закреплении других учитываемых во множественной регрессии факторов на среднем уровне. Частные уравнения регрессии имеют следующий вид:

$$\begin{cases} y_{x_1 \cdot x_2, x_3, ..., x_p} = a + b_1 x_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_3 \bar{x}_3 + ... + b_p \bar{x}_p + \varepsilon; \\ y_{x_2 \cdot x_1, x_3, ..., x_p} = a + b_1 \bar{x}_1 + b_2 x_2 + b_3 \bar{x}_3 + ... + b_p \bar{x}_p + \varepsilon; \\ ..... \\ y_{x_p \cdot x_1, x_2, ..., x_{p-1}} = a + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_3 \bar{x}_3 + ... + b_{p-1} \bar{x}_{p-1} + b_p x_p + \varepsilon. \end{cases} \qquad (29)$$

При подстановке в эти уравнения средних значений соответствующих факторов они принимают вид парных уравнений линейной регрессии, т. е. имеем:

$$\begin{cases} \hat{y}_{x_1 \cdot x_2, x_3, ..., x_p} = A_1 + b_1 x_1, \\ \hat{y}_{x_2 \cdot x_1, x_3, ..., x_p} = A_2 + b_2 x_2, \\ ..... \\ \hat{y}_{x_p \cdot x_1, x_2, ..., x_{p-1}} = A_p + b_p x_p, \end{cases} \qquad (30)$$

где

$$\begin{cases} A_1 = a + b_2\bar{x}_2 + b_3\bar{x}_3 + \ldots + b_p\bar{x}_p; \\ A_2 = a + b_1\bar{x}_1 + b_3\bar{x}_3 + \ldots + b_p\bar{x}_p; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_p = a + b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2 + \ldots + b_{p-1}\bar{x}_{p-1}. \end{cases}$$

В отличие от парной регрессии частные уравнения регрессии характеризуют изолированное влияние фактора на результат, ибо другие факторы закреплены на неизменном уровне. Эффекты влияния других факторов присоединены в них к свободному члену уравнения множественной регрессии. Это позволяет на основе частных уравнений регрессии определять частные коэффициенты эластичности:

$$Э_{y_{x_i}} = b_i \cdot \frac{x_i}{\hat{y}_{x_i \cdot x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_p}}, \qquad (31)$$

где b_i - коэффициенты регрессии для фактора x_i в уравнении множественной регрессии;

$\hat{y}_{x_i \cdot x_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_p}$ - частное уравнение регрессии.

Пример. Предположим, что по ряду областей множественная регрессия импорта на определенный товар y относительно отечественного его производства x_1, изменения запасов x_2 и потребления на внутреннем рынке x_3 оказалась следующей:

$$\hat{y} = -68{,}301 + 0{,}136x_1 + 0{,}486x_2 + 0{,}353x_3 .$$

При этом средние значения для рассматриваемых признаков составили:

$$\bar{y} = 38{,}5;\ \bar{x}_1 = 255{,}8;\ \bar{x}_2 = 3{,}6;\ \bar{x}_3 = 183{,}2.$$

На основе данной информации могут быть найдены средние по совокупности показатели эластичности:

$$\bar{Э}_{y_{x_i}} = b_i \cdot \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}_{x_i}}. \qquad (32)$$

Для данного примера они окажутся равными:

$$\overline{Э}_{y_{x_1}} = 0{,}136 \cdot \frac{255{,}8}{38{,}5} = 0{,}903\%,$$

т.е. с ростом величины отечественного производства на 1 % размер импорта в среднем по совокупности областей возрастет на 0,903% при неизменных запасах и потреблении семей.

Для второй переменной коэффициент эластичности составляет:

$$\overline{Э}_{y_{x_2}} = 0{,}486 \cdot \frac{3{,}6}{38{,}5} = 0{,}045\%,$$

т.е. с ростом изменения запасов на 1 % при неизменном производстве и внутреннем потреблении величина импорта увеличивается в среднем на 0,045%.

Для третьей переменной коэффициент эластичности составляет

$$\overline{Э}_{y_{x_3}} = 0{,}353 \cdot \frac{183{,}2}{38{,}5} = 1{,}679\%,$$

т.е. при неизменном объеме производства и величины запасов с увеличением внутреннего потребления на 1 % импорт товара возрастает в среднем по совокупности областей на 1,679%. Средние показатели эластичности можно сравнивать друг с другом и соответственно ранжировать факторы по силе их воздействия на результат. В рассматриваемом примере наибольшее воздействие на величину импорта оказывает размер внутреннего потребления товара x_3, а наименьшее - изменение запасов x_2.

Наряду со средними показателями эластичности в целом по совокупности областей на основе частных уравнений регрессии могут быть определены частные коэффициенты эластичности для каждого региона. Частные уравнения регрессии в нашем случае составят:

$$\hat{y}_{x_1 \cdot x_2 x_3} = a + b_1 x_1 + b_2 \overline{x}_2 + b_3 \overline{x}_3,$$

т.е. $\hat{y}_{x_1 \cdot x_2 x_3} = -68{,}301 + 0{,}136 x_1 + 0{,}486 \cdot 3{,}7 + 0{,}353 \cdot 183{,}2 = -1{,}979 + 0{,}136 \cdot x_1;$

$$\hat{y}_{x_2 \cdot x_1 x_3} = a + b_1 \bar{x}_1 + b_2 x_2 + b_3 \bar{x}_3,$$

т.е. $\hat{y}_{x_2 \cdot x_1 x_3} = -68{,}301 + 0{,}136 \cdot 255{,}8 + 0{,}486 \cdot x_2 + 0{,}353 \cdot 183{,}2 = 31{,}156 + 0{,}486 \cdot x_2;$

$$\hat{y}_{x_3 \cdot x_1 x_2} = a + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + b_3 x_3,$$

т.е. $\hat{y}_{x_3 \cdot x_1 x_2} = -68{,}301 + 0{,}136 \cdot 255{,}8 + 0{,}486 \cdot 3{,}6 + 0{,}353 \cdot x_3 = -31{,}763 + 0{,}353 \cdot x_3.$

Подставляя в данные уравнения фактические значения по отдельным регионам соответствующих факторов, получим значения моделируемого показателя $\hat{y}$ при заданном уровне одного фактора и средних значениях других факторов. Эти расчетные значения результативного признака используются для определения частных коэффициентов эластичности по приведенной выше формуле. Так, если, например, в регионе $x_1 = 180{,}2$; $x_2 = 5{,}0$; $x_3 = 185{,}5$ то частные коэффициенты эластичности составят:

$$Э_{y_{x_1}} = b_1 \cdot \frac{x_1}{\hat{y}_{x_1 \cdot x_2, x_3}} \text{ или } Э_{y_{x_1}} = 0{,}136 \cdot \frac{180{,}2}{-1{,}979 + 0{,}136 \cdot 180{,}2} = 1{,}087\%;$$

$$Э_{y_{x_2}} = b_2 \cdot \frac{x_2}{\hat{y}_{x_2 \cdot x_1, x_3}} \text{ или } Э_{y_{x_2}} = 0{,}486 \cdot \frac{5{,}0}{31{,}156 + 0{,}486 \cdot 5{,}0} = 0{,}072\%;$$

$$Э_{y_{x_3}} = b_3 \cdot \frac{x_3}{\hat{y}_{x_3 \cdot x_1, x_2}} \text{ или } Э_{y_{x_3}} = 0{,}353 \cdot \frac{185{,}5}{-31{,}763 + 0{,}353 \cdot 185{,}5} = 1{,}912\%.$$

Как видим, частные коэффициенты эластичности для областей несколько отличаются от аналогичных средних показателей по совокупности регионов. Они могут быть использованы при принятии решений относительно развития конкретных регионов.

9.6. Множественная корреляция

Практическая значимость уравнения множественной регрессии оценивается с помощью показателя множественной корреляции и его квадрата - коэффициента детерминации.

Показатель множественной корреляции характеризует тесноту связи рассматриваемого набора, факторов с исследуемым признаком, или, иначе, оценивает тесноту совместного влияния факторов на результат.

Независимо от формы связи показатель множественной корреляции может быть найден как индекс множественной корреляции:

$$R_{yx_1x_2\ldots x_p} = \sqrt{1-\frac{\sigma^2_{ост}}{\sigma^2_y}}, \qquad (33)$$

где σ^2_y - общая дисперсия результативного признака;

$\sigma^2_{ост}$ - остаточная дисперсия для уравнения $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_p)$.

Методика построения индекса множественной корреляции аналогична построению индекса корреляции для парной зависимости. Границы его изменения те же: от 0 до 1. Чем ближе его значение к 1, тем теснее связь результативного признака со всем набором исследуемых факторов. Величина индекса множественной корреляции должна быть больше или равна максимальному парному индексу корреляции:

При правильном включении факторов в регрессионный анализ величина индекса множественной корреляции будет существенно отличаться от индекса корреляции парной зависимости. Если же дополнительно включенные в уравнение множественной регрессии факторы третьестепенны, то индекс множественной корреляции может практически совпадать с индексом парной корреляции (различия в третьем, четвертом знаках). Отсюда ясно, что, сравнивая индексы множественной и парной корреляции, можно сделать вывод о целесообразности включения в уравнение регрессии того или иного фактора. Так, если y рассматривается как функция x и z и получен индекс множественной корреляции $R_{yxz}=0{,}85$, а индексы парной корреляции при этом были $R_{yx}=0{,}82$ и

R_{yx} =0,75, то совершенно ясно, что уравнение парной регрессии $y=f(x)$ охватывало 67,2 % колеблемости результативного признака под влиянием фактора x, а дополнительное включение в анализ фактора z увеличило долю объясненной вариации до 72,3 %, т.е. уменьшилась доля остаточной вариации на 5,1 проц. пункта (с 32,8 до 27,7%).

Расчет индекса множественной корреляции предполагает определение уравнения множественной регрессии и на его основе остаточной дисперсии:

$$\sigma^2_{ост} = \frac{\sum\left(y - \hat{y}_{x_1 x_2 \ldots x_p}\right)^2}{n}. \qquad (34)$$

Можно пользоваться следующей формулой индекса множественной корреляции:

$$R^2_{x_1 x_2 \ldots x_p} = 1 - \frac{\sum\left(y - \hat{y}_{x_1 x_2 \ldots x_p}\right)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}.. \qquad (34)$$

При линейной зависимости признаков формула индекса корреляции может быть представлена следующим выражением:

$$R_{yx_1 x_2 \ldots x_p} = \sqrt{\sum \beta_{x_i} \cdot r_{yx_i}}, . \qquad (35)$$

где β_{x_i} -стандартизованные коэффициенты регрессий;

r_{yx_i} - парные коэффициенты корреляции результата с каждым фактором.

В справедливости данной формулы можно убедиться, если обратиться к линейному уравнению множественной регрессии в стандартизованном масштабе и определить для него индекс множественной корреляции как:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum\left(t_y - \hat{t}_y\right)^2}{\sum\left(t_y - \bar{t}_y\right)^2}} \qquad (36)$$

или, что то же самое,

$$R = \sqrt{\frac{\sum\left(\hat{t}_y - \bar{t}_y\right)^2}{\sum\left(t_y - \bar{t}_y\right)^2}}. \qquad (37)$$

В формуле (37) числитель подкоренного выражения представляет собой факторную сумму квадратов отклонений для стандартизованных переменных: $t_y = \dfrac{y - \bar{y}}{\sigma_y}$.

Поскольку $\bar{t}_y = 0$ и $\sum(t_y - \bar{t}_y)^2 = \sum t_y^2 = n$, индекс множественной корреляции для линейного уравнения в стандартизованном масштабе можно записать в виде

$$R = \sqrt{\frac{1}{n}\sum\left(\hat{t}_y\right)^2}. \qquad (38)$$

Подставив в эту формулу выражение $\hat{t}_y$ через

$$\hat{t}_y = \beta_{x_1} t_{x_1} + \beta_{x_2} t_{x_2} + \ldots + \beta_{x_p} t_{x_p},$$

получим:

$$R = \sqrt{\frac{1}{n}\sum \hat{t}_y \cdot \left(\beta_{x_1} t_{x_1} + \beta_{x_2} t_{x_2} + \ldots + \beta_{x_p} t_{x_p}\right)} =$$

$$= \sqrt{\beta_{x_1} \cdot \frac{1}{n}\sum t_{x_1} \cdot \hat{t}_y + \ldots + \cdot\beta_{x_p} \cdot \frac{1}{n}\sum t_{x_p} \cdot \hat{t}_y}.$$

Так как $\dfrac{1}{n}\sum t_{x_i} \cdot \hat{t}_y = r_{yx_i}$, то получим формулу индекса множественной корреляции следующего вида

$$R = \sqrt{\beta_{x_1} \cdot r_{yx_1} + \beta_{x_2} \cdot r_{yx_2} + \ldots + \beta_{x_p} \cdot r_{yx_p}} = \sqrt{\sum \beta_{x_i} \cdot r_{yx_i}}. \qquad (39)$$

Формула индекса множественной корреляции для линейной регрессии получила название линейного коэффициента множественной корреляции, или, что то же самое, совокупного коэффициента корреляции.

Возможно также при линейной зависимости определение совокупного коэффициента корреляции через матрицу парных коэффициентов корреляции:

$$R_{yx_1x_2\ldots x_p} = \sqrt{1 - \frac{\Delta r}{\Delta r_{11}}}, \qquad (40)$$

где Δr - определитель матрицы парных коэффициентов корреляции; Δr_{11} - определитель матрицы межфакторной корреляции.

Для уравнения $y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_px_p + \varepsilon$ определитель матрицы коэффициентов парной корреляции примет вид:

$$\Delta r = \begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} & \cdots & r_{yx_p} \\ r_{yx_1} & 1 & r_{x_1x_2} & \cdots & r_{x_1x_p} \\ r_{yx_2} & r_{x_2x_1} & 1 & \cdots & r_{x_2x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{yx_p} & r_{x_ix_1} & r_{x_px_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \qquad (41)$$

Определитель более низкого порядка r_{11} остается, когда вычеркиваются из матрицы коэффициентов парной корреляции первый столбец и первая строка, что и соответствует матрице коэффициентов парной корреляции между факторами:

$$\Delta r_{11} = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} & \cdots & r_{x_1x_p} \\ r_{x_2x_1} & 1 & \cdots & r_{x_2x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{x_px_1} & r_{x_px_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}. \qquad (42)$$

Как видим, величина множественного коэффициента корреляции зависит не только от корреляции результата с каждым из факторов, но и от межфакторной корреляции. Рассмотренная формула позволяет определять совокупный коэффициент корреляции, не обращаясь при этом к уравнению множественной регрессии, а используя лишь парные коэффициенты корреляции.

При трех переменных для двухфакторного уравнения регрессии данная формула совокупного коэффициента корреляции легко приводится к следующему виду:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{1 - \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_{yx_1} & r_{yx_2} \\ r_{yx_1} & 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{yx_2} & r_{x_1x_2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_{x_1x_2} \\ r_{x_1x_2} & 1 \end{vmatrix}}} = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1} \cdot r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}}. \quad (43)$$

Индекс множественной корреляции равен совокупному коэффициенту корреляции не только при линейной зависимости рассматриваемых признаков. Тождественность этих показателей, как и в парной регрессии, имеет место и для криволинейной зависимости, нелинейной по переменным. Так, если для фирмы модель прибыли y имеет вид

$$y = a + b_1x_1 + b_2 \ln x_2 + b_3 \ln x_3 + b_4 \ln x_4 + \varepsilon,$$

где x_1 - удельные расходы на рекламу; x_2 - капитал фирмы; x_3 - доля продукции фирмы в общем объеме продаж данной группы товаров по региону; x_4 - процент увеличения объема продаж фирмы по сравнению с предыдущим годом.

Тогда независимо от того, что фактор x_1 задан линейно, а факторы x_2, x_3, x_4 - в логарифмах, оценка тесноты связи может быть произведена с помощью линейного коэффициента множественной корреляции. Так, если рассматриваемая модель в стандартизованном виде оказалась следующей:

$$t_y = -0{,}4 \cdot t_{x_1} + 0{,}5 \cdot t_{x_2} + 0{,}4 \cdot t_{x_2} + 0{,}3 \cdot t_{x_4},,$$

а парные коэффициенты корреляции прибыли с каждым из ее факторов составили

$$r_{yx_1} = -0{,}6;\ r_{y\ln x_2} = 0{,}7;\ r_{y\ln x_3} = 0{,}6;\ r_{y\ln x_4} = 0{,}4,$$

то коэффициент множественной детерминации окажется равным:

$$R^2_{yx_1x_2x_3x_4} = -0{,}4 \cdot (-0{,}6) + 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}95.$$

Тот же результат даст и индекс множественной детерминации, определенный через соотношение остаточной и общей дисперсии результативного признака.

Иначе обстоит дело с криволинейной регрессией, нелинейной по оцениваемым параметрам. Предположим, что рассматривается производственная функция Кобба-Дугласа:

$$P = a \cdot L^{b_1} \cdot K^{b_2} \cdot \varepsilon, \qquad (44)$$

где P - объем продукции; L - затраты труда; K - величина капитала; $b_1+b_2=1$.

Логарифмируя ее, получим линейное в логарифмах уравнение

$$\ln P = \ln a + b_1 \cdot \ln L + b_2 \cdot \ln K + \ln \varepsilon. \qquad (45)$$

Оценив параметры этого уравнения по МНК, можно найти теоретические значения объема продукции $\hat{P}$ и соответственно остаточную сумму квадратов $\sum(P-\hat{P})^2$, которая используется в расчете индекса детерминации (корреляции):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(P-\hat{P})^2}{\sum(P-\overline{P})^2}. \qquad (46)$$

Однако при этом нельзя забывать, что МНК применяется не к исходным данным продукции, а к их логарифмам. Поэтому в индексе корреляции с общей суммой квадратов $\sum(P-\overline{P})^2$ сравнивается остаточная дисперсия, которая определена по теоретическим значениям логарифмов продукции: $\sum(P-\text{антилогарифм}(\hat{\ln P}))^2$, т.е. когда по $\hat{\ln P}$ путем потенцирования нашли $\hat{P}$.

Индекс детерминации для нелинейных по оцениваемым параметрам функций в некоторых работах по эконометрике принято называть «квази-R^2». Для его определения по функциям, использующим логарифмические преобразования (степенная, экспонента), необходимо сначала найти теорети-

ческие значения $\hat{\ln y}$ (в нашем примере $\hat{\ln P}$), затем трансформировать их через антилогарифмы: *антилогарифм* $(\hat{\ln y}) = \hat{y}$, т.е. найти теоретические значения результативного признака и далее определять индекс детерминации как «квази-R^2», пользуясь формулой

$$\text{"квази} - R^2\text{"} = 1 - \frac{\sum \left(y - \text{антилогарифм}(\hat{\ln y}) \right)^2}{\sum (y - \bar{y})^2}. \quad (47)$$

Величина индекса множественной корреляции, определенная как «квази-R^2», не будет совпадать с совокупным коэффициентом корреляции, который может быть рассчитан для линейного в логарифмах уравнения множественной регрессии, ибо в последнем раскладывается на факторную и остаточную суммы квадратов не $\sum (y - \bar{y})^2$, а $\sum (\ln y - \overline{\ln y})^2$. Аналогичное положение, когда индекс и коэффициент множественной корреляции не совпадают, имеем и для обратной функции:

$$y = \frac{1}{\alpha + b_1 x_1 + \ldots + b_p x_p + \varepsilon}, \quad (48)$$

ибо теоретическое значение результативного признака определяется путем обращения расчетной величины $1/y$.

В рассмотренных показателях множественной корреляции (индекс и коэффициент) используется остаточная дисперсия, которая имеет систематическую ошибку в сторону преуменьшения, тем более значительную, чем больше параметров определяется в уравнении регрессии при заданном объеме наблюдений n. Если число параметров при x_j равно m и приближается к объему наблюдений, то остаточная дисперсия будет близка к нулю и коэффициент (индекс) корреляции приблизится к единице даже при слабой связи факторов с результатом. Для того чтобы не допустить возможного

преувеличения тесноты связи, используется скорректированный индекс (коэффициент) множественной корреляции.

Скорректированный индекс множественной корреляции содержит поправку на число степеней свободы, а именно остаточная сумма квадратов $\sum\left(y-\hat{y}_{x_1x_2\ldots x_p}\right)^2$ делится на число степеней свободы остаточной вариации (n-m-1), а общая сумма квадратов отклонений $\sum(y-\bar{y})^2$ - на число степеней свободы в целом по совокупности (n-1).

Формула скорректированного индекса множественной детерминации имеет вид:

$$\overline{R}^2 = 1-\frac{\sum(y-\hat{y})^2:(n-m-1)}{\sum(y-\bar{y})^2:(n-1)}, \qquad (49)$$

где m - число параметров при переменных x; n - число наблюдений.

Поскольку $\sum(y-\hat{y})^2/\sum(y-\bar{y})^2 = 1-R^2$, то величину скорректированного индекса детерминации можно представить в виде

$$\overline{R}^2 = 1-(1-R^2)\cdot\frac{(n-1)}{(n-m-1)}. \qquad (50)$$

Чем больше величина m, тем сильнее различия $\overline{R}^2$ и R^2.

Для линейной зависимости признаков скорректированный коэффициент множественной корреляции определяется по той же формуле, что и индекс множественной корреляции, т.е. как корень квадратный из $\overline{R}^2$. Отличие состоит лишь в том, что в линейной зависимости под m подразумевается число факторов, включенных в регрессионную модель, а в криволинейной зависимости m - число параметров при x и их преобразованиях (x^2, $\ln x$ и др.), которое может быть больше числа факторов как экономических переменных. Так, если $y=f(x_1, x_2)$, то для линейной регрессии m=2, а для регрессии вида

$$y = a + b_1 x_1 + b_{12} x_1^2 + b_2 x_2 + b_{22} x_2^2 + \varepsilon$$

число параметров при x равно 4, т.е. m=4. При заданном объеме наблюдений при прочих равных условиях с увеличением числа независимых переменных (параметров) скорректированный коэффициент множественной детерминации убывает. Его величина может стать и отрицательной при слабых связях результата с факторами. В этом случае он должен считаться равным нулю. При небольшом числе наблюдений скорректированная величина коэффициента множественной детерминации R^2 имеет тенденцию переоценивать долю вариации результативного признака, связанную с влиянием факторов, включенных в регрессионную модель. Пример. Предположим, что при n=30 для линейного уравнения регрессии с четырьмя факторами R^2=0,7, а с учетом корректировки на число степеней свободы

$$\overline{R}^2 = 1 - (1 - 0{,}7) \cdot \frac{(30-1)}{(30-4-1)} = 0{,}652.$$

Чем больше объем совокупности, по которой исчислена регрессия, тем меньше различаются показатели $\overline{R}^2$ и R^2. Так, уже при n=50 при том же значении R^2 и m величина $\overline{R}^2$ составит 0,673.

В статистических пакетах прикладных программ в процедуре множественной регрессии обычно приводится скорректированный коэффициент (индекс) множественной корреляции (детерминации). Величина коэффициента множественной детерминации используется для оценки качества регрессионной модели. Низкое значение коэффициента (индекса) множественной корреляции означает, что в регрессионную модель не включены существенные факторы - с одной стороны, а с другой стороны - рассматриваемая форма связи не отражает реальные соотношения между переменными, включенными в модель. Требуются дальнейшие исследова-

ния по улучшению качества модели и увеличению ее практической значимости.

9.7. Частная корреляция

Как было показано выше, ранжирование факторов, участвующих в множественной линейной регрессии, может быть проведено через стандартизованные коэффициенты регрессии (β-коэффициенты). Эта же цель может быть достигнута с помощью частных коэффициентов корреляции - для линейных связей. При нелинейной взаимосвязи исследуемых признаков эту функцию выполняют частные индексы детерминации. Кроме того, частные показатели корреляции широко используются при решении проблемы отбора факторов: целесообразность включения того или иного фактора в модель доказывается величиной показателя частной корреляции.

Частные коэффициенты (или индексы) корреляции характеризуют тесноту связи между результатом и соответствующим фактором при устранении влияния других факторов, включенных в уравнение регрессии.

Показатели частной корреляции представляют собой отношение сокращения остаточной дисперсии за счет дополнительного включения в анализ нового фактора к остаточной дисперсии, имевшей место до введения его в модель.

Пример. Предположим, что зависимость объема продукции y от затрат труда x_1 характеризуется уравнением

$$\hat{y}_{x_1} = 27{,}5 + 3{,}5x_1, \quad r_{yx_1} = 0{,}58.$$

Подставив в это уравнение фактические значения x_1, найдем теоретические величины объема продукции $\hat{y}_{x_1}$ и соответствующую величину остаточной дисперсии S^2:

$$S^2_{yx_1} = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_{x_1})^2}{n}. \qquad (51)$$

Включив в уравнение регрессии дополнительный фактор x_2 - техническую оснащенность производства, получим уравнение регрессии вида

$$\hat{y}_{x_1x_2} = 20{,}5 + 3{,}0x_1 + 0{,}3x_2.$$

Для этого уравнения остаточная дисперсия, естественно, меньше. Предположим, что $S^2_{yx_1x_2} = 3{,}8$, а $S^2_{yx_1} = 6{,}0$. Чем большее число факторов включено в модель, тем меньше величина остаточной дисперсии.

Сокращение остаточной дисперсии за счет дополнительного включения фактора x_2 составит:

$$S^2_{yx_1} - S^2_{yx_1x_2} = 2{,}2.$$

Чем больше доля этого сокращения в остаточной вариации до введения дополнительного фактора, т.е. в $S^2_{yx_1}$, тем теснее связь между y и x_2 при постоянном действии фактора x_1. Корень квадратный из этой величины и есть индекс частной корреляции, показывающий в «чистом» виде тесноту связи y с x_2.

Следовательно, чистое влияние фактора x_2 на результат y можно определить как

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \sqrt{\frac{S^2_{yx_1} - S^2_{yx_1x_2}}{S^2_{yx_1}}}. \qquad (52)$$

Аналогично определяется и чистое влияние на результат фактора x_1:

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \sqrt{\frac{S^2_{yx_2} - S^2_{yx_1x_2}}{S^2_{yx_2}}}. \qquad (53)$$

Если предположить, что $S^2_{yx_2} = 5$, то частные показатели корреляции для уравнения $\hat{y}_{x_1x_2} = 20{,}5 + 3{,}0x_1 + 0{,}3x_2$ составят

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \sqrt{\frac{5-3}{5}} = 0{,}63$$

и

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \sqrt{\frac{6-3}{6}} = 0{,}707.$$

Сравнивая полученные результаты, видим, что более сильное воздействие на объем продукции оказывает техническая оснащенность предприятий.

Если выразить остаточную дисперсию через показатель детерминации $S^2_{\text{ост}} = \sigma^2_y(1-r^2)$, то формула коэффициента частной корреляции примет вид:

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \sqrt{\frac{S^2_{yx_2} - S^2_{yx_1x_2}}{S^2_{yx_2}}} = \sqrt{1 - \frac{S^2_{yx_1x_2}}{S^2_{yx_2}}} = \sqrt{1 - \frac{1-R^2_{yx_1x_2}}{1-r^2_{yx_2}}}. \qquad (54)$$

Соответственно

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \sqrt{1 - \frac{1-R^2_{yx_1x_2}}{1-r^2_{yx_1}}}. \qquad (55)$$

Рассмотренные показатели частной корреляции принято называть коэффициентами (индексами) частной корреляции первого порядка, ибо они фиксируют тесноту связи двух переменных при закреплении (элиминировании влияния) одного фактора.

Если рассматривается регрессия с числом факторов p, то возможны частные коэффициенты корреляции не только первого, но и второго, третьего,..., (p-1) порядка, т.е. влияние фактора x_1 можно оценить при разных условиях независимости действия других факторов:

$r_{yx_1 \cdot x_2}$ - при постоянном действии фактора x_2;

$r_{yx_1 \cdot x_2x_3}$ - при постоянном действии факторов x_2 и x_3;

$r_{yx_1 \cdot x_2 \ldots x_p}$ - при неизменном действии всех факторов, включенных в уравнение регрессии.

Сопоставление коэффициентов частной корреляции разного порядка по мере увеличения числа включаемых факто-

ров показывает процесс «очищения» зависимости результативного признака с исследуемым фактором.

Например, при изучении зависимости себестоимости добычи угля от объема добычи парный коэффициент корреляции оказался равным -0,75, характеризуя довольно тесную обратную связь признаков. Частный коэффициент корреляции этой зависимости при постоянном влиянии уровня производительности труда составил -0,58 и демонстрирует хотя и достаточную, но уже заметно менее тесную связь себестоимости и объема добычи. Закрепив на постоянном уровне также и размер основных фондов, теснота связи рассматриваемых признаков оказывается еще более низкой, т. е. -0,52.

Хотя частная корреляция разных порядков и может представлять аналитический интерес, в практических исследованиях предпочтение отдают показателям частной корреляции самого высокого порядка, ибо именно эти показатели являются дополнением к уравнению множественной регрессии.

В общем виде при наличии p факторов для уравнения

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_p x_p + \varepsilon$$

коэффициент частной корреляции, измеряющий влияние на y фактора x_i при неизменном уровне других факторов, можно определить по формуле

$$r_{yx_i \cdot x_1 x_2 \ldots x_{i-1} \ldots x_p} = \sqrt{1 - \frac{1 - R^2_{yx_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_p}}{1 - R^2_{yx_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_p}}}, \qquad (56)$$

где $R^2_{yx_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_p}$ - множественный коэффициент детерминации всего комплекса p факторов с результатом;

$R^2_{yx_1 x_2 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_p}$ - тот же показатель детерминации, но без введения в модель фактора x_i.

При i=1 формула коэффициента частной корреляции примет вид:

$$r_{yx_1 \cdot x_2 \ldots x_p} = \sqrt{1 - \frac{1 - R^2_{yx_1 x_2 \ldots x_p}}{1 - R^2_{yx_2 \ldots x_p}}}, \qquad (57)$$

Данный коэффициент частной корреляции позволяет измерить тесноту связи между y и x_1 при неизменном уровне всех других факторов, включенных в уравнение регрессии.

Порядок частного коэффициента корреляции определяется количеством факторов, влияние которых исключается. Например, $r_{yx_1 \cdot x_2}$ - коэффициент частной корреляции первого порядка. Соответственно коэффициенты парной корреляции называются коэффициентами нулевого порядка. Коэффициенты частной корреляции более высоких порядков можно определить через коэффициенты частной корреляции более низких порядков по рекуррентной формуле

$$r_{yx_i \cdot x_1 x_2 \ldots x_p} = \frac{r_{yx_i \cdot x_1 x_2 \ldots x_{p-1}} - r_{yx_p \cdot x_1 x_2 \ldots x_{p-1}} \cdot r_{x_i x_p \cdot x_1 x_2 \ldots x_{p-1}}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_p \cdot x_1 x_2 \ldots x_{p-1}}\right) \cdot \left(1 - r^2_{x_i x_p \cdot x_1 x_2 \ldots x_{p-1}}\right)}}, \qquad (58)$$

При двух факторах и i=1 данная формула примет вид:

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1 x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_2}\right) \cdot \left(1 - r^2_{x_1 x_2}\right)}}. \qquad (59)$$

Соответственно при i=2 и двух факторах частный коэффициент корреляции y с фактором x_2 можно определить по формуле

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1 x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_1}\right) \cdot \left(1 - r^2_{x_1 x_2}\right)}}. \qquad (60)$$

Для уравнения регрессии с тремя факторами частные коэффициенты корреляции второго порядка определяются на основе частных коэффициентов корреляции первого порядка. Так, по уравнению

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \varepsilon$$

возможно исчисление трех частных коэффициентов корреляции второго порядка:

$$r_{yx_1 \cdot x_2 x_3};\ r_{yx_2 \cdot x_1 x_3};\ r_{yx_3 \cdot x_1 x_2},$$

каждый из которых определяется по рекуррентной формуле. Например, при i=1 имеем формулу для расчета $r_{yx_1 \cdot x_2 x_3}$, а именно

$$r_{yx_1 \cdot x_2 x_3} = \frac{r_{yx_1 x_2} - r_{yx_3 \cdot x_2} \cdot r_{x_1 x_2 \cdot x_3}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_3 \cdot x_2}\right) \cdot \left(1 - r^2_{x_1 x_3 \cdot x_2}\right)}}. \qquad (61)$$

Пример. Предположим, изучается зависимость тиража газеты y от ожидаемого дохода от распродажи газеты x_1, количества персонала редакции x_2, рейтинга газеты среди других газет, распространяемых в регионе x_3. В этом случае матрица парных коэффициентов корреляции составила:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ r_{yx_1} = 0{,}69 & 1 & & \\ r_{yx_2} = 0{,}58 & r_{x_1 x_2} = 0{,}46 & 1 & \\ r_{yx_3} = 0{,}55 & r_{x_1 x_3} = 0{,}50 & r_{x_2 x_3} = 0{,}41 & 1 \end{bmatrix}.$$

Исходя из этих данных, найдем частные коэффициенты корреляции первого и второго порядка.

Приведем частные коэффициенты корреляции первого порядка зависимости y от x_1 и x_2.

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1 x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_2}\right) \cdot \left(1 - r^2_{x_1 x_2}\right)}} = \frac{0{,}69 - 0{,}58 \cdot 0{,}46}{\sqrt{(1 - 0{,}58^2)(1 - 0{,}46^2)}} = 0{,}585,$$

т.е. при закреплении фактора x_2 на постоянном уровне корреляция y и x_1 оказывается более низкой (0,585 против 0,69);

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1 x_2}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_1}\right) \cdot \left(1 - r^2_{x_1 x_2}\right)}} = \frac{0{,}58 - 0{,}69 \cdot 0{,}46}{\sqrt{(1 - 0{,}69^2)(1 - 0{,}46^2)}} = 0{,}409,$$

т.е. при закреплении фактора x_1 на постоянном уровне влияние фактора x_2 на y оказывается менее сильным (0,409 против 0,58);

$$r_{yx_1 \cdot x_3} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_3} \cdot r_{x_1 x_3}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_3}\right) \cdot \left(1 - r^2_{x_1 x_3}\right)}} = \frac{0{,}69 - 0{,}55 \cdot 0{,}50}{\sqrt{(1 - 0{,}55^2)(1 - 0{,}50^2)}} = 0{,}574,$$

т.е. при закреплении фактора x_3 на постоянном уровне влияние фактора x_1 на y несколько снизилось по сравнению с парной корреляцией (0,574 против 0,69) ввиду некоторой связи факторов x_1 и x_3;

$$r_{yx_2 \cdot x_3} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx_1}^2\right) \cdot \left(1 - r_{x_1x_2}^2\right)}} = \frac{0{,}58 - 0{,}55 \cdot 0{,}41}{\sqrt{(1 - 0{,}55^2)(1 - 0{,}41^2)}} = 0{,}465,$$

т.е. при закреплении фактора x_3 на постоянном уровне влияние на y фактора x_2 оказалось несколько менее сильным (0,465 против 0,58);

$$r_{yx_3 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_3} - r_{yx_1} \cdot r_{x_3x_1}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx_1}^2\right) \cdot \left(1 - r_{x_3x_1}^2\right)}} = \frac{0{,}55 - 0{,}69 \cdot 0{,}50}{\sqrt{(1 - 0{,}69^2)(1 - 0{,}50^2)}} = 0{,}327,$$

т.е. корреляция фактора x_3 с y снизилась при фиксированном влиянии на y фактора x_1 (0,55 и 0,327);

$$r_{yx_3 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_3} - r_{yx_2} \cdot r_{x_3x_2}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx_2}^2\right) \cdot \left(1 - r_{x_3x_2}^2\right)}} = \frac{0{,}55 - 0{,}58 \cdot 0{,}41}{\sqrt{(1 - 0{,}58^2)(1 - 0{,}41^2)}} = 0{,}420,$$

т.е. при закреплении фактора x_2 на постоянном уровне влияние фактора x_3 на y оказалось менее значительным (0,420 и 0,55).

Приведем частные коэффициенты корреляции второго порядка.

$$r_{yx_1 \cdot x_2x_3} = \frac{r_{yx_1 \cdot x_2} - r_{yx_3 \cdot x_2} \cdot r_{x_1x_3 \cdot x_2}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx_3 \cdot x_2}^2\right) \cdot \left(1 - r_{x_1x_3 \cdot x_2}^2\right)}} = \frac{0{,}585 - 0{,}420 \cdot 0{,}385}{\sqrt{(1 - 0{,}420^2)(1 - 0{,}385^2)}} = 0{,}505,$$

При фиксированном влиянии факторов x_2 и x_3 корреляция y с x_1, оказалась еще меньше, чем при частной корреляции первого порядка (при закреплении фактора x_2): 0,69; 0,585 и 0,505.

$$r_{yx_2 \cdot x_1x_3} = \frac{r_{yx_2 \cdot x_1} - r_{yx_3 \cdot x_1} \cdot r_{x_2x_3 \cdot x_1}}{\sqrt{\left(1 - r_{yx_3 \cdot x_1}^2\right) \cdot \left(1 - r_{x_2x_3 \cdot x_1}^2\right)}} = \frac{0{,}409 - 0{,}327 \cdot 0{,}234}{\sqrt{(1 - 0{,}327^2)(1 - 0{,}234^2)}} = 0{,}362.$$

Корреляция фактора x_2 с y снизилась до 0,409 при элиминировании фактора x_1 и до 0,362 при элиминировании двух факторов – x_1 и x_3.

$$r_{yx_3 \cdot x_1 x_2} = \frac{r_{yx_3 \cdot x_1} - r_{yx_2 \cdot x_1} \cdot r_{x_2 x_3 \cdot x_1}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{yx_2 \cdot x_1}\right) \cdot \left(1 - r^2_{x_2 x_3 \cdot x_1}\right)}} = \frac{0{,}327 - 0{,}409 \cdot 0{,}234}{\sqrt{(1 - 0{,}409^2)(1 - 0{,}234^2)}} = 0{,}261.$$

Корреляция y с x_1 снизилась с 0,55 в парной регрессии до 0,327 при закреплении на постоянном уровне фактора x_1 и до 0,261 при одновременном закреплении на постоянном уровне факторов x_1 и x_2. Частная корреляция второго порядка зависимости y с факторами x_1, x_2 и x_3 оказалась значительно более низкой - 0,505; 0,362 и 0,261 против 0,69; 0,58 и 0,55 для парной регрессии.

Рассчитанные по рекуррентной формуле частные коэффициенты корреляции изменяются в пределах от -1 до +1, а по формулам через множественные коэффициенты детерминации - от 0 до 1. Сравнение их друг с другом позволяет ранжировать факторы по тесноте их связи с результатом. Частные коэффициенты корреляции, подтверждая ранжировку факторов по их воздействию на результат, на основе стандартизованных коэффициентов регрессии (β - коэффициентов) в отличие от последних дают конкретную меру тесноты связи каждого фактора с результатом в чистом виде. Если из стандартизованного уравнения регрессии $\hat{t}_y = \beta_{x_1} t_{x_1} + \beta_{x_2} t_{x_2} + \beta_{x_3} t_{x_3}$ следует, что $\beta_{x_1} > \beta_{x_2} > \beta_{x_3}$, т.е. по силе влияния на результат порядок факторов таков: x_1, x_2, x_3, то этот же порядок факторов определяется и по соотношению частных коэффициентов корреляции, $r_{yx_1 \cdot x_2 x_3} > r_{yx_2 \cdot x_1 x_3} > r_{yx_3 \cdot x_1 x_2}$..

Согласованность частной корреляции и стандартизованных коэффициентов регрессии наиболее отчетливо видна из сопоставления их формул при двухфакторном анализе. Для уравнения регрессии в стандартизованном масштабе $\hat{t}_y = \beta_{x_1} t_{x_1} + \beta_{x_2} t_{x_2}$ β-коэффициенты могут быть определены по формулам, вытекающим из решения системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \beta_{x_1} = \dfrac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r^2_{x_1x_2}}, \\ \beta_{x_2} = \dfrac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r^2_{x_1x_2}}. \end{cases} \qquad (62)$$

Сравнивая их с рекуррентными формулами расчета частных коэффициентов корреляции $r_{yx_1 \cdot x_2}$ и $r_{yx_2 \cdot x_1}$, можно видеть, что

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \beta_{x_1} \cdot \sqrt{\frac{1 - r^2_{x_1x_2}}{1 - r^2_{yx_2}}}, \quad r_{yx_2 \cdot x_1} = \beta_{x_2} \cdot \sqrt{\frac{1 - r^2_{x_1x_2}}{1 - r^2_{yx_1}}}. \qquad (63)$$

Иными словами, в двухфакторном анализе частные коэффициенты корреляции - это стандартизованные коэффициенты регрессии, умноженные на корень квадратный из соотношения долей остаточных дисперсий фиксируемого фактора на фактор и на результат.

В эконометрике частные коэффициенты корреляции обычно не имеют самостоятельного значения. В основном их используют на стадии формирования модели, в частности в процедуре отсева факторов. Так, строя многофакторную модель, например, методом исключения переменных, на первом шаге определяется уравнение регрессии с полным набором факторов и рассчитывается матрица частных коэффициентов корреляции. На втором шаге отбирается фактор с наименьшей и несущественной по *t*-критерию Стьюдента величиной показателя частной корреляции. Исключив его из модели, строится новое уравнение регрессии. Процедура продолжается до тех пор, пока не окажется, что все частные коэффициенты корреляции существенно отличаются от нуля. Если исключен несущественный фактор, то множественные коэффициенты детерминации на двух смежных шагах построения регрессионной модели почти не отличаются друг от друга, т.е. $R^2_{p+1} \approx R^2_p$, где p - число факторов.

Из приведенных ранее формул частных коэффициентов корреляции видна связь этих показателей с совокупным коэффициентом корреляции. Зная частные коэффициенты корреляции (последовательно первого, второго и более высокого порядка), можно определить совокупный коэффициент корреляции по формуле

$$R_{yx_1x_2\ \ x_p} = \left(1-(1-r^2_{yx_1})\cdot(1-r^2_{yx_2\cdot x_1})\cdot(1-r^2_{yx_3\cdot x_1x_2})\ldots(1-r^2_{yx_p\cdot x_1x_2\ldots x_{p-1}})\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (64)$$

При полной зависимости результативного признака от исследуемых факторов коэффициент совокупного их влияния равен единице. Из единицы вычитается доля остаточной вариации результативного признака ($1-r^2$), обусловленная последовательно включенными в анализ факторами. В результате подкоренное выражение характеризует совокупное действие всех исследуемых факторов.

В рассмотренном примере с тремя факторами величина коэффициента множественной корреляции составила:

$$R_{yx_1x_2x_3} = \left(1-(1-0{,}69^2)\cdot(1-0{,}409^2)\cdot(1-0{,}261^2)\right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}770.$$

Величина множественного коэффициента корреляции всегда больше (или равна) максимального частного коэффициента корреляции, что имеет место в нашем примере: 0,770 по сравнению с 0,505.

9.8. Проверка надежности результатов корреляционного и регрессионного анализа

Анализируемые ряды динамики являются почти всегда выборками из более длинных рядов. Поэтому необходима всесторонняя проверка надежности результатов корреляционного и регрессионного анализа. Основой проверки является теория выборочного наблюдения.

Значение коэффициента корреляции r является случайной величиной, которая зависит от объема выборки. При увеличении объема числовой информации распределение

выборочного коэффициента корреляции приближается к нормальному. Некоторые авторы считают, что распределение коэффициента корреляции не отличается от нормального, если объем выборки N=500. Другие считают допустимым N=200 или N=100.

Это обстоятельство является причиной невозможности использования формулы квадратической ошибки коэффициента корреляции

$$\sigma_r = \frac{1-\rho^2}{\sqrt{N-1}}, \qquad (65)$$

где ρ - коэффициент корреляции в генеральной совокупности.

Вряд ли удастся получить достоверные ряды динамики, содержащие 500 уровней, но в противном случае распределение r может существенно отличаться от нормального, и величина квадратической ошибки оказывается ненадежной.

Другим неприятным обстоятельством является то, что при высоких значениях коэффициента корреляции ($r \to \pm 1$) распределение r даже при больших выборках может существенно отличаться от нормального.

Наконец, коэффициент корреляции ρ генеральной совокупности обычно неизвестен. Вместо него можно пользоваться выборочным коэффициентом r.

В практике анализа используемые ряды динамики представляют собой малые выборки. Следует отметить, что оценки, полученные на основе коротких рядов, не имеют особенного значения в качестве характеристик фактических параметров. Одни оценки могут быть лучше других, но ни одна из них не является совершенно надежной.

Сказанное особенно относится к выборкам из совокупностей, не подчиненных нормальному распределению.

Несмотря на это, необходима оценка результатов анализа даже при малых выборках. При этом конечной целью яв-

ляется не оценивание фактических параметров (коэффициентов корреляции и регрессии), а проверка, варьируют ли найденные параметры в некотором интервале за счет влияния случайных факторов или нет.

Например, если надо проверить надежность коэффициента корреляции, то это не означает, что мы должны определить его величину в генеральной совокупности. Наша цель имеет более общий характер: можем ли мы получить такой коэффициент корреляции на основе выборки из совокупности, где корреляции нет, т. е. проверка надежности корреляции в совокупности.

Полученные результаты и выводы являются правильными только при нормально распределенных совокупностях. Но практические результаты показывают, что допустимо некоторое удаление от нормального распределения. Если есть основание предполагать, что распределение существенно отличается от нормального (например, *U*-или *J*-образное), то результаты корреляционного и регрессионного анализа не противостоят критике.

Вышеизложенное, конечно, не означает, что при распределениях, отличных от нормального, связи между явлениями нет. Дело в том, что пока еще нет методики исследования связей в таких совокупностях.

И еще одно обстоятельство. При малых выборках надежность оценивается с более низкой вероятностью, чем при больших выборках. Обычно ограничиваются 95%-ной вероятностью оценки (вероятность ошибки - уровень значимости - 5%), но в рядах динамики, характеризующих сельскохозяйственное производство, нередко приходится ограничиваться вероятностью в пределах 80-90%. В таких случаях исследователь идет на риск принятия неправильных решений, но в большинстве случаев это оправдывает себя. В дальнейшем рассмотрим некоторые критерии, используемые при проверке надежности корреляционного и регрессионного анализа.

***Z*-критерий Фишера**. Как мы уже убедились, применение классической среднеквадратической ошибки коэффициента корреляции при рядах динамики является малоэффективным. Английским статистиком Р.А.Фишером разработан метод, в котором для проверки надежности используется логарифмическая функция *r*

$$Z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right). \qquad (66)$$

Распределение *Z* является близким к нормальному при малой выборке. Ф. Миллс приводит графики распределения *r* и *z* при N=12 и ρ=0,8.

Рассматривая эти графики, видим, что, в то время как коэффициент корреляции *r* распределен крайне неравномерно, распределение *z* является приблизительно нормальным.

Среднеквадратическая ошибка *z* определяется по формуле

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{N-3}}. \qquad (67)$$

Формула (67) показывает, что среднеквадратическая ошибка σ_z зависит только от объема выборки N, т.е. распределение *z* не зависит от тесноты связи.

Переход от *r* к *z* осуществляется по соответствующим таблицам и проверка надежности не является трудной.

Z-критерий Фишера применим и в других целях, например:

1) для оценки существенности различия генерального и выборочного коэффициентов корреляции;

2) для оценки существенности различия двух выборочных коэффициентов корреляции;

3) для определения наилучшего коэффициента корреляции, если выборка проведена в одной и той же совокупности.

Пример. Проверим надежность линейного коэффициента корреляции между рядами динамики остатков валового сбора и урожайности пшеницы.

Коэффициенту корреляции r=0,67 соответствует табличное значение z_r=0,8107. Среднеквадратическая ошибка σ_z=0,25. Отношение z к среднеквадратической ошибке равно 0,8107:0,25=3,2428. Из таблицы интеграла вероятностей получим, что вероятность существования линейной связи равна 0,9988. Следовательно, между исследуемыми рядами динамики существует линейная связь.

***t*-критерий Стьюдента**. Большое значение при оценке различных параметров на основе малой выборки имеет *t*-распределение Стьюдента, разработанное в начале двадцатого столетия английским математиком Уильямом Госсетом, псевдонимом которого был Стьюдент.

t-распределение Стьюдента предназначено специально для малой выборки. *t*-распределение встречается при отношении величин, где числитель имеет распределение, похожее на распределение средней арифметической, а знаменатель-распределение среднеквадратического отклонения в выборках из нормально распределенных совокупностей, так как значения t определяются формулой

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\sigma_{\bar{x}}} \sqrt{\nu + 1}, \qquad (68)$$

где m- генеральная средняя; ν - число степеней свободы (N-1); $\bar{x}, \sigma_{\bar{x}}$ - средняя арифметическая и среднеквадратическое отклонение выборочной совокупности соответственно.

Рассмотрим применение *t*-критерия для проверки надежности результатов корреляционного анализа.

Для проверки существенности парного коэффициента корреляции определяется величина

$$t_r = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}}, \qquad (69)$$

имеющая t-распределение с N-2 степенями свободы. Проверка нулевой гипотезы (отсутствие линейной корреляции в генеральной совокупности) состоит в сравнивании значения t_r с табличным значением t при желаемой вероятности и числе степеней свободы N-2. Если $t_r > t$, нулевую гипотезу нельзя принимать и, следовательно, в генеральной совокупности существует линейная корреляция, надежной характеристикой которой является линейный коэффициент корреляции r.

Аналогично проверяется надежность индекса корреляции R при нелинейной связи. В этом случае заменяется коэффициент корреляции в формуле (69) r индексом корреляции R.

Коэффициент множественной корреляции R имеет среднеквадратическую ошибку

$$\sigma_R = \frac{1-R^2}{\sqrt{N-n-1}}, \qquad (70)$$

где n - число коэффициентов регрессии.

Таким образом, эмпирическое значение t-критерия определяется по формуле

$$t_R = \frac{R\sqrt{N-n-1}}{1-R^2}, \qquad (71)$$

где $N-n-1$ -число степеней свободы.

Проверка надежности осуществляется опять же путем сравнения эмпирического значения t_R с табличным.

Надежность коэффициентов регрессии проверяется с помощью величины

$$t_{a_j} = \frac{a_j}{\sigma_{a_j}}, \qquad (72)$$

имеющей t-распределение со степенями свободы N-2. При простой линейной корреляции среднеквадратическая ошибка коэффициента регрессии a_1 определяется по формуле

$$\sigma_{a_1} = \sqrt{\frac{\sum(y-\hat{y}_x)^2}{(N-2)\sum(x-\bar{x})^2}}. \qquad (73)$$

При множественной корреляции среднеквадратическая ошибка коэффициента регрессии a_j определяется по формуле

$$\sigma_{a_j} = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y}_x)^2}{N - n - 1}} c_{jj}, \qquad (74)$$

где c_{jj} - диагональный элемент матрицы, обратной матрице системы нормальных уравнений.

Величина t_{a_j} при множественной корреляции имеет t-распределение с N-n-1 степенями свободы.

Целесообразным является определение доверительных границ коэффициентов регрессии по формуле

$$a_j \pm t\sigma_{a_j}, \qquad (75)$$

где t - табличные значения с вероятностью α и степенями свободы N-n-1.

Если в полученном интервале есть 0, то соответствующий коэффициент регрессии является ненадежным. В таком случае следует определить новое уравнение регрессии, не содержащее ненадежного показателя x_j, и вся процедура проверки надежности приводится вновь.

Если ненадежными оказываются сразу два или несколько коэффициентов регрессии, то из уравнения регрессии удаляется тот ненадежный фактор, которому соответствует минимальное значение t_{a_j}. Затем определяют параметры нового уравнения регрессии. Процедура проверки надежности и построения нового уравнения повторяется до тех пор, пока все коэффициенты регрессии не окажутся надежными.

Пример. Проверим надежность линейного коэффициента корреляции между рядами динамики остатков валового сбора и урожайности пшеницы ($z = 0{,}6726$, $N = 19$, $r^2 = 0{,}4524$)

$$t_r = \frac{0{,}6726\sqrt{19-2}}{\sqrt{1-0{,}4524}} = \frac{2{,}7711}{0{,}74} = 3{,}7447.$$

В таблице теоретических значений t-критерия 17 степеням свободы с вероятностью 99% соответствует величина

I 2,898. Следовательно, можем сказать, что между исследуемыми явлениями: существует тесная линейная связь.

F-критерий. *F*-критерий разработан английским статистиком Р. Фишером для оценки существенности отношения дисперсий, но применение *F*-критерия возможно и при, проверке результатов корреляционного анализа, так как, анализ корреляции тесно связан с дисперсионным анализом. Таблицы *F*-распределения разработаны для степеней свободы k_1, k_2 с вероятностью α.

F-критерий используется для решения различных задач. Правильность выбранной формы связи проверяется с помощью величины

$$F = \frac{\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2 (N-n)}{(n-1)\sum(y-\hat{y}_x)^2}. \qquad (76)$$

Степени свободы $k_1=n-1$ и $k_2=N-n$. Если эмпирическое значение *F*, определенное по формуле (76), больше табличного, т.е. $F>Fa$, то форму связи можно считать правильной. Величина *F* является отношением дисперсий, первая из которых

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum(\hat{y}_x - \bar{y})^2}{n-1} \qquad (77)$$

характеризует среднюю вариацию, соответствующую регрессии, а вторая

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum(y-\hat{y}_x)^2}{N-n} \qquad (78)$$

остаточную дисперсию (средний квадрат отклонений фактических значений от теоретических, определенных по модели).

Проверка правильности выбранной формы связи возможна также путем вычисления отношения общей и остаточной дисперсий:

$$F = \frac{\sum(y-\bar{y})^2 (N-n)}{(N-1)\sum(y-\hat{y}_x)^2}. \qquad (79)$$

Если $F>F_a$, то можно считать выбранную форму связи правильной.

Может случиться, что F-критерий считает одновременно правильной различные формы связи, например линейную и параболическую. Дело в том, что кривизна параболы, которую характеризует коэффициент a_2, может быть незначительной на исследуемом отрезке времени. В таком случае считают правильной ту форму связи, которой соответствует максимальное значение эмпирического критерия.

Для проверки надежности коэффициента множественной корреляции используется величина

$$F = \frac{R^2(N-n)}{(1-R^2)(n-1)}. \qquad (80)$$

Если $F>F_a$, можно считать коэффициент корреляции надежным со степенями свободы $k_1=n-1$, $k_2=N-n$ и уровнем значимости a.

Пример . Проверим надежность коэффициента линейной корреляции между остатками валового сбора и урожайности пшеницы. Если $R^2=0{,}4524$, $N=19$, $n=2$, тогда F равно

$$F = \frac{0{,}4524\cdot(19-2)}{(1-0{,}4524)(2-1)} = 14{,}05.$$

Из таблицы теоретических значений F-критерия получим $F_{0,95}$ = 8,40. Следовательно, F-критерий указывает на существенное отличие от нуля коэффициента линейной корреляции и можем предполагать наличие линейной связи между соответствующими генеральными совокупностями.

9.9. Ложная корреляция

Впервые рассматривалась проблема ложной корреляции английским статистиком К.Пирсоном в 1907 г. По его утверждению ложная корреляция возникает "в случае, когда числовые данные о коррелирующих явлениях представлены в виде относительных величин, причем последние определены в отношении к одному и тому же третьему явлению

$\left(\frac{x_1}{x_1} \text{ и } \frac{x_2}{x_3}\right)$. К.Пирсон считал, что по таким данным определяемый коэффициент корреляции может иметь высокие значения даже в том случае, если в действительности между исследуемыми явлениями связь полностью отсутствует.

Против пирсоновской теории ложной корреляции выступили другой английский статистик Дж.Э. Юл и советский статистик Б.С. Ястремский, которые на основе ряда примеров отчетливо доказали, что «...устанавливаемая Пирсоном противоположность между «ложной» и «истинной» корреляцией - только кажущаяся противоположность».

Более подробно рассматривается проблема ложной корреляции в работе известного советского статистика Н.С. Четверикова, где анализируются пять возможных случаев ложной корреляции.

1. Ложная корреляция встречается в таком случае, когда «...распределение численностей *A* по значениям второго переменного зависит от усмотрения исследователя или от обстоятельств, совершенно посторонних изучаемой связи...».

В экономических исследованиях может возникать ложная корреляция первого типа в случае, когда исследователь при анализе связи произвольно выбирает тот или иной отрезок времени, в течение которого значения явлений варьируют параллельно в результате совпадения случайных обстоятельств.

2. Второй тип ложной корреляции обусловлен наличием тенденций в исследуемых рядах, а также наличием периодических или сезонных волн. Этот тип ложной корреляции является опаснейшим в экономических исследованиях, так как почти все ряды динамики содержат эволюторную компоненту - тенденцию.

3. В некоторых случаях ложная корреляция возникает вследствие стратификации - неоднородности исследуемого материала. Если в совокупности исходных данных встреча-

ются некоторые аномальные точки, где значения исследуемых явлений существенно отличаются от основной массы данных, среднеквадратические отклонения не являются объективными характеристиками вариации, вследствие чего искажается теснота связи.

4. Случай, когда данные представляют собой относительные величины, определенные в отношении к одному и тому же явлению, уже описан выше. Н.С. Четвериков при анализе этого вида ложной корреляции прямо не высказывается против или за теории Пирсона. Его рассуждения оставляют впечатление, что наличие одинаковой составляющей в значениях исследуемых явлений иногда может быть причиной ложной корреляции, а иногда нет.

5. Наконец, ложная корреляция обязательно наблюдается в случаях, когда совокупности данных об исследуемых явлениях содержат ошибки регистрации.

В заключение короткого обзора проблемы ложной корреляции приведем слова Н.С. Четверикова: решать задачу, в каком случае и что именно следует считать ложной корреляцией, можно, только тщательно продумывая вопросы; каково существо задачи, в чем ищется предполагаемая причинная связь; в какой форме должны быть даны единицы, подлежащие исследованию; в какой мере вводимые в исследование вспомогательные величины могут своими собственными случайными колебаниями вызвать искажение изучаемой связи, учитывая, что привносимые колебания для обеих сопоставляемых переменных либо тождественно одинаковы, либо между собой более или менее коррелированны.

ГЛАВА 10. СИСТЕМЫ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

10.1. Общее понятие о системах уравнении, используемых в эконометрике

Объектом статистического изучения в социальных науках являются сложные системы. Измерение тесноты связей между переменными, построение изолированных уравнений регрессии недостаточно для описания таких систем и объяснения механизма их функционирования. При использовании отдельных уравнений регрессии, например для экономических расчетов, в большинстве случаев предполагается, что аргументы (факторы) можно изменять независимо друг от друга. Однако это предположение является очень грубым: практически изменение одной переменной, как правило, не может происходить при абсолютной неизменности других. Ее изменение повлечет за собой изменения во всей системе взаимосвязанных признаков. Следовательно, отдельно взятое уравнение множественной регрессии не может характеризовать истинные влияния отдельных признаков на вариацию результирующей переменной. Именно поэтому в последние десятилетия в экономических, биометрических и социологических исследованиях важное место заняла проблема описания структуры связей между переменными системой так называемых одновременных уравнений, называемых также структурными уравнениями. Так, если изучается модель спроса как соотношение цен и количества потребляемых товаров, то одновременно для прогнозирования спроса необходима модель предложения товаров, в которой рассматривается также взаимосвязь между количеством и ценой предлагаемых благ. Это позволяет достичь равновесия между спросом и предложением.

Приведем другой пример.

При оценке эффективности производства нельзя руководствоваться только моделью рентабельности. Она должна быть дополнена моделью производительности труда, а также моделью себестоимости единицы продукции.

В еще большей степени возрастает потребность в использовании системы взаимосвязанных уравнений, если мы переходим от исследований на микроуровне к макроэкономическим расчетам. Модель национальной экономики включает в себя систему уравнений: функции потребления, инвестиций заработной платы, а также тождество доходов и т.д. Это связано с тем, что макроэкономические показатели, являясь обобщающими показателями состояния экономики, чаще всего взаимозависимы. Так, расходы на конечное потребление в экономике зависят от валового национального дохода. Вместе с тем величина валового национального дохода рассматривается как функция инвестиций.

Система уравнений в эконометрических исследованиях может быть построена по-разному.

Возможна система независимых уравнений, когда каждая зависимая переменная (y) рассматривается как функция одного и того же набора факторов (x):

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m + \varepsilon_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Набор факторов x_i в каждом уравнении может варьировать. Так, модель вида

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\ y_2 &= f(x_1, x_3, x_4, x_5) \\ y_3 &= f(x_2, x_3, x_5) \\ y_4 &= f(x_3, x_4, x_5) \end{aligned} \qquad (2)$$

также является системой независимых уравнений с тем лишь отличием, что в ней набор факторов видоизменяется в уравнениях, входящих в систему. Отсутствие того или иного фактора в уравнении системы может быть следствием как экономической нецелесообразности его включения в модель, так и несущественности его воздействия на результативный признак (незначимо значение *t*-критерия или частного *F*-критерия для данного фактора).

Примером такой модели может служить модель экономической эффективности сельскохозяйственного производства, где в качестве зависимых переменных выступают показатели, характеризующие эффективность сельскохозяйственного производства, - продуктивность коров, себестоимость 1 ц. молока, а в качестве факторов - специализация хозяйства, количество голов на 100 га пашни, затраты труда и т.п.

Каждое уравнение системы независимых уравнений может рассматриваться самостоятельно. Для нахождения его параметров используется метод наименьших квадратов. По существу, каждое уравнение этой системы является уравнением регрессии. Поскольку никогда нет уверенности, что факторы полностью объясняют зависимые переменные, то в уравнениях присутствует свободный член a_0. Так как фактические значения зависимой переменной отличаются от теоретических на величину случайной ошибки, то в каждом уравнении присутствует величина случайной ошибки.

В итоге система независимых уравнений при трех зависимых переменных и четырех факторах примет вид:

$$\begin{cases} y_1 = a_{01} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \varepsilon_1, \\ y_2 = a_{02} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \varepsilon_2, \\ y_3 = a_{02} + a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \varepsilon_3. \end{cases} \qquad (3)$$

Однако если зависимая переменная у одного уравнения выступает в виде фактора x в другом уравнении, то исследователь может строить модель в виде системы рекурсивных уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3m}x_m + \varepsilon_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn-1}y_{n-1} + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m + \varepsilon_n. \end{cases} \quad (4)$$

В данной системе зависимая переменная y включает в каждое последующее уравнение в качестве факторов все зависимые переменные предшествующих уравнений наряду с набором собственно факторов x. Примером такой системы может служить модель производительности труда и фондоотдачи вида:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2, \end{cases} \quad (5)$$

где y_1 - производительность труда; y_2 - фондоотдача; x_1 - фондовооруженность труда; x_2 - энерговооруженность труда; x_3 - квалификация рабочих.

Как и в предыдущей системе, каждое уравнение может рассматриваться самостоятельно, и его параметры определяются методом наименьших квадратов (МНК). [24].

Наибольшее распространение в эконометрических исследованиях получила система взаимозависимых уравнений. В ней одни и те же зависимые переменные в одних уравнениях входят в левую часть, а в других уравнениях - в правую часть системы:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + \ldots + b_{1n}y_n + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + b_{23}y_3 + \ldots + b_{2n}y_n + a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m + \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{nn-1}y_{n-1} + a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m + \varepsilon_n. \end{cases} \quad (6)$$

Система взаимозависимых уравнений получила название системы совместных, одновременных уравнений. Тем самым подчеркивается, что в системе одни и те же переменные (y) одновременно рассматриваются как зависимые в одних уравнениях и как независимые в других. В эконометрике эта

система уравнений называется также структурной формой модели. В отличие от предыдущих систем каждое уравнение системы одновременных уравнений не может рассматриваться самостоятельно, и для нахождения его параметров традиционный МНК неприменим. С этой целью используются специальные приемы оценивания.

Примером системы одновременных уравнений может служить модель динамики цены и заработной платы вида

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2, \end{cases} \quad (7)$$

где y_1 - темп изменения месячной заработной платы; y_2 - темп изменения цен; x_1 - процент безработных; x_2 - темп изменения постоянного капитала; x_3 - темп изменения цен на импорт сырья.

10.2. Структурная и приведенная формы модели

Система совместных, одновременных уравнений (или структурная форма модели) обычно содержит эндогенные и экзогенные переменные.

Эндогенные переменные обозначены в приведенной ранее системе одновременных уравнений как у. Это зависимые переменные, число которых равно числу уравнений в системе.

Экзогенные переменные обозначаются обычно как ас Это предопределенные переменные, влияющие на эндогенные переменные, но не зависящие от них.

Простейшая структурная форма модели имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2, \end{cases} \quad (8)$$

где y - эндогенные переменные; x - экзогенные переменные.

Классификация переменных на эндогенные и экзогенные зависит от теоретической концепции принятой модели. Экономические переменные могут выступать в одних моделях как эндогенные, а в других как экзогенные переменные. Внеэкономические переменные (например, климатические условия) входят в систему как экзогенные переменные. В качестве экзогенных переменных могут рассматриваться значения эндогенных переменных за предшествующий период времени (лаговые переменные). Так, потребление текущего года (y_t) может зависеть не только от ряда экономических факторов, но и от уровня потребления в предыдущем году (y_{t-1}).

Структурная форма модели позволяет увидеть влияние изменений любой экзогенной переменной на значения эндогенной переменной. Целесообразно в качестве экзогенных переменных выбирать такие переменные, которые могут быть объектом регулирования. Меняя их и управляя ими, можно заранее иметь целевые значения эндогенных переменных.

Структурная форма модели в правой части содержит при эндогенных и экзогенных переменных коэффициенты b_i и a_j (b_i - коэффициент при эндогенной переменной, a_j - коэффициент при экзогенной переменной), которые называются структурными коэффициентами модели. Все переменные в модели выражены в отклонениях от среднего уровня, т.е. под x подразумевается $x-\bar{x}$, а под y - соответственно $y-\bar{y}$. Поэтому свободный член в каждом уравнении системы отсутствует.

Использование МНК для оценивания структурных коэффициентов модели дает, как принято считать в теории, смещенные и несостоятельные оценки. Поэтому обычно для определения структурных коэффициентов модели структурная форма модели преобразуется в приведенную форму модели.

Приведенная форма модели представляет собой систему линейных функций эндогенных переменных от экзогенных:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + ... + \delta_{1m}x_m, \\ \hat{y}_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + ... + \delta_{2m}x_m, \\ ..... \\ \hat{y}_n = \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + ... + \delta_{nm}x_m, \end{cases} \quad (9)$$

где δ_i - коэффициенты приведенной формы модели.

По своему виду приведенная форма модели ничем не отличается от системы независимых уравнений, параметры которой оцениваются традиционным МНК. Применяя МНК, можно оценить δ, а затем оценить значения эндогенных переменных через экзогенные.

Коэффициенты приведенной формы модели представляют собой нелинейные функции коэффициентов структурной формы модели. Рассмотрим это положение на примере простейшей структурной модели, выразив коэффициенты приведённой формы модели (δ_{ij}) через коэффициенты структурной модели (a_i и b_i). Для упрощения в модель не введены случайные переменные.

Для структурной модели вида

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (10)$$

приведенная форма модели имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2, \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2, \end{cases} \quad (11)$$

в которой y_2 из первого уравнения структурной модели можно выразить следующим образом:

$$y_2 = \frac{y_1 - a_{11}x_1}{b_{12}}.$$

Тогда система одновременных уравнений будет представлена как

$$\begin{cases} y_2 = \dfrac{y_1 - a_{11}x_1}{b_{12}}, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2. \end{cases}$$

Отсюда имеем равенство:

$$\frac{y_1 - a_{11}x_1}{b_{12}} = b_{21}y_1 + a_{22}x_2,$$

или

$$y_1 - a_{11}x_1 = b_{12}b_{21}y_1 + b_{12}a_{22}x_2.$$

Тогда

$$y_1 - b_{12}b_{21}y_1 = a_{11}x_1 + b_{12}a_{22}x_2.$$

или

$$y_1 = \frac{a_{11}}{1 - b_{12}b_{21}}x_1 + \frac{a_{22}b_{12}}{1 - b_{12}b_{21}}x_2.$$

Таким образом, мы представили первое уравнение структурной формы модели в виде уравнения приведенной формы модели:

$$y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2.$$

Из уравнения следует, что коэффициенты приведенной фор мы модели представляют собой нелинейные соотношения коэффициентов структурной формы модели, т. е.

$$\delta_{11} = \frac{a_{11}}{1 - b_{12}b_{21}}x_1 \quad \text{и} \quad \delta_{12} = \frac{a_{22}b_{12}}{1 - b_{12}b_{21}}x_2.$$

Аналогично можно показать, что коэффициенты приведенной формы модели второго уравнения системы (δ_{21} и δ_{22}) также нелинейно связаны с коэффициентами структурной модели. Для этого выразим переменную y_1 из второго структурного уравнения модели как

$$y_1 = \frac{y_2 - a_{22}x_2}{b_{21}}.$$

Запишем это выражение y_1 в левой части первого уравнения структурной формы модели:

$$\frac{y_2 - a_{22}x_2}{b_{21}} = b_{12}y_2 + a_{11}x_1.$$

Отсюда

$$y_2 = \frac{a_{11}b_{21}}{1 - b_{12}b_{21}}x_1 + \frac{a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}}x_2,$$

что соответствует уравнению приведенной формы модели:

$$y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2,$$

т.е.

$$\delta_{21} = \frac{a_{11}b_{21}}{1 - b_{12}b_{21}} \quad \text{и} \quad \delta_{22} = \frac{a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}}.$$

Эконометрические модели обычно включают в систему не только уравнения, отражающие взаимосвязи между отдельными переменными, но и выражения тенденции развития явления, а также разного рода тождества. Так, в 1947 г., исследуя линейную зависимость потребления (c) от дохода (y), Т.Хавельмо предложил одновременно учитывать тождество дохода. В этом случае модель имеет вид:

$$\begin{cases} c = a + by, \\ y = c + x, \end{cases}$$

где x - инвестиции в основной капитал и в запасы экспорта и импорта; a и b - параметры линейной зависимости c от y.

Их оценки должны учитывать тождество дохода в отличие от параметров обычной линейной регрессии.

В этой модели две эндогенные переменные - c и y и одна экзогенная переменная x Система приведенных уравнений составит:

$$\begin{cases} c = A_0 + A_1x, \\ y = B_0 + B_1x. \end{cases}$$

Она позволяет получить значения эндогенной переменной c через переменную x. Рассчитав коэффициенты приведенной формы модели (A_0, A_1, B_0, B_1), можно перейти к коэффициентам структурной модели a и b, подставляя в первое

уравнение приведенной формы выражение переменной x из второго уравнения приведенной формы модели. Приведенная форма модели хотя и позволяет получить значения эндогенной переменной через значения экзогенных переменных, аналитически уступает структурной форме модели, так как в ней отсутствуют оценки взаимосвязи между эндогенными переменными.

10.3. Проблема идентификации

При переходе от приведенной формы модели к структурной исследователь сталкивается с проблемой идентификации. Идентификация - это единственность соответствия между приведенной и структурной формами модели.

Рассмотрим проблему идентификации для случая с двумя эндогенными переменными. Пусть структурная модель имеет вид:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m, \\ \hat{y}_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m, \end{cases} \qquad (12)$$

где y_1 и y_2 - совместные зависимые переменные.

Из второго уравнения можно выразить y_1 следующей формулой:

$$y_1 = \frac{y_2}{b_{21}} - \frac{a_{21}}{b_{21}}x_1 - \frac{a_{22}}{b_{21}}x_2 - \ldots - \frac{a_{2m}}{b_{21}}x_m.$$

Тогда в системе имеем два уравнения для эндогенной переменной y_1 с одним и тем же набором экзогенных переменных, но с разными коэффициентами при них:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m, \\ \hat{y}_1 = \frac{y_2}{b_{21}} - \frac{a_{21}}{b_{21}}x_1 - \frac{a_{22}}{b_{21}}x_2 - \ldots - \frac{a_{2m}}{b_{21}}x_m. \end{cases}$$

Наличие двух вариантов для расчета структурных коэффициентов одной и той же модели связано с неполной ее идентификацией. Структурная модель в полном виде, со-

стоящая в каждом уравнении системы из n эндогенных и т экзогенных переменных, содержит $n(n\text{-}1+m)$ параметров. Так, при n=2 и m=3 полный вид структурной модели составит:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \hat{y}_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3. \end{cases} \qquad (13)$$

Как видим, модель содержит восемь структурных коэффициентов, что соответствует выражению $n(n\text{-}1+m)$.

Приведенная форма модели в полном виде содержит *nxm* параметров. Для нашего примера это означает наличие шести коэффициентов приведенной формы модели, В этом можно убедиться, обратившись к приведенной форме модели, которая будет иметь вид:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3, \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3. \end{cases} \qquad (14)$$

Действительно, она включает в себя шесть коэффициентов δ_{ij}.

На основе шести коэффициентов приведенной формы модели требуется определить восемь структурных коэффициентов рассматриваемой структурной модели, что, естественно, не может привести к единственности решения. В полном виде структурная модель содержит большее число параметров, чем приведенная форма модели. Соответственно $n(n-1+m)$ параметров структурной модели не могут быть однозначно определены из *nxm* параметров приведенной формы модели.

Чтобы получить единственно возможное решение для структурной модели, необходимо предположить, что некоторые из структурных коэффициентов модели ввиду слабой взаимосвязи признаков с эндогенной переменной из левой части системы равны нулю. Тем самым уменьшится число структурных коэффициентов модели. Так, если предположить, что в нашей модели a_{13}=0 и a_{21}=0, то структурная модель примет вид:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \hat{y}_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3. \end{cases} \quad (15)$$

В такой модели число структурных коэффициентов не превышает число коэффициентов приведенной модели, которое равно 6. Уменьшение числа структурных коэффициентов модели возможно и другим путем: например, путем приравнивания некоторых коэффициентов друг к другу, т.е. путем предположений, что их воздействие на формируемую эндогенную переменную одинаково. На структурные коэффициенты могут накладываться, например, ограничения вида $b_{ij} + a_{ij} = 0$.

С позиции идентифицируемости структурные модели можно подразделить на три вида:

- идентифицируемые;
- неидентифицируемые;
- сверхидентифицируемые.

Модель идентифицируема, если все структурные ее коэффициенты определяются однозначно, единственным образом по коэффициентам приведенной формы модели, т.е. если число параметров структурной модели равно числу параметров приведенной формы модели. В этом случае структурные коэффициенты модели оцениваются через параметры приведенной формы модели и модель идентифицируема. Рассмотренная выше структурная модель с двумя эндогенными и тремя экзогенными (предопределенными) переменными, содержащая шесть структурных коэффициентов, представляет собой идентифицируемую модель.

Модель неидентифицируема, если число приведенных коэффициентов меньше числа структурных коэффициентов, и в результате структурные коэффициенты не могут быть оценены через коэффициенты приведенной формы модели. Структурная модель в полном виде, содержащая *n* эндогенных и *m* предопределенных переменных в каждом уравнении системы, всегда неидентифицируема.

Модель сверхидентифицируема, если число приведенных коэффициентов больше числа структурных коэффициентов. В этом случае на основе коэффициентов приведенной формы можно получить два или более значений одного структурного коэффициента. В этой модели число структурных коэффициентов меньше числа коэффициентов приведенной формы. Так, если в структурной модели полного вида предположить нулевые значения не только коэффициентов a_{13} и a_{21}, но и $a_{22}=0$, то система уравнений станет сверхидентифицируемой:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{23}x_3. \end{cases} \qquad (16)$$

В ней пять структурных коэффициентов не могут быть однозначно определены из шести коэффициентов приведенной формы модели. Сверхидентифицируемая модель в отличие от неидентифицируемой модели практически решаема, но требует для этого специальных методов исчисления параметров.

Структурная модель всегда представляет собой систему совместных уравнений, каждое из которых требуется проверять на идентификацию. Модель считается идентифицируемой, если каждое уравнение системы идентифицируемо. Если хотя бы одно из уравнений системы неидентифицируемо, то и вся модель считается неидентифицируемой. Сверхидентифицируемая модель содержит хотя бы одно сверхидентифицируемое уравнение.

Выполнение условия идентифицируемости модели проверяется для каждого уравнения системы. Чтобы уравнение было идентифицируемо, необходимо, чтобы число предопределенных переменных, отсутствующих в данном уравнении, но присутствующих в системе, было равно числу эндогенных переменных в данном уравнении без одного.

Если обозначить число эндогенных переменных в j-м уравнении системы через H, а число экзогенных (предопре-

деленных) переменных, которые содержатся в системе, но не входят в данное уравнение, - через D, то условие идентифицируемости модели может быть записано в виде следующего счетного правила:

$D+1=H$ - уравнение идентифицируемо;

$D+1<H$ - уравнение неидентифицируемо;

$D+1>H$ - уравнение сверхидентифицируемо.

Предположим, рассматривается следующая система одновременных уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4. \end{cases} \qquad (17)$$

Первое уравнение точно идентифицируемо, ибо в нем присутствуют три эндогенные переменные – y_1, y_2, y_3, т.е. $H=3$, и две экзогенные переменные – x_1 и x_2, число отсутствующих экзогенных переменных равно двум – x_3 и x_4, $D=2$. Тогда имеем равенство: $D+1=H$, т.е. 2+1=3, что означает наличие идентифицируемого уравнения.

Во втором уравнении системы $H=2$ (y_1 и y_2) и $D=1$ (x_4). Равенство $D+1=H$, т.е. 1+1=2. Уравнение идентифицируемо.

В третьем уравнении системы $H=3$ (y_1, y_2, y_3), а $D=2$ (x_1 и x_2). Следовательно, по счетному правилу $D+1=H$, и это уравнение идентифицируемо. Таким образом, система (16) в целом идентифицируема.

Предположим, что в рассматриваемой модели $a_{21}=0$ и $a_{33}=0$. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{34}x_4. \end{cases} \qquad (18)$$

Первое уравнение этой системы не изменилось. Система по-прежнему содержит три эндогенные и четыре экзогенные переменные, поэтому для него $D=2$ при $H=3$, и оно, как и в предыдущей системе, идентифицируемо. Второе уравнение

имеет H=2 и D=2(x_1, x_4), так как 2+1>2. Данное уравнение сверхидентифицируемо. Также сверхидентифицируемым оказывается и третье уравнение системы, где H=3 (y_1, y_2, y_3) и D=3 (x_1, x_2, x_3), т.е. счетное правило составляет неравенство: 3+1>3 или D+1>H. Модель в целом является сверхидентифицируемой.

Предположим, что последнее уравнение системы (18) с тремя эндогенными переменными имеет вид:

$$y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{34}x_4,$$

т.е. в отличие от предыдущего уравнения в него включены еще две экзогенные переменные, участвующие в системе, - x_1 и x_2. В этом случае уравнение становится неидентифицируемым, ибо при H=3, D=1 (отсутствует только x_3) и D+1 < H, 1+1<3. Итак, несмотря на то что первое уравнение идентифицируемо, второе сверхидентифицируемо, вся модель считается неидентифицируемой и не имеет статистического решения.

Для оценки параметров структурной модели система должна быть идентифицируема или сверхидентифицируема.

Рассмотренное счетное правило отражает необходимое, но недостаточное условие идентификации. Более точно условия идентификации определяются, если накладывать ограничения на коэффициенты матриц параметров структурной модели. Уравнение идентифицируемо, если по отсутствующим в нем переменным (эндогенным и экзогенным) можно из коэффициентов при них в других уравнениях системы получить матрицу, определитель которой не равен нулю, а ранг матрицы не меньше, чем число эндогенных переменных в системе без одного.

Целесообразность проверки условия идентификации модели через определитель матрицы коэффициентов, отсутствующих в данном уравнении, но присутствующих в других, объясняется тем, что возможна ситуация, когда для каждого уравнения системы выполнено счетное правило, а определи-

тель матрицы названных коэффициентов равен нулю. В этом случае соблюдается лишь необходимое, но недостаточное условие идентификации.

Обратимся к следующей структурной модели:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + b_{13}y_3 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4, \\ y_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2. \end{cases} \qquad (19)$$

Проверим каждое уравнение системы на необходимое и достаточное условия идентификации. Для первого уравнения H=3(y_1, y_2, y_3) и D=2(x_3 и x_4 отсутствуют), т.е. D+1=H и необходимое условие идентификации выдержано, поэтому уравнение точно идентифицируемо. Для проверки на достаточное условие идентификации заполним следующую таблицу коэффициентов при отсутствующих в первом уравнении переменных, в которой определитель матрицы (detA) коэффициентов равен нулю:

Уравнения	Переменные	
	x_3	x_4
2	a_{23}	a_{24}
3	0	0

Следовательно, достаточное условие идентификации не выполняется и первое уравнение нельзя считать идентифицируемым.

Для второго уравнения H=2 (y_1 и y_2), D=1 (отсутствует x_1). Счетное правило дает утвердительный ответ: уравнение идентифицируемо (D+1=H).

Достаточное условие идентификации выполняется. Коэффициенты при отсутствующих во втором уравнении переменных составят:

Уравнения	Переменные	
	y_3	x_1
1	B_{13}	a_{11}
3	-1	a_{31}

Согласно таблице $\det A \neq 0$ ранг матрицы равен 2, что соответствует следующему критерию: ранг матрицы коэффициентов должен быть не менее чем число эндогенных переменных в системе без одного. Итак, второе уравнение точно идентифицируемо.

Третье уравнение системы содержит H=3 и D=2, т.е. по необходимому условию идентификации оно точно идентифицируемо (D+1=H). Противоположный вывод имеем, проверив его на достаточное условие идентификации. Составим таблицу коэффициентов при отсутствующих в третьем уравнении переменных, в которой $\det A = 0$:

Уравнения	Переменные	
	x_3	x_4
1	0	0
2	a_{23}	a_{24}

Из таблицы видно, что достаточное условие идентификации не выполняется. Уравнение неидентифицируемо. Следовательно, рассматриваемая в целом структурная модель, идентифицируемая по счетному правилу, не может считаться идентифицируемой исходя из достаточного условия идентификации.

В эконометрических моделях часто наряду с уравнениями, параметры которых должны быть статистически оценены, используются балансовые тождества переменных, коэффициенты при которых равны ±1. В этом случае хотя само тождество и не требует проверки на идентификацию, ибо коэффициенты при переменных в тождестве известны, в проверке на идентификацию собственно структурных уравнений системы тождества участвуют.

Например, рассмотрим эконометрическую модель экономики республики:

$$\begin{cases} y_1 = A_{01} + b_{13}y_3 + b_{14}y_4 + \varepsilon_1, \\ y_2 = A_{02} + b_{23}y_3 + a_{21}x_1 + \varepsilon_2, \\ y_3 = A_{03} + b_{34}y_4 + a_{31}x_1 + \varepsilon_3, \\ y_4 = y_1 + y_2 + x_2, \end{cases} \qquad (20)$$

где y_1 - расходы на конечное потребление данного года;

y_2 - валовые инвестиции в текущем году;

y_3 - расходы на заработную плату в текущем году;

y_4 - валовой доход за текущий год;

x_1 - валовой доход предыдущего года;

x_2 - государственные расходы текущего года;

A - свободный член уравнения;

ε - случайные ошибки.

В этой модели четыре эндогенные переменные (y_1, y_2, y_3, y_4). Причем переменная y_4 задана тождеством. Поэтому практически статистическое решение необходимо только для первых трех уравнений системы, которые необходимо проверить на идентификацию. Модель содержит две предопределенных переменных - экзогенную x_2 и лаговую x_1.

При практическом решении задачи на основе статистической информации за ряд лет или по совокупности регионов за один год в уравнениях для эндогенных переменных y_1, y_2, y_3 обычно содержится свободный член (A_{01}, A_{02}, A_{03}), значение которого аккумулирует влияние неучтенных в уравнении факторов и не влияет на определение идентифицируемости модели.

Поскольку фактические данные об эндогенных переменных y_1, y_2, y_3 могут отличаться от теоретических постулируемых моделью, то принято в модель включать случайную составляющую для каждого уравнения системы, исключив тождества. Случайные составляющие (возмущения) обозначены через ε_1, ε_2 и ε_3. Они не влияют на решение вопроса об идентификации модели.

В рассматриваемой эконометрической модели первое уравнение системы точно идентифицируемо, ибо H=3 и D=2, и выполняется необходимое условие идентификации (D+1=H). Кроме того, выполняется и достаточное условие идентификации, т.е. ранг матрицы равен 3, а определитель ее не равен 0: det$A$ равен $-a_{31}$, что видно в следующей таблице:

Уравнения	Переменные		
	y_2	x_1	x_2
2	-1	a_{21}	0
3	0	$-a_{31}$	0
4	1	0	1

Второе уравнение системы так же точно идентифицируемо: H=2 и D=1, т.е. счетное правило выполнено: D+1=H, также выполнено достаточное условие идентификации: ранг матрицы 3 и det$A$ = $-b_{34}$:

Уравнения	Переменные		
	y_1	y_4	x_2
1	-1	b_{14}	0
3	0	b_{34}	0
4	1	-1	1

Аналогично третье уравнение системы также идентифицируемо: H=2, D=1, D+1=H и $\det A \neq 0$, а ранг матрицы A=3 и $\det A = 1$:

Уравнения	Переменные		
	y_1	y_2	x_2
1	-1	0	0
2	0	-1	0
4	1	1	1

Идентификация уравнений достаточно сложна и не ограничивается только вышеизложенным. На структурные коэффициенты модели могут накладываться и другие ограничения, например, в производственной функции сумма эла-

стичностей может быть равна по предположению 1. Могут накладываться ограничения на дисперсии и ковариации остаточных величин.

10.4. Оценивание параметров структурной модели

Коэффициенты структурной модели могут быть оценены разными способами в зависимости от вида системы одновременных уравнений. Наибольшее распространение в литературе получили следующие методы оценивания коэффициентов структурной модели:

- косвенный метод наименьших квадратов;
- двухшаговый метод наименьших квадратов;
- трехшаговый метод наименьших квадратов;
- метод максимального правдоподобия с полной информацией;
- метод максимального правдоподобия при ограниченной информации.

Косвенный и двухшаговый методы наименьших квадратов подробно описаны в литературе и рассматриваются как традиционные методы оценки коэффициентов структурной модели. Эти методы достаточно легкореализуемы. Косвенный метод наименьших квадратов (КМНК) применяется для идентифицируемой системы одновременных уравнений, а двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК) используется для оценки коэффициентов сверхидентифицируемой модели. Перечисленные методы оценивания также используются для сверхидентифицируемых систем уравнений.

Метод максимального правдоподобия рассматривается как наиболее общий метод оценивания, результаты которого при нормальном распределении признаков совпадают с МНК; Однако при большом числе уравнений системы этот метод приводит к достаточно сложным вычислительным

процедурам. Поэтому в качестве модификации используется метод максимального правдоподобия при ограниченной информации (метод наименьшего дисперсионного отношения), разработанный в 1949 г. Т.Андерсоном и Н.Рубиным.

В отличие от метода максимального правдоподобия в данном методе сняты ограничения на параметры, связанные с функционированием системы в целом. Это делает решение более простым, но трудоемкость вычислений остается достаточно высокой. Несмотря на его значительную популярность, к середине 60-х годов он был практически вытеснен двухшаговым методом наименьших квадратов (ДМНК) в связи с гораздо большей простотой последнего. Этому способствовала также разработка в 1961 г. Г.Тейлом семейства оценок коэффициентов структурной модели. Для структурной модели Г. Тейл определил семейство оценок класса K и показал, что оно включает три важных оператора оценивания: *обычный МНК при* K=0, ДМНК при K=1 и метод ограниченной информации $plim K$=1. В последнем случае решение структурной модели соответствует оценкам по ДМНК.

Дальнейшим развитием ДМНК является трехшаговый МНК (ТМНК), предложенный в 1962 г. А.Зельнером и Г.Тейлом. Этот метод оценивания пригоден для всех видов уравнений структурной модели. Однако при некоторых ограничениях на параметры более эффективным оказывается ДМНК.

Косвенный метод наименьших квадратов (КМНК). Как уже отмечалось, КМНК применяется в случае точно идентифицируемой структурной модели. Процедура применения КМНК предполагает выполнение следующих этапов работы.

1. Структурная модель преобразовывается в приведенную форму модели.

2.Для каждого уравнения приведенной формы модели обычным МНК оцениваются приведенные коэффициенты (δ_{ij}).

3.Коэффициенты приведенной формы модели трансформируются в параметры структурной модели.

Рассмотрим применение КМНК для простейшей идентифицируемой эконометрической модели с двумя эндогенными и двумя экзогенными переменными:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2. \end{cases} \qquad (20)$$

Пусть для построения данной модели мы располагаем некоторой информацией по пяти регионам республики:

Регион	y_1	y_2	x_1	x_2
1	2	5	1	3
2	3	6	2	1
3	4	7	3	2
4	5	8	2	5
5	6	5	4	6
Средние	4	6,2	2,4	3,4

Приведенная форма модели составит:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + u_1, \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + u_2, \end{cases} \qquad (21)$$

где u_1, u_2 - случайные ошибки приведенной формы модели.

Для каждого уравнения приведенной формы модели применяем традиционный МНК и определяем δ-коэффициенты.

Чтобы упростить процедуру расчетов, можно работать с отклонениями от средних уровней, т.е. $y = y - \bar{y}$ и $x = x - \bar{x}$. Тогда для первого уравнения приведенной формы модели система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} \delta_{11}\sum x_1^2 + \delta_{12}\sum x_1x_2 = \sum y_1x_1, \\ \delta_{11}\sum x_1x_2 + \delta_{12}\sum x_2^2 = \sum y_1x_2. \end{cases} \qquad (22)$$

Применительно к рассматриваемому примеру, используя отклонения от средних уровней, имеем:

$$\begin{cases} 5{,}2\delta_{11} + 4{,}2\delta_{12} = 6, \\ 4{,}2\delta_{11} + 17{,}2\delta_{12} = 10. \end{cases}$$

Решая данную систему, получим следующее первое уравнение приведенной формы модели:

$$y_1 = 0{,}852x_1 + 0{,}373x_2 + u_1.$$

Аналогично применяем МНК для второго уравнения приведенной формы модели, получим:

$$y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + u_2.$$

Система нормальных уравнений составит:

$$\begin{cases} \delta_{21}\sum x_1^2 + \delta_{22}\sum x_1x_2 = \sum y_2x_1, \\ \delta_{21}\sum x_1x_2 + \delta_{22}\sum x_2^2 = \sum y_2x_2. \end{cases} \qquad (23)$$

Применительно к нашему примеру имеем:

$$\begin{cases} 5{,}2\delta_{11} + 4{,}2\delta_{12} = -0{,}4, \\ 4{,}2\delta_{11} + 17{,}2\delta_{12} = -04. \end{cases}$$

Откуда второе приведенное уравнение составит:

$$y_2 = -0{,}072x_1 - 0{,}00557x_2 + u_2.$$

Таким образом, приведенная форма модели имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}852x_1 + 0{,}373x_2 + u_1, \\ y_2 = -0{,}072x_1 - 0{,}00557x_2 + u_2. \end{cases}$$

Переходим от приведенной формы модели; к структурной форме модели, т.е. к системе уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

Для этой цели из первого уравнения приведенной формы модели надо исключить x_2, выразив его из второго уравнения приведенной формы и подставив в первое:

$$x_2 = \frac{-0{,}072x_1 - y_2}{0{,}00557}.$$

Тогда

$$\hat{y}_1 = 0{,}852x_1 + 0{,}373 \cdot \left(\frac{-0{,}072x_1 - y_2}{0{,}00557} \right);$$

$\hat{y}_1 = -66{,}966y_2 - 3{,}970x_1$ - первое уравнение структурной модели.

Чтобы найти второе уравнение структурной модели, обратимся вновь к приведенной форме модели. Для этой цели из второго уравнения приведенной формы модели следует исключить x_1, выразив его через первое уравнение и подставив во второе:

$$x_1 = \frac{y_1 - 0{,}373x_2}{0{,}852}$$

и

$$\hat{y}_2 = -0{,}072 \cdot \left(\frac{y_1 - 0{,}373x_2}{0{,}852} \right) - 0{,}00557x_2;$$

$\hat{y}_2 = -0{,}085y_1 + 0{,}026x_2$ - второе уравнение структурной формы модели.

Итак, структурная форма модели имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = -66{,}966y_2 - 3{,}970x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = -0{,}085y_1 + 0{,}026x_2 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

Эту же систему можно записать, включив в нее свободный член уравнения, т.е. перейти от переменных в виде отклонений от среднего уровня к исходным переменным y и x.

Свободные члены уравнений определим по формулам:

$$A_{01} = \bar{y}_1 - b_{12}\bar{y}_2 - a_{11}\bar{x}_1 = 428{,}717,$$

$$A_{02} = \bar{y}_2 - b_{21}\bar{y}_1 - a_{22}\bar{x}_2 = 6{,}451.$$

Тогда структурная модель имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = 428{,}717 - 66{,}966y_2 - 3{,}970x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = 6{,}451 - 0{,}085y_1 + 0{,}026x_2 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

При обработке по программе DSTAT система приведенных уравнений отсутствует, сразу же выдается структурная модель.

Оценка значимости модели дается через F-критерий и R^2 для каждого уравнения в отдельности. В рассматриваемом примере хороших результатов достичь не удалось: ввиду ма-

ного числа наблюдений значения F-критерия Фишера несущественны (при уровне значимости 0,05 F-табличное значение равно 19, а фактическое F=7 для первого уравнения).

Если к каждому уравнению структурной формы модели применить традиционный МНК, то результаты будут резко отличаться:

$$\begin{cases} y_1 = -1{,}09 + 0{,}364y_2 + 1{,}192x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = 5{,}2 + 0{,}533y_1 - 0{,}333x_2 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

Как видим, не совпадают даже знаки коэффициентов при переменных: в первом уравнении структурной формы коэффициенты меньше нуля, а в уравнении регрессии больше нуля; во втором уравнении обратное воздействие y_1 на y_2 в структурной модели сменяется на прямое в уравнении регрессии, а с фактором x_2 наоборот.

Различия между коэффициентами регрессии и структурными коэффициентами модели численно могут быть и менее существенными. Так, например, Г.Тинтнер, рассматривая статическую модель Кейнса для австрийской экономики за 1948-1956 гг., получил функцию потребления классическим МНК в виде C=0,782y+71,6, а используя КМНК,

$$C = 0{,}781y + 73{,}212.$$

При сравнении результатов, полученных традиционным МНК и с помощью КМНК, следует иметь в виду, что традиционный МНК, применяемый к каждому уравнению структурной формы модели, взятому в отдельности, дает смещенные оценки структурных коэффициентов. Как показал Т.Хаавельмо, рассматривая две взаимосвязанные регрессии:

$$\begin{cases} y = ax + \varepsilon_1, \\ x = by + \varepsilon_2, \end{cases}$$

коэффициент регрессии отличается от структурного коэффициента и совпадает с ним только в одном частном случае, когда переменная y не содержит ошибок (т. е. $\varepsilon_1 = 0$), а ошибки переменной x имеют дисперсию, равную единице.

Кроме того, при интерпретации коэффициентов множественной регрессии предполагается независимость факторов друг от друга, что становится невозможным при рассмотрении системы совместных уравнений. Так, в нашем примере уравнение регрессии $\hat{y}_1 = -1{,}09 + 0{,}384y_2 + 1{,}282x_1$ показывает, что с ростом x_1 на единицу y_1 возрастает в среднем на 1,282 ед; при неизменном уровне значения y_2. Между тем в соответствии с системой одновременных уравнений переменная y_2 не может быть неизменной, ибо она в свою очередь зависит от y_1.

Нарушение предпосылки независимости факторов друг от друга при использовании традиционного МНК в системе одновременных уравнений приводит к несостоятельности оценок структурных коэффициентов; в ряде случаев они оказываются экономически бессмысленными. Опасность таких результатов возрастает при увеличении числа эндогенных переменных в правой части системы, ибо становится невозможным расщепить совместное влияние эндогенных переменных и видеть изолированные меры их воздействия в соответствии с предпосылками традиционного МНК.

Компьютерная программа применения КМНК предполагает, что система уравнений содержит в правой части в каждом уравнении как эндогенные, так и экзогенные переменные. Между тем могут быть системы, в которых в одном из уравнений, например, отсутствуют экзогенные переменные. Так, рассмотренная выше модель экономики страны с четырьмя эндогенными и двумя экзогенными переменными, в которой в первом уравнении системы не содержалось ни одной экзогенной переменной. Для такой модели непосредственное получение структурных коэффициентов невозможно. В этом случае сначала определяется система приведенной формы модели, решаемая обычным МНК, а затем путем алгебраических преобразований переходят к коэффициентам структурной модели.

Двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК). Если система сверхидентифицируема, то КМНК не используется, ибо он не дает однозначных оценок для параметров структурной модели. В этом случае могут использоваться разные методы оценивания, среди которых наиболее распространенным и простым является двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК).

Основная идея ДМНК - на основе приведенной формы модели получить для сверхидентифицируемого уравнения теоретические значения эндогенных переменных, содержащихся в правой части уравнения.

Далее, подставив их вместо фактических значений, можно применить обычный МНК к структурной форме сверхидентифицируемого уравнения. Метод получил название двухшагового МНК, ибо дважды используется МНК: на первом шаге при определении приведенной формы модели и нахождении на ее основе оценок теоретических значений эндогенной переменной $\hat{y}_i = \delta_{i1}x_1 + \delta_{i2}x_2 + ... + \delta_{ij}x_j$ и на втором шаге применительно к структурному сверхидентифицируемому уравнению при определении структурных коэффициентов модели по данным теоретических (расчетных) значений эндогенных переменных.

Сверхидентифицируемая структурная модель может быть двух типов:

- все уравнения системы сверхидентифицируемы;
- система содержит наряду со сверхидентифицируемыми точно идентифицируемые уравнения.

Если все уравнения системы сверхидентифицируемые, то для оценки структурных коэффициентов каждого уравнения используется ДМНК, Если в системе есть точно идентифицируемые уравнения, то структурные коэффициенты по ним находятся из системы приведенных уравнений.

Применим ДМНК к простейшей сверхидентифицируемой модели:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}(y_2 + x_1) + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2. \end{cases}$$

Данная модель может быть получена из предыдущей идентифицируемой модели:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + \varepsilon_2, \end{cases}$$

если наложить ограничения на ее параметры, а именно:

$$b_{12} = a_{11}.$$

В результате первое уравнение стало сверхидентифицируемым: H=1(y_1), D=1 (x_2) и D+1>H. Второе уравнение не изменилось и является точно идентифицируемым: H=2 и D=1, D+1=H.

На первом шаге найдем приведенную форму модели, а именно:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + u_1, \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + u_2. \end{cases}$$

Предполагая использование тех же исходных данных, что и в предыдущем примере, получим ту же систему приведенных уравнений:

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}852x_1 + 0{,}373x_2 + u_1, \\ y_2 = -0{,}072x_1 - 0{,}00557x_2 + u_2. \end{cases}$$

На основе второго уравнения данной системы можно найти теоретические значения для эндогенной переменной y_2, т.е. $\hat{y}_2$. С этой целью в уравнение

$$\hat{y}_2 = -0{,}072x_1 - 0{,}00557x_2 + u_2$$

подставляем значения x_1 и x_2 (в нашем примере это отклонения от средних уровней). Оценки для эндогенной переменной y_2 приведены в табл. 10.1.

После того как найдены оценки эндогенной переменной y_2, обратимся к сверхидентифицируемому структурному уравнению

$$y_1 = b_{12} \cdot (y_2 + x_1).$$

Таблица 10.1.

Расчетные данные для второго шага ДМНК

x_1	x_2	$\hat{y}_2$	$\hat{y}_2 + x_1 = z$	y_1	$y_1 z$	z^2
1	2	3	4	5	6	7
-1,4	-0,4	0,103	-1,297	-2	2,594	1,682
-0,4	-2,4	0,042	-0,358	-1	0,358	0,128
0,6	-1,4	-0,035	0,565	0	0	0,319
-0,4	1,6	0,020	-0,380	1	-0,380	0,144
1,6	2,6	-0,130	1,470	2	2,940	2,161
Сумма					5,512	4,434

Заменяя фактические значения y_2 их оценками $\hat{y}_2$, найдем значения новой переменной

$$\hat{y}_2 + x_1 = z.$$

Далее применяем МНК к уравнению

$$y_1 = b_{12} \cdot z.$$

т.е.

$$\sum y_1 z = b_{12} \cdot \sum z^2.$$

Откуда

$$b_{12} = \frac{\sum y_1 z}{\sum z^2} = \frac{5{,}512}{4{,}434} = 1{,}243.$$

Таким образом, сверхидентифицируемое структурное уравнение составит:

$$y_1 = 1{,}243 \cdot (y_2 + x_1).$$

Ввиду того, что второе уравнение нашей системы не изменилось, то его структурная форма, найденная из системы приведенных уравнений, та же:

$$y_2 = -0{,}085 y_1 + 0{,}026 x_2..$$

В целом рассматриваемая система одновременных уравнений составит:

$$\begin{cases} y_1 = 1{,}243 \cdot (y_2 + x_1), \\ y_2 = -0{,}085 y_1 + 0{,}026 x_2. \end{cases}$$

ДМНК является наиболее общим и широко распространенным методом решения системы одновременных уравнений. Для точно идентифицируемых уравнений ДМНК дает тот же результат, что и КМНК. Поэтому в ряде компьютерных программ, например DSTAT, для решения системы одновременных уравнений рассматривается лишь ДМНК.

Решение сверхидентифицируемой модели на компьютере построено на предположении, что при каждой переменной в правой части системы имеется свой структурный коэффициент. Если же в модель вводятся ограничения на параметры, как в рассмотренном примере $b_{12}=a_{11}$, то программа DSTAT не работает. Структурная модель может принимать любой вид, но без ограничений на параметры. При этом должно выполняться счетное правило идентификации: $D+1>H$. Так, если структурная модель имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = A_{01} + b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + \varepsilon_1, \\ y_2 = A_{02} + b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \varepsilon_2, \end{cases}$$

где первое уравнение сверхидентифицируемо, а второе - точно идентифицируемо, то реализация модели в ППП DSTAT оказывается следующей.

Последовательно ДМНК применяется к каждому уравнению. Эндогенная переменная, находящаяся в левой части системы, рассматривается как зависимая переменная, а переменные, содержащиеся в правой части системы (эндогенные и экзогенные), - как факторы, которые должны быть пронумерованы. Так, при вводе информации о переменных в последовательности y_1, y_2, x_1, x_2, x_3, для первого уравнения имеем: y_2 - фактор 2; x_1 - фактор 3. Далее отвечаем на следующие вопросы программы DSTAT.

Эндогенная переменная - это фактор №? Ответ: 2.

Экзогенная переменная, входящая в уравнение,- это фактор №? Ответ: 3.

Не входящая в уравнение экзогенная переменная - это фактор №? Ответ: 4.

Не входящая в уравнение экзогенная переменная - это фактор? Ответ:5.

По окончании процедуры выдается уравнение

$$\hat{y}_1 = b_{12} y_2 + a_{11} x_1 + A_{01}.$$

и приводится оценка его качества через *F*-критерий Фишера, относительную ошибку аппроксимации и оценки значимости структурных коэффициентов модели через *t*-критерий Стьюдента.

Аналогично поступаем со вторым уравнением системы. В нем соответственно эндогенная переменная y_1 рассматривается как фактор 1, а экзогенные переменные x_2 и x_3 - как факторы 4 и 5. Не входящая в уравнение экзогенная переменная x_1 обозначается как фактор 3. В результате получим искомое уравнение

$$\hat{y}_2 = b_{21} y_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + A_{02}.$$

Несмотря на важность системы эконометрических уравнений, на практике часто не принимают во внимание некоторые взаимосвязи, применение традиционного МНК к одному или нескольким уравнениям также широко распространено в эконометрике. В частности, при построении производственных функций анализ спроса можно вести, используя обычный МНК.

10.5. Применение систем эконометрических уравнений

Под системой эконометрических уравнений обычно понимается система одновременных, совместных уравнений. Ее применение имеет ряд сложностей, которые связаны с ошибками спецификации модели. Ввиду большого числа факторов, влияющих на экономические переменные, исследователь, как правило, не уверен в точности предлагаемой модели для описания экономических процессов. Набор эндо-

генных и экзогенных переменных модели соответствует теоретическому представлению исследователя о моделируемом объекте, которое сложилось на данный момент и может изменяться. Соответственно может меняться и вид модели с точки зрения ее идентифицируемости.

Сверхидентифицируемую модель можно превратить в точно идентифицируемую путем добавления некоторых переменных или отбрасывания некоторых ограничений на параметры. Не исключено, что при правильной спецификации модели она может оказаться неидентифицируемой, и поэтому переходят к сверхидентифицируемым или точно .идентифицируемым моделям, несколько упрощающим характер взаимосвязей экономических явлений. Отметим, что наличие множества прикладных моделей для решения одного и того же класса задач не случайно. Наиболее ярко это проявляется при построении макроэкономических моделей, когда, например, одна и та же функция потребления может включать в себя разный набор экономических переменных.

Рассмотрим основные направления практического использования эконометрических систем уравнений.

Наиболее широко системы одновременных уравнений используются для построения макроэкономических моделей функционирования экономики той или иной страны. Большинство из них представляют собой мультипликаторные модели кейнсианского типа с той или иной мерой сложности. Статическая модель Кейнса для описания народного хозяйства страны в наиболее простом варианте имеет следующий вид:

$$\begin{cases} C = a + by + \varepsilon, \\ y = C + I, \end{cases} \qquad (24)$$

где C - личное потребление в постоянных ценах; y - национальный доход в постоянных ценах; I - инвестиции в постоянных ценах; ε - случайная составляющая.

В силу наличия тождества в модели (второе уравнение системы) структурный коэффициент b не может быть больше

1. Он характеризует предельную склонность к потреблению. Так, если b=0,60, то из каждой дополнительной тысячи дохода на потребление расходуется в среднем 600 сум и 400 сум инвестируется, т. е. C и y выражены в тыс. сум. Если b>1, то $y < C + I$, т.е. на потребление расходуются не только доходы, но и сбережения. Параметр a Кейнс истолковывал как прирост потребления за счет других факторов. Так как прирост во времени может быть не только положительным, но и отрицательным (снижение), то такой вывод возможен. Однако суждение о том, что параметр a характеризует конкретный уровень потребления, обусловленный влиянием других факторов, неправильно.

Структурный коэффициент b используется для расчета мультипликаторов. По данной функции потребления можно определить два мультипликатора - инвестиционный мультипликатор потребления M_c и инвестиционный мультипликатор национального дохода M_y.

Инвестиционный мультипликатор потребления определяется по формуле

$$M_c = \frac{b}{(1-b)}.$$

При b=0,60 M_c= 0,60/(1 - 0,60) = 1,5.

Эта величина означает, что дополнительные вложения в размере 1 тыс. сум приведут при прочих равных условиях к дополнительному увеличению потребления на 1,5 тыс.сум.

Инвестиционный мультипликатор национального дохода можно определить как

$$M_y = \frac{1}{(1-b)}.$$

В нашем случае он составит:

$$M_y = 1/(1 - 0,60) = 2,5.$$

т.е. дополнительные инвестиции в размере 1 тыс. сум на длительный срок приведут при прочих равных условиях к дополнительному доходу в 2,5 тыс. сум.

Рассматриваемая модель Кейнса точно идентифицируема, и для получения величины структурного коэффициента b применяется КМНК. Это значит, что строится система приведенных уравнений:

$$\begin{aligned} C &= A + B \cdot I + U_1', \\ y &= A' + B' \cdot I + U_2, \end{aligned} \qquad (25)$$

в которой $A = A'$, а параметры B и B' являются мультипликаторами, т.е. $B=M_c$ и $B' = M_y$. Убедиться в этом можно, если выразить коэффициенты приведенной формы модели через структурные коэффициенты. Для этого в первое уравнение структурной модели подставим балансовое равенство:

$$C = a + by + \varepsilon = a + b \cdot (C + I) + \varepsilon = a + b \cdot C + b \cdot I + \varepsilon;$$

$$C \cdot (1 - b) = a + b \cdot I + \varepsilon;$$

$$C = \frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-b} \cdot I + \frac{1}{1-b} \cdot \varepsilon \text{ - приведенное уравнение.}$$

Аналогично поступим и со вторым уравнением структурной модели: в тождество $y=C+I$ вместо C подставим выражение первого структурного уравнения, т.е. $y=a+by+\varepsilon+I$. Далее, преобразовывая, получим:

$$y = \frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-b} \cdot I + \frac{1}{1-b}.$$

т.е. $A' = \dfrac{a}{(1-b)} = A;\ B' = \dfrac{1}{(1-b)} = M_y;\ U_2 = \left(\dfrac{1}{(1-b)}\right) \cdot \varepsilon.$

Таким образом, приведенная форма модели содержит мультипликаторы, интерпретируемые как коэффициенты линейной регрессии, отвечающие на вопрос, на сколько единиц изменится значение эндогенной переменной, если экзогенная переменная изменится на 1 ед. своего измерения. Этот смысл коэффициентов приведенной формы делает приведенную модель удобной для прогнозирования.

В более поздних исследованиях статическая модель Кейнса включала уже не только функцию потребления, но и функцию сбережений:

$$\begin{cases} C = a + by + \varepsilon_1, \\ r = T + K \cdot (C + I) + \varepsilon_2, \\ y = C + I - r, \end{cases} \qquad (26)$$

где C, y и I - те же по смыслу переменные, что и в предыдущей модели; r - сбережения.

Данная модель содержит три эндогенные переменные - C, r, y и одну экзогенную переменную I. Система идентифицируема: в первом уравнении H=2 и D=1, во втором H=1 и D=0; C+I рассматривается как предопределенная переменная (подробное изложение решения данной системы приведено в работе Г.Тинтнера). Наряду со статическими широкое распространение получили динамические модели экономики. В отличие от статических они содержат в правой части лаговые переменные, а также учитывают тенденцию (фактор времени). Примером могут служить модели Л.Клейна, разработанные им для экономики США в 1950-1960 гг. В упрощенном варианте модель Клейна рассматривается как конъюнктурная модель

$$\begin{cases} C_t = b_1 \cdot S_t + b_2 \cdot P_t + b_2 + \varepsilon_1, \\ I_t = b_4 \cdot P_t + b_5 \cdot P_{t-1} + b_6 + \varepsilon_2, \\ S_t = b_7 \cdot R_t + b_8 \cdot R_{t-1} + b_9 \cdot t + b_{10} + \varepsilon_3, \\ R_t = S_t + P_t + T_t, \\ R_t = C_t + I_t + G_t, \end{cases} \qquad (27)$$

где C_t - функция потреблений в период t; S_t - заработная плата в период t; P_t -прибыль в период t; P_{t-1} - прибыль в период t-1, т. е. в предыдущий год; R_t - общий доход в период t; R_{t-1} - общий доход в предыдущий период; t - время; T_t - чистые трансферты в пользу администрации в период t; I_t - капиталовложения в период t; G_t - спрос административного аппарата, правительственные расходы в период времени t.

Модель содержит пять эндогенных переменных - C_t, I_t, S_t, R_t, (расположены в левой части системы) и P_t (последняя - зависимая переменная, определяемая по первому тождеству), три экзогенных переменных - T_t, G_t, t и две предопределен-

ные, лаговые переменные - P_{t-1} и R_{t-1}. Как и большинство моделей такого типа, данная модель сверхидентифицируема и решаема ДМНК. Для прогнозных целей используется приведенная форма модели:

$$\begin{cases} C_t = d_1 \cdot T + d_2 \cdot G + d_3 \cdot t + d_4 \cdot P_{t-1} + d_5 \cdot R_{t-1} + u_1, \\ I_t = d_6 \cdot T + d_7 \cdot G + d_8 \cdot t + d_9 \cdot P_{t-1} + d_{10} \cdot R_{t-1} + u_2, \\ S_t = d_{11} \cdot T + d_{12} \cdot G + d_{13} \cdot t + d_{14} \cdot P_{t-1} + d_{15} \cdot R_{t-1} + u_3, \\ R_t = d_{16} \cdot T + d_{17} \cdot G + d_{18} \cdot t + d_{19} \cdot P_{t-1} + d_{20} \cdot R_{t-1} + u_4, \\ P_t = d_{21} \cdot T + d_{22} \cdot G + d_{23} \cdot t + d_{24} \cdot P_{t-1} + d_{25} \cdot R_{t-1} + u_5. \end{cases} \quad (28)$$

В данной системе мультипликаторами являются коэффициенты при обычных экзогенных переменных. Они отражают влияние экзогенной переменной на эндогенную переменную. Мультипликаторами в нашей системе выступают коэффициенты при T и G. Коэффициенты d_1, d_6, d_{11}, d_{16}, d_{21} - мультипликаторы чистых трансфертов в пользу администрации относительно личного потребления d_1, инвестиций d_6, заработной платы d_{11}, дохода d_{16} и прибыли d_{21}. Соответственно коэффициенты d_2, d_7, d_{12}, d_{17}, d_{22} являются мультипликаторами правительственных расходов относительно соответствующих эндогенных переменных.

Динамическая модель может и не содержать учет тенденции, но лаговые переменные в ней обязательны. Динамическая модель Кейнса представлена следующими тремя уравнениями:

$$\begin{cases} C_t = a + b_1 \cdot Y_t + b_2 \cdot Y_{t-1} + \varepsilon_1, \\ Y_t = C_t + G_t + I_t + L_t, \\ P_t = Y_t + Z_t. \end{cases} \quad (29)$$

В этой системе три эндогенные переменные:

Y_t - имеющийся в распоряжении доход в период времени t;

C_t - частное потребление в период времени t;

P_t - валовой национальный продукт (ВНП) в период времени t.

Кроме того, модель содержит пять предопределенных переменных:

Y_{t-1} - доход предыдущего года;

G_t, - общественное потребление;

I_t - валовые капиталовложения;

L_t -изменение складских запасов;

Z_t - сальдо платежного баланса.

Случайная переменная e, характеризует ошибки в первом уравнении в виду его статистического характера. Параметр a отражает влияние других не учитываемых в данном уравнении факторов потребления (например, цен). Первое уравнение данной системы является сверхидентифицируемым, а второе и третье - определениями.

Если в модели Кейнса доход рассматривается как лаговая переменная, то в других исследованиях функции потребления в виде лаговой переменной используется потребление предыдущего года, т.е. считается, что потребление текущего года зависит не только от дохода, но и от достигнутого в предыдущий период уровня потребления.

Примером динамической модели экономики, учитывающей для каждой эндогенной переменной лаговые переменные соответствующего экономического содержания, может служить модель открытой экономики с экономической активностью со стороны государства.

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 \cdot Y_t + a_2 \cdot C_{t-1} + \varepsilon_1, \\ I_t = b_0 + b_1 \cdot Y_t + b_2 \cdot U_{t-1} + \varepsilon_2, \\ IM_t = k_0 + k_1 \cdot Y_t + k_2 \cdot IM_{t-1} + \varepsilon_3, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t - IM_t. \end{cases} \qquad (30)$$

В этой модели четыре эндогенных переменных:

C_t - личное потребление в период времени t;

I_t - частные чистые инвестиции в отрасли экономики в период времени t;

IM_t - импорт в период времени t;

Y_t - национальный доход за период времени t.

Все переменные приведены в постоянных ценах.

Предопределенными переменными в модели являются следующие три переменные:

C_{t-1} - личное потребление за предыдущий период;

U_{t-1} - доход личных домохозяйств от предпринимательской деятельности за предыдущий период и доход от имущества плюс нераспределенная прибыль предприятий до налогообложения;

IM_{t-1} - импорт за предыдущий период времени t-1.

В качестве экзогенной переменной в модели рассматривается переменная G_t -общественное потребление, плюс государственные чистые капиталовложения в экономику страны, плюс изменение запасов, минус косвенные налоги, плюс дотации, плюс экспорт.

Первые три уравнения системы являются сверхидентифицируемыми, а четвертое представляет собой балансовое тождество.

Система одновременных уравнений нашла применение в исследованиях спроса и предложения. Линейная модель спроса и предложения имеет вид:

$$\begin{cases} Q^d = a_0 + a_1 \cdot P + \varepsilon_1, \\ Q^s = b_0 + b_1 \cdot P + \varepsilon_2, \\ Q^d = Q^s, \end{cases} \qquad (31)$$

где Q^d - спрашиваемое количество благ (объем спроса);

Q^s - предлагаемое количество благ (объем предложения);

P - цена.

В этой системе три эндогенные переменные - Q^d, Q^s и P. При этом если Q^d и Q^s представляют собой эндогенные переменные исходя из структуры самой системы (они расположены в левой части), то P является эндогенной по экономическому содержанию (цена зависит от предлагаемого и спрашиваемого количества благ), а также в результате наличия тождества $Q^d = Q^s$.

Приравняв первое и второе уравнения, можно показать, что P - зависимая переменная:

$$a_0 + a_1 \cdot P + \varepsilon_1 = b_0 + b_1 \cdot P + \varepsilon_2$$

Отсюда

$$P = \frac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1} + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{a_1 - b_1}. \qquad (32)$$

Рассматриваемая модель спроса и предложения не содержит экзогенной переменной. Однако чтобы модель имела статистическое решение и можно было убедиться в ее справедливости, в модель вводятся экзогенные переменные.

Одним из вариантов модели спроса и предложения является модель вида

$$\begin{cases} Q^d = a_0 + a_1 \cdot P + a_2 \cdot R + \varepsilon_1, \\ Q^s = b_0 + b_1 \cdot P + b_2 \cdot W + \varepsilon_2, \\ Q^d = Q^s, \end{cases} \qquad (33)$$

где R - доход на душу населения;

W - климатические условия (предположим, что речь идет о спросе и предложении зерна).

Переменные R и W экзогенные. Введя их в модель, получим идентифицируемую структурную модель, оценки параметров которой могут быть даны с помощью КМНК.

Широкий класс моделей в эконометрике представляют производственные функции – $P=f(x_1, x_2,..., x_n)$, где P - объем выпуска (уровень производства); $x_1, x_2,..., x_n$ - факторы производства (труд, капитал и др.). Однако реализация такого рода моделей, как правило, не связана с системой одновременных уравнений. Производственная функция в упрощенном виде может быть включена в систему одновременных уравнений. Так, в 1962 г. Б.Хохенбалкен и Г.Тинтнер предложили следующую модель экономики для каждой из одиннадцати стран - членов ОЭС.

$$\begin{cases} \dfrac{C}{N \cdot P} = a_1 + b_1 \cdot \dfrac{Y}{N \cdot P}, \\ \log X = a_2 + b_2 \cdot \log D, \\ dx / dD = W / p, \\ Y = C + K, \\ X = Y / P. \end{cases} \qquad (34)$$

Здесь эндогенными переменными являются:

C - величина личного потребления в текущих ценах;

Y - ВНП в текущих ценах;

X - ВНП в постоянных ценах;

P - индекс цен;

D - общая занятость.

В качестве экзогенных переменных приняты:

N - численность населения;

W - средняя годовая заработная плата работника;

K - государственное потребление плюс инвестиции и внешнеторговое сальдо.

В системе имеются только два структурных уравнения - функция потребления (первое уравнение) и производственная функция (второе уравнение). Остальные составляющие модели представляют собой априорно разработанную функцию спроса на труд (третье уравнение) и два тождества, относящиеся к ВНП.

Параметры функции потребления оцениваются с помощью КМНК с учетом тождества $Y=C+K$, а параметры производственной функции - при комбинации ее с функцией спроса на труд.

Как уже отмечалось, не все эконометрические модели имеют вид системы одновременных уравнений. Так, широкий класс функций спроса на ряд потребительских товаров часто представляет собой рекурсивную систему, в которой с уравнениями можно работать последовательно и проблемы одновременного оценивания не возникают.

ГЛАВА 11. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

11.1. Основные свойства и модели одномерных временных рядов

В эконометрике к числу динамических относятся не все модели, построенные по временным рядам данных. Термин «динамический» в данном случае характеризует каждый момент времени t в отдельности, а не весь период, для которого строится модель. Эконометрическая модель является динамической, если в данный момент времени t она учитывает значения входящих в нее переменных, относящиеся как к текущему, так и к предыдущим моментам времени, т.е. если эта модель отражает динамику исследуемых переменных в каждый момент времени.

Можно выделить два основных типа динамических эконометрических моделей. К моделям *первого типа относятся* модели авторегрессии и модели с распределенным лагом, в которых значения переменной за прошлые периоды времени (лаговые переменные) непосредственно включены в модель. Модели второго типа учитывают динамическую информацию в неявном виде. В эти модели включены переменные, характеризующие ожидаемый или желаемый уровень результата, или одного из факторов в момент времени t. Этот уровень считается неизвестным и определяется экономическими единицами с учетом информации, которой они располагают в момент $(t\text{-}1)$.

В зависимости от способа определения ожидаемых значений показателей различают модели неполной корректировки, адаптивных ожиданий и рациональных ожиданий. Оценка параметров этих моделей сводится к оценке параметров моделей авторегрессии.

При исследовании экономических процессов нередко приходится моделировать ситуации, когда значение результативного признака в текущий момент времени t формируется под воздействием ряда факторов, действовавших в прошлые моменты времени t-1, t-2,..., t-l. Например, на выручку от реализации или прибыль компании текущего периода могут оказывать влияние расходы на рекламу или проведение маркетинговых исследований, сделанные компанией в предшествующие моменты времени. Величину l, характеризующую запаздывание в воздействии фактора на результат, называют в эконометрике лагом, а временные ряды самих факторных переменных, сдвинутые на один или более моментов времени, - лаговыми переменными.

Разработка экономической политики как на макро-, так и на микроуровне требует решения обратного типа задач, т.е. задач, определяющих, какое воздействие окажут значения управляемых переменных текущего периода на будущие значения экономических показателей. Например, как повлияют инвестиции в промышленность на валовую добавленную стоимость этой отрасли экономики будущих периодов или как может измениться объем ВВП, произведенного в периоде (t+1), под воздействием увеличения денежной массы в периоде t?

Эконометрическое моделирование охарактеризованных выше процессов осуществляется с применением моделей, содержащих не только текущие, но и лаговые значения факторных переменных. Эти модели называются моделями с распределенным лагом. Модель вида

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + b_2 \cdot x_{t-2} + \varepsilon_t \qquad (1)$$

является примером модели с распределенным лагом.

Наряду с лаговыми значениями независимых, или факторных, переменных на величину зависимой переменной текущего периода могут оказывать влияние ее значения в прошлые моменты или периоды времени. Например, потребле-

ние в момент времени t формируется под воздействием дохода текущего и предыдущего периодов, а также объема потребления прошлых периодов, например потребления в период (t-1). Эти процессы обычно описывают с помощью моделей регрессии, содержащих в качестве факторов лаговые значения зависимой переменной, которые называются моделями авторегрессии. Модель вида

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + c_1 \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (2)$$

относится к моделям авторегрессии.

Построение моделей с распределенным лагом и моделей авторегрессии имеет свою специфику. Во-первых, оценка параметров моделей авторегрессии, а в большинстве случаев и моделей с распределенным лагом не может быть произведена с помощью обычного МНК ввиду нарушения его предпосылок и требует специальных статистических методов. Во-вторых, исследователям приходится решать проблемы выбора оптимальной величины лага и определения его структуры. Наконец, в-третьих, между моделями с распределенным лагом и моделями авторегрессии существует определенная взаимосвязь, и в некоторых случаях необходимо осуществлять переход от одного типа моделей к другому.

Рассмотрим модель с распределенным лагом в ее общем виде в предположении, что максимальная величина лага конечна:

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + \ldots + b_p \cdot x_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (3)$$

Эта модель говорит о том, что если в некоторый момент времени t происходит изменение независимой переменной x, то это изменение будет влиять на значения переменной y в течение l следующих моментов времени.

Коэффициент регрессии b_0 при переменной x_t характеризует среднее абсолютное изменение y, при изменении x_t на 1 ед. своего измерения в некоторый фиксированный момент времени t, без учета воздействия лаговых значений фактора

x. Этот коэффициент называют краткосрочным мультипликатором.

В момент (t+1) совокупное воздействие факторной переменной x_t на результату, составит (b_0+b_1) усл. ед., в момент (t+2) это воздействие можно охарактеризовать суммой $(b_0 + b_1 + b_2)$ и т. д. Полученные таким образом суммы называют промежуточными мультипликаторами.

С учетом конечной величины лага можно сказать, что изменение переменной x_t в момент t на 1 усл. ед. приведет к общему изменению результата через l моментов времени на (b_0+b_1+…+ b_l) абсолютных единиц.

Введем следующее обозначение:

$$b_0 + b_1 + ... + b_l = b.$$

Величину b называют долгосрочным мультипликатором. Он показывает абсолютное изменение в долгосрочном периоде t+l результата y под влиянием изменения на 1 ед. фактора x.

Предположим

$$\beta_j = b_j / b, \quad j = 0:1. \qquad (5)$$

Назовем полученные величины относительными коэффициентами модели с распределенным лагом. Если все коэффициенты b_j имеют одинаковые знаки, то для любого j

$$0 < \beta_j < 1 \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{l} \beta_j = 1.$$

В этом случае относительные коэффициенты β_j являются весами для соответствующих коэффициентов b_j. Каждый из них измеряет долю общего изменения результативного признака в момент времени (t+j).

Зная величины β_j, с помощью стандартных формул можно определить еще две важные характеристики модели множественной регрессии: величину среднего лага и меди-

шого лага. Средний лаг определяется по формуле средней арифметической взвешенной:

$$\bar{l} = \sum_{j=0}^{l} j \cdot \beta_j \qquad (6)$$

и представляет собой средний период, в течение которого будет происходить изменение результата под воздействием изменения фактора в момент времени t. Небольшая величина среднего лага свидетельствует об относительно быстром реагировании результата на изменение фактора, тогда как высокое его значение говорит о том, что воздействие фактора на результат будет сказываться в течение длительного периода времени. Медианный лаг – это величина лага, для которого

$$\sum_{j=0}^{l_{Me}} \beta_j \approx 0{,}5.$$

Это тот период времени, в течение которого с момента времени t будет реализована половина общего воздействия фактора на результат. [9, 10, 17, 19].

Рассмотрим условный пример.

Пример 1. Интерпретация параметров модели с распределенным лагом.

По результатам изучения зависимости объемов продаж компании в среднем за месяц от расходов на рекламу была получена следующая модель с распределенным лагом (млн. сум)

$$\hat{y}_t = -0{,}69 + 5{,}5x_t + 2{,}0x_{t-1} + 1{,}8x_{t-2} + 0{,}8x_{t-3}.$$

В этой модели краткосрочный мультипликатор равен 5,5. Это означает, что увеличение расходов на рекламу на 1 млн. сум ведет в среднем к росту объема продаж компании на 5,5 млн. сум в том же периоде. Под влиянием увеличения расходов на рекламу объем продаж компании возрастет в момент времени t на 1 млн. сум, $(t+1)$ – на 5,5+2,0=7,5 млн. сум, $(t+2)$ - на 7,5+1,8=9,3 млн. сум. Наконец, долгосрочный мультипликатор для данной модели составит:

$$b = 5{,}5 + 2{,}0 + 1{,}8 + 0{,}8 = 10{,}1.$$

В долгосрочной перспективе (например, через 3 месяца) увеличение расходов на рекламу на 1 млн. сум в настоящий момент времени приведет к общему росту объема продаж на 10,1 млн. сум.

Относительные коэффициенты регрессии в этой модели равны:

$$\beta_1 = 5{,}5/10{,}1 = 0{,}544; \qquad \beta_2 = 2{,}0/10{,}1 = 0{,}198;$$
$$\beta_3 = 1{,}8/10{,}1 = 0{,}178; \qquad \beta_4 = 0{,}8/10{,}1 = 0{,}079.$$

Следовательно, 54,4% общего увеличения объема продаж, вызванного ростом затрат на рекламу, происходит в текущем моменте времени; 19,8% - в момент (t+1); 17,8% - в момент (t+2); и только 7,9% этого увеличения приходится на момент времени (t+3).

Средний лаг в этой модели определяется как

$$\bar{l} = 0 \cdot 0{,}544 + 1 \cdot 0{,}198 + 2 \cdot 0{,}178 + 3 \cdot 0{,}079 = 0{,}790 \text{ мес.}$$

Небольшая величина лага (менее 1 месяца) еще раз подтверждает, что большая часть эффекта роста затрат на рекламу проявляется сразу же. Медианный лаг в данном примере также составляет чуть более 1 месяца.

Изложенные выше приемы анализа параметров модели с распределенным лагом действительны только в предположении, что все коэффициенты при текущем и лаговых значениях исследуемого фактора имеют одинаковые знаки. Это предположение вполне оправдано с экономической точки зрения: воздействие одного и того же фактора на результат должно быть однонаправленным независимо от того, с каким временным лагом измеряется сила или теснота связи между этими признаками. Однако на практике получить статистически значимую модель, параметры которой имели бы одинаковые знаки, особенно при большой величине лага l, чрезвычайно сложно.

Применение обычного МНК к таким моделям в большинстве случаев затруднительно по следующим причинам.

Во-первых, текущие и лаговые значения независимой переменной, как правило, тесно связаны друг с другом. Тем самым оценка параметров модели проводится в условиях высокой мультиколлинеарности факторов.

Во-вторых, при большой величине лага снижается число наблюдений, по которому строится модель, и увеличивается число ее факторных признаков. Это ведет к потере числа степеней свободы в модели.

В-третьих, в моделях с распределенным лагом часто возникает проблема автокорреляции остатков. Вышеуказанные обстоятельства приводят к значительной неопределенности относительно оценок параметров модели, снижению их точности и получению неэффективных оценок. Чистое влияние факторов на результат в таких условиях выявить невозможно. Поэтому на практике параметры моделей с распределенным лагом проводят в предположении определенных ограничений на коэффициенты регрессии и в условиях выбранной структуры лага.

Обратимся теперь к модели авторегрессии. Пусть имеется следующая модель:

$$y_t = a + b_0 x_t + c_1 y_{t-1} + \varepsilon_t. \qquad (7)$$

Как и в модели с распределенным лагом, b_0 в этой модели характеризует краткосрочное изменение y, под воздействием изменения x_t на 1 ед. Однако промежуточные и долгосрочный мультипликаторы в моделях авторегрессии несколько иные. К моменту времени $(t+1)$ результату, изменился под воздействием изменения изучаемого фактора в момент времени t на b_0 ед., а y_{t+1}, под воздействием своего изменения в непосредственно предшествующий момент времени - на c_1 ед. Таким образом, общее абсолютное изменение результата в момент $(t+1)$ составит $b_0 c_1$ ед. Аналогично в момент времени $(t+2)$ абсолютное изменение результата составит $b_0 c_1^2$ ед. и т. д. Следовательно, долгосрочный мультипли-

катор в модели авторегрессии можно рассчитать как сумму краткосрочного и промежуточных мультипликаторов:

$$b = b_0 + b_0 c_1 + b_0 c_1^2 + b_0 c_1^3 + \ldots \qquad (8)$$

Учитывая, что практически во все модели авторегрессии вводится так называемое условие стабильности, состоящее в том, что коэффициент регрессии при переменной y_{t-1} по абсолютной величине меньше единицы $|c_1|<1$, соотношение (8) можно преобразовать следующим образом:

$$b = b_0 \cdot \left(1 + c_1 + c_1^2 + c_1^3 + \ldots\right) = \frac{b_0}{1 - c_1}, \qquad (9)$$

где $|c_1|<1$.

Отметим, что такая интерпретация коэффициентов модели авторегрессии и расчет долгосрочного мультипликатора основаны на предпосылке о наличии бесконечного лага в воздействии текущего значения зависимой переменной на ее будущие значения.

Пример 2. Интерпретация параметров модели авторегрессии. Предположим, по данным о динамике показателей потребления и дохода в регионе была получена модель авторегрессии, описывающая зависимость среднедушевого объема потребления за год (C, млн. сум) от среднедушевого совокупного годового дохода (Y, млн. сум) и объема потребления предшествующего года:

$$\hat{C}_t = 4 + 0{,}97 Y_t + 0{,}15 C_{t-1}.$$

Краткосрочный мультипликатор равен 0,97. В этой модели он представляет собой предельную склонность к потреблению в краткосрочном периоде. Следовательно, увеличение среднедушевого совокупного дохода на 1 млн. сум приводит к росту объема потребления в тот же год в среднем на 970 тыс. сум. Долгосрочную предельную склонность к потреблению в данной модели можно определить в соответствии с формулой (9) как

$$b = 0{,}97/(1 - 0{,}15) = 1{,}147.$$

В долгосрочной перспективе рост среднедушевого совокупного дохода на 1 млн. сум приведет к росту объема потребления в среднем на 1147 тыс. сум. Промежуточные показатели предельной склонности к потреблению можно определить, рассчитав необходимые частные суммы за соответствующие периоды времени. Например, для момента времени $(t+1)$ получим:

$$(0{,}97 + 0{,}97 \cdot 0{,}15) = 1{,}155.$$

Это означает, что увеличение средне дохода в текущем периоде на 1 млн. сум объема потребления в среднем на 1155 тыс. сум в ближайшем следующем периоде.

ГЛАВА 12. МЕТОДЫ АНАЛИЗА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

12.1. Общая характеристика метода экспертных оценок

В настоящее время в экономике, в частности при обработке результатов эконометрического исследования, широкое применение нашел метод экспертных оценок, применяемых в тех областях экономических знаний, где невозможно провести оценку характеристик объекта какими-либо физическими приборами.

Под методом экспертных оценок понимают комплекс логических и математических процедур, направленных на получение от специалистов информации, ее анализ и обобщение с целью подготовки и выбора рациональных решений.

Сущность этого метода заключается в проведении высококвалифицированными специалистами интуитивно-логического анализа проблемы с качественной или количественной оценкой суждений и формальной обработкой результатов. Комплексное использование интуиции, логического мышления и соответствующего математического аппарата позволяет получить эффективное решение поставленной проблемы. Метод экспертных оценок отличается от традиционной экспертизы наличием научной организации всех этапов и применением математического аппарата как при организации экспертизы, так и при обработке и анализе полученной информации.

Проведение экспертизы следует рассматривать как начальный цикл исследований, которому предшествует детальный анализ существа проблемы. Систематизация полученных при таком анализе сведений позволяет целенаправленно

и планомерно организовывать экспертизу, ориентированную на получение новой информации в необходимой форме. Экспертизу чаще всего нужно рассматривать как последний, наиболее формальный шаг эконометрического анализа. Полученная и обработанная экспертная информация используется в дальнейшем в рамках выбранной процедуры выработки решений.

Метод экспертных оценок как научный инструмент анализа неформализуемых проблем в нашей стране и за рубежом широко применяется при решении самых различных проблем, связанных с планированием развития экономики страны и отрасли, созданием современных информационных технологий и т.д.

Целесообразно в общем виде выделить два класса проблем, решаемых экспертным путем.

К первому классу относятся проблемы, для решения которых имеется достаточная информационная база. Поэтому основная трудность их решения заключается в эффективном использовании этой базы, т.е. в правильном подборе экспертов, рациональной организации процедуры их опроса и применении оптимальных математических методов обработки результатов. При этом методы опроса и обработки основываются на том, что эксперт обобщает значительный объем переработанной им информации, а групповое мнение, рассчитанное как математическое ожидание мнений отдельных экспертов, близко к истинному значению. Эти допущения позволяют применять для обработки экспертных оценок специальные математические методы.

Ко второму классу относятся проблемы, для решения которых информационная база недостаточна. При анализе таких проблем эксперт уже не может количественно представлять итоги оценки, и поэтому здесь возможен в основном лишь качественный анализ результатов экспертизы.

Простейшим способом получения экспертной информации является учет мнения одного специалиста - индивидуальная экспертиза. Индивидуальная экспертиза используется для решения уникальных проблем, относящихся ко второму классу. Однако при решении проблем первого класса целесообразно привлекать по возможности не одного, а нескольких специалистов, т.е. организовывать групповую экспертизу. [9, 10, 35, 36].

В процессе проведения групповой экспертизы можно выделить следующие этапы (рис. 12.1):

- формулирование цели и задач исследования;
- постановка задачи;
- разработка методов получения экспертной информации и способов се обработки;
- формирование экспертной группы;
- проведение экспертизы;
- сбор, обработка и анализ полученной информации;
- интерпретация полученных результатов и формирование вариантов рекомендаций.

При решении важных практических задач организация экспертизы начинается с подготовки и издания руководящего документа, в котором формулируется цель работы, указываются сроки ее выполнения, задачи и состав группы управления, ее права и обязанности, устанавливается материальное и финансовое обеспечение работ. Для подготовки такого документа и руководства всей работой назначается руководитель экспертизы. Группа управления организует проведение экспертизы, причем оформление результатов ее работы осуществляется в виде отчета, который после обсуждения и одобрения представляется на утверждение в соответствующие инстанции.

На начальном этапе при постановке задачи исследования обосновывается целесообразность получения экспертной информации и намечаются пути использования ожидаемых

результатов. Вопросы выбора методов получения и обработки экспертной информации решаются в соответствии со спецификой поставленной задачи и с учетом выделенных ресурсов и времени.



Рис.12.1. Схема основных этапов экспертного оценивания

На начальном этапе при постановке задачи исследования обосновывается целесообразность получения экспертной информации и намечаются пути использования ожидаемых результатов. Вопросы выбора методов получения и обработки экспертной информации решаются в соответствии со спе-

цификой поставленной задачи и с учетом выделенных ресурсов и времени.

При составлении экспертных групп пользуются соображениями здравого смысла, учитывая цели экспертизы, ограниченность ресурсов и требования, обусловленные выбранными методами получения и обработки информации от экспертов. Вначале намечаются кандидатуры экспертов, которые по своим профессиональным качествам могут быть привлечены к работе в роли экспертов. При поиске таких кандидатур обычно используются общепринятые документальные показатели, отражающие профессиональный уровень специалиста (должность, ученая степень и звание, количество опубликованных научных работ и др.), а также его прежнее участие в экспертизах. Документальная характеристика часто дополняется взаимной оценкой экспертов. При этом в число «потенциальных» экспертов включаются специалисты, рекомендованные несколькими ранее выявленными экспертами, ранее активно проводившими экспертизу.

Важно, чтобы кандидат в экспертную группу имел широкий кругозор и эрудицию. Компетентность эксперта есть степень его квалификации в определенной области знаний, которая определяется на основе анализа его профессиональной деятельности, широты кругозора по перспективам развития рассматриваемой проблемы.

В зависимости от профессиональной подготовки эксперта (должность, ученое звание, степень) ему присваивают определенный балл. В табл. 12.1 приведены баллы оценок профессиональных качеств эксперта, работающего в научно-исследовательской организации крупной фирмы. Такая информация позволяет произвести предварительный отбор и ранжирование кандидатов по их компетентности.

На следующем этапе решается вопрос о численном составе экспертной группы. Количество привлекаемых к работе экспертов, как правило, обусловлено их квалификацией и

не должно превышать предела, диктуемого ограничениями финансового, временного и организационного характера. Кроме того, в составе группы по возможности должно быть обеспечено равное представительство специалистов различных направлений, существующих в исследуемой области, и организаций, имеющих профессиональное отношение к рассматриваемой задаче.

Таблица 12.1.

Занимаемая должность	Специалист без степени	Кандидат наук	Доктор наук	Академик, член-корреспондент
Инженер, старший инженер	1	-	-	-
Младший научный сотрудник	1	1,50	-	-
Старший научный сотрудник	-	2,25	3,0	-
Заведующий лабораторией, сектором, руководитель группы	2,0	3,00	4,0	6,0
Зав. отделом, зам. заведующего отделом	2,0	3,75	5,0	7,5
Ведущий руководитель комплекса, управления	3,0	4,50	6,0	9,0
Генеральный директор, зам. ген. директора	4,0	6,00	8,0	12,0

Далее осуществляется формирование группы путем выделения тех экспертов, которые являются наиболее компетентными с точки зрения конкретной решаемой задачи. Для предварительной оценки компетентности экспертов рассчи-

тывают коэффициент их компетентности, представляющий собой сумму баллов, приписываемых эксперту в зависимости от его документальных показателей, и данных самооценки (касающихся производственного опыта, знания экономической литературы по решаемому вопросу и др.). Эти баллы берутся из специальных таблиц. При другом подходе коэффициенты компетентности вычисляются на основе матрицы, составленной по результатам взаимной оценки экспертов.

В экспертную группу включаются те эксперты, для которых коэффициент компетентности не ниже некоторого порогового значения. Это значение устанавливается таким, чтобы обеспечить набор группы из числа тех потенциальных экспертов, которые действительно смогут участвовать в ее работе. При проведении экспертиз целесообразно использовать такую обобщенную характеристику эксперта, как достоверность его суждений. Количественно достоверность эксперта оценивают соотношением N_u/N, где N_u - число случаев, когда эксперт дал решение, приемлемость которого подтвердилась практикой; N - общее число случаев участия эксперта в решении задачи.

К сожалению, даже самый квалифицированный эксперт может проявить себя некомпетентным в конкретной экспертизе как в силу причин стохастического характера, так и из-за отсутствия стимулов в работе данной группы. Поэтому возникает проблема оценки компетентности экспертов на основе анализа информации, полученной от него и других членов экспертной группы, участвующих в данной экспертизе.

Сбор и обработка экспертной информации осуществляются согласно разработанным (выбранным) для этих целей методам. Практически для сбора информации составляются соответствующие документы (например, специальные анкеты), а при ее обработке и анализе в случае необходимости может использоваться компьютер. Содержательный анализ и интерпретация обработанных результатов осуществляются с

учетом специфики решаемой проблемы в соответствии с задачами, которые ставились перед экспертизой.

Типичные ошибки, приводящие к некачественной экспертизе и негативному пониманию экспертного оценивания в эконометрике:

1. Переувеличение возможностей экспертного оценивания.

2. Нечеткая постановка задачи перед экспертами.

3. Излишнее стремление оставаться в рамках одной экспертной процедуры и увлечение количественными оценками и свертками, а также некорректная обработка и интерпретация результатов экспертизы.

4. Недостаточная информированность экспертов о конкретном объекте экспертизы и использование некомпетентных экспертов.

5. Противоречивость, несогласованность и неточность экспертных оценок при коллективной экспертизе.

6. Конформизм и конъюнктурность экспертов.

12.2. Классификация методов получения экспертной информации

Квалифицированное применение метода экспертных оценок в существенной степени зависит от выбранного способа сбора и обработки ответов целенаправленно сформированной группой специалистов. Существует большое количество методов получения экспертной информации. Классификация этих методов приведена на рис. 12.2.

Методы коллективной работы экспертной группы предполагают получение обобщенного мнения в ходе совместного обсуждения и решения поставленной задачи всеми экспертами. Первые три метода - методы комиссий (совещания), «суда» и «мозговой атаки» - основаны на коллективном обсуждении решаемой задачи, а деловые игры - на совместной

работе коллектива специалистов, за каждым членом которого закреплены определенные обязанности в соответствии с заранее составленными правилами и программой. Деловые игры, широко используемые в экономике, предназначены в основном для выяснения поведения специалистов в исследуемой обстановке, а также для их обучения.



Рис. 12.2. Классификация методов экспертного оценивания

Метод комиссий. Самым простым и традиционным является метод комиссий. Он предполагает проведение совещания или же общей дискуссии с целью выработки единого коллективного мнения. Количество участников может быть от 3 до 10 и более. Достоинства этого метода состоят в том, что каждый член группы может не только высказать свое мнение, но и аргументированно его защитить, а также крити-

ковать мнения других экспертов. Тщательное обсуждение уменьшает возможность ошибок. Однако на совещании может победить мнение какого-либо участника в силу его авторитета, служебного положения, блестящих ораторских способностей, высокой активности и т.д.

Метод «суда». Этот недостаток присущ и методу «суда», при использовании которого работа экспертной группы осуществляется подобно ведению судебного процесса, где роли «судей» («заседателей») исполняют члены группы управления, а в качестве «прокурора» и «защитников» выступают эксперты. «Свидетелями» являются различные факты, результаты экспериментов, доводы экспертов. Использование такого метода особенно целесообразно при наличии нескольких группировок экспертов, каждая из которых придерживается своей точки зрения.

Метод «мозговой атаки» («мозгового штурма», «коллективной генерации идей») основан на предположении, что если выдвигать большое число самых разнообразных идей и предложений по решению поставленной проблемы, то среди них обязательно окажется одна или даже несколько ценных. Сущность метода состоит в том, что задачи выдвижения новых идей и их анализа полностью разделены, поэтому образуются две группы - генераторов идей и аналитиков. В состав первой включаются эрудированные, с богатым воображением люди, специалисты из смежных областей. Для создания непринужденной обстановки лучше собирать людей примерно одинакового служебного и общественного положения. Заседанием группы генераторов идей руководит ведущий, основной задачей которого является всемерное поощрение инициативы и творчества, свободы высказывания предложений и полное недопущение критики. Все выступления фиксируются и впоследствии тщательно анализируются группой аналитиков - специалистов по профилю решаемой проблемы.

Методы опроса. Этот метод целесообразно использовать в критических ситуациях дефицита творческих решений. Однако реализация всех методов коллективного получения экспертной информации обычно связана с различными трудностями организационного характера, так как собрать вместе многих ведущих специалистов далеко не всегда возможно. Поэтому в настоящее время все чаще используются методы опроса, заключающиеся в получении коллективного мнения на основе совместной обработки индивидуальных мнений членов экспертной группы, опрашиваемых независимо друг от друга. Существуют два основных вида опроса - интервью и анкетирование. Третий является промежуточным: в нем сочетаются идеи первых двух. Специфической особенностью интервью является то, что исследователь и эксперт находятся в непосредственном контакте. Исследователь ведет беседу, стараясь получить ответы на заранее сформулированные вопросы.

Условно выделяют три формы организации бесед. Первые две из них, очевидно, характеризуются своими названиями. Третья осуществляется с участием нескольких интервьюеров и проводится по принципу перекрестного допроса в судебном расследовании. Интервьюеры, получая необходимую информацию, проверяют непротиворечивость и последовательность рассуждений эксперта.

Прямой контакт интервьюера и эксперта создает определенный психологический климат, позволяющий получать сведения, малодоступные анкетному опросу. Однако при этом на результаты большое влияние могут оказать личность интервьюера, а также способность эксперта к контакту, быстрота его мышления и другие психологические факторы. Кроме того, при беседе эксперт обычно не в состоянии рассматривать и анализировать проблему в целом.

Метод анкетного опроса заключается в том, что эксперту предлагается для заполнения специальная анкета, содержа-

щая заранее составленный набор вопросов. В зависимости от степени свободы, предоставляемой эксперту при выборе варианта ответа, вопросы бывают открытого и закрытого типа. При вопросе открытого типа эксперт свободен в выборе формулировки ответа. Вопросы закрытого типа содержат в своей формулировке варианты возможных ответов, один из которых и должен выбрать эксперт. С точки зрения возможности получения сопоставимых результатов анкетирования, наиболее предпочтительны вопросы закрытого типа.

В приведенной классификации выделена группа методов частично коллегиальной работы экспертов. Сущность их состоит в том, что информация собирается методом опроса коллективных экспертов. Такие методы позволяют сочетать преимущества коллективной работы и опроса.

Метод Дельфы. В рассмотренную классификацию не вошли комплексные процедуры экспертизы, осуществляемые в несколько туров. Одним из наиболее известных методов анкетирования подобного рода является метод Дельфы, разработанный в начале 60-х годов прошлого столетия американской компанией РЭНД Корпорейшн, который предусматривает полный отказ от личных контактов экспертов и обеспечение их информацией, включая и обмен информацией между ними после каждого тура опроса, при сохранении анонимности оценок, аргументации и критики.

В первом туре опроса эксперты дают свои ответы, не аргументируя их. Полученные ответы обрабатываются, и выделяются средние и крайние мнения. Во втором туре опроса эксперты, ознакомленные с этими мнениями, вновь отвечают на вопросы, но уже объясняя, почему они изменили или же, напротив, не изменили своих мнений. Новые ответы вновь обрабатываются, проводится следующий тур и т.д. Практика показывает, что после трех-четырех туров ответы экспертов стабилизируются, и это говорит о нецелесообразности дальнейшего проведения экспертизы. В итоге образуется одна

или две группы существенно различных мнений. Наличие двух групп указывает на существование двух различных подходов к проблеме, что может быть вызвано, например, наличием двух научных школ. Но даже в этом случае опрос является полезным, так как позволяет отчетливо выявить позиции сторон и их аргументацию, что необходимо для дальнейшего углубленного исследования проблемы.

12.3. Типы шкал и методы получения элементарных суждений

В группе задач анализа экспертных оценок можно выделить три основных типа задач, решаемых экспертами:

1) оценка имеющихся объектов (примером служит оценивание варианта решения по принятию критерия);

2) построение объектов (к задачам такого типа относятся формирование множества стратегий, выявление неопределенных факторов и установление областей их возможных значений);

3) построение объектов и их оценка (типичной задачей данного вида является составление перечня критериев, конструирование их шкал и оценка стратегий (исходов) по тем или иным критериям).

Рассмотрим наиболее употребительные в практике принятия решений типы шкал: номинальную (или классификационную), порядковую, интервалов (отношений, разностей, абсолютную).

Номинальная шкала используется для описания принадлежности элементов к определенным классам. Всем элементам одного и того же класса присваивается одно и то же число, а элементам разных классов - разные числа. Допустима любая замена чисел для обозначения классов, лишь бы это было взаимно-однозначное преобразование и каждый класс получил бы свое число. Это обстоятельство и опреде-

ляет множество допустимых преобразований номинальной шкалы как множество всех взаимно-однозначных функций. Эта шкала наименее совершенная.

Порядковая шкала используется для измерения упорядочения элементов по одному или нескольким признакам. Она позволяет установить, что один элемент лучше, важнее, предпочтительнее другого или равноценен ему. Порядковая шкала отражает лишь порядок следования элементов и не дает возможности сказать, на сколько или во сколько раз один элемент предпочтительнее другого. Иными словами, в этой шкале нельзя определить меру степени предпочтительности.

Шкала интервалов применяется для отображения величины различия между характеристиками элементов. Она позволяет указать, на сколько один элемент отличается от другого в принятых единицах измерения. Интервальная шкала может иметь произвольные начало отсчета и масштаб. Множество допустимых преобразований данной шкалы составляют все линейные преобразования. Основным свойством шкалы интервалов является сохранение отношения длин интервалов. Частными случаями шкалы интервалов являются шкала отношений (нулевое начало отсчета) и шкала разностей (произвольное начало отсчета и единичный масштаб), а также абсолютная шкала (нулевое начало отсчета и единичный масштаб отсчета).

Количественные и качественные шкалы. Номинальная и порядковая шкалы относятся к качественным шкалам. Шкалы интервалов, отношений, разностей и абсолютная относятся к количественным шкалам, которые позволяют установить количественные соотношения между элементами.

Для количественных шкал справедливы аксиомы арифметики. Шкала считается тем более совершенной, чем уже множество допустимых преобразований. С этой точки зрения

самой совершенной является абсолютная шкала, наименее совершенной - номинальная.

В зависимости от существа или важности того или иного элемента и его характеристик могут быть использованы разные шкалы. Однако при выборе шкалы необходимо учитывать, какие действия в дальнейшем предполагается производить с оценками по выбранной шкале. Осмысленные арифметические действия можно производить лишь над оценками, имеющими количественную шкалу.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением лишь задач первого из трех указанных типов, так как именно на их решение ориентированы существующие математические методы анализа и обработки экспертной информации.

Экспертные оценки объектов, в соответствии с типом их шкал, делятся на количественные, балльные и качественные.

Качественные оценки, к которым относят оценки, полученные в порядковых и номинальных шкалах, называют также **элементарными суждениями**.

К количественным оценкам относятся, например, достоверные эквиваленты и субъективные вероятности.

Методы получения элементарных суждений. Информация в форме элементарных суждений более доступна и надежна, чем количественная и балльная экспертные оценки, так как она наиболее понятна и привычна экспертам. Поэтому именно ее предпочтительнее получать анкетированием. Существуют следующие методы получения элементарных суждений:

- группировка (сортировка);
- балльные оценки;
- ранжирование;
- попарные сравнения;
- множественные сравнения.

Группировка состоит в том, что эксперт последовательно относит предлагаемые ему объекты к одному из заранее

установленных классов. Иногда и сами классы возникают в процессе сортировки объектов. Получаемые при группировке оценки объектов имеют номинальную шкалу.

Для математического описания предпочтений широко используются бинарные отношения. Бинарными отношениями можно непосредственно представить результаты оценки предпочтений, выполненные по любому из трех разобранных выше способов. Вообще бинарные отношения могут быть использованы и практически применяются для описания связей самого различного характера между объектами произвольной природы.

Бинарным отношением p на множестве объектов A называется множество упорядоченных пар (a, b) объектов, т.е. формально - подмножество совокупности $A \times A$ всех упорядоченных пар (a, b), где $a, b \in A$ (последняя запись, как известно, означает, что и a, и b принадлежат A, т.е. являются элементами этого множества).

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только бинарных отношений. Если объекты a и b связаны отношением p, то пишут $(a, b) \in p$. Если же a и b отношением p не связаны, то этот факт записывают так: $(a,b) \notin p$.

Поскольку отношение есть множество специального вида, то и задавать отношение можно теми же способами, что и множества - перечислением всех его элементов или же указанием характеристического свойства, выделяющего его элементы из совокупности всех упорядоченных пар.

Существуют и специальные способы задания отношений - табличный и при помощи графов.

Способы задания отношений. При табличном способе отношение задается специальной матрицей - матрицей смежности, каждая строка и каждый столбец которой соответствуют некоторому объекту, а на пересечении строки a и столбца b ставится 1, если $(a, b) \in p$, и 0 - в противном случае. Например, коммерческая фирма состоит из генерального ди-

ректора (ГД), его заместителя (ЗГД), а также менеджеров (M_1, M_2, …, M_n), которые подчинены ГД и ЗГД. Для отношения подчинения p матрица смежности выглядит следующим образом:

	ГД	ЗГД	M_1	…	M_n
ГД	0	1	1	…	1
ЗГД	0	0	1	…	1
M_1	0	0	0	…	0
…	…	…	…	…	…
M_n	0	0	0	…	0

Отношение p можно задать и в виде графа, т.е. совокупности точек (вершин), изображающих элементы множества A и соединенных стрелками (дугами) по такому правилу: если $(a, b) \in p$, то проводится стрелка из a в b. Иногда вершины графа представляют небольшими кружками или прямоугольниками. Граф отношения подчинения представлен на рис.12. 3.

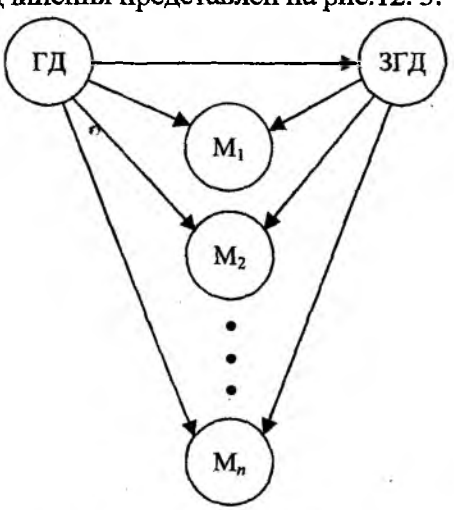


Рис. 12.3. Граф отношения

Примерами балльных оценок являются оценки студентов в вузе в четырехбалльной шкале с градациями (оценками) 2, 3, 4 и 5. В балльных шкалах часто производятся экспертные оценки: эксперты баллами характеризуют свои субъективные мнения о предпочтительности объектов, оценивая, например, их товарный вид или удобство в обращении. Обычно значения (градации) балльной шкалы представляют собой ряд чисел, отстоящих друг от друга на одинаковом расстоянии. Чаще всего берут первые натуральные числа: 1, 2, ..., n или ближайшие к нулю целые числа: 0, ± 1, ± 2,..., $\pm n$.

Ранжирование часто представляют как оценку в ранговой шкале, т.е. рангом объекта a можно считать номер места, которое он занимает в ранжировании при обратной нумерации мест (при этом полагается, что равноценные объекты находятся на одном и том же месте).

Ранжирование - это представление объектов в виде последовательности в соответствии с убыванием их предпочтительности. При этом допускается указание на равноценность некоторых поставленных рядом объектов. Если же указывать на равноценность объектов нельзя, то ранжирование называется строгим.

Например, руководитель предприятия или фирмы четверых своих подчиненных по их исполнительности может ранжировать так: <2, 1-3, 4>. Это означает, что самым исполнительным является сотрудник, занимающий второе место в списке организации; за ним идут одинаковые по исполнительности подчиненные, фамилии которых стоят в списке организации на первом и третьем местах; последний наименее исполнителен. В этом примере самый исполнительный сотрудник получает ранг 3, каждый из двух следующих за ним - ранг 2, а последний - ранг 1.

Метод попарного сравнения. Попарное сравнение состоит в указании более предпочтительного объекта в каждой

паре объектов. Иногда разрешается также заявлять, что объекты равноценны или несравнимы.

Результаты попарного сравнения удобно представлять в виде матрицы, на пересечении строки i и столбца j которой ставится 1, если объект i предпочтительнее объекта j; 0 - если объект j предпочтительнее объекта i; 1/2 - если объекты одинаковы по предпочтительности; прочерк (-) - если объекты несравнимы. Представленная ниже матрица показывает, например, что объект a предпочтительнее, чем b, а объекты a и c - несравнимы.

	a	b	c
a	1/2	1	-
b	0	1/2	1
c	-	0	1/2

Метод попарного сравнения применяется обычно, чтобы выявить предпочтения «в чистом виде». Это объясняется тем, что он, в отличие от двух других, не навязывает эксперту никаких специальных условий. Например, если a предпочтительнее b, а b предпочтительнее c, то при оценивании в балльной шкале и ранжировании обязательно должно быть выполнено условие: a предпочтительнее c. Попарное сравнение выполнения такого рода условий заранее не предполагает, и поэтому считается, что качественно сравнить объекты в парах гораздо легче, чем выразить предпочтения в балльной или ранговой шкале.

Множественные сравнения представляют собой дальнейшее развитие и обобщение попарных сравнений, когда эксперту последовательно предлагают наборы из нескольких объектов, а в каждом наборе объекты надо упорядочить или же указать лучший среди них.

12.4. Методы обработки и анализа экспертных оценок

Основными задачами обработки и анализа экспертных оценок являются следующие:

- оценка степени согласованности мнений экспертов;
- получение коллективного (обобщенного) мнения экспертной группы;
- выделение подгрупп экспертов с «близкими» мнениями;
- оценка и учет компетентности экспертов.

Эти задачи, кроме последней, перечислены в той последовательности, в которой они должны практически решаться. Действительно, прежде чем получать обобщенное мнение, следует убедиться в достаточно высокой согласованности мнений экспертов. Если такой согласованности нет, то «осреднение» всех мнений противоречило бы исходной предпосылке о том, что ответы экспертов лишь случайно и независимо отклоняются от некоторой истинной единственно правильной точки зрения, которую и надлежит выявить при экспертизе. При этом обобщенное мнение будет неустойчивым в том смысле, что небольшие изменения обрабатываемого материала (например, исключение оценок нескольких экспертов или же добавление новых) могут значительно его изменить.

Поэтому при невысокой согласованности экспертов вначале следует выделить наиболее оригинальные из них и разбить экспертную группу на подгруппы экспертов с близкими мнениями. Общее мнение необходимо получать для каждой из таких подгрупп «осреднением» мнений ее членов. После этого необходимо провести содержательный анализ полученных результатов и выяснить причины наличия нескольких точек зрения. Оценки и учет компетентности экспертов следует проводить до или в процессе выработки решения.

Ранговые корреляции. Рассмотрим методы анализа экспертных оценок, получаемых в результате ранжирования n заданных объектов a_1, a_2, ..., a_n. Каждый эксперт располагает эти объекты по убыванию предпочтений или уменьшению интенсивности некоторого признака и т.п. Полученные таким путем упорядоченные наборы объектов называют ранжировками. Каждой ранжировке соответствует вполне определенный квазипорядок R на множестве объектов $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Этот квазипорядок, так же как и ранжировку, можно задать матрицей смежности, где объектам можно приписать ранги. Рассмотрим случай, когда каждый эксперт все объекты ранжирует строго. В теории и практике экспертного оценивания рангом x_j объекта a_j принято считать номер места, которое он занимает в строгой ранжировке. Например, для $<a_2, a_3, a_1>$ имеем $x_2=1$, $x_3=2$, $x_1=3$. Понятно, что ранг x_j показывает, что впереди a_j стоит x_j-1 объект. Сумма всех рангов $x_1+x_2+...+x_n$ равна $n(n+1)/2$ (как сумма арифметической прогрессии $1+2+...+n$).

Ранжировки, указанные разными экспертами редко совпадают, поэтому необходимо оценить степень соответствия мнений двух экспертов. В статистике зависимость между двумя переменными характеризуется коэффициентом корреляции. Применительно к рассматриваемому случаю оценки связи двух ранжировок такой коэффициент должен обладать следующими свойствами:

- если обе ранжировки полностью совпадают, т.е. если каждый объект занимает в них одно и то же место, то коэффициент равен +1;
- если одна ранжировка противоположна другой, т.е. если в одной из них объекты расположены в обратном порядке по сравнению с другой, то коэффициент равен -1;
- в остальных случаях значение коэффициента лежит между предельными значениями, причем возрастание его от -1 до +1 в некотором смысле характеризует увеличивающееся соответствие между двумя ранжировками.

Вид коэффициента корреляции зависит от того, как конкретизируется третье из указанных требований. В практике проведения экономических экспертиз наиболее распространенными являются коэффициенты ранговой корреляции Кендалла (τ) и Спирмена (ρ).

Выясним, как определяется первый из этих коэффициентов.

Рассмотрим две ранжировки:

$$\langle a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in} \rangle, \quad \langle a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn} \rangle. \qquad (1)$$

Возьмем какую-либо пару объектов a_l, a_t. Если в обеих ранжировках порядок расположения этих объектов совпадает (например, a_l стоит впереди a_t), то пару a_l, a_t можно назвать согласованной. Если же в одной из ранжировок раньше идет a_l, а в другой a_t то пара несогласованная.

Известно, что из n объектов можно выбрать всего $C_n^2 = n(n-1)/2$ различных пар. Если обозначить через S^+ число согласованных, а через S^- - число несогласованных пар, то чем больше число S^+, тем менее согласованны ранжировки, и чем больше S^- (меньше S^+), тем более они согласованны. Удобнее степень согласованности оценивать разностью $S_\tau = S^+ - S^-$, так как ее знак указывает, каких пар больше - согласованных или несогласованных.

В частности, если ранжировки совпадают, то $S^+ = C_n^2$, $S^- = 0$ и $S_\tau = C_n^2$. Если же одна ранжировка обратна другой, то $S^+ = 0$, $S^- = C_n^2$ и $S_\tau = -C_n^2$.

Из изложенного становится понятным, что коэффициент Кендалла

$$\tau = \frac{2S_\tau}{n(n-1)} \qquad (2)$$

удовлетворяет всем трем сформулированным требованиям.

Пример 1. Рассмотрим следующие две ранжировки семи экономических объектов

$$\langle a_7, a_2, a_6, a_1, a_5, a_3, a_4 \rangle, \quad \langle a_2, a_7, a_6, a_3, a_1, a_5, a_4 \rangle. \quad (3)$$

Выпишем все 21=7·6/2 пар объектов, рассортировав их по типам.

Согласованные пары		Несогласованные пары
a_1, a_2	a_3, a_4	a_1, a_3
a_1, a_4	a_3, a_6	a_2, a_7
a_1, a_5	a_3, a_7	a_3, a_5
a_1, a_6	a_4, a_5	
a_1, a_7	a_4, a_6	
a_2, a_3	a_4, a_7	
a_2, a_4	a_5, a_6	
a_2, a_5	a_5, a_7	
a_2, a_6	a_6, a_7	

Следовательно, для ранжировок (3) $S_\tau = 18 - 3 = 15$ и

$$\tau = \frac{2 \cdot 15}{7 \cdot 6} = \frac{5}{7} \approx 0{,}71,$$

т.е. степень согласованности экспертов достаточно высокая.

Пример 2. Для ранжировок (3) ранги объектов представлены в табл. 12.2.

Таблица 12.2.

a_j	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
x_j	4	2	6	7	5	3	1
y_j	5	1	4	7	6	3	2

Понятно, что S^+ равно числу таких пар рангов y_i, y_j, где $y_i < y_j$, которые в последней строке табл. 3 расположены в прямом порядке.

Первым в третьей строке стоит 2. Правее него имеется пять превосходящих его чисел. Правее 1 - также пять чисел, каждое из которых больше 1. Правее 3 стоит четыре числа, и

каждое из них больше 3. Правее 5 - всего два превосходящих его числа, правее 6 одно и правее 4 - тоже одно. Поэтому $S^+ = 5+5+4+2+1+1 = 18$, $S^- = 21-18 = 3$, и в итоге получаем уже известный результат: $\tau = 0{,}71$.

Переставив надлежащим образом столбцы, получим табл. 12.3.

Таблица 12.3.

a_j	A_7	a_2	A_6	A_1	a_5	A_3	A_4
x_j	1	2	3	4	5	6	7
y_j	2	1	3	5	6	4	7

Если мнения двух экспертов близки, то указанные ими ранжировки будут мало отличаться от «истинной», и коэффициент корреляции окажется высоким. Однако практически рассуждения приходится вести в обратном порядке, о близости мнений судить по корреляции ранжировок, которые эти мнения выражают.

Для решения поставленного вопроса используется подход, связанный с проверкой статистических гипотез. Предположим, что хотя бы один из экспертов полностью некомпетентен и независимо от другого случайным образом с одинаковой вероятностью $1/n!$ указывает одну из $n!$ возможных строгих ранжировок n объектов (при справедливости этого допущения, или нулевой гипотезы). Но коэффициент τ оказывается случайной величиной. Распределение оказывается симметричным относительно математического ожидания $M[\tau]=0$, причем чем больше по абсолютной величине возможное значение τ тем меньше вероятность получить это значение. Поскольку нас интересует вероятность получения больших значений, то критическая область, соответствующая уровню значимости α, задается неравенством $\tau \geq \tau_\alpha$. Однако с целью некоторого упрощения вычислений используют равносильное неравенство $S_\tau \geq S_\alpha$.

Проверка справедливости нулевой гипотезы производится обычным порядком при помощи специальных таблиц, которые дают значения вероятности $\alpha = \Pr(S_\tau \geq S_\alpha)$ при различных значениях n и S_τ. При n>10 распределение τ весьма близко к нормальному с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$D = \frac{1}{18} n(n-1)(2n+5),$$

и можно использовать таблицы функции Лапласа F_τ стандартного нормального распределения $N(0,1)$, так как $\alpha = 1 - F_\tau\left(\frac{\tau_\alpha}{\sigma_n}\right)$.

Пример 3. Для ранжировок (3) в примере 1 было получено достаточно высокое значение τ=0,71, причем S_τ=15. Табличное значение вероятности $\alpha = \Pr(S_\tau \geq 15) = 0{,}015$. Эта вероятность весьма незначительна, поэтому можно считать, что мнения экспертов действительно хорошо согласованы.

Коэффициент ранговой корреляции ρ ранжировок (1) Спирмен определил при помощи их рангов (4) по обычно используемой в статистике формуле для точечной оценки коэффициента корреляции:

$$\rho = \frac{K^*_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}, \qquad (4)$$

где K^*_{xy} - оценка корреляционного момента связи рангов x и y;

$\sqrt{D_x}, \sqrt{D_y}$ - оценки их средних квадратических отклонений.

$$K^*_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x^*)(y_j - y^*),$$

где x^* и y^* - средние ранги:

$$x^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j, \quad y^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j .$$

Поскольку ранги - это натуральные числа от 1 до n, то $x^* = y^*$, так что средний ранг для любой ранжировки один и тот же, поэтому и дисперсии ранжировок также одинаковы.

Подставив в (4) полученные выражения, можно представить ρ следующей формулой:

$$\rho = \frac{12}{n^3 - n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - x^*\right)\left(y_j - y^*\right),$$

которую для упрощения расчетов приводят к более удобному виду. С этой целью можно воспользоваться тождеством $x^* = y^*$. Тогда

$$\rho = 1 - \frac{6S_\rho}{n(n^2 - 1)}, \qquad (5)$$

где

$$S_\rho = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j - y_j\right)^2 . \qquad (6)$$

Как и всякий статистический коэффициент корреляции, ρ изменяется от -1 до +1. Равенство ρ=+1, согласно (6), выполняется при $x_j = y_j$, $j = 1,2,...,n,$, т.е. при полном совпадении ранжировок. Равенство ρ=-1 имеет место, когда ранжировки противоположны друг другу.

Проверка значимости согласованности двух ранжировок с использованием коэффициента ρ осуществляется в том же общем порядке, который был ранее описан. При справедливости нулевой гипотезы распределение ρ симметрично относительно математического ожидания $M[\rho]$=0, причем с ростом абсолютной величины возможного значения ρ вероятность его получения падает. Поэтому критическая область определяется неравенством $\rho > \rho_\alpha$. При небольших n (до 10)

пользуются таблицами вероятностей $\Pr(S_\rho \geq S)$, учитывая, что

$$\alpha = \Pr(S_\rho \leq S_\alpha) = 1 - \Pr(S_\rho \geq S_\alpha + 2).$$

При $n>10$ можно исходить из того, что распределение величины $t = \rho\sqrt{\frac{n-2}{1-\rho^2}}$ весьма близко к распределению Стьюдента с n-2 степенями свободы. При $n>30$ распределение ρ практически совпадает с нормальным, имеющим нулевое математическое ожидание и дисперсию, равную $1/(n-1)$.

Пример 4. Для ранжировок (3) разности $(x_j - y_j)$ и их квадраты приведены в табл. 12.4.

Таблица 12.4.

a_j	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
x_j	4	2	6	7	5	3	1
y_j	5	1	4	7	6	3	2
$x_j - y_j$	-1	1	2	0	-1	0	-1
$(x_j - y_j)^2$	1	1	4	0	1	0	1

Следовательно, $S_\rho = 8$ и, согласно (5),

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot (49-1)} \approx 0{,}86.$$

Табличное значение вероятности α, получаемой как вероятность выполнения неравенства

$$S_\rho \geq 2 + 8 = 10,$$

равно 0,0062, так что гипотезу о независимости мнений экспертов следует отвергнуть.

Мерой согласованности двух ранжировок может служить не только тот или иной коэффициент ранговой корреляции, но и расстояние d между квазипорядками, соответствующими этим ранжировкам. Расстояние d с рассмотренны-

ми выше коэффициентами корреляции соотносится следующим образом:

$$\tau = 1 - \frac{2d}{n(n-1)}. \qquad (7)$$

Следовательно, если оценку согласованности ранжировок осуществлять при помощи расстояния d, то проверку значимости степени согласованности можно проводить при помощи статистики τ (7).

Оценка согласованности экспертов. Пусть перед каждым из m членов экспертной группы поставлена задача строго ранжировать n заданных объектов $a_1, a_2, ..., a_n$. В результате опроса будет получено n строгих ранжировок этих объектов. Полученные ранжировки можно представить соответствующими последовательностями рангов:

$$\begin{aligned} &\langle x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n} \rangle, \\ &\langle x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n} \rangle, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\langle x_{m1}, x_{m2}, ..., x_{mn} \rangle, \end{aligned} \qquad (8)$$

где x_{ij} - ранг, присвоенный объекту a_j по ранжировке, указанной i-м экспертом.

Степень согласованности всех экспертов можно выразить через оценки близости мнений для отдельных пар экспертов, т.е. при помощи коэффициентов ранговой корреляции τ или ρ:

Поскольку из экспертной группы можно выбрать всего $C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}$ различных пар экспертов, то степень согласованности группы можно оценить средними значениями $\bar{\tau}$ и $\bar{\rho}$:

$$\bar{\tau} = \frac{2}{m(m-1)} \sum_{i<k} \tau_{ik}, \qquad (9)$$

$$\bar{\rho} = \frac{2}{m(m-1)} \sum_{i<k} \rho_{ik}. \qquad (10)$$

Чем выше согласованность всех экспертов, тем больше знания введенных коэффициентов. В частности, если мнения экспертов полностью совпадают, т.е. каждый из них указал одну и ту же ранжировку, то т и р принимают свое наибольшее значение, равное 1.

Вычислять коэффициенты $\bar{\tau}$ и $\bar{\rho}$ по формулам (9) и (10) весьма трудоемко, поэтому для оценки согласованности экспертов пользуются специальными показателями, называемыми коэффициентами конкордации (согласованности). Наиболее известным является коэффициент конкордации W, который видится следующим образом.

Обозначим через x^j сумму рангов, «набранных» объектом a_j и пусть $\bar{x}$ - среднее значение суммы рангов одного объекта.

Вычислим сумму квадратов отклонений сумм рангов, «набранных» объектами, от средней суммы $\bar{x}$:

$$S_w = \sum_{j=1}^{n} \left(x^j - \bar{x}\right)^2.$$

Если все ранжировки совпадают между собой, то суммы рангов x^j, записанных в порядке возрастания, составляют последовательность m, $2m$, ..., nm, а их отклонения от $\bar{x} = \frac{m(n+1)}{2}$ оказываются равными

$$-\frac{1}{2}m(n-1),\ -\frac{1}{2}m(n-3),\ldots,\ \frac{1}{2}m(n-1).$$

Сумма квадратов этих отклонений

$$\sum_{j=1}^{n}\left(jm - \frac{m(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m^2 n(n^2-1).$$

Это наибольшее значение, которое может принимать S_w. При уменьшении согласованности экспертов S_w уменьшается. Наименьшее значение S_w равно нулю, когда m четно или n нечетно (или то и другое одновременно), и весьма близко к нулю, когда m нечетно и n четно. Коэффициент конкордации W - это сумма S_w, нормированная ее наибольшим значением:

$$W = \frac{12S_w}{m^2 n(n^2-1)}, \qquad (11)$$

где S_w определяется выражением

$$S_w = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - \frac{m(n+1)}{2}\right)^2$$

Пример .5. Десять экспертов ранжировали по значимости следующие четыре показателя, характеризующие эффективность инвестиционных проектов: a_1 - объем инвестиций, a_2 - срок окупаемости, a_3 - чистый дисконтированный доход, a_4 - рентабельность инвестиций (табл. 12.5).

Таблица 12.5.

Эксперты	Объекты			
	a_1	a_2	a_3	a_4
1	3	2	1	4
2	1	2	3	4
3	3	1	2	4
4	1	2	3	4
5	3	1	2	4
6	3	1	2	4
7	3	2	4	1
8	3	4	1	2
9	2	4	1	3
10	2	1	3	4
x^j	24	20	22	34
x^j-25	-1	-5	-3	+9
$(x^j-25)^2$	1	25	9	81

Поскольку S_w=1+25+9+81=116, то, согласно (11), W=0,232. Так как число экспертов достаточно велико (больше семи), то вычислим $x^2 = m(n-1)W = 10 \cdot 3 \cdot 0{,}232 = 6{,}96$. При уровне значимости α=0,05 по таблице функции χ^2 - распределение для n-1=3 степеней свободы находим $\chi^2_{0,05} = 7{,}815$, так что $\chi^2_{0,05} = 6{,}96$. Следовательно, нулевую гипотезу отклонять нет оснований, т.е. полученная степень согласованности экспертов W=0,232 незначима.

Для оценки согласованности ранжировок можно использовать также коэффициент конкордации, который выводится следующим образом.

На основании полученных ранжировок или на основании рангов (8) можно построить табл.12.6.

Таблица 12.6.

	a_1	a_2	...	a_n
a_1	-	γ_{12}	...	γ_{1n}
a_2	γ_{21}	-	...	γ_{2n}
...	...	...	...	...
a_n	γ_{n1}	γ_{n2}	...	γ_{nn}

В табл. 6 γ_{jk} есть число экспертов, *которые считают*, что объект a_j лучше, чем a_k.

Пусть $\gamma_{jk} \geq 2$. Тогда $C^2_{\gamma_{jk}}$ - число пар экспертов, мнения которых относительно a_j и a_k совпадают. Следовательно, сумма

$$S_u = \sum_{j \neq k, \gamma_{jk} \geq 2} C^2_{\gamma_{jk}}$$

равна общему числу случаев, в которых пара экспертов согласна между собой.

Коэффициент u определяется формулой

$$u = \frac{2S_u}{C_m^2 C_n^2} - 1 = \frac{8S_u}{m(m-1)n(n-1)} - 1.$$

При этом, если объекты расположить согласно суммам «набранных» ими рангов, то удобнее использовать формулу

$$S_u = \sum_{j<k} \gamma_{jk}^2 - m\sum_{j<k} \gamma_{jk}^2 + C_n^2 C_m^2. \qquad (13)$$

При справедливости равенства $u = \bar{\tau}$ можно определить распределение u при условии справедливости нулевой гипотезы о независимости и равновероятности ранжировок.

Пример 6. Для предыдущей задачи последняя таблица выглядит следующим образом (табл.12.7).

Таблица 12.7.

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	-	4	4	8
a_2	6	-	7	7
a_3	6	3	-	9
a_4	2	3	1	-

Расположив объекты в порядке, соответствующем возрастанию сумм рангов (строка x^j в табл. 12.5), получаем табл. 12.8.

Таблица12.8.

	a_2	a_3	a_1	a_4
a_2	-	7	6	7
a_3	3	-	6	9
a_1	4	4	-	8
a_4	2	3	1	-

Сумму S_u рассчитываем по формуле (13):

$$S_u = (3^2 + 4^2 + 4^2 + 2^2 + 3^2 + 1^2) - 10 \cdot (3 + 4 + 4 + 2 + 3 + 1) +$$

$$+ \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 155.$$

После вычислений получаем:

$$u = \frac{8 \cdot 155}{10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 3} - 1 \approx 0{,}15.$$

Оценку согласованности мнений экспертов можно также произвести, подсчитав среднее расстояние $\bar{d}$ между парами

квазипорядков R_i, соответствующих полученным ранжировкам.

Выражение (7) позволяет получить следующее соотношение между $\bar{d}$ и $\bar{\tau}$:

$$\bar{\tau} = 1 - \frac{2\bar{d}}{n(n-1)}.$$

Это соотношение и равенство (13) показывают, что при использовании $\bar{d}$ проверку значимости полученной оценки близости мнений экспертов можно осуществлять при помощи статистики *u*.

Получение групповой ранжировки. При достаточно высокой согласованности мнений членов экспертной группы можно решить задачу построения групповой ранжировки, «осредняя» ранжировки, полученные от отдельных экспертов. [5].

Один из подходов к решению этой задачи состоит в том, чтобы групповой считать ранжировку, наиболее тесно коррелированную с обрабатываемыми *m* ранжировками. Введем следующие обозначения:

R - квазипорядок, соответствующий некоторой ранжировке объектов $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

$x=<x_1,\ldots,x_n>$ -последовательность рангов объектов, соответствующая *R*;

$x^{(i)} =< x_{i1},\ldots, x_{im} >$ - последовательность рангов, приписанных объектам по ранжировке *i*-го эксперта;

R_i - квазипорядок, соответствующий этой ранжировке;

$\tau\left(x^{(i)}, x\right)$ - коэффициент τ, рассчитанный для $x^{(i)}, x$;

$\rho\left(x^{(i)}, x\right)$ - коэффициент ρ, рассчитанный для $x^{(i)}, x$.

В зависимости от выбора конкретного коэффициента ранговой корреляции можно получить одно из условий, определяющих групповую ранжировку x^*.

Другой подход к рассматриваемой задаче состоит в том, чтобы групповую ранжировку искать как медиану индивиду-

альных. В общем случае любой из подходов может привести к получению нестрогой групповой ранжировки. Наиболее простым в вычислительном отношении является метод «сумм рангов», и поэтому он значительно шире распространен на практике.

Заметим еще следующее: как показывает формула (13), при использовании метода «медианы» оценивать согласованность экспертов целесообразно с помощью статистики и, а при использовании метода «сумм рангов» - с помощью статистики W.

Удаление «нестандартных» ранжировок и выделение подгрупп экспертов с близкими мнениями. При слабой степени согласованности мнений группы экспертов целесообразно выделить отдельные наиболее отличающиеся от всех остальных ранжировки и выяснить вопрос о том, не распадается ли экспертная группа на несколько подгрупп, каждая из которых придерживается своей точки зрения. Если это так, то для каждой из подгрупп следует получить «среднюю» ранжировку, применив тот или иной метод, а затем провести содержательный анализ причин наличия нескольких точек зрения и появления «оригинальных» экспертов.

Строго научно обоснованных методов решения задачи о выделении «нестандартных» ранжировок и разделении экспертной группы на подгруппы пока не создано. Практически рекомендуется «нестандартными» считать ранжировки, которые достаточно далеко находятся от большинства, а подгруппы выделять так, чтобы согласованность входящих в них экспертов была достаточно высока и ранжировки, выражающие мнения этих подгрупп, были далеки друг от друга.

Пример 7. Рассмотрение табл. 5 наводит на мысль о том, что у седьмого, восьмого и девятого экспертов мнения резко отличаются от остальных. При разделении экспертной группы на две подгруппы выделим во вторую подгруппу трех указанных экспертов, а в первую - семь остальных. Тогда для

первой подгруппы получаем W=0,697 (что существенно при уровне значимости 0,05), а «осредненная» ранжировка, полученная методом «сумм рангов», выглядит так: $<a_2, a_1\text{-}a_3, a_4>$.

Обработка и анализ балльных оценок. Пусть перед каждым экспертом была поставлена задача: непосредственно оценить заданные объекты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в указанной балльной шкале. Тогда в результате опроса экспертной группы, включающей m членов, будет получена совокупность чисел:

$$\begin{array}{l} \langle x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n} \rangle, \\ \langle x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n} \rangle, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \langle x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn} \rangle, \end{array} \qquad (14)$$

где x_{ij} - число баллов, приписанное экспертом i объекту a_j.

Как известно, что балльная шкала является промежуточной между порядковой и интервальной. Специальных методов обработки оценок, полученных в подобного рода промежуточных шкалах, пока не создано. Поэтому при обработке балльных оценок поступают следующим образом. Если имеется уверенность, что все эксперты пользуются единой балльной шкалой (одинаково понимают «цену балла»), как это бывает, например, при наличии специальных эталонов, то балльная шкала приближается к интервальной, и балльные оценки (4) обрабатывают как количественные. В противном случае балльные оценки считают качественными, объекты ранжируют в соответствии с оценками каждого эксперта и затем обрабатывают полученные m ранжировок. Однако и в первом случае целесообразно дважды обработать балльные оценки - как количественные и как качественные. Согласованность результатов, полученных при обоих подходах, будет свидетельствовать о том, что эти результаты действительно основаны на исходных данных, а не на способах их обработки.

Если считать, что оценки (14) количественные, то в соответствии с исходным допущением о том, что разница в ответах экспертов объясняется случайными независимыми флуктуациями относительно некоторых «истинных» величин, для обработки данных (5) можно использовать обычные статистические методы точечного оценивания. Каждому объекту a_j следует приписать средний балл:

$$x_j = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}, \quad j = 1,2,...,n. \qquad (14)$$

Оценки (15) и принимаются в качестве групповых. Согласованность экспертов можно характеризовать дисперсиями балльных оценок, приписываемых отдельным объектам. Оценки таких дисперсий по результатам (16) вычисляются по известным формулам.

При положительных балльных оценках часто используют так называемые вариации и полагают, что согласованность экспертов удовлетворительная, если все v_j<0,3, и хорошая, если все v_j<0,2.

Выделение «оригинальных» экспертов на основе их «нестандартных» баллов можно производить известными статистическими методами проверки аномальности результатов наблюдений.

12.5. Оценка и учет компетентности экспертов

Квалификация всех экспертов примерно одинакова. Однако практически выполнить условие равнокомпетентности экспертов удается далеко не всегда. Поэтому в общем случае при обработке и анализе экспертных оценок может возникнуть необходимость оценки и учета компетентности опрашиваемых экспертов.

Компетентность экспертов может оцениваться как до проведения опроса, так и в ходе обработки полученных ре-

зультатов экспертизы. Если тем или иным способом получены коэффициенты λ_i компетентности экспертов, то эти коэффициенты можно использовать при обработке как относительные «веса» мнений соответствующих экспертов. При таком подходе, например, применяют следующую зависимость:

$$x_j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_{ij}, \quad j = 1,2,...,n.$$

При этом предполагается, что коэффициенты компетентности нормированы:

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1.$$

Однако, как было выяснено ранее, предпочтительнее оценивать компетентность экспертов непосредственно по результатам конкретной экспертизы в процессе обработки полученных оценок. Для задачи обработки нормированных балльных оценок (14), т.е. удовлетворяющих условиям:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,...,m,$$

все $x_{ij} \geq 0$..

Предположим, что каждый из трех экспертов оценил значение двух мероприятий a_1 и a_1 для решения некоторой проблемы. Полученные нормированные балльные оценки приведены в табл. 12.9.

Таблица 12.9.

i	a_1	a_2
1	0,7	0,3
2	0,3	0,7
3	0,2	0,8

Считая вначале, что все эксперты равнокомпетентны:

$$\lambda_1^0 = \lambda_2^0 = \lambda_3^0 = \frac{1}{3},$$

вычислим средние оценки мероприятий:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{3}(0,7 + 0,3 + 0,2) = 0,4; \quad x_2^{(1)} = \frac{1}{3}(0,3 + 0,7 + 0,8) = 0,6.$$

Теперь пересчитаем коэффициенты компетентности экспертов с учетом полученных оценок $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$ суммируя оценки каждого эксперта и «взвесив» их средними оценками объектов:

$$0,7 \cdot x_1^{(1)} + 0,3 \cdot x_2^{(1)} = 0,46;$$

$$0,3 \cdot x_1^{(1)} + 0,7 \cdot x_2^{(1)} = 0,54;$$

$$0,2 \cdot x_1^{(1)} + 0,8 \cdot x_2^{(1)} = 0,56.$$

Разделив полученные числа на их сумму, равную 1,56, получим уточненные коэффициенты компетентности:

$$\lambda_1^{(1)} = (0,29; 0,35; 0,36).$$

Смысл проделанного преобразования заключается в том, что для эксперта, который дал большую оценку мероприятию, получившему большую «взвешенную» сумму баллов, коэффициент компетентности увеличивается сильнее.

Далее делается второй шаг - вычисляются новые средние оценки $x_j^{(1)}$ с использованием $\lambda_i^{(1)}$, а затем последние вновь уточняются при помощи $x_j^{(1)}$ и т.д.

Получим необходимые расчетные формулы для общего случая. При этом воспользуемся матричной записью, введя вектор-строки:

$$\lambda^k = \left(\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, ..., \lambda_m^{(k)}\right), \quad x^k = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_m^{(k)}\right)$$

и сведя числа (14) в матрицу

$$X = \left\| x_{ij} \right\|.$$

Теперь можно записать рекуррентные соотношения:

$$x^{(k)} = \lambda^{(k-1)} X, \quad \lambda^{(k)} = \frac{1}{x^{(k)}} X x^{(k)}, \quad k = 1,2,... \qquad (16)$$

$$x^{(k)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} x_j^{(k)}. \qquad (17)$$

На первом шаге (k=1) в качестве начального используется вектор:

$$\lambda^{(0)} = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, ..., \frac{1}{m} \right).$$

При помощи результатов теории неотрицательных матриц доказано, что процесс, осуществляемый согласно соотношениям (16), - сходящийся. Условие сходимости этого процесса состоит в том, чтобы матрица X была неразложима, т.е. перестановками строк или столбцов неприводима к виду:

$$X = \begin{Vmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{Vmatrix}. \qquad (18)$$

Условие неразложимости практически вполне оправдано: если матрица X представима в виде (18), то это означает, что эксперты и объекты как бы распадаются на две никак не связанные подгруппы: каждая подгруппа экспертов оценивает только «свои» объекты. Разумеется, нет никакого смысла совместно обрабатывать две несвязанные совокупности данных.

Практически значения $x_j^{(k)}$ и $\lambda_i^{(k)}$ стабилизируются за два-три шага. Это служит сигналом к окончанию процесса. Установившиеся значения $x_j^{(k)}$ можно считать итоговыми оценками объектов, а $\lambda_i^{(k)}$ - окончательными коэффициентами компетентности экспертов.

Для иллюстрации вернемся к нашему примеру. В нем:

$$X = \begin{Vmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{Vmatrix}, \quad \lambda^{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

Согласно (16) и (17) на первом шаге получаем:

$$x^{(1)} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) X = (0{,}4; 0{,}6);$$

$$Xx^{(1)} = X \begin{Vmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0{,}46 \\ 0{,}54 \\ 0{,}56 \end{Vmatrix}; \quad x^{(1)} = 1{,}56;$$

$$\lambda^{(1)} = (0{,}29; 0{,}35; 0{,}36).$$

На втором шаге получаем $\lambda^{(2)} = (0{,}29; 0{,}35; 0{,}36)$.

Следовательно, компетентность экспертов характеризуется коэффициентами (0,29; 0,35; 0,36), так как векторы $x_j^{(k)}$ и $\lambda_i^{(k)}$ стабилизировались.

12.6. Пример использования экспертных оценок в экономической практике

Рассмотрим комплексную методику оценки эффективности, сравнительного анализа и отбора инвестиционных проектов, которая используется на ряде этапов экспертной оценки.

Предлагаемая методика включает следующие этапы.

1. Формирование множества показателей, по которым будут сравниваться проекты (при этом, в частности, помимо приоритетов инвестора и привлеченных им экспертов, могут использоваться методические рекомендации министерств и ведомств, учитываться интересы регионов).

2. Последовательное применение к отобранным проектам методов Парето, Борда и БОФа (на стадии применения каждого метода проводится последовательное снижение мощности исходного множества проектов).

3. Применение критерия оптимальности при формировании портфеля проектов.

Считая первый этап выполненным, остановимся на алгоритме второго этапа, воспользовавшись для наглядности количественным примером (табл. 12.10).

Таблица 12.10.

№ п/п	Название проекта	Объем инвестиций, млн. долл.	Годовой оборот проекта, млн. долл.	Годовой объем чистой прибыли, млн. долл.	Срок окупаемости проекта, лет	Риск потери инвестиций
		W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
А	1	2	3	4	5	6
1	Строительство завода по производству окиси этилена	33	26	7,8	5,5	Н
2	Производство звукометрического комплекса	1,138	18	1,3	1,69	В
3	Производство комплекса изделий на основе металлокерамики	1,08	1,65	0,585	2,75	Н
4	Реконструкция сборочно-монтажного производства	3	3,9	0,825	3,85	ОН
5	Производство автомобиля-реанимации «скорая помощь»	0,66	3	0,39	2,2	ОН
6	Производство автомобильных прицепов	0,11	0,754	0,13	2,2	ОН
7	Производство магистральных полуприцепов и рефрижераторной техники	9,1	20,4	2,6	6,5	Н

А	1	2	3	4	5	6
8	Производство блочных мобильных сушилок	0,468	1,32	0,195	4,4	ОН
9	Введение в эксплуатацию склада бестарного хранения муки	6,6	14,95	2,53	3,3	О
10	Организация производства сухих завтраков	1,54	1,8	0,65	6,6	О
11	Строительство мельзавода, крупозавода и элеватора	33	26	4,875	8,8	Н
12	Реконструкция конфетно-шоколадного производства	1,3	1,2	0,26	6,5	ОН
13	Реконструкция фабрики по производству маргарина	2,4	27,5	4,602	0,66	Н
14	Реконструкция цеха детского питания	0,54	1,729	0,11	5,5	О
15	Создание цеха мороженого	0,77	2,52	0,77	5,5	Н
16	Реконструкция цеха производства продуктов на основе соевых бобов	0,495	1,82	0,136	5,5	Н
17	Создание предприятия по переработке отходов виноделия	0,455	1,152	0,26	2,6	ОН

18	Техническое перевооружение предприятия «Полярная звезда»	1,2	3,3	0,325	4,4	В
19	Производство пищевых и технических каррагинанов	1,8	4,55	0,66	2,75	Н
20	Производство безалкогольной продукции	1,32	4,5	0,975	2,2	Н
21	Реконструкция производства марочных и элитных вин	1,1	5,2	0,585	2,75	В
22	Разведение рыбы в прудах и производство рыбопосадочного материала	0,156	0,3	0,065	3,25	В

Решение задачи с использованием метода Парето. Если из портфеля проектов необходимо выбрать лучшие, оставив в результате в полученном множестве альтернатив лишь несравнимые между собой варианты, применяется правило выбора по Парето. Согласно правилу Парето лучшим является тот вариант, для которого нет другого варианта по всем показателям не хуже его, а хотя бы по одному показателю лучше.

Данное правило реализуют с использованием таблиц попарного сравнения альтернатив. Применение метода Парето позволяет выделить в рамках рассматриваемой задачи четыре проекта, оптимальных по Парето: $П_1$, $П_5$, $П_9$ и $П_{13}$.

Решение задачи по методу Борда. Согласно этому правилу варианты ранжируются по каждому показателю в порядке убывания с присвоением им соответствующих значений ранга, затем подсчитывается суммарный ранг по каждо-

му из проектов. Победителями процедуры выбора становятся проекты с максимальным значением суммарного ранга.

Для реализации правила Борда в таблице ранжирования проектов вводится специальный столбец, значения в котором соответствуют суммарному рангу проекта. Таким образом, проект, имеющий наибольшее значение суммарного ранга является оптимальным, а наименьшая сумма рангов соответствует худшему проекту.

Исходными данными для метода Борда являются результаты решения задачи по методу Парето, которые сведены в табл. (12.11).

Таблица 12.11.

Показатель	Проект			
	$П_1$	$П_5$	$П_9$	$П_{13}$
W_1	33	0,66	6,6	2,4
W_2	26	3	15	27,5
W_3	7,8	0,39	2,53	4,602
W_4	5,5	2,2	3,3	0,66
W_5	Н	ОН	О	Н

Результаты ранжирования по Борда представлены в табл. 12.12.

Таблица 12.12.

Показатель	Проект			
	$П_1$	$П_5$	$П_9$	$П_{13}$
W_1	4	1	3	2
W_2	3	1	2	4
W_3	4	1	2	3
W_4	1	3	2	4
W_5	1,5	3	4	1,5
Сумма рангов	13,5	9	13	14,5

Для выбора лучшего проекта используем критерий наибольшего результата: тот проект лучше, которому соответст-

вует большее число баллов (сумма рангов). Таким образом - это $П_{13}$.

Для выявления остальных проектов, которые можно включить в инвестиционный портфель, построим столбиковую диаграмму (рис. 12.4). При этом каждому проекту будет соответствовать столбик, высота которого соответствует сумме рангов.

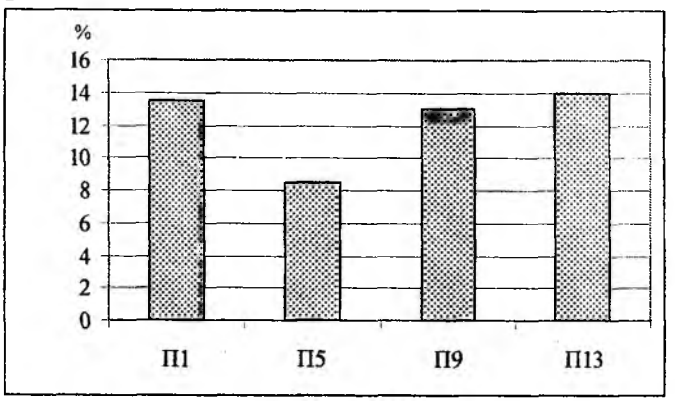


Рис. 12.4

Выше среднего значения оказались $П_1$, $П_9$ и $П_{13}$. В связи с этим данные проекты исследуем по методу БОФа.

Решение задачи по методу БОФа. Для анализа по данному методу осталось три проекта (табл. 12.13).

Таблица 12.13.

Показатель	Проект		
	$П_1$	$П_9$	$П_{13}$
W_1	33	6,6	2,4
W_2	26	14,95	27,5
W_3	7,8	2,53	4,602
W_4	5,5	3,3	0,66
W_5	Н	О	Н

Алгоритм метода:

1. С использованием экспертного оценивания ранжируем показатели по важности (табл. 12.14).

Таблица 12.14.

W_j	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
R_j	3	5	4	1	2

Примечание. Чем меньше ранг, тем важнее показатель.

2. Рассчитываем весовые коэффициенты показателей по формуле

$$C_j = 1 - (R_j - 1)/M$$

и составляем табл. 12.15.

Таблица 12.15.

W_j	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
R_j	0,6	0,2	0,4	1	0,8

$$C_1 = 1 - (3-1)/5 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6;$$
$$C_2 = 1 - (5-1)/5 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$$
$$C_3 = 1 - (4-1)/5 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4;$$
$$C_4 = 1 - (1-1)/5 = 1;$$
$$C_5 = 1 - (2-1)/5 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

3. Рассчитываем нормированные значения весовых коэффициентов показателей C_j^* (табл. 16).

Таблица 16.

W_j	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
C_j^*	0,2	0,07	0,13	0,33	0,27

$C_1^* = 0{,}6/3 = 0{,}2;$ $C_2^* = 0{,}2/3 = 0{,}07;$ $C_3^* = 0{,}4/3 = 0{,}13;$
$C_4^* = 1/3 = 0{,}33;$ $C_5^* = 0{,}8/3 = 0{,}27.$

Проверка: 0,2+0,07+0,13+0,33+0,27 = 1, значит, операция нормирования выполнена правильно.

4. Рассчитываем весовые коэффициенты проектов по каждому показателю C_{ji} (табл. 12.17).

Таблица 12.17.

Показатель	Проект		
	$П_1$	$П_9$	$П_{13}$
W_1	33	6,6	2,4
W_2	26	14,95	27,5
W_3	7,8	2,53	4,602
W_4	5,5	3,3	0,66
W_5	Н	О	Н

Случай 1. Большие значения показателя предпочтительнее меньших, тогда используем формулу:

$$C_{ji} = W_{ji} / \sum_i W_{ji}; \quad j = \overline{1,5}; \quad i = 1, 9, 13.$$

Случай 2. Меньшие значения показателя предпочтительнее больших:

$$C_{ji} = (1/W_{ji}) / \sum_i (1/W_{ji}).$$

Случай 3. Значения показателя в метрической шкале не выражаются:

а) ранжируем проекты по показателю W_5 (табл. 12.18).

Таблица 12.18.

W_{5i}	$W_{5\,1}$	$W_{5\,9}$	$W_{5\,13}$
R_{5i}	2,5	1	2,5

Примечание. Проекты 1 и 13 разделили 2-е и 3-е места: (2 + 3)/2 = 2,5.

б) рассчитываем весовые коэффициенты проектов по W_5:

в) пронормируем весовые коэффициенты по показателю W_5 и занесем полученные значения в табл. 12.19 (строка для W_5).

Таблица 12.19.

Показатель	Проект		
	$П_1$	$П_9$	$П_{13}$
W_1	0,78	0,16	0,06
W_2	0,38	0,22	0,40
W_3	0,52	0,17	0,31
W_4	0,09	0,15	0,76
W_5	0,25	0,50	0,25

В табл. 19 строки 1, 2, 3 соответствуют случаю 1 (показатели W_1, W_2, W_3), а строка 4 - случаю 2 (показатель W_4).

5. Рассчитаем значения обобщенного показателя для каждого проекта:

$$W_i = \sum_j \left(C_j^* C_{ji}\right)$$

$$W_1 = 0{,}2 \cdot 0{,}78 + 0{,}07 \cdot 0{,}38 + 0{,}13 \cdot 0{,}52 + 0{,}33 \cdot 0{,}09 + 0{,}27 \cdot 0{,}25 =$$
$$= 0{,}16 + 0{,}03 + 0{,}07 + 0{,}03 + 0{,}07 = 0{,}36;$$
$$W_9 = 0{,}2 \cdot 0{,}16 + 0{,}07 \cdot 0{,}22 + 0{,}13 \cdot 0{,}17 + 0{,}33 \cdot 0{,}15 + 0{,}27 \cdot 0{,}5 =$$
$$= 0{,}03 + 0{,}02 + 0{,}02 + 0{,}05 + 0{,}14 = 0{,}26;$$
$$W_{13} = 0{,}2 \cdot 0{,}06 + 0{,}07 \cdot 0{,}4 + 0{,}13 \cdot 0{,}31 + 0{,}33 \cdot 0{,}76 + 0{,}27 \cdot 0{,}25 =$$
$$= 0{,}01 + 0{,}03 + 0{,}04 + 0{,}25 + 0{,}07 = 0{,}38.$$

Проверка: $\sum Wi = 1.$.

Среднее значение $\overline{W_i} = (0{,}36 + 0{,}26 + 0{,}38)/3 = 0{,}33.$

С использованием критерия наибольшего результата выбираем лучший проект. Это проект 13 «Реконструкция фабрики по производству маргарина».

Строим диаграмму и выбираем проекты, находящиеся выше средней линии (рис.12.5)

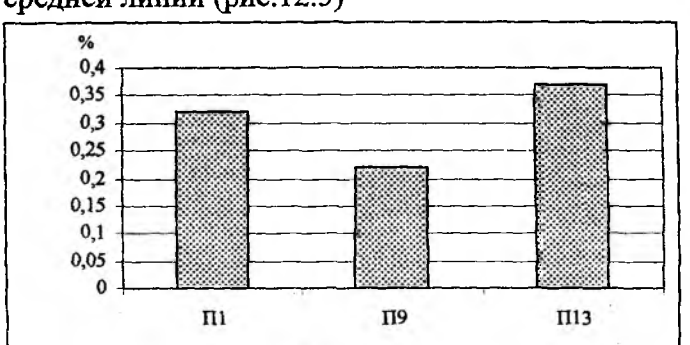


Рис. 12.5.

Вывод. В портфель проектов включаем проект 1 «Строительство завода по производству окиси этилена» и

проект 13 «Реконструкция фабрики по производству маргарина».

Вопросы для самопроверки

1. Какова сущность экспертного оценивания?
2. Перечислите основные этапы экспертного оценивания. Поясните их содержание.
3. Дайте общую характеристику методов получения экспертной информации.
4. Приведите классификацию методов получения экспертной информации.
5. Охарактеризуйте методы получения элементарных суждений.
6. Какие типы шкал элементарных суждений вам известны?

ГЛАВА 13. ПРОВЕДЕНИЕ РАСЧЕТОВ ХАРАКТЕРИСТИК ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРА

13.1. Предпосылки корреляционно-регрессионного анализа

Экономические данные почти всегда представлены в виде таблиц. Числовые данные, содержащиеся в таблицах, обычно имеют между собой явные (известные) или неявные (скрытые) связи. Явно связаны показатели, которые получены методами прямого счета, т.е. вычислены по заранее известным формулам. Например, проценты выполнения плана, уровни, удельные веса, отклонения в сумме, отклонения в процентах, темпы роста, темпы прироста, индексы и т. д.

Связи же второго типа заранее неизвестны. Однако люди должны уметь объяснять и предсказывать (прогнозировать) сложные явления для того, чтобы управлять ими. Поэтому специалисты с помощью наблюдений стремятся выявить скрытые зависимости и выразить их в виде формул, т. е. математически смоделировать явления или процессы. Одну из таких возможностей предоставляет корреляционно-регрессионный анализ.

Экономисты строят и используют математические модели для трех обобщенных целей: *для объяснения*; *для предсказания*; *для управления*. Представление экономических и других данных в электронных таблицах в наши дни стало простым и естественным. Оснащение же электронных таблиц средствами корреляционно-регрессионного анализа способствует тому, что из группы сложных, глубоко научных и потому редко используемых, почти экзотических методов, корреляционно-регрессионный анализ превращается для спе-

циалиста в повседневный, эффективный и оперативный аналитический инструмент. Однако, в силу его сложности, освоение его требует значительно больших знаний и усилий, чем освоение простых электронных таблиц.

Пользуясь методами корреляционно-регрессионного анализа, аналитики измеряют тесноту связей показателей с помощью коэффициента корреляции. При этом обнаруживаются связи, различные по силе (сильные, слабые, умеренные и др.) и различные по направлению (прямые, обратные). Если связи окажутся существенными, то целесообразно будет найти их математическое выражение в виде регрессионной модели и оценить статистическую значимость модели. В экономике значимое уравнение используется, как правило, для прогнозирования изучаемого явления или показателя.

Поэтому регрессионный анализ называют основным методом современной математической статистики для выявления неявных и завуалированных связей между данными наблюдений. Электронные же таблицы делают такой анализ легко доступным. Из множества видов этого анализа мы рассмотрим те, которые используются наиболее часто в качестве универсальных инструментов познания действительности. При этом *предполагается, что студент знаком с теоретическими основами корреляционно-регрессионного анализа из предшествующих учебных дисциплин.*

Корреляционно-регрессионный анализ связей между переменными показывает, как один набор переменных (X) может влиять на другой набор (Y). Регрессионные вычисления и подбор хороших уравнений - это ценный, универсальный исследовательский инструмент в самых разнообразных отраслях деловой и научной деятельности (маркетинг, торговля, медицина и т. д.). Имея такой инструмент на своем компьютере и усвоив технологию использования этого инструмента, вы сможете применять его по мере необходимости,

получая знание о скрытых связях, улучшая аналитическую поддержку принятия решений и повышая их обоснованность.

В маркетинге широко применяются как однофакторные, так и множественные регрессионные модели. Корреляционно-регрессионный анализ считается одним из главных методов в маркетинге, наряду с оптимизационными расчетами, а также математическим и графическим моделированием трендов (тенденций).

13.2. Этапы корреляционно-регрессионного анализа

На рис.13.1 приведена технологическая схема последовательности этапов корреляционно-регрессионного анализа в условиях применения Excel.

Нулевой этап - это сбор данных. Нулевой цикл обеспечивает качество строящейся модели, так в корреляционно-регрессионном анализе решающую роль играет качество данных. Имеется ряд требований и правил, которые следует соблюдать при сборе данных.

Данные должны быть *наблюдаемыми,* т. е. полученными в результате замера, а не расчета. Наблюдения следует спланировать. Сколько необходимо данных для получения хорошего уравнения? По мнению одних статистиков данных необходимо в 4-6 раз больше, чем число факторов, влияние которых хотят выразить математически, по мнению других - в 7-8 раз больше числа факторов. Есть и другие мнения в сторону увеличения количества данных: "число наблюдений должно быть не менее чем в 5 - 6, а лучше - не менее чем в 10 раз больше числа факторов, тогда закон больших чисел, действуя в полную силу, обеспечивает эффективное погашение случайных отклонений от закономерного характера связи признаков".



Рис.13.1. Этапы корреляционно-регрессионного анализа.

Чем больше неодинаковых (не повторяющихся) данных, и чем они однороднее, тем лучше получится уравнение, если связи существенны. Подозрительные данные могут быть вызваны ошибками наблюдений и экспериментов.

Например, данные о размерах заработка рабочих завода выражены трехзначными числами, но обнаружены одно пятизначное и одно однозначное числа - для упрощения анализа до начала решения такие данные рекомендуется отбрасывать (исключать из массива).

После подготовки данных начинается их обработка.

Первый этап - корреляционный анализ. Его цель - определить *характер связи* (прямая, обратная) и *силу связи* (связь отсутствует, связь слабая, умеренная, заметная, сильная, весьма сильная, полная связь). Корреляционный анализ создает информацию о характере и степени выраженности связи (коэффициент корреляции), которая используется для отбора существенных факторов, а также для планирования эффективной последовательности расчета параметров регрессионных уравнений. При одном факторе вычисляют коэффициент корреляции, а при наличии нескольких факторов строят корреляционную матрицу, из которой выясняют два вида связей: (1) связи зависимой переменной с независимыми, (2) связи между самими независимыми.

Рассмотрение матрицы позволяет, во первых, *выявить факторы,* действительно влияющие на исследуемую зависимую переменную, и выстроить (ранжировать) их по убыванию связи; во-вторых, *минимизировать число факторов* в модели, исключив часть факторов, которые сильно или функционально связаны с другими факторами (речь идет о связях независимых переменных между собой).

Известно, что наиболее надежными на практике бывают одно- и двухфакторные модели.

Если будет обнаружено, что два фактора имеют сильную или полную связь между собой, то в регрессионное уравне-

ние достаточно будет включить один из них. Почему? Приведем приблизительную и ненаучную аналогию: вы одновременно выслушиваете двух различных и одинаково информированных информаторов, говорящих об одном и том же. Скорей всего, что вы скажете им: "Говорите по одному".

Пример из экономической практики: в одно регрессионное уравнение нельзя одновременно включать переменные "Количество работающих" и "Производительность труда" как независимые (поскольку показатель производительности труда получают делением выработки работников на количество работающих) - здесь имеет место полная связь. Аналогично будут связаны также показатели прибыли и издержек, поскольку прибыль вычисляют вычитанием издержек из доходов. Исключение одной из каждой пары названных переменных повысит значимость уравнения в целом; при этом исключать следует показатель, полученный не наблюдением (замером или счетом), а вычислением. Грамотные специалисты, хорошо знающие связи показателей, проблемы такого рода устраняют еще на этапе сбора и подготовки данных. Если же данные собраны беспорядочно, без предварительного плана, модель оказывается ограниченной и практически мало надежной.

Второй этап - расчет параметров и построение регрессионных моделей. Здесь стремятся отыскать наиболее *точную меру* выявленной связи, для того чтобы можно было прогнозировать, предсказывать значения зависимой величины Y, если будут известны значения независимых величин $X_1, X_2, ..., X_n$.

Эту меру обобщенно выражают математической моделью линейной множественной регрессионной зависимости:

$$Y = a_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + ... + + b_n X_n .$$

ЭВМ вычисляет параметры модели: свободный член a_0 (константа, или пересечение) и коэффициенты b_n (коэффи-

циенты регрессии). Величину y называют откликом, а $X_1, X_2, ..., X_n$ - факторами или предикторами.

Осуществление второго этапа сильно зависит от выводов, которые получены при анализе корреляционной матрицы. Можно значительно ускорить проведение регрессионного анализа и снизить затраты на исследование, если принять правильную стратегию поиска наилучшего уравнения. Для этого необходимо знать основные и наиболее эффективные методы поиска наилучшего уравнения, (рассматриваются далее отдельным пунктом).

После получения каждого варианта уравнения обязательной процедурой является оценка его статистической значимости, поскольку главная цель - получить уравнение наивысшей значимости, поэтому второй этап корреляционно-регрессионного анализа неразрывно связан с третьим. Однако в связи с тем, что расчеты выполняет ЭВМ, а решение на основе оценки значимости уравнения принимает исследователь (*принять или отбросить* уравнение), условно можно выделить третий этап этой человеко-машинной технологии как интеллектуальный немашинный этап, для которого *почти все* данные по оценке значимости уравнения подготавливает ЭВМ.

На третьем этапе выясняют *статистическую значимость,* т. е. пригодность постулируемой модели для использования ее в целях предсказания значений отклика. При этом программа уже рассчитала по модели теоретические значения для ранее наблюденных значений зависимой величины и вычислила отклонения теоретических значений от наблюдаемых значений. На основе этого программа построила также ряд графиков, в т. ч. график подборки (он иллюстрирует, насколько хорошо подобрана линия регрессии к наблюденным данным) и график остатков. Исследователь должен рассмотреть эти графики. В остатках не должно наблюдаться закономерности, т. е. корреляции с какими-либо зна-

чениями (если она есть, то, в модель не включен какой-то закономерно действующий, но не известный, скрытый фактор, о котором нет данных). Для оценки качества полученной модели программа вычислила также целый ряд коэффициентов, которые обязан рассмотреть исследователь, сравнивая их с известными статистическими критериями и оценивая модель с точки зрения здравого смысла.

На этом этапе исключительно важную роль играют коэффициент детерминации и *F*-критерий значимости регрессии.

R Squared $\left(R^2\right)$ *- коэффициент детерминации* - это квадрат множественного коэффициента корреляции между наблюдаемым значением Y и его теоретическим значением, вычисленным на основе модели с определенным набором факторов. Коэффициент детерминации измеряет действительность модели. Он может принимать значения от 0 до 1. Эта величина особенно полезна для сравнения ряда различных моделей и выбора наилучшей модели.

R^2 есть доля вариации прогнозной (теоретической) величины Y относительно наблюденных значений Y, объясненная за счет включенных в модель факторов. Очень хорошо, если $R^2 \geq 80\%$. Остальная доля теоретических значений Y зависит от других, не участвовавших в модели факторов. Задача исследователя - находить факторы, увеличивающие R^2, и давать объяснение вариаций прогноза, чтобы получить идеальное уравнение. Однако, коэффициент R^2 самое большее может достигнуть величины 1 (или 100%), когда все значения факторов различны. А если в данных есть повторяющиеся опыты, то величина R^2 не может достигнуть 1, как бы хороша ни была модель. Поэтому дубликаты данных следует удалять из исходной таблицы до начала расчета регрессии. Некоторые программные пакеты автоматически удаляют дубликат, оставляя лишь уникальные данные. Повторе-

ние одинаковых данных снижает надежность оценок модели. $R^2 = 1$ лишь при полном согласии экспериментальных (наблюденных) и теоретических (расчетных) данных, т. е. когда теоретические значения точно совпадают с наблюдаемыми. Однако это считается весьма маловероятным случаем.

Средствами регрессионного анализа, в т. ч. EXCEL, вычисляется *F-критерий значимости регрессии для уравнения в целом.* Это рассчитанное по наблюденным данным значение F_p (F расчетный, наблюденный) следует сравнивать с соответствующим критическим значением F_k, (F критический, табличный). F_k исследователь выбирает из публикуемых статистических таблиц на заданном уровне вероятности (на том, на каком вычислялись параметры модели, например, 95%).

Если наблюденное значение F_p окажется меньше критического значения F_k, то уравнение нельзя считать значимым. В иной терминологии об этом же может быть сказано: не отвергнута нуль-гипотеза относительно значимости всех коэффициентов регрессии в постулируемой модели, т. е. коэффициенты практически равны нулю.

Электронная технология корреляционно-регрессионного анализа становится абсолютно бесполезной, если расчетные данные будут толковаться не вполне правильно. В связи с этим процитируем здесь одно мнение: "... чтобы уравнение можно было считать удовлетворительным для целей предсказания (в том смысле, что размах предсказываемых значений отклика будет значительно больше, чем стандартная ошибка отклика), наблюдаемое значение *F*... должно не просто превышать выбранную процентную точку *F*-распределения, а превосходить ее примерно в 4 раза. Например, пусть ... $F(10; 20; 0{,}95)=2{,}35$. Тогда наблюдаемое значение *F*-отношения должно превосходить 9,4 для того, чтобы

можно было расценивать полученное уравнение как удовлетворительную модель для предсказания".

Мы приводим это высказывание для того, чтобы исследователь, если пожелает, мог использовать его для четырехкратного усиления критерия значимости уравнения в случае особо важных прогнозов.

На четвертом этапе корреляционно-регрессионного исследования, если полученная модель статистически значима, ее применяют для прогнозирования (предсказания), управления или объяснения.

Если же обнаружена незначимость, то модель отвергают, предполагая, что истинной окажется какая-то другая форма связи, которую надо поискать. Например, с самого начала работы (как бы по умолчанию) строилась и проверялась линейная регрессионная модель. Незначимость ее служит основанием для того, чтобы отвергнуть только *линейную* форму модели. Возможно, что более подходящей будет нелинейная форма модели.

13.3. Основные методы поиска наилучшего уравнения

Мы рассматриваем здесь лишь те из методов поиска наилучшего регрессионного уравнения, которые признаны *наилучшими* в *условиях применения ЭВМ* в случае множественного регрессионного анализа (этот вид анализа считается в основным инструментом экономиста). Если факторов несколько, может быть получено несколько различных уравнений. Задача исследователя - отыскать наилучшее уравнение. Процедуры поиска наилучшей модели весьма разнообразны, связаны с большим количеством вычислений и сильно зависят от числа факторов, влияние которых на отклик хотят исследовать. Любой метод выглядит как проведение серии сравнений для выбора полезных факторов.

Существует несколько способов и алгоритмов выбора наилучшего уравнения регрессии:

1. Метод всех возможных регрессий.
2. Метод выбора «наилучшего подмножества» предикторов.
3. Метод исключения.
4. Шаговый регрессионный метод.
5. Гребневая (ридж) регрессия.
6. ПРЕСС.
7. Регрессия на главных компонентах.
8. Регрессия на собственных значениях.
9. Ступенчатый регрессионный метод.
10. Робастная (устойчивая) регрессия.
11. Другие, более ранние методы (метод деления пополам, метод складного ножа).

Метод **исключения** исследует не все, а только наилучшие регрессионные уравнения, в чем и состоит его экономичность. На первом этапе рассчитывается уравнение, включающее все независимые переменные. Затем, рассматривая корреляционную матрицу, находят в ней независимую переменную, имеющую самую слабую (по модулю) связь с зависимой, (т. е. с *наименьшим* по модулю значением коэффициента корреляции), и исключают ее из уравнения. Заново пересчитывают уравнение с меньшим числом независимых переменных. Если по сравнению с предыдущим расчетом значимость уравнения в целом (F_p) и коэффициент детерминации (R^2) повысились, то исключение сделано правильно. Далее отыскивают в корреляционной матрице следующую независимую переменную с наименьшим значением коэффициента корреляции и поступают аналогичным образом. Исключения независимых переменных (по одной) и пересчеты уравнений продолжают до тех пор, пока не обнаружат снижение значимости уравнения и доли объясненной вариации (R^2) по сравнению с последним предшествующим

расчетом. Это служит сигналом нецелесообразности *последнего* исключения.

Шаговый метод - это попытка прийти к тем же результатам, действуя в противоположном направлении, начиная с однофакторной модели. При этом, как и в предыдущем методе, обязательно ориентируются на данные корреляционной матрицы. Т. е. при шаговом методе на первом шаге расчета в уравнение включают не все, а только один фактор с *наибольшим* по модулю значением коэффициента корреляции между независимой и зависимой переменной. На каждом следующем шаге из оставшихся не включенными в уравнение независимых переменных в предыдущую модель добавляют только одну независимую переменную, наиболее связанную с зависимой, и заново пересчитывают все параметры регрессии. После пересчета сравнивают полученные оценки нового уравнения с оценками предшествующего шага. Так продолжают до тех пор, пока не получат наилучшее уравнение с наибольшими расчетными значениями F и R^2.

Добавления или исключения факторов *по одному* в каждом из названных методов позволяют заметить и выделить роль каждого отдельного фактора в регрессионной модели. Если этот принцип не соблюдается, т.е. факторы исключаются (при методе исключения) или добавляются (при шаговом методе) по два или более, то наилучшую модель отыскать все-таки можно, но тогда трудно понять, какой же именно фактор наиболее существенно изменяет (улучшает или ухудшает) статистическую значимость уравнения. А это исключительно важно в маркетинговых и финансовых моделях, которые отыскивают именно для того, чтобы управлять зависимым показателем, через влияние самого существенного или самых существенных факторов, т.е. целенаправленно изменяя значения фактора для получения желаемого отклика.

Обратите внимание на то, что в описанных выше правилах выполнения регрессионных вычислений исследователь

должен действовать, предварительно избрав конкретный метод. Несмотря на компьютерную поддержку вычислений корреляционной матрицы, а также параметров регрессионного уравнения, на долю исследователя приходится значительная часть интеллектуального труда - он направляет каждый следующий шаг расчетов, стремясь при этом найти качественную модель при наименьших затратах времени. Зная алгоритм, свойственный выбранному методу, исследователь должен как-то (вручную или с помощью вспомогательных электронных таблиц) наглядно организовать важнейшие расчетные данные, необходимые для принятия решения (о включении или исключении фактора). Это обстоятельство играет важную роль при сравнении разных программных инструментов корреляционно-регрессионного анализа.

Считается, что чем больше интеллектуальных функций передано программе, тем она лучше. Некоторые программы могут строить полный математический вид уравнения на каждом шаге. Другие программы, после указания данных и метода, *автоматически* выполняют весь каскад необходимых шагов (включения или исключения предикторов), и выдают отчеты о проделанных вычислениях, регистрируя номера шагов, результаты каждого шага, обосновывая включения или исключения. Если же на компьютере имеется лишь электронная таблица, то исследователя всегда выручит знание правил метода. При поддержке множественного регрессионного анализа средствами *Excel* можно отслеживать очередность исследовательских шагов, записывая для каждого шага: номер шага, набор независимых переменных, вид уравнения, главные оценочные данные: коэффициенты Фишера (F расчетный и F критический) и детерминации R^2.

Приведем одну из возможных форм вспомогательной таблицы.

Результаты множественного регрессионного исследования методом (шаговым, исключения)

№ шага	Количество факторов	Участвует независимые переменные	Вид полученной модели	F_p	F_k	R^2	Выводы: о роли включенного или исключенного фактора.
1	2	3	4	5	6	7	8

Для простой регрессии, т. е. при одной независимой переменной, такая таблица практически не нужна. Зону граф 5-7 можно расширить, увеличивая количество критериев проверки значимости факторов (например, за счет *t*-критерия). Если общий *F*-критерий дает возможность оценивать значимость уравнения в целом, то *t*-критерий (*t*-статистика) позволяет оценить индивидуальный вклад отдельного параметра в значимость уравнения.

Об использовании *t*-статистики. Умение использовать *t*-статистику служит дополнительным резервом для повышения эффективности поиска наилучшего уравнения и контроля предположений *об исключении* независимой переменной из уравнения. В некоторых регрессионных программах, базирующихся на методе исключения, может использоваться не *t*-критерий, а *частный F-критерий*. *t*-критерий представляет собой корень квадратный из величины частного *F*-критерия, $\left(F = t^2\right)$. Таким образом, возведя в квадрат *t*-критерий, можно получить серию частных значений *F* для отдельных параметров уравнения и проверить решение об исключении бесполезной переменной, принятое другим способом.

Для корректного использования *t*-статистики необходимо иметь при себе публикуемую статистическую таблицу значений *t*-критерия Стьюдента. Критическое значение *t* вы-

бирается из таблицы *t*-распределения и сравнивается с расчетным.

t-статистика разработана для малых выборок, т. е. выборок, состоящих из сравнительно небольшого числа наблюдений - одного-двух десятков. Распределение Стьюдента не очень значительно отличается от нормального. Это отличие тем меньше, чем больше *n*, и при $n>30$ практически быстро исчезает.

Резюме

Из множества методов поиска наилучшего уравнения регрессии для практического применения с помощью ЭВМ мы выделили два: метод исключения и шаговый регрессионный метод.

Метод исключения - "вполне удовлетворительная процедура, особенно для статистиков, которые любят видеть все переменные в уравнении, чтобы "чего-то не упустить". Этот метод значительно более экономичен по затратам машинного времени и труда, чем метод всех регрессий. ... Метод исключения начинается с наиболее полного уравнения, включающего все переменные, и состоит в последовательном уменьшении числа переменных до тех пор, пока не принимается решение об использовании уравнения с оставшимися членами.

Шаговый метод представляет собой попытку прийти к тем же результатам, действуя в обратном направлении, т. е. включая переменные по очереди в уравнение до тех пор, пока уравнение не станет удовлетворительным. Порядок включения определяется с помощью частного коэффициента корреляции как меры важности переменных, еще не включенных в уравнение. Мы считаем этот метод одним из лучших среди обсуждавшихся выше и рекомендуем его применять. Он наиболее экономичен при обработке данных на ЭВМ. Однако шаговый метод может легко стать обузой для профессионального статистика. Использование этого метода для

автоматического выбора наилучшего уравнения с помощью ЭВМ будет слишком затруднительным. Лучше всего работать с каким-то одним методом и овладеть его специфическими особенностями".

Владея двумя методами при наличии *Excel*, вы можете применять каждый из них по своему усмотрению. При этом вы сохраняете полный контроль за выполнением расчетов и организуете их по вашему замыслу, тщательно оценивая результаты по формальным критериям (как это делают математики), а также с точки зрения здравого смысла (как это постоянно делают специалисты в своих предметных областях знания - в маркетинге, финансах и др.). Этот стиль применения сложных методов и их компьютерных инструментов соответствует современному уровню технологий конечного пользователя.

13.4. Инструментарий *EXCEL* и пример решения множественнойрегрессионной задачи

В версиях *Excel* 95, 97, 2000, 2002, *XP* для корреляционно-регрессионного анализа используются средства специального статистического модуля. Модуль включает в себя два вида средств математико-статистического анализа: *функции* и *инструменты.*

Статистические функции (80 функций), вызываются через окно *Мастер функций.* Функция КОРРЕЛ (расчет корреляции между *двумя* множествами данных) запрашивает два исходных множества (массива) данных и выдает коэффициент корреляции в ту клетку, куда был установлен курсор перед обращением к функции. На рис. 13.2 показан вид окна Мастера функций и вызов функции КОРРЕЛ. На окно Мастера функций наложено окно самой функции КОРРЕЛ, хотя на самом деле одновременный обзор этих двух окон исключен. Аналогично (внизу) показаны диалоговые окна альтер-

нативного мощного инструмента *Корреляция,* входящего в пакет приложений (надстроек) *Анализ данных,* (рис. 13.3) и позволяющего строить корреляционные матрицы с размерностью, ограничиваемой лишь размером рабочего листа.

Множественный корреляционно-регрессионный анализ в основном ориентирован на средства дополнительного пакета *Анализ данных.* Активизация команды *Сервис|Анализ данных* открывает окно *Инструменты анализа,* предоставляющее 19 статистических инструментальных средств.

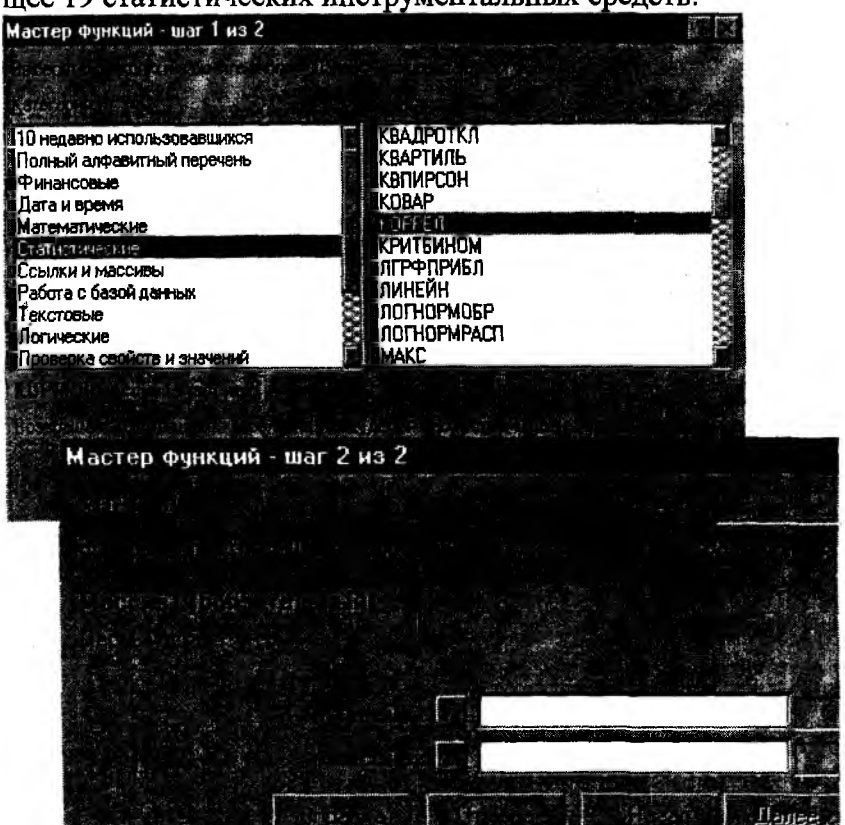


Рис.13.2. Средства корреляционного анализа в *Excel*: простая функция КОРРЕЛ.

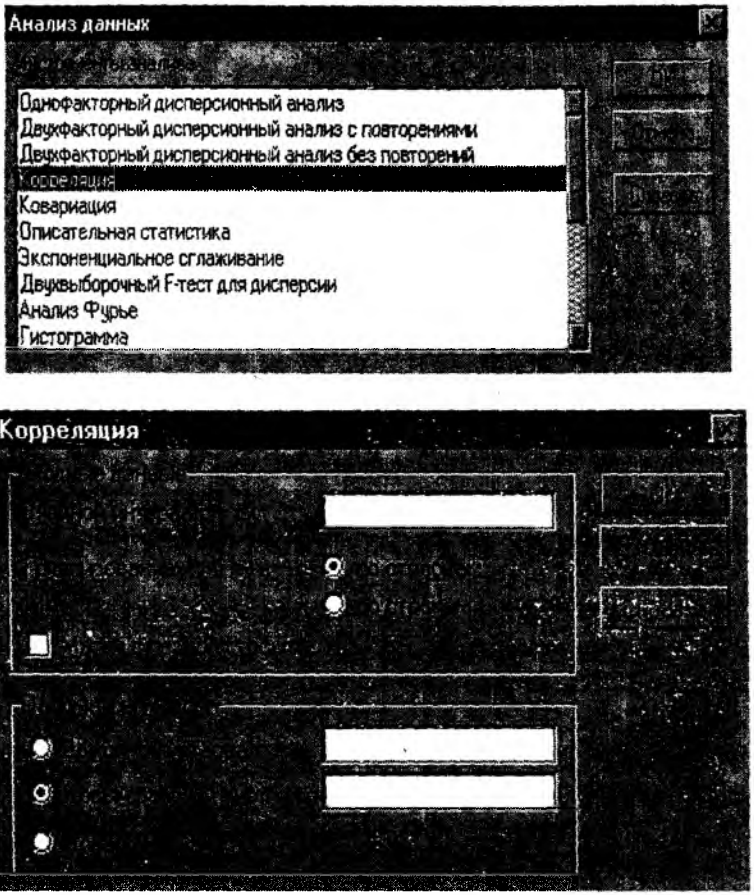


Рис. 13.3. Средства корреляционного анализа в *Excel*: инструмент из состава пакета «Анализ данных».

Среди них - *Корреляция* и *Регрессия,* непосредственно и эффективно поддерживающие простой и множественный корреляционно-регрессионный анализ.

Эти сложные инструменты доступны в том случае, если они предварительно загружены через команду *Сервис|Надстройки.* В открывшемся окне дополнений следует

пометить флажок слева от позиции *Analisys Tool-Pack VBA*, и затем щелкнуть по кнопке ОК.

После повторного обращения к команде *Сервис*, позиция *Анализ данных* появится в конце меню. Если же команда *Анализ данных* и в этом случае отсутствует в меню *Сервис*, то необходимо запустить программу установки *Microsoft Excel*. После установки пакета анализа его необходимо активизировать с помощью команды *Надстройки*.

Можно установить пакет анализа данных по стандартной подсказке: "В меню *Сервис* выберите команду *Надстройки*.

Если в списке надстроек нет пакета анализа данных, нажмите кнопку *Обзор* и укажите диск, папку и имя файла для надстройки пакета анализа, (как правило, это папка *Library|Analisys)*. Или запустите программу *Setup*, чтобы установить надстройку. Надстройки, установленные в *Microsoft Excel*, остаются доступными, пока не будут удалены.

С помощью инструмента *Корреляция*, можно получить корреляционную матрицу парных коэффициентов *за один прием*, что было проблемой в электронных таблицах других типов.

Для этого, после выбора *Сервис|Анализ данных|Корреляция*, следует определить в качестве входного все поле имеющихся исходных данных, корреляционные связи которых изучают. Затем следует уточнить с помощью флажков, по столбцам или по строкам размещены переменные. Если поле содержит заголовочную строку (или столбец), то в диалоге активизируют графический флажок *Метки* (*Labels*). После выбора графической кнопки выполнения (ОК), корреляционная матрица автоматически выводится на новый лист той же электронной таблицы, начиная с клетки *A*1. Если матрицу желают вывести на какой-либо конкретный лист и начиная с клетки, определяемой пользователем, то делают со-

ответствующие установки в окне «Выходной интервал» диалогового окна инструмента *Корреляция.*

На рис. 13.4 приведено условие задачи и диалоговое окно настройки расчета и вывода корреляционной матрицы с метками данных. Далее приведены различные примеры вывода одной и той же матрицы для этой задачи.

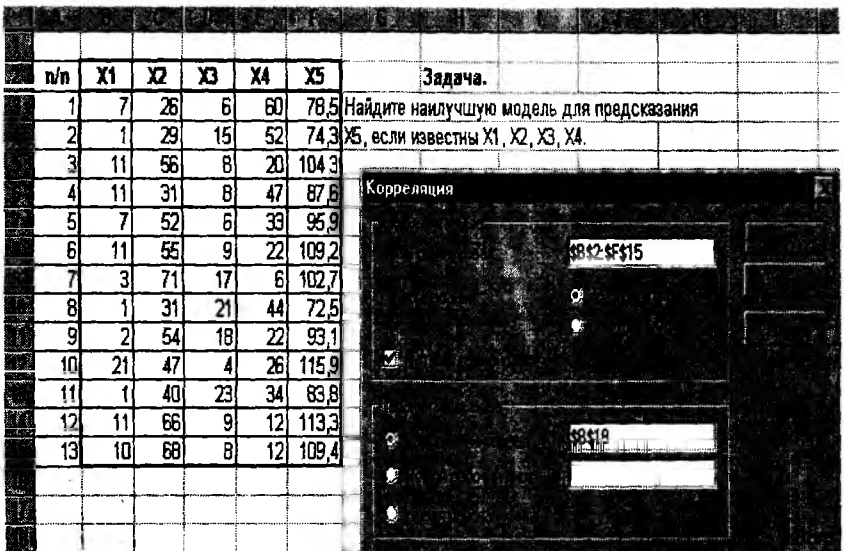


Рис. 13.4. Диалог по формированию корреляционной матрицы.

1. Вид корреляционной матрицы, полученной в результате определения входного поля с метками (*B*2:*P*15), флажок *Метки* помечен.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	1				
X_2	0,22857947	1			
X_3	-0,8264074	-0,12745	1		
X_4	-0,2454451	-0,97295	0,01903	1	
X_5	0,7307173	0,81625	-0,52538	-0,8213050	1

2. Вид корреляционной матрицы, полученной в результате определения входного поля без меток (*B*2:*P*15), флажок *Метки* снят.

	Столбец 1	**Столбец 2**	**Столбец 3**	**Столбец 4**	**Столбец 5**
Столбец 1	1				
Столбец 2	0,22857	1			
Столбец 3	-0,8264	-0,1274	1		
Столбец 4	-0,2454	-0,9729	0,01903	1	
Столбец 5	0,7307	0,8162	-0,5253	-0,8213	1

3. Преобразование корреляционной матрицы 1 копированием в нее формулы для диагностики связей по модулю коэффициента корреляции.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	**1**				
X_2	**Слабая**	**1**			
X_3	**Сильная**	**Слабая**	**1**		
X_4	**Слабая**	**Весьма сильная**	**Нет связи**	**1**	
X_5	**Сильная**	**Сильная**	**Заметная**	**Сильная**	1

Вспомогательная диагностирующая формула:

=ЕСЛИ(*ABS*(*B*3)<0,1;"Нет связи";ЕСЛИ(*ABS*(*B*3)<0,3;"Слабая";
ЕСЛИ(*ABS*(*B*3)<0,5;"Умеренная";ЕСЛИ(*ABS*(*B*3)<0,7;"Заметная";
ЕСЛИ(*ABS*(*B*3)<0,9;"Сильная";ЕСЛИ(*ABS*(*B*3)<=0,99;
"Весьма сильная";"Полная"))))))

Эта формула (для одной клетки) преобразует числовые значения коэффициентов корреляции, полученные в корреляционной матрице, в их текстовые смысловые эквиваленты. Преобразование осуществляется по модулю коэффициента корреляции. При ручном копировании формулы следует соблюдать следующие требования:

1. Матрица должна быть автоматически записана на новый рабочий лист по умолчанию, т. е. начиная с клетки *A*1.

2. Матрица должна быть скопирована на тот же лист, ниже оригинала на одну-две строки, без смещения столбцов.

Оригинал матрицы перемещать нельзя. Оригинал и копия существуют одновременно.

3. Открыть рабочую книгу, в известной клетке которой содержится оригинал диагностирующей формулы с одним пробелом перед знаком равенства. Занести формулу в буфер для копирования.

4. Перейти в окно той книги и на тот ее лист, где создана и скопирована оригинальная корреляционная матрица.

5. Установить курсор в ту клетку матрицы-копии, куда скопировано значение клетки B3 из оригинала матрицы, (в нашем примере это клетка матрицы-копии, выделенная серым цветом, где был размещен коэффициент корреляции X_1, X_2=0,22857947). Выполнить вставку из буфера (щелкнуть по пиктограмме вставки).

6. В режиме редактирования убрать пробел перед знаком равенства в формуле, нажать *Enter*. Выбрать клетку формулы и скопировать ее ("протянуть") по вертикали до последней строки матрицы, а затем каждую клетку - по горизонтали, не копируя на диагональные клетки с единицами. Можно копировать и иначе.

Вся процедура выполняется за несколько секунд в зависимости от размера матрицы и личного навыка. Результатом является преобразованная матрица-копия, содержащая в клетках текстовые эквиваленты значений коэффициентов корреляции, как это показано на предыдущей странице в примере 3. Процедура эффективна лишь на корреляционных матрицах большой размерности. (Лучше всего организовать копирование с помощью макроса.)

Числовая и текстовая матрицы содержат информацию для принятия решений об отборе факторов и планирования дальнейших вычислений (см. приведенные выше матрицы 1 и 3). Числовую корреляционную матрицу следует форматировать до 2-3 десятичных знаков, т. к. для принятия решений не требуется большего количества знаков. В соответствии с

технологией, представленной на рисунке 1.1, а также на основе рассмотрения полученных матриц, сформулируем выводы о связях между независимыми переменными и о ранге их связей с зависимой, и спланируем возможный ход исследования:

• Среди независимых переменных имеется пара X_1, X_3 с *сильной* обратной связью (с коэффициентом корреляции $r(X_1, X_3) = -0{,}8264074$). Следовательно, одновременное участие X_1 и X_3 в уравнении нецелесообразно.

• Имеется еще одна пара независимых переменных X_2, X_4 с *весьма сильной* обратной связью ($r(X_2, X_4) = -0{,}9729549$). Следовательно, одновременное участие X_2 и X_4 в уравнении еще более нецелесообразно.

• Зависимые переменные X_1, X_2, X_4 имеют с независимой X_5 связь одного типа (*сильная*). Поэтому X_1, X_2, X_4 являются кандидатами на участие в уравнении, но X_2 и X_4 вместе быть не должны.

• Зависимая переменная X_3 имеет с независимой X_5 менее выраженную (*заметную*) связь, наименьшую по модулю из всех независимых. Поэтому X_3 - явный кандидат на исключение из четырехфакторной модели. *Другой* аргумент к исключению X_3 - ее сильная связь с X_1.

• Поиск наилучшего уравнения будем выполнять методом исключения, планируя получить и исследовать уравнения:

(1) с факторами X_1, X_2, X_3, X_4;
(2) с факторами X_1, X_2, X_4 или X_1, X_2, X_3;
(3) с факторами X_1, X_2;
(4) с факторами X_1, X_4.

• Два последних поисковых вычисления обусловлены наличием связей одинаковой категории между X_2, X_5 и между X_4, X_5. Необходимо выяснить значимость этих уравнений. В этом примере трехфакторные уравнения - "дань" принципу исключать факторы по одному. Здесь можно утверждать, что

из-за наличия *весьма сильной* связи между X_2 и X_4 трехфакторное уравнение не может быть наилучшим. Вполне возможно, что первым кандидатом на исключение окажется X_4 или X_3 - истину подскажет наименьшая t-статистика после первого же (четырехфакторного) расчета регрессии.

• После анализа коэффициентов Фишера, детерминации и Стьюдента, а также рассмотрения графиков, примем решение о выборе наилучшей (значимой) модели. Однако предполагаем, что наилучшая модель может оказаться среди двухфакторных моделей, т. к. каждая из них они избавлена от одновременного присутствия связанных независимых переменных.

• Приступая к расчету, предполагаем наличие линейной связи между исследуемой X_5 и независимыми переменными. Поэтому воспользуемся инструментом *Регрессия* из пакета *Анализ данных.*

Характеристика элементов диалогового окна *Регрессия*

Работая непосредственно с *Excel* 95, 97, 2000 или же *XP*, вы можете получать информацию о параметрах этого окна (рис. 13.5) *из стандартной справки.* Здесь справка адаптирована для самоподготовки с использованием текста лекции и дополнена пояснениями конкретных установок к задаче 9. Формулировку задачи см. на рис. 2.3. Пояснения к задаче даны шрифтом этого абзаца (не курсивом).

Входной интервал Y — здесь требуется задать состоящий из одного столбца диапазон анализируемых зависимых данных.

В нашей задаче это столбец значений X_5, т. е. $F2{:}F15$. Такая установка одинакова для всех четырех уравнений.

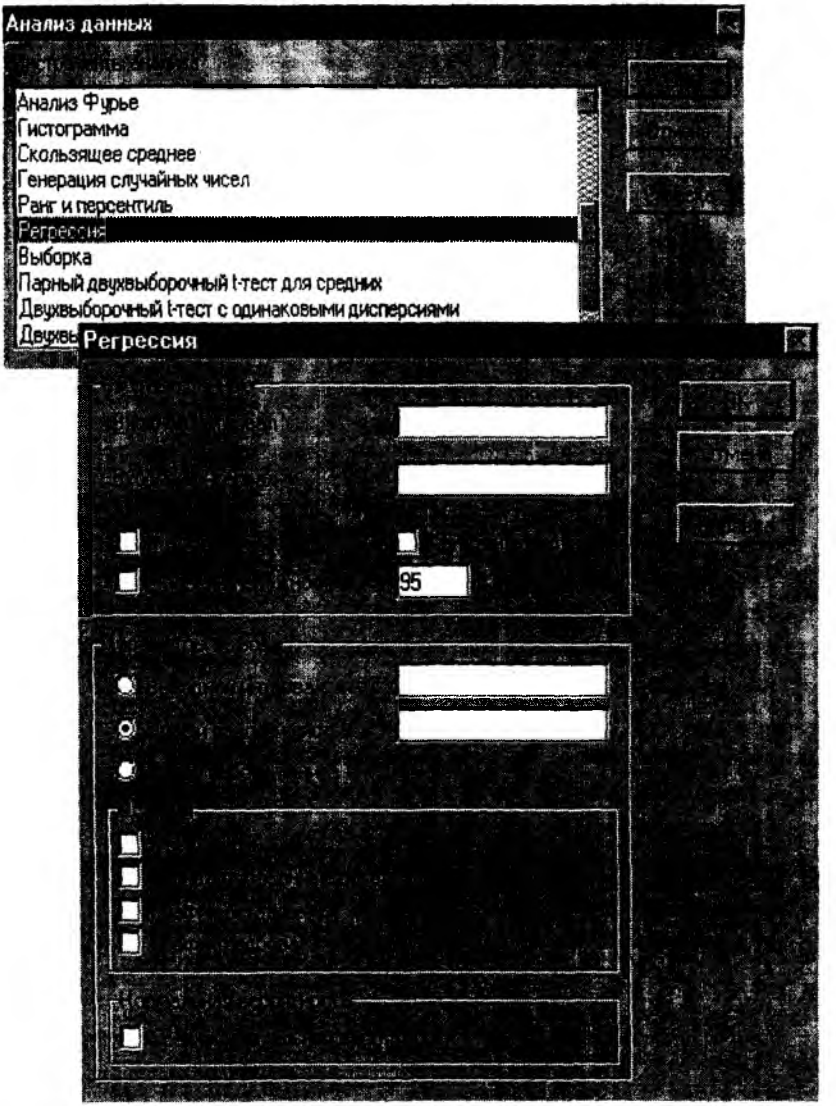


Рис. 13.5. Элементы инструмента *Регрессия* из пакета *Анализ данных*.

Входной интервал X- здесь требуется определить диапазон подлежащих анализу смежных рядов независимых данных (не более 16 независимых). Программа разместит независимые переменные заданного диапазона слева направо.

В нашей задаче установки этого параметра будем изменять в каждом расчете, т.е. четыре раза, по числу уравнений. На первом шаге расчета необходимо задать диапазон смежных столбцов со значениями X_1, X_2, X_3, X_4, т. е. весь входной диапазон значений независимых переменных (*B2:E15*), на втором шаге - диапазон значений X_1, X_2, X_4; на третьем шаге - X_1, X_2, на четвертом - X_1, X_4. Для обеспечения смежности диапазонов на втором и четвертом шагах придется предварительно подготовить сокращенные "выписки" из таблицы данных, копируя в свободную зону рабочего листа необходимый набор столбцов. Например, перед четвертым шагом (для обеспечения смежности **входного интервала** *X*) скопируйте блок *B2:E15* на свободное место, а затем удалите из этой копии столбцы с X_2 и X_3 *со сдвигом ячеек влево.* Диапазоны X_1, X_4 станут смежными.

Метки - здесь требуется установка флажка, если первая строка или первый столбец входного интервала содержит заголовки. Если заголовков нет, то флажок надо снять.

Советуем всегда включать метки во входной интервал, и поэтому не забывать щелкать по флажку "метки". Если мы забудем включить этот флажок при наличии меток, то вместо расчета получим прерывание и сообщение "Входной интервал содержит нечисловые данные".

Уровень надежности - по умолчанию применяется уровень 95%. Установите флажок, если хотите включить в выходной диапазон дополнительный уровень, а в поле (рядом) введите уровень надежности, который будет использован дополнительно к применяемому.

Мы решаем задачу на уровне, предложенном по умолчанию. Однако *итоговое* уравнение можно повторно просчитать на уровне 99%, чтобы по значению F выяснить, не будет ли оно значимым и на более надежном уровне.

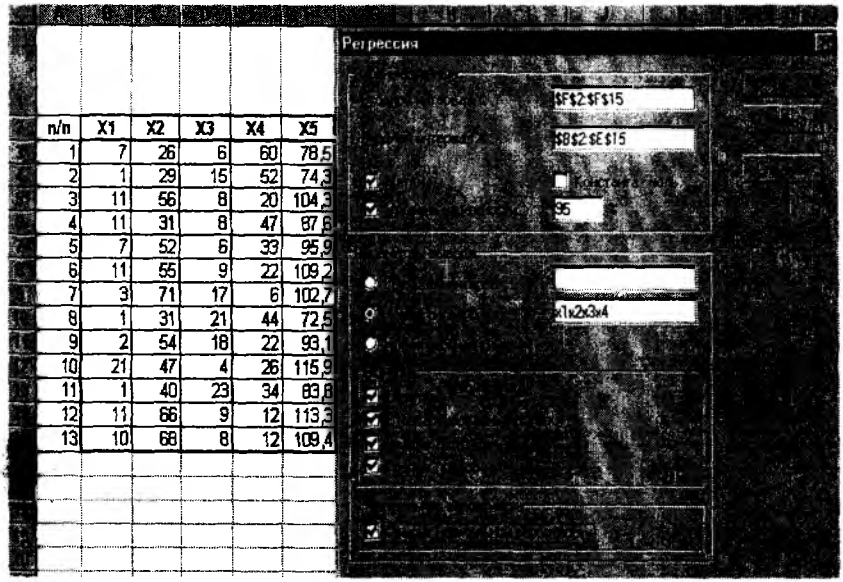
Константа-ноль - этот флажок необходимо пометить только в том случае, если вы хотите получить уравнение без свободного члена a_0, чтобы линия регрессии прошла через начало координат. Желаем получать во всех четырех случаях полный вид уравнений с включением параметра a_0. Поэтому данный флажок активизировать не будем.

Выходной диапазон - здесь требуется определить левую верхнюю ячейку выходного диапазона. Необходимо минимум семь столбцов для итогового диапазона, который будет включать в себя: результаты дисперсионного анализа, коэффициенты регрессии, стандартную погрешность вычисления Y, среднеквадратичные отклонения, число наблюдений, стандартные погрешности для коэффициентов.

Советуем воспользоваться этой возможностью, если задача небольшая, например, однофакторная, и вы хотите видеть на одном рабочем листе и данные, и корреляционную матрицу, и регрессию. При решении задачи, где требуется получить четыре результата исследования уравнений, лучше воспользоваться возможностью размещения каждого из четырех результатов на новом рабочем листе.

Новый лист - здесь требуется установить переключатель для открытия нового листа в книге под результаты анализа, начиная с ячейки A1. Можно ввести имя нового листа в поле напротив переключателя.

Установим этот переключатель (Рис. 13.6.). На каждом из четырех шагов исследования в качестве имени листа будем вводить перечень участвующих в уравнении факторов (по порядку спланированного нами исследования это будут имена: X_1, X_2, X_3, X_4; X_1, X_2, X_4; X_1, X_2; X_1, X_4).



n/n	X1	X2	X3	X4	X5
1	7	26	6	60	78,5
2	1	29	15	52	74,3
3	11	56	8	20	104,3
4	11	31	8	47	87,6
5	7	52	6	33	95,9
6	11	55	9	22	109,2
7	3	71	17	6	102,7
8	1	31	21	44	72,5
9	2	54	18	22	93,1
10	21	47	4	26	115,9
11	1	40	23	34	83,8
12	11	66	9	12	113,3
13	10	68	8	12	109,4

Рис. 13.6. Настройка параметров диалогового окна *Регрессия* для получения четырехфакторного уравнения.

Новая книга - этот переключатель необходимо активизировать только в случае, если необходимо открыть новую книгу и вставить на ее первом листе результаты анализа, начиная с ячейки A1.

Остатки — установкой этого флажка заказывается включение остатков в выходной диапазон.

Советуем активизировать этот и все описанные ниже флажки диалогового окна для получения максимума информации в ходе сложного исследования. Конечно, в этом случае мы заняли позицию "перестраховщиков" и тех статистиков, которые любят видеть все, чтобы "чего-то не упустить". Выполняя серьезное маркетинговое исследование, и готовя к распечатке обстоятельный отчет по нему, вы, скорее всего, будете поступать так же.

Стандартизированные остатки — установите флажок для включения стандартизированных остатков в выходной диапазон.

График остатков — чтобы построить диаграмму остатков для каждой независимой переменной, установите этот флажок.

График подбора - это важнейший график, а точнее серия графиков, показывающих насколько хорошо теоретическая линия регрессии (т.е. предсказания) подобрана к наблюдаемым данным. Строится для каждой независимой отдельно.

График нормальной вероятности - установите флажок для построения диаграммы нормальной вероятности.

13.5. Анализ и прогнозирование на основе трендов

Методы корреляционного, регрессионного анализа и анализа динамических рядов являются важным повседневным инструментарием современного менеджера-аналитика, имеющего на рабочем столе деловую офисную систему и в ее составе - табличный процессор *Excel.* В новом классе задач, рассматриваемых в этой теме, известен динамический ряд, состоящий только из двух элементов данных (времени и изменяющегося уровня показателя), и нет никаких других данных о конкретных факторах. Когда желают выяснить общую тенденцию изменения, не имея времени на поиск данных об уровнях влияния отдельных факторов, то возникает необходимость прогнозировать на основе ряда динамики, *искусственно принимая на роль единственного фактора числовые значения времени.* Такой метод широко используется при анализе и прогнозировании макроэкономических тенденций, а также в менеджменте и маркетинге, поскольку ито-

говый результат действия главных факторов развития как бы обобщен временем.

На рис. 13.7. вы видите выражение тенденции изменения макроэкономического показателя в числовом, графическом и математическом представлениях.

Налоги на личный доход в РУз за 2000-2009 гг.

2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
65,2	**74,9**	**82,4**	**97,7**	**116,3**	**116,8**	**117,3**	**142**	**152**	**171,8**

Рис. 13.7. Пример тренда



Для того, чтобы выявить общую тенденцию развития и на ее основе определить прогноз, анализ рядов динамики вполне достаточен. Но для *управления изменениями* (ускорения или замедления развития) необходим детальный анализ многих различных факторов, оказывающих непосредственное влияние на изменения показателя. В таких случаях вам помогут инструменты корреляционно-регрессионного анализа и анализа "что, если". Известно, что к динамическим рядам корреляционный анализ не применим, поскольку независимая переменная, т. е. время, изменяется не случайно.

Статистическая связь между двумя признаками (переменными величинами) предполагает, что каждый из них имеет случайную вариацию индивидуальных значений относительно средней величины. Если же такую вариацию имеет

лишь один из признаков, а значения другого являются жестко детерминированными, то говорят лишь о регрессии, но не о статистической (тем более корреляционной) связи. Например, при анализе динамических рядов можно измерять регрессию уровней ряда урожайности (имеющих случайную колеблемость) на номера лет. Но нельзя говорить о корреляции между ними и применять показатели корреляции с соответствующей им интерпретацией.

13.6. Сущность и основные формы трендов

Трендом называется выражение тенденции в форме достаточно простого и удобного уравнения, наилучшим образом аппроксимирующего (приближающего) истинную тенденцию динамического ряда.

По форме тренды могут быть линейными, параболическими, экспоненциальными, логарифмическими, степенными, гиперболическими, полиномиальными, логистическими и другими. *Excel* 5, 7, 97, 2000, XP предоставляют инструменты построения линейного, экспоненциального, логарифмического, степенного и полиномиального (до полинома 6-й степени) трендов, а также скользящую среднюю.

Линейная форма тренда: $Y = a + b \cdot t$, где:

Y - уровни показателя, освобожденные от колебаний и выровненные по прямой;

a - начальный уровень тренда в момент или за период, принятый за начало отсчета времени t;

b - среднее изменение за единицу времени, т. е. константа тренда, скорость изменения. Это может быть, например, среднедневной, среднемесячный или среднегодовой прирост какого-либо показателя.

Через скорость изменения линейный тренд хорошо отражает результирующее влияние многих других факторов, одновременно действовавших в единицу времени (день, ме-

сяц, год, и т. д.). Тренд можно рассматривать в качестве обобщенного выражения действий комплекса факторов, т. е. их равнодействующей. При этом, в отличие от уравнения множественной регрессии, сами факторы здесь не показываются и влияние каждого из них не выделяется. "От имени" всех факторов в тренде выступает единый результирующий фактор - время. Например, так в конечном счете в макроэкономике выражаются тенденции изменения важнейших показателей: национального дохода, заработной платы, урожайности и др.

Параболическая форма тренда имеет вид

$$Y = a + b \cdot t + c \cdot t^2,$$

где Y, a, b, t определены при описании линейного тренда;
c - это константа параболического тренда, его квадратический параметр, равный половине ускорения.

Параболическая форма тренда достаточно хорошо отражает ускорение или замедление развития при наличии *постоянного ускорения,* которое обеспечивается влиянием важных факторов (снятием ограничений в распределении дохода, уменьшением налогов, прогрессирующим внедрением нового оборудования и т. п.). При $c < 0$, т. е. при отрицательном ускорении, тренд отражает замедление роста со все большей скоростью, что характерно, например, для производства устаревшего товара или оборудования.

Экспоненциальная форма тренда имеет вид $Y = a \cdot k^t$, где константа тренда k выражает темп изменения в количестве раз.

При $k > 1$ экспоненциальный тренд показывает тенденцию все более ускоряющегося развития (рост населения в эпоху "демографического взрыва" в XX столетии). Такой рост может продолжаться лишь на небольшом историческом отрезке времени, поскольку он неизбежно приходит в противоречие с имеющимися ресурсами. При $k < 1$ экспоненциальный тренд показывает тенденцию все более замедляющегося процесса (трудоемкость продукции, удельные затраты топлива).

Логарифмическая форма тренда $Y = a + b \cdot \ln t$ пригодна для отражения тенденции замедляющегося роста при отсутствии предельного возможного значения. При достаточно большом t логарифмическая кривая становится мало отличимой от прямой линии. Такая форма характерна для развития показателей, которые все труднее улучшить (спортивные рекорды, рост производительности процесса при отсутствии качественного его улучшения).

Степенная форма тренда: $Y = a \cdot t^b$, где

b - это константа тренда. При b=1 степенной тренд превращается в линейный, а при b=2 мы имеем параболический тренд. Степенной тренд хорошо подходит для отображения процессов с разной мерой пропорциональности изменений во времени. Линия степенного тренда обязательно должна проходить через начало координат.

Гиперболическая форма тренда: $Y = a + \frac{b}{t}$ при $b>0$ выражает тенденцию замедляющегося *снижения* уровня, стремящегося к пределу а, однако при $b<0$ тренд выражает тенденцию замедляющегося *роста* уровней, стремящихся в пределе к *а*. В целом же, гиперболический тренд подходит для отображения тенденций процессов, ограниченных предельным значением уровня (грамотность населения, КПД двигателя и т. п.).

Логистическая форма тренда подходит для отображения развития во всех его фазах в течение длительного периода (вначале медленное насыщение потребителей товарами, затем ускорение, равномерность, замедление). Логистический тренд имеет форму:

$$Y = \frac{Y_{max} - Y_{min}}{e^{a+bt} + 1} + Y_{min},$$

где e - основание натурального логарифма; Y_{max}, Y_{min} - максимальное и минимальное значения уровня; a, b - параметры тренда.

13.7. Инструментальные средства *EXCEL* для работы с трендами

В работе с рядами динамики используется достаточно широкий круг средств электронной таблицы. Для облегчения изучения эти средства можно разделить по роли в технологическом процессе на *вспомогательные, промежуточные и основные.*

1. *Вспомогательные* инструменты ускоряют построение числовых рядов периодов времени. Однако пользователь может решить задачу и не задействуя эти средства. Сюда входят (1) опции *Edit*, *Fill*, *Series* (*Правка, Заполнить, Прогрессия*) и диалоговое окно *Series*, а также (2) недиалоговая организация "растягивания" двухклеточного ряда до необходимого диапазона. Последняя возможность удачно организована лишь в версиях *Excel*, начиная с седьмой. Версии же *Excel* 97, 2000, XP еще более эффективна, поскольку позволяет растягивать в ряд даже одноклеточное значение, имеющее формат даты.

2. *Промежуточные* инструменты *Excel*-технологии задействуются обязательно и строят *XY*-графики зависимости показателя от времени. *XY*-график - это самостоятельный информационный продукт и в то же время (с точки зрения аналитика трендов) -полуфабрикат, необходимый для доступа к инструментам моделирования трендов. В *Excel* инструментарий расчета и моделирования трендов до получения таких графиков заблокирован.

3. *Основные Excel*-инструменты для работы с динамическими рядами охватывают две группы:

1) средства построения *графического и математического выражения тренда,* куда относятся опция *Insert Trendline* (*Добавить линию тренда*) и три ее диалоговых окна:

- окно *Type (Тип)* - выбор формы тренда,
- окно *Trendline Formatting* (*Формат линии тренда*),

• окно *Options* (*Параметры*) - добавление на график метки тренда (с математическим видом уравнения и коэффициентом детерминации), а также задание количества периодов для графического прогноза по тренду (вперед или назад);

2) средства *получения прогноза в числовом виде и его оценки*:

• для расчета прогноза в одной точке на основе *линейного* тренда предназначена функция *FORECAST* (*ПРЕДСКАЗ* - в *Excel* 97) из группы статистических функций;

• для одновременного сглаживания исходных уровней и расчета прогноза в нескольких точках по разным трендам автор предлагает использовать однофакторную *what-if* модель и ее опцию *Data, Table (Таблица подстановки* - в *Excel* 97);

• для расчета доверительного интервала прогноза используется инструмент из группы средств анализа *данных Descriptive statistics* (*Описательные статистики*), если рассматривается генеральная совокупность; в других случаях применяется серия стандартных статистических функций;

• *STDEV* (СТАНДОТКЛОН) и *STDEVP* (СТАНДОТКЛОНП) - соответственно стандартное отклонение по выборке и по генеральной совокупности;

• *COUNT* (СЧЕТ) - количество чисел (наблюдений) или размер совокупности;

• *CONFIDENCE* (ДОВЕРИТ) - доверительный интервал.

Вспомогательные инструменты для построения рядов

Любые исходные данные могут быть введены в необходимые клетки вручную. Если в серии вводимых чисел есть закономерность, то удобнее вводить их с помощью вспомогательного инструмента, ускоряющего работу - заполнителя. Опция *Fill (Заполнить)* в меню *Edit. (Правка)* постоянно готова к работе. Она открывает диалоговое окно, предоставляющее большой выбор возможностей для заполнения серий данных по столбцам или по строкам. На рис. 13.8 показаны возможности этого инструмента в *Excel.*

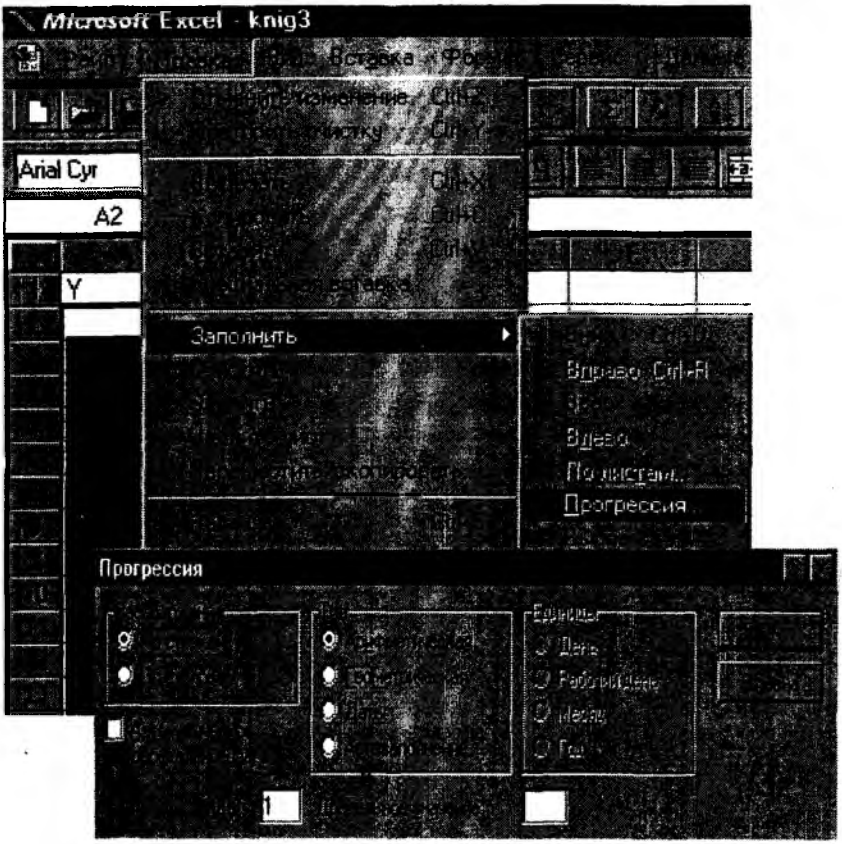


Рис. 13.8. Инструментарий для построения рядов в *Excel*. Вверху показано меню команды **Правка**, в котором выбрана опция **Заполнить**, открывающая диалоговое окно **Прогрессия**. Имеется возможность заполнять ряд рабочих дней, месяцев и т.п.

С помощью такого заполнителя легко создавать ряды периодов. Но после автоматического создания ряда необходимо проследить за тем, чтобы периоды, за которые не было наблюденных исходных данных, были удалены из ряда. На-

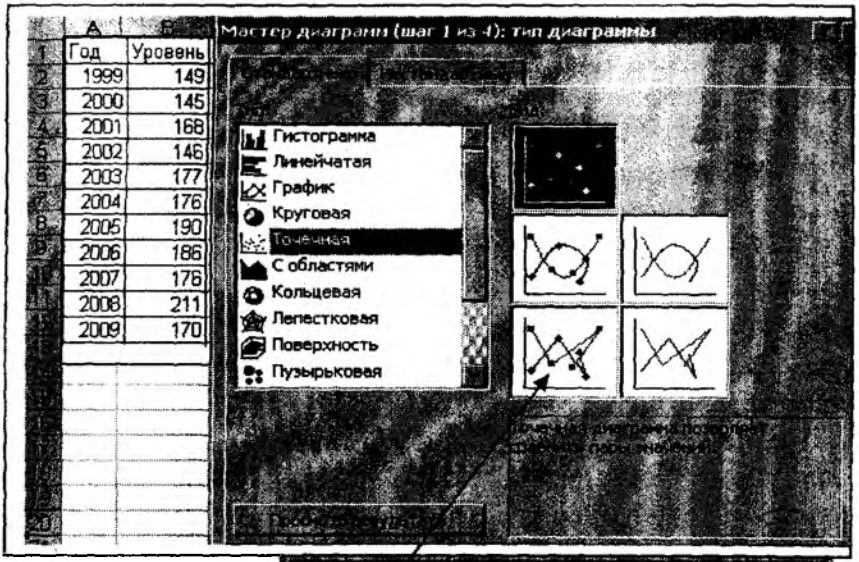
пример, если бы в ряду лет с 1995 по 1999 не было данных за 2001 год, то число 2001 следовало бы удалить. Затем рядом с периодами вводятся вручную или копируются из других клеток соответствующие значения (уровни) показателей, например, данные о размерах налогов.

Построение *XY*-диаграммы данных в *Excel*

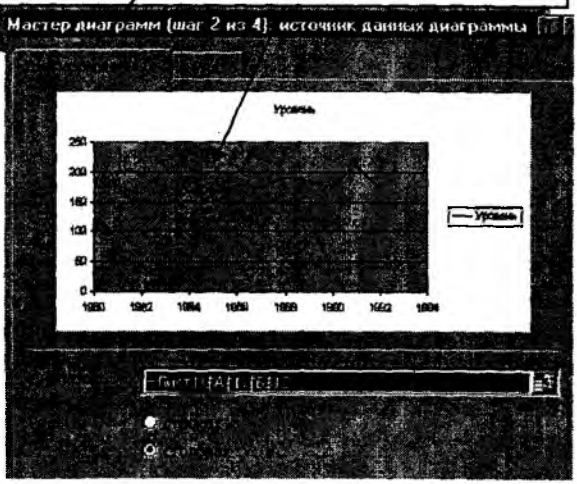
Начало этого параграфа вы можете пропустить, если хорошо знакомы с технологией построения точечной диаграммы (XY). В конце параграфа даются специальные рекомендации по построению трендов.

Исходным пунктом моделирования трендов в *Excel* является построение диаграммы. Рассмотрим этот процесс для *Excel* 97, 2000, XP (см. рис. 13.9).

• Определим блок исходного динамического ряда, т. е. диапазон клеток *A*1:*B*12. Важно, чтобы в блок вошла и специальная строка меток данных. Щелкнем левой кнопкой мыши (ЛКМ) по пиктограмме *Мастер диаграмм*. Выберем *Точечная диаграмма* (т.е. тип *XY*) в стандартном списке *типов* (слева). В правой части окна выберем *вид* (подтип) точечной диаграммы. В нашем примере выбран пятый вид *"Точечная диаграмма со значениями, соединенными отрезками без маркеров"*. Описанные действия показаны на рис. 13.9 вверху. В середине того же рисунка показана возможность предварительного просмотра вида диаграммы. Если в левом нижнем углу диалогового окна *Мастер диаграмм* нажать и удерживать кнопку *"Просмотр результата"*, то справа вместо галереи видов вы увидите теперь образец будущей диаграммы. Если он вас не устраивает, можно подобрать другой вид (например, сглаженный, т.е. третий вид точечной диаграммы).



Если держать активной кнопку «Просмотр результата», то на первом же шаге можно видеть выбираемый тип графика и характер его основной линии.



На втором шаге можно определить или переопределить источник данных для диаграммы, указав диапазон клеток таблицы.

Рис. 13.9. Построение исходной диаграммы динамического ряда: шаг 1 и 2.

• Щелчок по кнопке *Далее* активизирует второй шаг *Мастера диаграмм* (в нижней части рис. 13.9), где предоставляется возможность уточнить или задать исходный диапазон. Здесь же уточняется, как следует воспринимать данные (по столбцам или по строкам). После этого щелчком по *кнопке Далее* активизируется третий *шаг Мастера диаграмм.*

• На третьем шаге *Мастера диаграмм* устанавливаются все специальные параметры диаграммы (заголовки, оси, линии сетки, легенда, подписи данных). Выберем вкладку *Заголовки* и уберем установленный в ней по умолчанию заголовок "Уровни". В окне *"Ось X (категорий)"* введем "Годы", а в окне *"Ось Y (значений)"* введем "Значения уровней". Результат отражен на рис. 13.10 вверху. На том же шаге установим или изменим еще некоторые параметры (по желанию). Для того, чтобы освободить больше места для основной части диаграммы, можно переместить легенду из правой части вниз. Щелкнем по вкладке *Легенда* и в ее контуре *Размещение* активизируем переключатель *Внизу.* Результат этого действия показан в средней части рис. 13.10. Щелкнем по кнопке *Далее* и активизируем четвертый шаг *Мастера диаграмм.*

• На четвертом шаге *Мастера диаграмм* (рис. 13.10 внизу) определяется, где разместить диаграмму: на отдельном или на имеющемся листе электронной таблицы. Диаграмма по умолчанию размещается на имеющемся листе, если мы щелкнем по кнопке *Готово.* В результате получаем диаграмму, вид которой показан на рис. 13.11.

Для правильности последующих вычислений в *Excel необходимо, чтобы значения периодов были представлены их номерами, начиная с единицы, с учетом расстояния между соседними периодами.* Автозамена значений периодов их числовыми кодами присутствует в специальных статистических пакетах и является условием правильности вычислений при моделировании степенного, экспоненциального и ряда других трендов.

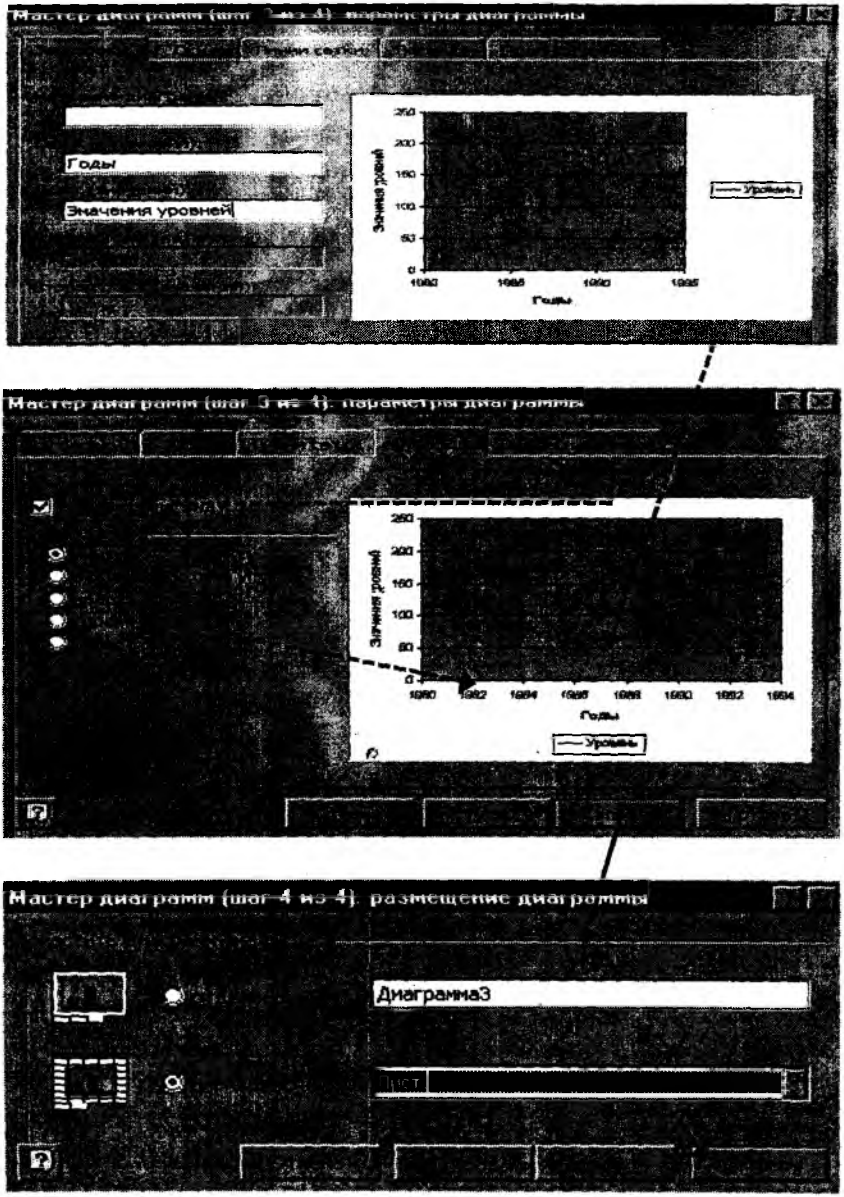


Рис. 3.4. Построение диаграммы динамического ряда: шаги 3 и 4.

	A	B
1	Год	Уровень
2	1999	149
3	2000	145
4	2001	168
5	2002	146
6	2003	177
7	2004	176
8	2005	190
9	2006	186
10	2007	176
11	2008	211
12	2009	170



	A	B	C
1	Год	Время	Уровень
2	1999	1	149
3	2000	2	145
4	2001	3	168
5	2002	4	146
6	2003	5	177
7	2004	6	176
8	2005	7	190
9	2006	8	186
10	2007	9	176
11	2008	10	211
12	2009	11	170



Рис. 13.11. Диаграмма исходного динамического ряда (вверху) и диаграмма преобразованного (ниже). Для нормальной работы вычислительных программ моделирования трендов в *Excel* многозначные периоды следует заменить их номерами (с учетом расстояния между позициями).

• Определим блок исходного динамического ряда, т. е. диапазон клеток *A*1:*B*12. Важно, чтобы в блок вошла и специальная строка меток данных. Щелкнем левой кнопкой

мыши (ЛКМ) по пиктограмме *Мастер диаграмм*. Выберем *Точечная диаграмма* (т.е. тип *XY*) в стандартном списке *типов* (слева). В правой части окна выберем *вид* (подтип) точечной диаграммы. В нашем примере выбран пятый вид *"Точечная диаграмма со значениями, соединенными отрезками без маркеров"*. Описанные действия показаны на рис. 3.3 вверху. В середине того же рисунка показана возможность предварительного просмотра вида диаграммы. Если в левом нижнем углу диалогового окна *Мастер диаграмм* нажать и удерживать кнопку *"Просмотр результата"*, то справа вместо галереи видов вы увидите теперь образец будущей диаграммы. Если он вас не устраивает, можно подобрать другой вид (например, сглаженный, т.е. третий вид точечной диаграммы).

• Щелчок по кнопке *Далее* активизирует второй шаг *Мастера диаграмм* (в нижней части рис. 13.9.), где предоставляется возможность уточнить или задать исходный диапазон (если он не был задан еще до щелчка по пиктограмме *Мастера диаграмм)*. Здесь же уточняется, как следует воспринимать данные (по столбцам или по строкам). После этого щелчком по *кнопке Далее* активизируется третий *шаг Мастера диаграмм*.

• На третьем шаге *Мастера диаграмм* устанавливаются все специальные параметры диаграммы (заголовки, оси, линии сетки, легенда, подписи данных). Выберем вкладку *Заголовки* и уберем установленный в ней по умолчанию заголовок "Уровни". В окне *"Ось X (категорий)"* введем "Годы", а в окне *"Ось Y (значений)"* введем "Значения уровней". Результат отражен на рис. 13.10 вверху. На том же шаге установим или изменим еще некоторые параметры (по желанию). Для того, чтобы освободить больше места для основной части диаграммы, можно переместить легенду из правой части вниз. Щелкнем по вкладке *Легенда* и в ее контуре *Размещение* активизируем переключатель *Внизу*. Результат этого дей-

ствия показан в средней части рис. 13.10. Хорошо видно, что основная зона диаграммы автоматически увеличилась. Щелкнем по кнопке *Далее* и активизируем четвертый шаг *Мастера диаграмм.*

• На четвертом шаге *Мастера диаграмм* (рис. 13.10 внизу) определяется, где разместить диаграмму: на отдельном или на имеющемся листе электронной таблицы. Диаграмма по умолчанию размещается на имеющемся листе, если мы щелкнем по кнопке *Готово.* В результате получаем диаграмму, вид которой показан на рис. 13.11.

Для правильности последующих вычислений в *Excel необходимо, чтобы значения периодов были представлены их номерами, начиная с единицы, с учетом расстояния между соседними периодами.* Автозамена значений периодов их числовыми кодами присутствует в специальных статистических пакетах и является условием правильности вычислений при моделировании степенного, экспоненциального и ряда других трендов.

В *Excel* придется сделать это вручную, иначе в случаях степенной, экспоненциальной и ряда других регрессий мы получим необъяснимые результаты. Вставим впереди один столбец, скопируем в него исходный ряд периодов (1982-1992), а затем в столбце-оригинале, на который ориентирована диаграмма, вместо 1982 наберем 1, вместо 1983 наберем 2, выделим диапазон клеток *B*1:*B*2 и растянем его вниз до позиции 1992 года, где должно теперь отразится значение 11. Диаграмма соответствующим образом должна измениться (рис. 13.12 внизу). График данных построен, и в него можно встраивать различные тренды, а затем выбирать тренд.

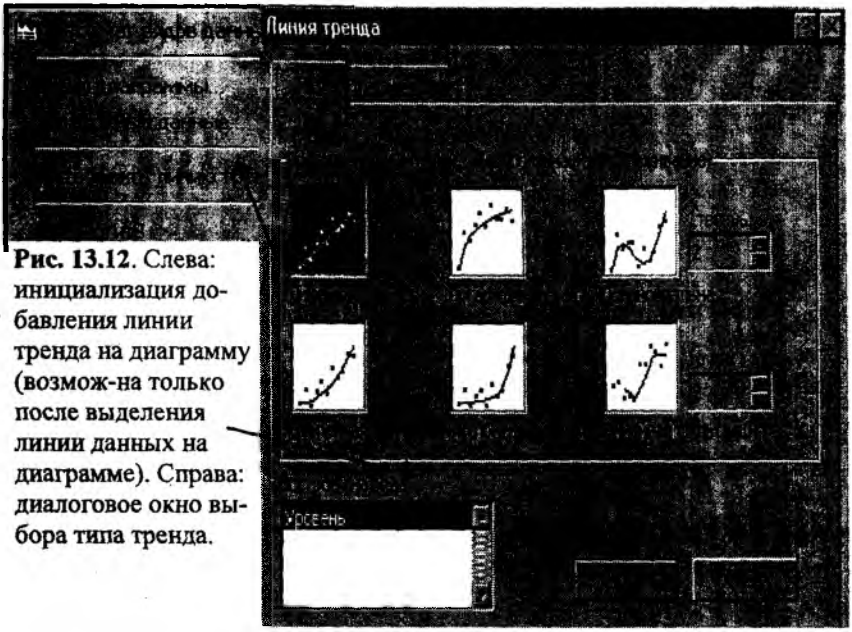


Рис. 13.12. Слева: инициализация добавления линии тренда на диаграмму (возмож-на только после выделения линии данных на диаграмме). Справа: диалоговое окно выбора типа тренда.

13.8. Технология построения трендов в *Excel*

Чтобы построить тренд одного типа, необходимо выполнить такие действия:

1) Построить *XY*-диаграмму исходного динамического ряда.

2) Создать копию диаграммы исходного ряда (не обязательно).

3) Выделить щелчком левой кнопки мыши (ЛКМ) линию показателя, для которого следует построить тренд (линия должна промаркироваться).

4) Щелкнуть правой кнопкой мыши (ПКМ) по маркированной линии для открытия контекстно-зависимого меню.

5) Выбрать опцию *Добавить линию тренда* (*Insert Trendline*).

6) В открывшемся диалоговом окне типов тренда выбрать один тип.

7) В том же окне выбрать вкладку *Параметры*.

8) В открывшемся диалоговом окне параметров тренда установить флажок *Показывать уравнение на диаграмме* и флажок *Поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации R^2.*

9) (По желанию) установить необходимое число периодов для изображения возможного прогноза вперед или назад.

10) (По желанию) ввести название моделируемого тренда, которое будет помещено в метку диаграммы. Названия даются и по умолчанию, но без указания степени полиномиального тренда. Поэтому в случае моделирования нескольких полиномиальных трендов стоит воспользоваться этой возможностью.

11) Если не нужен свободный член уравнения, следует активизировать флажок *Пересечение кривой с осью Y в точке* 0.

12) Активизировать кнопку **ОК**.

13) Для получения каждого нового тренда повторить технологию от п. 2 до п.12.

Прежде всего щелчком левой кнопки мыши на диаграмме следует выделить линию исходного ряда, для которого строится тренд. Линия должна пометиться маркерами. Если на диаграмме более одного показателя и линии находятся близко, то лучше копировать диаграмму для моделирования каждого нового тренда. Затем щелчок ПКМ по выделенной линии открывает меню дополнительных опций, показанное на рис. 3.6 слева вверху. Здесь с помощью ЛКМ выбирается опция *Добавить линию тренда.* Опция недоступна, если не выделена линия данных - придется вернуться к предыдущему шагу, Если же все в порядке, то откроется основное диалоговое окно *Линия тренда,* показанное на том же рисунке внизу.

Окно *Линия тренда* (*Trendline*) предоставляет возможность моделировать тренд,) используя пять основных типов регрессии:

1) *Linear* - линейную, 2) *Logarithmic* - логарифмическую, 3) *Polynomial* - полиномиальную (степени от двух до шести

задаются в прокурчиваемом списке *Степень* (*Order*), 4) *Power* - степенную, 5) *Exponential* - экспоненциальную.

Для этих видов регрессии установкой соответствующих флажков пользователь может заказать вывод метки тренда (рис. 13.13), куда автоматически помещается вид уравнения (*Equation*) и значение коэффициента детерминации (R^2). Последний показывает, какая доля вариации наблюденного признака (Y) объяснена за счет фактора времени (X) при данной форме тренда.

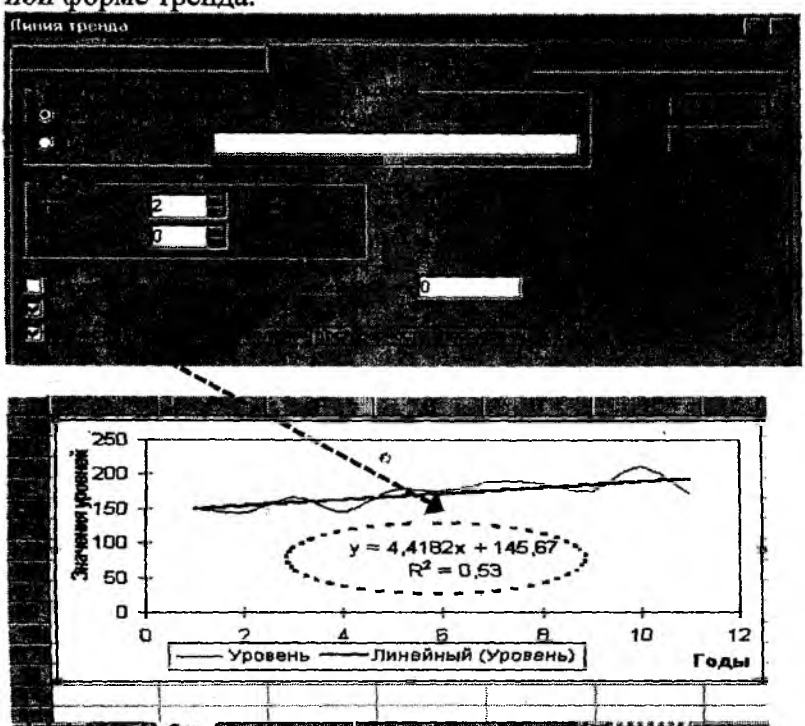


Рис. 13.12. Вверху: настройка параметров тренда. Настроен вывод уравнения на диаграмму и вывод R^2. Внизу: результат настройки, полученный после активизации кнопки **ОК**.

ГЛОССАРИЙ

Автокорреляция – наличие зависимости между последующими и предшествующими уровнями динамического ряда; корреляционная зависимость между последовательными значениями уровней временного ряда.

Автономные капиталовложения – часть общих *капиталовложений,* которая определяется не внутриэкономическими факторами (такими, например, как прибыльность вложений или потребность сбалансирования отраслей производства для пропорционального и ускоренного развития).

Автономный технический прогресс – понятие теории *производственных функций.* В отличие от материализованного технологического прогресса выражает тенденцию, зависящую от совместного действия таких факторов роста, как совершенствование организации и управления производством, накопление научных знаний, повышение культурно-технического уровня работников. Автономный технический прогресс не зависит от накопления капитала или затрат других ресурсов, учитываемых в производственной функции, его считают как бы «даровым».

Агрегирование – объединение, укрупнение *показателей* по какому-либо признаку. С математической точки зрения *агрегирование* рассматривается как преобразование *модели* в модель с меньшим число *переменных* и *ограничений* – агрегированную модель, дающую приближенное описание изучаемого *процесса* или *объекта.* Его сущность – в соединении однородных или принимаемых за однородные *элементов* в более крупные.

Адаптация – способность целенаправленного приспособительного поведения системы в сложных средах, а также сам процесс такого приспособления.

Адаптивность – закономерность, связанная с приспособлением системы к изменяющимся внешним и внутренним параметрам ее существования.

Адекватная модель – модель, для которой ряд возмущений ε_i будет удовлетворять основным предпосылкам регрессионного анализа.

Адекватность модели – соответствие *модели* моделируемому *объекту* или *процессу*.

Активный (условный) статистический прогноз – *прогноз*, применяемый тогда, когда предусматривается, что правительство (общество) может принять различные меры, которые способны воздействовать на прогнозируемые *показатели*.

Альтернатива – понятие *исследования операций, теории игр, теории решений*, – возможный вариант *решения задачи*.

Анализ – исследовательский метод, состоящий в том, что объект исследования, рассматриваемый как *система*, мысленно или практически расчленяется на составные элементы (признаки, свойства, отношения и т.п.) для изучения каждого из них в отдельности и выявления их роли и места в системе, обнаружения таким образом *структуры системы*.

Анализ спроса и потребления – область экономико-математических исследований, основной задачей которых является научное предвидение материальных потребностей членов общества и поиск оптимальных, т.е. наилучших, путей их удовлетворения.

Аналитическая модель – формула, представляющая математические зависимости в экономике и показывающая, что результаты (выходы) находятся в функциональной зависимости от *затрат* (*входов*). В самом общем виде её можно записать так: $Y=f(x)$. Здесь x – совокупность (*вектор*) входов, Y – совокупность (*вектор*) выходов, f – *функция*, которая в случае, если она известна, может быть раскрыта в явной форме.

Аналитические методы решения моделей – в отличие от *имитационных* (*численных*) *методов*, состоят в последовательном проведении математических преобразований исходной модели, приводящих к заданному результату, например к формуле, выражающей зависимость *экстремума функции* от ее аргумента.

Аналитические модели спроса и потребления – *экономико-математические модели*, которые строятся в виде уравнений, характеризующих зависимость *потребления благ* (т.е. товаров и услуг) от тех или иных *факторов*: если от одного – имеем однофакторную модель, если от нескольких – многофакторную.

Аналоговая модель – один из трех исходных типов *моделей*: модель, свойства которой определяются законами, аналогичными законам изучаемой системы.

Аппроксимация – «замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным»; в частности – приближенное выражение сложной *функции* с помощью более простых.

Балансовая модель – *система уравнений* (балансовых соотношений, балансовых уравнений), которые удовлетворяют требованию соответствия двух элементов: наличия *ресурса* и его использования (например, производства каждого *продукта* и *потребности* в нем, наличия рабочей силы и количества рабочих мест, платежеспособного *спроса* населения и предложения *товаров* и услуг).

Балансовый метод – метод взаимного сопоставления *ресурсов* – материальных, трудовых, финансовых – и потребностей в них.

Большая система – *система*, состоящая из *множества* частей и *элементов*, выполняющих некоторые функции и связанных между собой.

Бюджетная линия – линия возможностей потребления, или линия цен.

Валидация модели – проверка соответствия *данных*, получаемых в процессе *машинной имитации*, реальному ходу явлений, для описания которых создана *модель*.

Валовая продукция – статистический *показатель*, характеризующий объем *продукции* народного хозяйства, сфер и отраслей экономики, объединений и предприятий в денежном выражении.

Валовой национальный продукт – экономический показатель, выражающий совокупную стоимость конечных *товаров* и услуг в рыночных *ценах*: включает стоимость потребленных населением товаров и услуг, государственных закупок, а также инвестиции и сальдо платежного баланса.

Валовые инвестиции – общие инвестиции, производимые в экономике в течение определенного периода времени. Они включают инвестиции на возмещение выходящих из строя *основных фондов* (реновацию) и *чистые инвестиции*.

Вариантные прогнозы – *прогнозы*, основанные на сопоставлении различных вариантов возможного развития *экономических объектов* при разных предположениях относительного того, как будет развиваться техника, какие будут приниматься экономические меры и т.д.

Вариационные ряд – групповая таблица, построенная по количественному признаку, сказуемое которой показывает число единиц в каждой группе.

Вариации размах – разность между максимальным и минимальным значениями признака ряда распределения случайной величины.

Вектор «затрат-выпуска» – *вектор*, содержащий компоненты двух видов: выпускаемы *продукты* (обычно эти компоненты положительные) и продукты, затрачиваемые в производстве (отрицательные).

Верификация модели – проверка ее истинности, *адекватности*.

Вероятностная модель – *модель*, которая находится в отношении вероятностного *подобия* к моделируемому объекту. Соответственно, в отличие от *детерминированной модели* она содержит случайные элементы.

Вероятностная система – *система*, выходы которой случайным образом, а не однозначно зависят от *входов*.

Вероятность – «математическая, числовая характеристика степени возможности появления какого-либо события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз условиях».

Внешний прогноз – в теории *управления запасами, планировании производства* – *прогноз*, основанный на внешних *факторах*.

Внутренний прогноз – в теории *управления запасами, планировании производства* – *прогноз*, основанный на внутренних *факторах*.

Временное предпочтение – *предпочтение* при выборе благ с учетом временного фактора.

Временной (динамический) ряд, или ряд динамики – ряд последовательных значений, характеризующих изменение *показателя* во времени. В экономике под *временным рядом* подразумевается последовательность наблюдений некоторого признака в последовательные моменты времени. Отдельные наблюдения называются *уровнями ряда*.

Входы и выходы системы – совокупность *воздействий внешней среды* на *систему* и воздействий системы на среду.

Выравнивание временных рядов – выявление основной тенденции развития (временного тренда) путем «очистки» *временного ряда* от искажающих эту тенденцию случайных отклонений.

Гетероскедастичность – понятие математической статистики и эконометрики, означает случай, когда дисперсия ошибки в уравнении регрессии изменяется от наблюдения к наблюдению.

Гипотеза – предположение, требующее научного доказательства. *Экономико-математические модели* строятся на основании гипотез о структуре и взаимоотношении экономических (статистических) показателей.

Гомоскедастичность – свойство постоянства дисперсий ошибок регрессии ε для каждого значения x_j; равенство дисперсий возмущений (ошибок) регрессии: $\sum \varepsilon_j = \sigma^2 \varepsilon_n$.

Горизонт прогнозирования – крайний срок, для которого прогноз действителен с заданной точностью.

Группировка – расчленение, при котором группы образуются из элементов, качественно однородных в определенном отношении.

Дарбина-Уотсона критерий – условный *показатель*, который применяется при *прогнозировании* для выявления *автокорреляции* во *временных рядах*.

Дельфийский метод, или метод «Дельфи» – метод экспертной оценки будущего, т.е. экспертного *прогнозирования*. Суть этого метода заключается в организации систематического сбора мнений специально подобранных экспертов (*экспертных оценок*), их математико-статистической обработки, корректировки экспертами своих оценок на основе каждого цикла обработки.

Демографические модели – математические *модели*, описывающие *процессы* воспроизводства и миграции населения.

Демографический прогноз – *прогноз* будущего роста населения страны в целом и его отдельных совокупностей, имеющих значение для комплексного прогнозирования и планирования социально-экономических процессов в обществе.

Дерево целей – в *программно-целевых методах планирования и управления* – *граф*, схема, показывающая членение общих (генеральных) целей народнохозяйственного плана и *программы* на подцели, последних – на подцели следующего уровня и т.д.

Дескриптивная модель – *модель*, предназначенная для описания и объяснения наблюдаемых фактов или *прогноза поведения объектов*, в отличие от *нормативных моделей*, предназначенных для нахождения желательного (например, *оптимального*) *состояния* объекта.

Детерминированная модель – аналитическое представление закономерности, операции и т.п., при которых для данной совокупности входных значений на *выходе системы* может быть получен единственный результат.

Детерминированная система – *система*, *выходы* которой (результаты действия, конечные *состояния* и т.п.) однозначно определяются оказанными на нее *управляющими воздействиями*.

Динамическая система – всякая *система*, которая изменяется во *времени*.

Динамические модели экономики – *модели*, описывающие экономику в развитии (в отличие от статических, характеризующих ее *состояние* в определенный момент).

Дисперсионный анализ – раздел *математической статистики*, посвященный методам выявления влияния отдельных *факторов* на *результат* эксперимента.

Дисперсия – характеристика рассеивания значений *случайной величины*, измеряемая квадратом их отклонений от *среднего значения*.

Долгосрочное прогнозирование – оценки будущего развития экономики, научно-технического прогресса, социальных изменений в обществе.

Зависимая переменная – в регрессионной модели некоторая переменная Y, являющаяся функцией регрессии с точностью до случайного возмущения.

Имитационная модель – *экономико-математическая модель* изучаемой системы, предназначенная для использования в процессе *машинной имитации*.

Интенсивный тип экономического роста – такой рост экономики, который сопровождается повышением *эффективности экономической системы*, т.е. происходит за счет увеличения *производительности труда*, отдачи *основных фондов*, улучшения использования сырья и материалов.

Интервальный прогноз – *прогноз*, которым указывается не единственное значение прогнозируемого показателя (или вектор значений), а некоторый интервал.

Интерполяция – нахождение по имеющимся данным за определенный период времени некоторых недостающих значений признака внутри данного периода.

Кобба-Дугласа функция – *производственная функция*, отражающая зависимость объема выпуска от фактора рабочий силы и капитала.

Ковариация (корреляционный момент) $cov(x,y)$ **случайных величин** X **и** Y – математическое ожидание произведения отклонений этих величин от своих математических ожиданий.

Комплекс моделей – совокупность *моделей*, предназначенных для решения одной сложной задачи, каждая из которых описывает ту или иную сторону моделируемого *объекта* или *процесса*.

Комплексное прогнозирование – разработка системы *прогнозов* развития национальной экономики, рассматривающих разные аспекты этого развития.

Коррелограмма – график выборочной автокорреляционной функции.

Корреляционный анализ – ветвь математической статистики, изучающая взаимосвязи между изменяющимися величинами.

Корреляция – величина, характеризующая взаимную зависимость двух *случайных величин* X и Y – безразлично, определяется ли она некоторой причинной связью или просто случайным совпадением.

Коэффициенты эластичности производства – *показатели производственной функции*, характеризующие относительное изменение результатов производства на единицу относительного изменения затрат i-го *ресурса*.

Кривая предложения – графическое представление соотношения между предложением *товара* и его *ценой*.

Кривая спроса – кривая, показывающая зависимость *спроса* на *товар* от его *цены*.

Лаг – экономический *показатель*, отражающий отставание или опережение во времени одного экономического явления по сравнению с другим, связанным с ним явлением.

Линейная модель – *модель*, отображающая *состояние* или *функционирование системы* таким образом, что все взаимозависимости в ней принимаются линейными.

Линейное уравнения – уравнения, в которые неизвестные входят в 1-й степени (линейно) и нет членов, содержащих произведения неизвестных или экспоненты.

Логистическая функция – *функция*, кривая которой сначала растет медленно, потом быстро, а затем снова замедляет свой рост, стремясь к какому-то пределу.

Макроэкономическая модель – *экономико-математическая модель*, отражающая функционирование народного хозяйства как единого целого.

Материализованный технический прогресс – понятие *теории производственных функций: научно-технический прогресс*, который воплощен в новой технике, в обновлении производственных *ресурсов*, учитываемых в *модели*.

Матричные модели – *экономико-математические модели*, построенные в виде таблиц (*матриц*). Они отображают соотношения между *затратами* на производство и его *результатами*, *нормативы* затрат, производственную и экономическую структуру хозяйства.

Метод наименьших квадратов – математический (математико-статистический) прием, служащий для выравнивания *динамических рядов*, выявления формы корреляционной связи между *случайными величинами* и др.

Метод скользящих средних – метод выравнивания (сглаживания) временного ряда, т.е. выделения неслучайной составляющей. Основан на переходе от начальных значений членов ряда к их средним значениям на интервале времени, длина которого определена заранее. При этом сам выбранный интервал времени «скользить» вдоль ряда.

Микроэкономическая модель – *экономико-математическая модель*, отражающая функционирование и структуру звена хозяйственной системы, взаимодействие его составных частей.

Моделирование – исследование *объектов* познания на *моделях*; построение и изучение моделей реально существующих предметов и явлений, а также предполагаемых (конструируемых) *объектов*.

Модель – логическое или математическое описание компонентов и функций, отображающих существенные свойства моделируемого *объекта* или *процесса*.

Мультиколленеарность – тесная корреляционная взаимосвязь между отбираемыми для анализа *факторами*, совместно воздействующими на общий *результат*.

Наблюдения – *совокупность* результатов статистического наблюдения, обрабатываемая методами математической статистики.

Неопределенность – ситуация, когда полностью или частично отсутствует *информация* о возможных *состояниях системы* и *внешней среды*.

Нормативный прогноз – *прогноз*, который в отличие от *поискового* показывает возможные пути и сроки достижения заданного, желаемого *конечного состояния* прогнозируемого *объекта* (т.е. *цели*).

Основные фонды – «совокупность материально-вещественных ценностей, действующих в течение длительного времени: здания, сооружения, машины, оборудование, транспортные средства и т.п.»

Ошибки в прогнозировании – расхождения между *данными прогноза* и действительными (фактическими) данными.

Пассивный (безусловный) статистический прогноз – *прогноз* развития, основанный на изучении статистических данных за прошлый период и переносе выявленных закономерностей в будущее.

Поисковый прогноз – то же, что *генетический прогноз*, изыскательный прогноз – *прогноз*, показывающий, к каким *состояниям* придет прогнозируемый *объект* в заданное время при определенных начальных условиях.

Показатель – выраженная числом характеристика какого-либо свойства *экономического объекта*, *процесса* или *решения*.

Прогноз – научно обоснованное суждение о возможных *состояниях объекта* в будущем или об альтернативных путях и сроках достижения этих состояний (либо как о том, так и о другом).

Прогнозирование – система научных исследований качественного и количественного характера, направленных на выяснение тенденций развития национальной экономики или его частей.

Производственная функция – экономико-математическое *уравнение*, связывающее переменные величины *затрат* (*ресурсов*) с величинами продукции (выпуска).

Регрессионная модель – *экономико-статистическая модель*, основанная на уравнении регрессии, или системе регрессионных уравнений, связывающих величины экзогенных и эндогенных переменных.

Регрессионный анализ – *раздел математической статистики*, объединяющий практические методы исследования регрессионной зависимости между величина по данным статистических наблюдений.

Регрессия – зависимость *среднего значения* какой-либо случайной величины от некоторой другой величины или нескольких величин X (в отличие от функциональной).

Ретроспективный прогноз – имитационный эксперимент, позволяющий *прогнозировать* данные уже прошедшего периода и сопоставлять полученные значения *переменных имитационной модели* с неизвестными (фактическими) *данными*.

Синтез – исследовательский метод, в известном смысле обратный *анализу*, т.е. имеющий целью объединить отдельные части изучаемой системы, ее *элементы*, в единую систему.

Система – *множество элементов*, находящихся в отношениях и связях друг с другом, которое образует определенную целостность, единство.

Случайная величина – величина, принимающая в зависимости от случая те или иные значения с определенными вероятностями.

Спецификация модели – один из этапов построения экономико-математической модели, на котором на основании предварительного *анализа* рассматриваемого *экономического объекта* или *процесса* в математической форме выражаются обнаруженные связи и соотношения, а также *параметры* и *переменные*, которые на данном этапе представляются существенными для цели исследования.

Статистическое моделирование – способ исследования процессов *поведения вероятностных систем* в условиях, когда неизвестны внутренние взаимодействия в этих системах.

Статическая модель – *экономико-математическая модель*, в которой все зависимости отнесены к одному моменту *времени*.

Статическая система – такая *система*, координаты которой на изучаемом отрезке времени могут рассматриваться как постоянные.

Степени свободы – в анализе *систем линейных уравнений* – разность между числом независимых уравнений и числом неизвестных.

Стохастическая модель – такая *экономико-математическая модель*, в которой *параметры*, условия функционирования и характеристики *состояния* моделируемого *объекта* представлены *случайными величинами* и связаны стохастическими (т.е. случайными, нерегулярными) зависимостями, либо исходная информация также представлена *случайными величинами*.

Технологическое прогнозирование – вид *прогнозирования* науки и техники, ориентированный на создание динамической картины «перемещения» технологии, под которым понимается процесс ее развития (от уровня изобретения, открытия до уровня инженерной разработки) и ее «распространения», т.е. практического применения, коммерческой реализации.

Точечный прогноз – *прогноз*, которым указывается единственное значение прогнозируемого *показателя*.

Тренд – длительная тенденция изменения экономических *показателей*.

Трендовая модель – *динамическая модель*, в которой развитие моделируемой *экономической системы* отражается через тренд ее основных показателей.

Устойчивость модели – свойство *модели*, характеризующее ее способность обеспечить результаты расчетов (выходные данные), отклоняющиеся от идеальных *данных* на допустимо малую величину.

Фактор – источник воздействия на *систему*, отражающегося на значении *переменных модели* этой системы.

Факторный анализ – представляет собой постепенный переход от исходной системы факторов (результативный показатель) к конечной (или наоборот) и раскрытие полного набора количественно измеримых факторов, оказывающих влияние на изменение результативного показателя.

Факторные модели экономического роста – *модели*, выявляющие количественные связи между объемом и динамикой производства (*валового национального продукта, национального дохода, конечного продукта*) и объемом и динамикой производственных *ресурсов*.

Факторы производства – условия производственной деятельности; производственные *ресурсы*, становящиеся *элементом* процесса производства.

Эконометрическая модель – система *регрессионных уравнений*, в которых отражается зависимость *эндогенных величин* (искомых) от внешних *воздействий* (текущих *экзогенных величин*) в условиях, описываемых оцениваемыми параметрами модели, а также лаговыми переменными.

Экономико-математическая модель – математическое описание экономического *процесса* или объекта, произведенное в целях их исследования и управления ими: математическая запись решаемой экономической *задачи*.

Экономико-математическое моделирование – описание *экономических процессов* и явлений в виде *экономико-математических моделей*.

Экспертные оценки – количественные или порядковые оценки процессов или явлений, не поддающихся непосредственному измерению.

Экстраполяция временного ряда – распространение тенденций, установленных в прошлом, на будущий период.

Эффект масштаба – соотношение между изменением объемов использования *ресурсов* и изменением соответствующих производственных *результатов*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каримов И.А. Мировой финансово-экономический кризис, пути и меры по его преодолению в условиях Узбекистана. –Т.: Ўзбекистон, 2009.
2. Каримов И.А. Юксак маънавият – енгилмас куч. –Т.: Ўзбекистон, 2008.
3. Доклад Президента Республики Узбекистан И.А.Каримова на заседании Кабинета Министров Республики Узбекистан, посвященному итогам социально-экономического развития в 2009 году и важнейшим приоритетам углубления экономических реформ в 2010 году. //Народное слово, 29 января 2010 г.
4. Абдуллаев А.М. и др. Прогнозирование и моделирование национальной экономики. /под ред. акад. С.С.Гулямова. – Т.: Фан ва технология, 2007.
5. Абдуллаев А.М. и др. Экономико-математические методы и прикладные модели прогнозирования. –Т.: Фан ва технология, 2005.
6. Абдуллаев А.М. и др. Автоматизированные информационные технологии в решении экономических задач. –Т.: Фан ва технология, 2004.
7. Абдуллаев А.М. и др. Прогнозирование технико-экономических показателей. –Т.: ТГЭУ, 2005.
8. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. –М.: ЮНИТИ, 2005.
9. Бабешко Л.О. Основы эконометрического моделирования: учеб.пособ. М.: КомКнига, 2010.
10. Боровиков В. STATISTICA: искусство анализа данных на компьютере. Для профессионалов. 2-е изд. –СПб.: Питер, 2003.
11. Балдин К.В. и др. Эконометрика. –М.: ЮНИТИ, 2004.
12. Бородин С.А. Эконометрика. –Минск: Новое знание, 2001.

13. Баркалов Н.Б. Производственные функции в моделях экономического роста. –М.: МГУ, 1981.
14. Басовский Л.Е. Эконометрика: – М.: Изд. РИОР, 2005.
15. Берндт, Эрнст Роберт. Практика эконометрики: классика и современность: Учебник для студентов вузов / пер. с англ. под ред. проф. С.А.Айвазяна / Э.Р.Берндт. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.
16. Болч Б., Хуань К.Дж. Многомерные статистические методы для экономики. –М.: Статистика, 1979.
17. Вайну Я.Я.-Ф. Корреляция рядов динамики. –М.: Статистика, 1977.
18. Валентинов В.А. Эконометрика: Учебник. – М.: Изд. «Дашков и К°», 2006.
19. Варюхин А.М, Панкина О.Ю, Яковлева А.В. Эконометрика: - М.: Юрайт-Издат, 2005.
20. Ветров А.А., Лемовецкий Г.И. Дисперсионный анализ в экономике. –М.: Статистика, 1975.
21. Венецкий И.Г., Венецкая В.И. Основные математико-статистические понятия и формулы в экономическом анализе. –М.: Статистика, 2001.
22. Вучков И. и др. Прикладной линейный регрессионный анализ. –М.: Финансы и статистика, 1987.
23. Гладилин А.В. Эконометрика: – М.: КНОРУС, 2006.
24. Дайитбегов Д.М. Компьютерные технологии анализа данных в эконометрике. –М.: ИНФРА-М, Вузовский учебник, 2008.
25. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия. –М.: Финансы и статистика, 1981.
26. Джонстон Д.Ж. Эконометрические методы. –М.: Статистика, 1980.
27. Доугерти К. Введение в эконометрику. –М.: Юнити, 2007.
28. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Изд.2. Кн. 1,2. –М.: Финансы и статистика, 1986.

29. Дуброва Т.А. *Статистические методы прогнозирования.* – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003.
30. Дубров А.М. Обработка статистических данных методом главных компонент. –М.: Статистика, 1978.
31. Дубров А.М., Мхитарян В.С., Трошин Л.И. Многомерные статистические методы. –М.: Финансы и статистика, 1998.
32. Замков О.О. Эконометрические методы в макроэкономическом анализе. –М.: ГУВШЭ, 2001.
33. Елисеева И.И. Эконометрика. –М.: Финансы и статистика, 2002.
34. Елисеева И.И. *Практикум по эконометрике.* –М.: Финансы и статистика, 2004.
35. Колемаев В.А. Эконометрика: Учебник. – М.: Инфра-М, 2006.
36. Королев Ю.Г. Метод наименьших квадратов в социально-экономических исследованиях. –М.: Статистика, 1980.
37. Кейн Э. Экономическая статистика и эконометрия. –М.: 1977.
38. Кендалл М. Временные ряды. –М.: ФиС, 1984.
39. Крастинь О.П. Изучение статистических зависимостей по многолетным данным. –М.: Финансы и статистика, 1981.
40. Кулинич Е.И. Эконометрия. –М.: ФиС, 2001.
41. Класс А. и др. Введение в эконометрическое моделирование. –М.: Статистика, 1975.
42. Кильдешев Г.С., Френкель А.А. Анализ временных рядов и прогнозирование. –М.: Статистика, 1973.
43. Кремер Н.Ш. Эконометрика. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.
44. Ланге О. Введение в эконометрику. –М.: Прогресс, 1964.
45. Лизер С. Эконометрические методы и задачи. –М.: Статистика, 1971.
46. Левицкий Е.М. Адаптивные эконометрические модели. – Новосибирск: Наука, 1981.
47. Луговская Л.В. Эконометрика в вопросах и ответах. – М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2006.

48. Магнус Я.Р. и др. Эконометрика. Начальный курс. –М.: Дело, 1996.
49. Маленво Э. Статистические методы эконометрии. –М.: Статистика, 1976.
50. Мостеллер Ф., Тьюки Дж. Анализ данных и регрессия. Часть 1,2. –М.: Финансы и статистика, 1982.
51. Мхитарян В.С. и др. Эконометрика. –М.: Проспект,2009.
52. Новиков А.И. Эконометрика: - М.: ИНФРА-М, 2006.
53. Орлов А.И. Эконометрика. –М.: Экзамен, 2002.
54. Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование. Практическое пособие по решению задач. –М.: МГУ, 2005.
55. Римлер Ю. Эконометрические методы анализа развития. –М.: Статистика, 1979.
56. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. –М.: изд. Мир, 1980.
57. Сиськов В.И. Корреляционный анализ в экономических исследованиях. –М.: Статистика, 1975
58. Тинтнер Г. Введение в эконометрию. –М.: Финансы и статистика, 1965.
59. Терехов Л.Л. Производственные функции. –М.: Статистика, 1974.
60. Тюрин Н.И. и др. Статистический анализ данных на компьютере. /под ред. В.Э.Фигурнова. –М.: ИНФРА-М, 2003.
61. Урубков А.Р. и др. Методы и модели оптимизации управленческих решений. –М.: Дело,2009.
62. Форстер Э., Ренц Б. Методы корреляционного и регрессионного анализа. /пер. с нем. –М.: Финансы и статистика, 1982.
63. Фишер Ф. Проблема идентификации в эконометрии. –М.: Статистика, 1978.
64. Ширяев В.И. и др. Экономико-математическое моделирование управления фирмой. –М.: Комкнига,2010.
65. Харин Ю.С. Эконометрическое моделирование. –Минск.: 2009.

Приложение 1.

Статистико-математические таблицы

1. Таблица значений F-критерия Фишера при уровне значимости α=0,05

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,5	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,08	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,69	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

2. Критические значения t-критерия Стьюдента при уровне значимости 0,10; 0,05; 0,01 (двухсторонний)

Число степеней свободы d.f.	α			Число степеней свободы d.f.	α		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,6041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1059	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	∞	1,6449	1,9600	2,5758

3. Критические значения корреляции для уровней значимости 0,05 и 0,01

d.f.	α=0,05	α=0,01	d.f.	α=0,05	α=0,01
1	0,996917	0,9998766	17	0,4555	0,5751
2	0,95000	0,99000	18	0,4438	0,5614
3	0,8783	0,95873	19	0,4329	0,5487
4	0,8114	0,91720	20	0,4227	0,5368
5	0,7545	0,8745	25	0,3809	0,4869
6	0,7067	0,8343	30	0,3494	0,4487
7	0,6664	0,7977	35	0,3246	0,4182
8	0,6319	0,7646	40	0,3044	0,3932
9	0,6021	0,7348	45	0,2875	0,3721
10	0,5760	0,7079	50	0,2732	0,3541
11	0,5529	0,6835	60	0,2500	0,3248
12	0,5324	0,6614	70	0,2319	0,3017
13	0,5139	0,6411	80	0,2172	0,2830
14	0,4973	0,6226	90	0,2050	0,2673
15	0,4821	0,6055	100	0,1946	0,2540
16	0,4683	0,5897			

Для простой корреляции d.f. на 2 меньше, чем число пар вариантов; в случае частной корреляции необходимо также вычесть число исключаемых переменных.

4. Значение статистик Дарбина-Уотсона $d_L d_U$ при 5%-ном уровне значимости

n	$k^1=1$		$k^1=2$		$k^1=3$		$k^1=4$		$k^1=5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
6	0,61	1,40	-	-	-	-				
7	0,70	1,36	0,47	1,90	-	-				
8	0,76	1,33	0,56	1,78	0,37	2,29				
9	0,82	1,32	0,63	1,70	0,46	2,13				
10	0,88	1,32	0,70	1,64	0,53	2,02				
11	0,93	1,32	0,76	1,60	0,60	1,93				
12	0,97	1,33	0,81	1,58	0,66	1,86				
13	1,01	1,34	0,86	1,56	0,72	1,82				
14	1,05	1,35	0,91	1,55	0,77	1,78				
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,63	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83

Приложение 2.
Прогнозирование экономических показателей с помощью многофакторных регрессионных и корреляционных моделей

Данный метод позволяет вскрыть прогнозно-следственные отношения между явлениями, установить зависимость между состоянием объекта в прошлом, настоящем и будущем. Отличительной особенностью этой группы методов является построение аналитических выражений, отображающих статистическую связь исследуемого показателя с совокупностью независимых признаков.

Возможность применения в прогнозировании регрессионной и корреляционной модели, в основном, определяется характером генеральной совокупности, из которой производится выборка.

Прогнозирование с помощью корреляционно-регрессионных моделей имеет ряд преимуществ по сравнению с трендовыми моделями, основные из которых следующие:

1. Модели тесно связанные с конкретной экономикой. Анализа моделей, рассчитанных на базе различных периодов, позволяет проследить характер изменения внутренних связей в экономике.

2. Относительная автономность функционирования моделей.

3. Модели позволяют оценить влияние отдельных экономических факторов на прогнозируемый процесс.

Прогнозирование с помощью регрессионных моделей предъявляет определенные требования к исходной информации, которые заключаются в следующем:

а) во всех точках временного ряда должно быть однозначное определение показателей;

б) временные ряды должны быть качественно однородны;

в) период охватываемый временным рядом, должен быть предельно большим;

г) поскольку во временных рядах единицей наблюдения является уровень каждого отдельного года, необходимо учитывать временную последовательность и единое начало отсчета времени.

При прогнозировании с помощью регрессионных моделей возникает одна из следующих ситуаций:

1. Факторные признаки регрессионной модели определены заранее из соответствующих теорий или других источников.

2. Факторные признаки заранее не определены, однако уровень агрегации прогнозируемых процессов и наличие причинно-следственных связей между ними предполагают использование аппарата регрессионных моделей.

Достоинством метода следует считать его универсальность: широкие наборы функциональных зависимостей, используемых для описания характера взаимодействия признаков; возможность включения в статистическую модель в качестве самостоятельной переменной фактор времени и др.

Рассмотрим последовательность расчетов по многофакторной регрессионной модели прогнозирования (рис.1) учитывающих два возможных варианта:

1. Принятие рабочей гипотезы. При построении многофакторной регрессионной модели в первую очередь должен быть проведен анализ качественной стороны изучаемых взаимосвязей, для чего мы должны иметь определенную теорию, в соответствии с которой объясняются и интерпретируются полученные результаты.

На основе рабочей гипотезы решается вопрос, сколько и какие факторы следует включать в модель, каков возможный вид функциональной связи, какова модель: динамическая или статистическая.

2. Условный блок осуществляет условный переход в процессе прогнозирования в зависимости от того, определены ли факторные признаки в уравнении регрессии или нет.

3. Формирование перечня факторов. В случае, если факторные признаки точно не определены, процесс составления набора факторов носит характер последовательного уточнения гипотезы. Чтобы анализируемая проблема нашла наиболее адекватное отражение в исходной информации, необходимо максимально учесть важнейшие характеристики процесса, связанные с моделируемым показателем.

Облегчить отбор существенных факторов на последующих этапах, целесообразно уже на этой стадии отобрать только те факторы, которые при логическом анализе оказываются наиболее важными. Для отбора факторов наиболее эффективными являются методы факторного анализа или близкие к ним методы. Например, метод главных компонентов.

4. Логический анализ факторов. На этом этапе число и перечень факторов определяются логическим путем, исходя из имеющихся знаний о качественной стороне изучаемых взаимосвязей.

На основе логического анализа факторов производятся требующие уточнения рабочей гипотезы и отбираются те факторы, которые существенно влияют на показатели.

5. Оценки факторов. На данном этапе с помощью статистических характеристик проверяется, достаточна ли исходная информация для надежного изменения взаимосвязей.

Для данной цели рассчитываются следующие характеристики временных рядов:

Средняя арифметическая -

Дисперсия -

Коэффициент вариации –

Ошибка среднеарифметической –

Достоверность среднеарифметической –

Показатель асимметрии –

Показатель эксцесса –

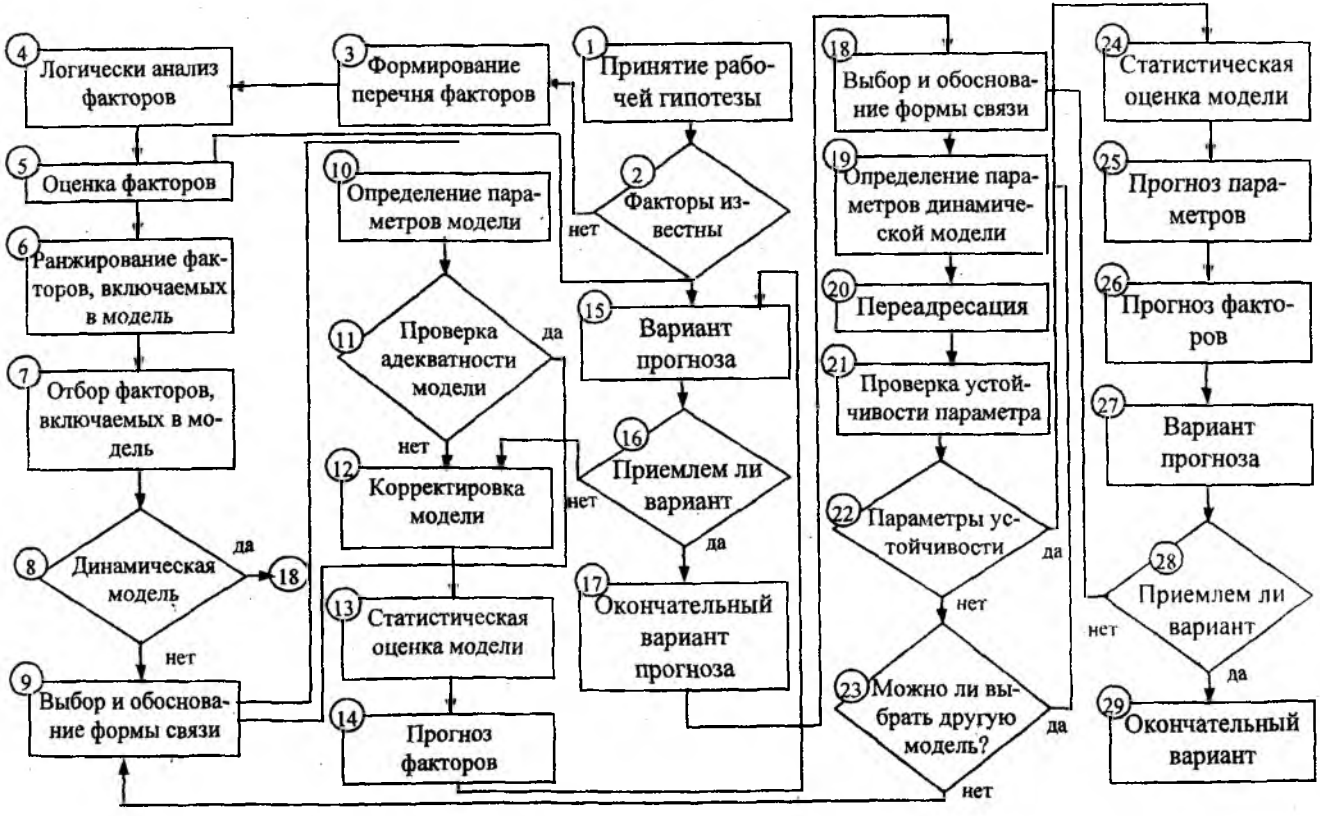


Рис. 1. Блок-схема многофакторной регрессионной модели прогнозирования

Коэффициент вариации позволяет судить об однородности и устойчивости ряда. Если он высокий, то следует к этому фактору отнестись с осторожностью или вообще его выбросить из уравнения регрессии. Показатель асимметрии характеризует скошенность кривой эмпирического распределения.

Для экономических рядов характерна правосторонняя скошенность. Эмпирическое распределение может отличаться от нормального также островершинностью или плосковершинностью кривой распределения, т.е. эксцессом.

Для нормального распределения

Если , то кривая называется островершинной.

Если , то плосковершинной.

При сильном отклонении показателя эксцесса от 3, в последующих этапах следует осторожно относиться к использованию F-критерия или этот фактор отбросить.

6. Ранжировка факторов, включаемых в модель. Как известно при построении модели по полному перечню факторов возникают следующие нежелательные последствия:

- доверительная область статистических характеристик очень широка при использовании динамических рядов с ограниченной предысторией;
- регрессионная связь выражается в функциональную;
- наличие жесткой связи между некоторыми факторами вызывает явление мультиколлинеарности и смешение оценок.

Выбор небольшого количества существенных для данного экономического процесса факторов является одним из путей устранения части упомянутых выше нежелательных последствий. Кроме того, поскольку в регрессионную модель следует включить факторы между которыми нет мультиколлинеарности, препятствующей определению влияния факторов на результативный показатель, то на данном этапе производится также ранжировка факторов в цепочку «причина –

следствие» с учетом мультиколлинеарности. Исключение факторы проводятся также и по величине t-критерия.

7. Отбор факторов, включенных в модель. На основании цепочки «причина - следствие» выбираются факторы, включаемые в регрессионную модель.

8. Условный блок, в котором решается вопрос, следует ли строить динамическую или статистическую модель.

9. Выбор и обоснование формы связи. Важнейшим этапом построения регрессионной модели является выбор для нее формы связи, характеризующей зависимость процесса от факторов, влияющих на его уровень.

Многие экономисты, например Вайну Я.Я.–Ф., считают величину среднего квадратического отклонения остатков основным критерием при выборе вида трендовой модели для выравнивания динамического ряда.

Предпочтение отдается той функции, которой соответствует минимальное значение указанной величины.

Однако данной статистической характеристикой нельзя ограничиться при выборе вида модели. Во-первых, в реальных ситуациях нередко встречается одновременно несколько функций, при использовании которых величина σ существенно не отличается. Во-вторых, максимальное приближение расчетных значений показателя к фактическим не всегда может служить критерием для оценки качества трендовой модели.

В любом из случаев, когда кривая проходит через все точки, сумма квадратов отклонений будет, естественно, равно нулю.

Таким образом, формально это будет «наилучшая» кривая и она действительно, наиболее точно описывает фактическую динамику развития явления в прошлом.

Однако вряд ли правомерно говорить в этом случае о выделении тенденций и тем более о применении ее для прогнозирования.

При выборе вида функции целесообразно также учитывать неоднократную информативную ценность членов динамического ряда в зависимости от их временной последовательности. Значения исследуемого явления (процесса) за последние годы анализируемого отрезка времени, которые непосредственно предшествуют прогнозируемому периоду представляют большой интерес для разработки прогноза, чем данные за более ранние годы.

При прочих равных условиях предпочтения заслуживает та функция, при использовании которой обеспечивается наименьшее остаточные отклонения выравненных значений исследуемого процесса от фактических за последние годы базисного периода.

Указанный критерий приобретает особую значимость, если принять во внимание специфические особенности регрессионного анализа. Регрессионные модели, как правило, лучше описывают уровни, расположенные в середине динамического ряда, чем на концах это ряда.

Одним из признаков недостоверности прогноза является его сильная чувствительность к незначительным изменениям первичных данных. Так, существенные колебания прогнозируемой величины в промышленности при сокращении или увеличении длины исходных динамических рядов на один-два члена свидетельствует о невысоком качестве трендовой или многофакторной регрессионной модели.

Проверка достоверности прогноза осуществляется также путем сопоставления его различных вариантов. Критерием надежности прогноза служит в известной мере величина расхождения результатов расчетов, выполненных разными методами и на основе различной исходной информации.

На практике выбор функциональной связи часто осуществляется путем перебора различных аналитических функций. Причем в качестве критерия перебора принимается наибольшее значение коэффициента множественной корреляции

при удовлетворительной экономической интерпретации самой полученной формулы. При прогнозировании вид функциональной связи определяется эмпирически, путем перебора различных функций и оценки их адекватности с помощью коэффициента множественной корреляции и F-критерия Фишера. Далее, после сравнения построенных функций выбирается наиболее адекватная из них.

10. Оценка параметров модели. В общем случае модель связывающая Y с X_1, X_2,..., X_n может быть нелинейной, поэтому при оценке параметров можно поступить двояко:

1. Линеаризировать модель.

2. Для оценки модели использовать метод нелинейного оценивания.

11. Условный блок. В этом блоке адекватность модели проверяется по F критерию. Если модель неадекватна, то переходим к блоку 12; если да, то к блоку 13.

12. Корректировка модели. Уточняется первоначально выбранная форма связи или подбирается другая форма связи.

13. Статистическая оценка модели. Одним из методов статистической проверки полученного уравнения регрессии является исследование остаточных величин.

Как известно, одним из существенных условий применения регрессионного анализа есть требование независимости наблюдений и нормальности распределения величин ( ). При этом, если последнее требование выполняется, то уравнение регрессии можно использовать независимо от того, соблюдается ли первое условие. Метод наименьших квадратов в том случае дает несмещенные оценки, однако дисперсия оценок в этом случае не будет минимальной. В результате этого для коэффициентов регрессии нельзя осуществить проверку статистических гипотез, так как наличие автокорреляции приводит к искажению величин среднеквадратических ошибок коэффициентов регрессии, что затрудняет построение их доверительных интервалов, а также проверку их значимости.

Одним из методов проверки наличия автокорреляции в ряду величин является использование коэффициента автокорреляции.

Чем сильнее связь между последовательным членами ряда, тем выше величина коэффициента автокорреляции. Наиболее сильные искажения возникают в случае, когда остаточные величины соответствуют авторегрессионной схеме первого порядка и наблюдается существенная автокорреляция между первоначальным рядом и рядом сдвинутым на единицу времени. Для проверки наличия автокорреляционных отклонений пользуются методом, предложенным Андерсоном. После устранения автокорреляции анализируется коэффициент эластичности, стандартная ошибка, средняя ошибка оценки по регрессионной модели.

14. Прогноз факторов. С помощью аппарата трендовых моделей системы прогнозирования осуществляется прогноз факторных признаков.

15. Вариант прогнозов. Путем постановки ожидаемых значений факторов, полученных с помощью трендовых моделей, получается вариант прогноза. Определяются также доверительные интервалы прогноза.

16. В условном блоке решается вопрос о пригодности модели. Если вариант прогноза неудовлетворительный, производится корректировка модели, для чего осуществляется переход к блоку 9.

17. Окончательный вариант прогноза. На данном этапе из полученных вариантов прогноза выбирается лучший.

18. Выбор и обоснование динамической формы. Осуществляется аналогично блоку 9.

19. Определение параметров динамической модели. Осуществляется аналогично блоку 10 и проверяется *F*-критерию адекватности модели.

20. Переадресация. Пятилетний период сдвигается на один год, в результате чего получается новый временный отрезок.

21. Проверка устойчивости параметров. При построении динамической модели для каждого фактора имеется коэффициентов регрессии, которые могут быть представлены в виде некоторой функции от времени, а ее параметры найдем с помощью метода наименьших квадратов.

Однако перед этим необходимо проверить устойчивость параметров, так как она обеспечивает надёжность прогноза, полученного на основе динамической модели. Проверяется *F*-критерий и сравнивается с табличными значениями.

22. Условный блок. Если параметры системы регрессионных уравнений устойчивы, то осуществляется переход к блоку 24, в противном случае к блоку 23.

23. Условный блок. Если параметры не устойчивы, то в зависимости от того, можно ли выбрать другую форму связи или нет, осуществляется переход к блоку 18 или 9 (отказ от динамической модели).

24. Статистическая оценка динамической модели. Оценка модели осуществляется аналогично блоку 13.

25. Прогноз параметров. С помощью трендовых моделей осуществляется прогноз параметров уравнения регрессии.

26. Прогноз факторов. Выполняется аналогично блоку 14.

27. Вариант прогноза. Путем постановки в модель прогнозных значений параметров и факторов получается вариант среднесрочного прогноза. Определяется доверительный интервал.

28. Условный блок. Если прогноз признаётся неудовлетворительным, то путем перехода к блоку 18 осуществляется корректировка формы связи уравнения регрессии.

29. Окончательный вариант прогноза. Аналогично блоку 17.

Метод адаптивного прогнозирования. В качестве математической основы адаптивного прогнозирования используется комплекс статистических процедур, позволяющий анализировать динамику изменения исследуемого показателя

во времени. Специфика адаптивных алгоритмов состоит в том, что коэффициенты в расчетных формах не остаются постоянными, а регулярно пересматриваются по мере поступления новой информации. В результате происходит адаптация модели к изменившимся условиям существования объекта. Достоинством адаптивного подхода наряду с гибким математическим аппаратом является его простота, возможность использования ограниченного массива исходных, сравнительно высокая точность конечного результата. Адаптивные методы рекомендуется применять для разработки прогноза с небольшим сроком упреждения, поскольку конструктивные особенности расчетного алгоритма не позволяют в полной мере выявить и учитывать сложные структурные изменения в исследуемой экономической системе.

АБДУЛЛАЕВ А.М.
ДЖАЛИЛОВ М.С.

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УЧЕБНИК

Редактор: Д.Абдуллаева
Корректор и дизайнер: Г.Абдуллаева
Компьютерная верстка: А.Ишназаров, Ш.Дадабаев

Подписано в печать 04.06.2010. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Объем 38,3. Гарнитура «Times New Roman». Печать офсетная.
Тираж 500. Заказ №78.

Отпечатано в типографии «Fan va texnologiyalar
Markazining bosmaxonasi».
100003, г. Ташкент, ул. Алмазар, 171.