МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И ИННОВАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

САМАРКАНДСКИЙ ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ И СЕРВИСА

О.М. НОРКУЛОВ, З.С. ГАНИЕВА,
С.Ф. ФАХРИДДИНОВА

МАТЕМАТИКА

(1 ЧАСТЬ)

Учебное пособие

САМАРКАНД -2024

УДК: 514.742.2(075.8)
Н 82
ББК: 22.144я73

О.М. Норкулов, З.С. Ганиева, С.Ф. Фахриддинова.

МАТЕМАТИКА (1 часть) *[Текст]: Учебное пособие / Самаркандский институт экономики и сервиса - Самарканд.: Издательство «FAN BULOG'I», 2024 – 146 стр.*

Представлены краткие теоретические основы линейной и векторной алгебры, аналитической геометрии на плоскости и пространстве. Приведены примеры решения задач.

Учебное пособие соответствует программе по математике для студентов экономических специальностей, в частности для специальности «Менеджмент», обучающихся по программе «Совместное обучение» нашего института и написано в соответствии с требованиями государственных образовательных стандартов в области математики для специалистов с высшим образованием по экономическим специальностям.

Рецензенты:

Х.К.Каршибоев – к.ф-м.н., доцент СамИЭС.
Э.Я.Жабборов – к.ф-м.н., доцент СамГУ.

Учебное пособие представлено к публикации по решению Совета Самаркандского института экономики и сервиса (протокол № 4 от 10 ноября 2023 г.).

ISBN: 978-9910-753-46-6

© О.М. Норкулов и др., Сам ИЭС, 2024 г.
© Издательство «FAN BULOG'I», 2024 г.

ВВЕДЕНИЕ

Целью преподавания курса «Математика» является объяснение математической сущности экономических понятий и формирование у студентов умений применять математические методы к экономическим процессам.

Студент должен уметь и знать природу и содержание линейного пространства, линейную зависимость и линейную зависимость векторов, ранг системы векторов, базис и размерность пространства; поиск оптимальных решений экономических проблем и анализ этих решений; должен обладать навыками применения методов симплекса, множителей Лагранжа и теории игр.

Надеемся, что пособие будет способствовать развитию у студентов навыки логической наблюдательности, пространственного воображения, абстрактного мышления, алгоритмического мышления; развитие математического мышления; овладеть и применять математический аппарат, способный решать теоретические и практические задачи экономики, развить навыки создания и анализа математических моделей простых экономических задач.

ГЛАВА 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

1.1. Определители и их свойства.
1.2. Миноры и алгебраические дополнения.

1.1. Определители и их свойства.

Определителем 2-го порядка называется число, вычисляемое по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

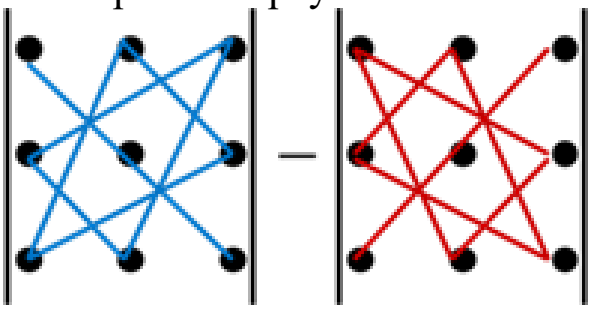
то есть определитель 2-го порядка равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали минус произведение элементов, стоящих ан побочной диагонали.

Определителем 3-го порядка называется число, вычисляемое по формуле:

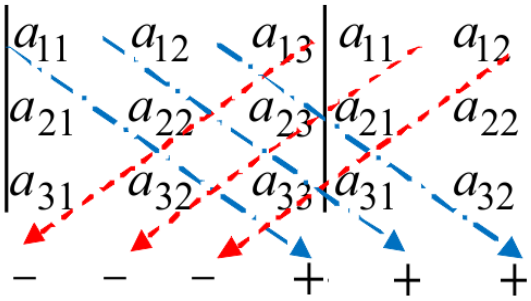
$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Конечно, указанная формула сложна для запоминания, поэтому для вычисления определителей можно воспользоваться одним из правил:

Правило треугольника



Правило Саррюса



Точки – вершины треугольников– демонстрируют множители в произведениях

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

Пример 5.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot 1-(-2)\cdot 3 = 4+6 = 10.$$

Пример 6

Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение

$$\Delta = -2\cdot 2\cdot 3+6\cdot(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 1\cdot 1-1\cdot 2\cdot 0-(-1)\cdot 6\cdot 3-1\cdot(-1)\cdot(-2) = -3.$$

Свойства определителей

Свойство 1.

Величина определителя не меняется при транспонировании:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Из свойства 1 следует, что строки и столбцы определителя равноправны, поэтому все остальные свойства будут сформулированы для строк, но они будут справедливы и для столбцов.

Свойство 2

Определитель, содержащий строку из одних нулей, равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Процедура, при которой меняются местами две любые строки (два любых столбца) определителя называется **транспозицией**.

Свойство 3.

Транспозиция меняет знак определителя на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{in} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство 4.

Если все элементы какой-либо строки определителя умножить на любое число k, то величина определителя изменится в k раз:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Свойство 5.

Если каждый элемент некоторой строки определителя представлен в виде суммы двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей: в 1ом в строке с тем же номером стоят первые слагаемые, а во 2ом – вторые:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} + c_{i1} & \dots & b_{in} + c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Свойство 6.

Величина определителя не изменится, если к некоторой строке прибавить другую строку, умноженную на любое число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1}+ka_{in} & a_{j2}+ka_{i2} & \dots & a_{jn}+ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойство 7.

Определитель, имеющий две равные строки, равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{in} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Пример 7 .

Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -100 & 200 & -100 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение

По свойству 4 имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -100 & 200 & -100 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 100 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -100 \cdot (-3) = 300.$$

(См. пример 6)

1.2. Миноры и алгебраические дополнения

Минором некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Пример 8.

Найти миноры элементов a_{13} и a_{22} определителя $\begin{vmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение

Минор элемента $a_{13} = -2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 28 = -23$$

Минор элемента $a_{22} = 4$:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-14) = 17$$

Алгебраическим дополнением некоторого элемента определителя называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, где i – номер строки, а j – номер столбца, на пересечении которых находится элемент.

Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается A_{ij}.

Пример 9.

Найти алгебраические дополнения элементов a_{13} и a_{22} определителя

$$\begin{vmatrix} 3 & 8 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-23) = -23$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 17 = 17.$$

Теорема. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

Пример 10.

Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение

Разложим определитель по первой строке:

$$\Delta = -2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot(6+1) - 6\cdot(-3) + 1\cdot(-1) = 3.$$

Замечание 3: На практике для вычисления определителей удобно сначала “упростить” определитель с помощью свойств, а затем применять теорему о разложении определителя по строке или столбцу.

Пример 11.

Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix}-2 & 6 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}$.

Решение.

1 способ

Вычтем из первой строки вторую, умноженную на 2, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix}-2-2\cdot(-1) & 6-2\cdot 2 & 1-2\cdot 2\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 2 & 3\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}.$$

Теперь разложим определитель по 1му столбцу:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{31}A_{31} = 0 + (-1)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix} + 0 = 3.$$

2 способ

Вычтем из третьего столбца второй, умноженный на 3, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix}-2 & 6 & 1-3\cdot 6\\ -1 & 2 & -1-3\cdot 2\\ 0 & 1 & 3-3\cdot 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2 & 6 & -17\\ -1 & 2 & -7\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}.$$

Теперь разложим определитель по 3ей строке:

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + \ldots + a_{33}A_{33} =$$

$$= 0 + 1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -17\\ -1 & -7\end{vmatrix} + 0 = -1\cdot(14-17) = 3$$

Пример 12. (аналогичен заданию 7 примера)

Вычислить определитель четвертого порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Решение.

Так как в данном определителе элемент $a_{41} = 0$, то целесообразно попытаться получить 0 в первом столбце или в четвертой строке. Все необходимые преобразования будем подписывать над знаком равенства, обозначив символом a_i строку матрицы.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{a_1+2a_3,\\ a_2+4a_3}}{=} \begin{vmatrix} 2+2\cdot(-1) & -1+2\cdot 2 & 1+2\cdot(-3) & 2+2\cdot(-2) \\ 4+4\cdot(-1) & -4+4\cdot 2 & 3+4\cdot(-3) & 1+4\cdot(-2) \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & -9 & -7 \\ -1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0+0+(-1)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & -9 & -7 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & -9 & -7 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{a_3-a_1}{=} \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & -9 & -7 \\ 3-3 & -4-(-5) & -2-(-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 4 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 13$$

ГЛАВА 2. МАТРИЦЫ

2.1. Понятие о матрице. Матрицы и действия над ними.
2.2. Выполнение операции с матрицами в Excel.

2.3. Матричный способ решения системы линейных уравнений.

2.4. Матричный способ решения системы линейных уравнений.

2.5. Решения систем линейных уравнений методом Крамера.

2.1. Понятие о матрице. Матрицы и действия над ними

Матрицей размера m×n, где m – число строк, n – число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Сами числа называются **элементами матрицы**.

Матрицы обозначаются большими латинскими буквами: A, B, C, … . Элементы матрицы обозначаются символом a_{ij}, где i – номер строки, а j – номер столбца, на пересечении которых находится элемент:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если число строк матрицы равно числу столбцов и равно n, то матрица называется **квадратной порядка n**.

Если число строк матрицы не равно числу столбцов, то матрица называются **прямоугольной.**

В зависимости от значений элементов, выделяют следующие матрицы:

Нулевая матрица – матрица, все элементы которой равны 0:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Единичной – квадратная матрица, у которой элементы главной диагонали равны 1, а остальные элементы равны 0:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Операции над матрицами

К алгебраическим операциям над матрицами относятся:
– сложение (вычитание),
– умножение на число,
– умножение матрицу на матрицу.

Суммой (разностью) двух матриц A и B размера m × n называется матрица C размера m × n, элементы которой определяются равенствами:

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}),}$$ где i = 1, 2, …, m, j =1,2, …, n.

Таким образом, операции сложения (вычитания) матриц определена только в случае, если матрицы имеют одинаковый размер.

Пример 2.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A на число λ называется матрица C, у которой каждый элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы A на число λ, т.е.:

$$\boxed{c_{ij} = \lambda a_{ij}}$$

Пример 2.

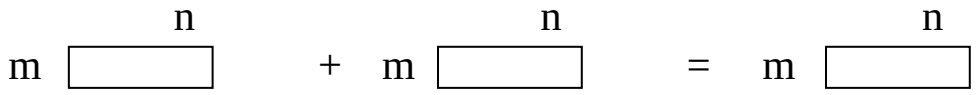
$$2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 2 & -8\end{pmatrix}.$$

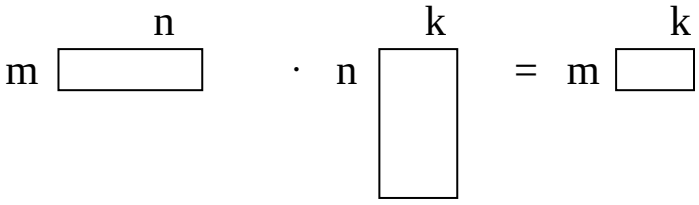
Произведением матрицы A размера $m\times n$ на матрицу B размера $n\times k$ называется матрица C размера $m\times k$, у которой элемент, стоящий на пересечении i-той строки и j-того столбца равен сумме произведений элементов i-той строки первого сомножителя на элементы j-того столбца второго сомножителя, т.е.:

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}\cdot b_{sj}$$

Таким образом, операция умножения двух матриц определена, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Обзор операций над матрицами может быть представлен следующей схемой:





Замечание 1. Операция умножения матриц не коммутативна:

$$A\cdot B\neq B\cdot A.$$

Замечание 2. Если определены произведения A·E и E·A, то имеют место равенства:

$$A\cdot E=A,\quad E\cdot A=A$$

Пример 2.3

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

,$D=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}$,

$F=\begin{pmatrix}3 & -1 & -6\end{pmatrix}$.

Для каких матриц определены операции сложения и умножения?

Решение

Матрица A имеет размер 2x3, матрица B имеет размер 2x3, матрица C имеет размер 3x2, матрица D имеет размер 3x1, матрица F имеет размер 1x3.

A+B может быть найдена, так как матрицы A и B имеют одинаковый размер:

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -5 & 5\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Среди матриц, данных выше, нет других, имеющих одинаковый размер, поэтому операция сложения определена только для A и B.

A·B и B·A нельзя найти (размерности матриц 2x3 и 2x3).

A·C можно найти (размерности матриц 2x3 и 3x2), полученная матрица будет иметь размер 2x2:

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 5+(-2)\cdot 2+3\cdot(-1) & 1\cdot 3+(-2)\cdot 0+3\cdot 1\\ 0\cdot 5+1\cdot 2+4\cdot(-1) & 0\cdot 3+1\cdot 0+4\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

C·A можно найти (размерности матриц 3x2 и 2x3), полученная матрица будет иметь размер 3x3:

$$C\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} 5\cdot 1+3\cdot 0 & 5\cdot(-2)+3\cdot 1 & 5\cdot 3+3\cdot 4 \\ 2\cdot 1+0\cdot 0 & 2\cdot(-2)+0\cdot 1 & 2\cdot 3+0\cdot 4 \\ -1\cdot 1+1\cdot 0 & -1\cdot(-2)+1\cdot 1 & -1\cdot 3+1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 27 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A·D можно найти (размерности матриц 2x3 и 3x1), полученная матрица будет иметь размер 2x1:

$$A\cdot D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6+12 & 0-3+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 13 \end{pmatrix}.$$

D·A нельзя найти (размерности матриц 3x1 и 2x3).

A·F нельзя найти (размерности матриц 2x3 и 1x3).

F·A нельзя найти (размерности матриц 1x3 и 2x3).

B·C можно найти (размерности матриц 2x3 и 3x2), полученная матрица будет иметь размер 2x2:

$$B\cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-6-2 & 9-0+2 \\ 5-2+2 & 3-0-2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

C·B можно найти (размерности матриц 3x2 и 2x3), полученная матрица будет иметь размер 3x3:

$$C\cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 15+3 & -15-3 & 10-6 \\ 6+0 & -6+0 & 4-0 \\ -3+1 & 3-1 & -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -18 & 4 \\ 6 & -6 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

B·D можно найти (размер матриц 2x3 и 3x1), полученная матрица будет иметь размер 2x1:

$$B\cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+9+8 & 2+3-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -3 \end{pmatrix}.$$

D·B нельзя найти (размер матриц 3x1 и 2x3).

B·F нельзя найти (размер матриц 2x3 и 1x3).

F·B нельзя найти (размер матриц 1x3 и 2x3).

C·D нельзя найти (размер матриц 3x2 и 3x1).

D·C нельзя найти (размерности матриц 3x1 и 3x2).

C·F нельзя найти (размер матриц 3x2 и 1x3).

F·C можно найти (размер матриц 1x3 и 3x2), полученная матрица будет иметь размер 1x2:

$$F \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 + (-6) \cdot (-1) & 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + (-6) \cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{F} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

D·F можно найти (размер матриц 3x1 и 1x3), полученная матрица будет иметь размер 3x3:

$$\text{D} \cdot \text{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -12 \\ -9 & 3 & 18 \\ 12 & -4 & -24 \end{pmatrix}.$$

F·D можно найти (размер матриц 1x3 и 3x1), полученная матрица будет иметь размер 1x1:

$$\text{F} \cdot \text{D} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 3 - 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим еще одно важное понятие.

Матрица B наз. **транспонированной** к A и обозначается B = A^t, если строки матрицы B являются столбцами матрицы A с теми же номерами (а столбцы B – строками A).

Пример 4

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -6 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Лемма

Для любых матриц A и B, для которых определено произведение A·B, верно равенство

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t.$$

2.2. Выполнение операции с матрицами в Excel

Как и над числами, над матрицами можно проводить ряд операций, причем в случае с матрицами некоторые из операций являются специфическими.

1. **Транспонирование**.

Транспонированной называется матрица (A^T), в которой столбцы исходной матрицы (A) заменяются строками с соответствующими номерами.

Пример. Пусть в диапазон ячеек A1:E2 введена матрица размера 2 x 5. Необходимо получить транспонированную матрицу.

❖ Выделить указателем мыши при нажатой левой кнопке блок ячеек, где будет находиться транспонированная матрица. В нашем примере блок размера 5 x 2 в диапазоне A4:B8.

❖ Нажать на панели инструментов Стандартная → вставка функции.

❖ В появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категория выбрать Ссылки и массивы, а в рабочем поле Функция – имя функции ТРАСП (рис.1)

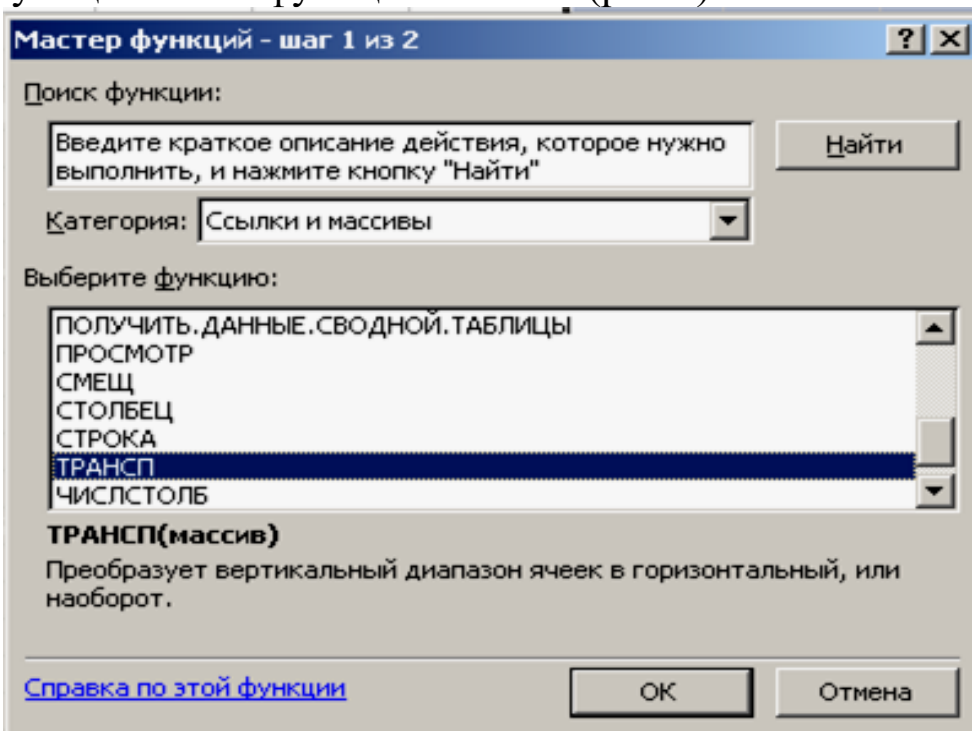


Рис.2.1

❖ Появившееся диалоговое окно ТРАСП мышью отодвинуть в сторону от исходной матрицы и ввести диапазон исходной матрицы A1:E2 в рабочее поле Массив (указателем мыши при нажатой левой кнопке). После чего, не нажимая кнопку ОК, нажать сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER (рис.2)

❖ Если транспонированная матрица не появилась в заданном диапазоне A4:B8, то надо щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие клавиш CTRL+SHIFT+ENTER.

В результате в диапазоне A4:B8 появится транспонированная матрица.

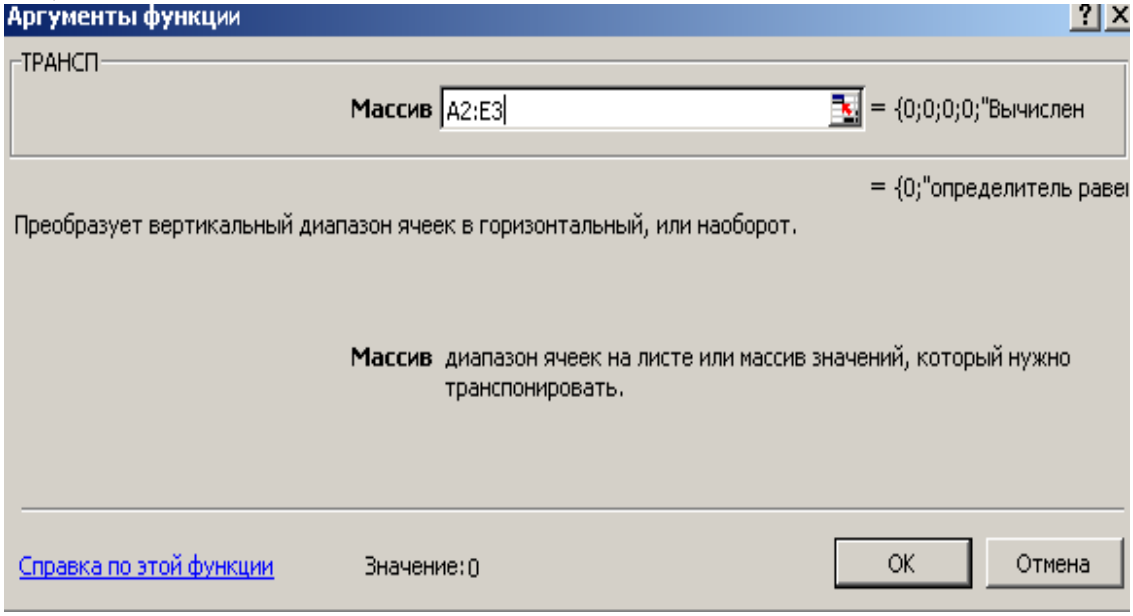


Рис.2.2

Вычисление определителя матрицы

Пусть в диапазон A1:C3 введена матрица. Необходимо вычислить определитель матрицы

❖ Табличный курсор поставить в ячейку, в которой требуется получить значение определителя, например. В A4.

❖ Нажать на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции

❖ В появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категории выбрать Математические, а в рабочем поле Функция – имя функции МОПРЕД. После этого нажать на кнопку ОК.

❖ Появившееся диалоговое окно МОПРЕД мышью отодвинуть в сторону от исходной матрицы и ввести диапазон

исходной матрицы A1:C3 в рабочее поле Массив (указателем мыши при нажатой левой кнопке). После чего нажать кнопку ОК.

В ячейке A4 появится значение определителя матрицы.

Нахождение обратной матрицы

Пусть в диапазон A1:C3 введена матрица. Необходимо в диапазоне A5:C7 получить обратную матрицу.

- ❖ Выделить блок ячеек под обратную матрицу (в нашем примере A5:C7)
- ❖ Нажать на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции
- ❖ В появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категории выбрать Математические, а в рабочем поле Функция – имя функции МОБР. После этого нажать на кнопку ОК.
- ❖ Появившееся диалоговое окно МОБР мышью отодвинуть в сторону от исходной матрицы и ввести диапазон исходной матрицы A1:C3 в рабочее поле Массив (указателем мыши при нажатой левой кнопке). После чего, не нажимая кнопку ОК, нажать сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER
- ❖ Если обратная матрица не появилась в заданном диапазоне A1:C3, то надо щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие клавиш CTRL+SHIFT+ENTER.

В результате в диапазоне A1:C3 появится обратная матрица.

2. Сложение и вычитание матриц, умножение и деление матрицы на число

Складывать (вычитать) матрицы можно одного размера. В Excel для выполнения операция сложения (вычитания) матриц используются формулы, вводимые в соответствующие ячейки.

Пример. Пусть матрица A введена в диапазон A1:C2, а матрица B – в диапазон A4:C5. Необходимо найти матрицу C, являющуюся их суммой, в диапазоне E1:G2.

C = A + B

- ❖ Табличный курсор установить в левый верхний угол результирующей матрицы – ячейку E1.
- ❖ Ввести формулу для вычисления первого элемента результирующей матрицы =A1+A4 (предварительно установить английскую раскладку клавиатуры)

❖ Скопируйте введенную формулу в остальные ячейки результирующей матрицы.

В результате в ячейках E1:G2 появится матрица, равная сумме исходных матриц.

Подобным образом вычисляется разность матриц, только в формуле вместо знака +, ставится знак -.

Если необходимо умножить (разделить) матрицу A на число k, то формула будет иметь вид =A1*k.

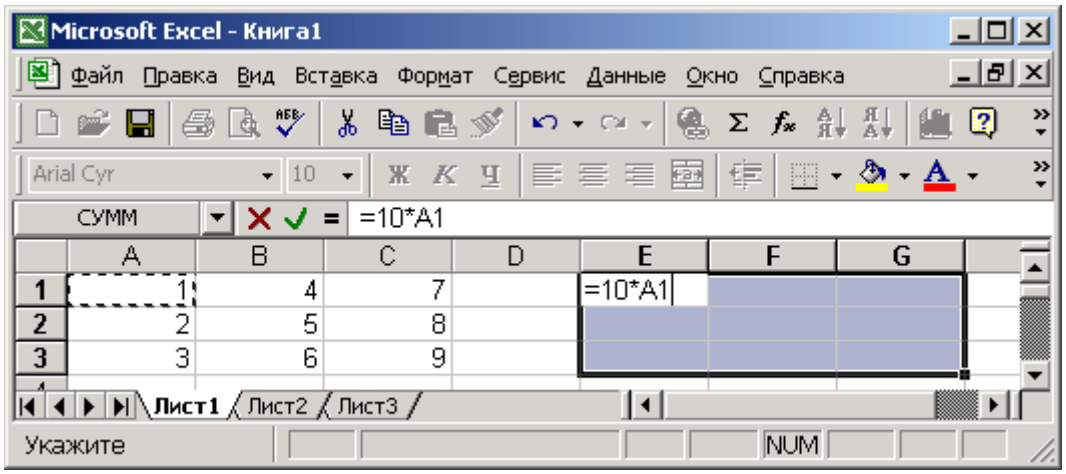


Рис.3

Умножение матриц

Произведение двух матриц определено, если число столбцов первой матрицы произведения равно числу строк второй матрицы произведения.

Пример. Пусть матрица введена в диапазон A1:D3, а матрица B – в диапазон A4:B7. Необходимо найти произведение этих матриц C=A x B.

❖ Выделить блок ячеек указателем мыши при нажатой левой кнопке под результирующую матрицу. Если матрица A имеет размерность 3 x 4, а матрица B имеет размерность 4 x 3, то результирующая матрица C имеет размерность 3 x 3. Поэтому следует внимательно следить, чтобы размерность матрицы C в точности соответствовала определению произведения двух матриц. Пусть матрица C будет размещаться в диапазоне F1:G3.

❖ Нажать на панели инструментов Стандартная кнопку Вставка функции

❖ В появившемся диалоговом окне Мастер функций в рабочем поле Категории выбрать Математические, а в рабочем

поле Функция – имя функции МУМНОЖ. После этого нажать на кнопку ОК.

❖ Появившееся диалоговое окно МУМНОЖ мышью отодвинуть в сторону от исходной матрицы и ввести диапазон первой матрицы A1:D3 в рабочее поле Массив1 (указателем мыши при нажатой левой кнопке), а диапазон матрицы B – A4:B7 ввести в рабочее поле Массив2. После чего, не нажимая кнопку ОК, нажать сочетание клавиш CTRL+SHIFT+ENTER (рис.3)

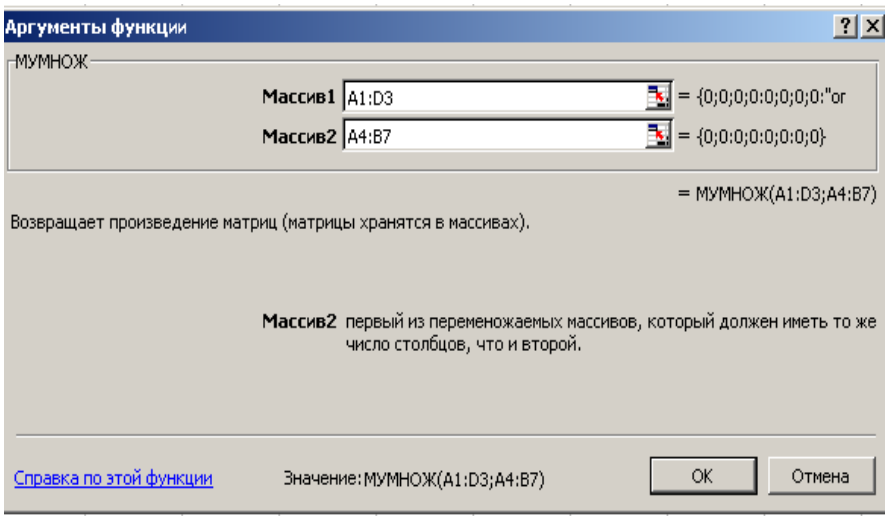


Рис.4

❖ Если произведение матриц не появилось в заданном диапазоне A1:C3, то надо щелкнуть указателем мыши в строке формул и повторить нажатие клавиш CTRL+SHIFT+ENTER.

В результате в диапазоне F1:G3 появится обратная матрица.

2.3. Матричный способ решения системы линейных уравнений

Определение. Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Определение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется **совместной**. Если система не имеет ни одного решения, то она называется **несовместной**.

Определение. Система называется **определенной**, если она имеет только одно решение и **неопределенной**, если более одного.

Определение. Для системы линейных уравнений матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ называется матрицей системы, а матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ называется расширенной матрицей системы

Определение. Если $b_1, b_2, \dots, b_m = 0$, то система называется **однородной**. однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

Элементарные преобразования систем.

К элементарным преобразованиям относятся:

1)Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2)Перестановка уравнений местами.

3)Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

.

Систему уравнений можно записать:

$$A \cdot X = B.$$

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$,

т.к. $A^{-1}\cdot A = E$, то $E\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow$ **$X = A^{-1}\cdot B$, где A^{-1}** –обратная матрица для матрицы А и тогда $A\cdot A^{-1} = 1$

Обратная матрица.

Пусть А − квадратная матрица, тогда квадратная матрица, обозначаемая символом A^{-1} и удовлетворяющая условиям:

$$A\cdot A^{-1}=E,\quad A^{-1}\cdot A=E,$$

называется матрицей, **обратной** матрице А.

Квадратная матрица, определитель которой равен 0 (не равен 0), называется **вырожденной (невырожденной)**.

Замечание. Вырожденная матрица не обратима (т.е. не имеет обратной). Невырожденная матрица обратима.

2.4. Алгоритм нахождения обратной матрицы A^{-1}

1. Вычислить определитель $|A|$.Если $|A| \neq 0$, то матрица А имеет обратную. Если $|A| = 0$, то матрица А не имеет обратной.

2. Найти алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы А.

3. Заменить все элементы матрицы А на их алгебраические дополнения и транспонировать полученную матрицу (то есть поменять местами строки и столбцы).

4. Разделить все элементы полученной матрицы на определитель матрицы А.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

Замечание 5. Можно показать, что, для невырожденной матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \mathrm{d} \end{pmatrix}$ обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \mathrm{d} & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Замечание 6. Далее будет отмечен другой способ нахождения обратной матрицы.

Пример 13

Найти матрицу, обратную матрице А, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1. Вычислим $|A|$.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-9\neq 0\Rightarrow$$ матрица А имеет обратную.

2. Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы А.

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1,\ A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-4,\ A_{31}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2,$$

$$A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-5,\ A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2,\ A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7,\ A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-1,\ A_{33}=(-1)^6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-4.$$

3. Заменим все элементы матрицы А на их алгебраические дополнения и транспонируем полученную матрицу, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Разделим все элементы полученной матрицы на $|A|=-9$, получим A^{-1}:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Проверим, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-1}{9}+\frac{10}{9}+0 & \frac{4}{9}+\frac{-4}{9}+0 & \frac{-2}{9}+\frac{2}{9}+0 \\ \frac{-3}{9}+\frac{10}{9}+\frac{-7}{9} & \frac{12}{9}+\frac{-4}{9}+\frac{1}{9} & \frac{-6}{9}+\frac{2}{9}+\frac{4}{9} \\ \frac{-1}{9}+\frac{15}{9}+\frac{-14}{9} & \frac{4}{9}+\frac{-6}{9}+\frac{2}{9} & \frac{-2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{8}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично можно показать, что $A^{-1} \cdot A = E.$

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$\Delta = \det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4\text{-}9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = \text{-}25 - 10 + 5 = \text{-}30.$

$\mathrm{M}_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \text{-}5;$ $\mathrm{M}_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;$ $\mathrm{M}_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \text{-}1;$

$\mathrm{M}_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10;$ $\mathrm{M}_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;$ $\mathrm{M}_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$

$\mathrm{M}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;$ $\mathrm{M}_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19;$ $\mathrm{M}_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$

$a_{11}^{-1}=\frac{5}{30};\quad a_{12}^{-1}=\frac{1}{30};\quad a_{13}^{-1}=\frac{1}{30};$

$a_{21}^{-1}=-\frac{10}{30};\quad a_{22}^{-1}=-\frac{14}{30};\quad a_{23}^{-1}=\frac{16}{30};$

$a_{31}^{-1}=\frac{5}{30};\quad a_{32}^{-1}=\frac{19}{30};\quad a_{33}^{-1}=-\frac{11}{30};$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30}\\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11\\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33\\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22\end{pmatrix}$$

=E.

Находим матрицу X.

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15}\\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 14\\ 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}0+\frac{14}{30}+\frac{16}{30}\\ -\frac{1}{3}0-\frac{98}{15}+\frac{128}{15}\\ \frac{1}{6}0+\frac{266}{30}-\frac{176}{30}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: x =1; y = 2; z = 3.

Свойства обратных матриц.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Пример. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$, найти A^3.

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix};\qquad A^3=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47 & 78\\ 39 & 86\end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрицы $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}11 & 14\\ 7 & 18\end{pmatrix}$ являются перестановочными.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix}-1 & 0 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix}-1 & 0 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6-4) - 1(9-1) + 2(12-2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0-2) - 1(0-6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значение определителя: -10 + 6 – 40 = -44.

2.4. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц (см.выше).

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$; X $= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать:

$$A \cdot X = B.$$

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$$\mathbf{X = A^{-1} \cdot B}$$

Алгоритм нахождения обратной матрицы приведен выше.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30.$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$ $M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;$ $M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10;$ $M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;$ $M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;$ $M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19;$ $M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$

$a_{11}^{-1} = \frac{5}{30};$ $a_{12}^{-1} = \frac{1}{30};$ $a_{13}^{-1} = \frac{1}{30};$

$a_{21}^{-1} = -\frac{10}{30};$ $a_{22}^{-1} = -\frac{14}{30};$ $a_{23}^{-1} = \frac{16}{30};$

$a_{31}^{-1} = \frac{5}{30};$ $a_{32}^{-1} = \frac{19}{30};$ $a_{33}^{-1} = -\frac{11}{30};$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Выполним проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix}$$

$=E.$

Находим матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: x =1; y = 2; z = 3.

Несмотря на ограничения возможности применения данного метода и сложность вычислений при больших значениях коэффициентов, а также систем высокого порядка, метод может быть легко реализован в пакетах прикладных программ.

2.5. Решения систем линейных уравнений методом Крамера

Данный метод применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det A \neq 0;$$

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. (Правило Крамера):

Система из n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \frac{\Delta i}{\Delta},$$

где $\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$x_1 = \Delta_1/\det A; \qquad x_2 = \Delta_2/\det A; \qquad x_3 = \Delta_3/\det A;$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases};$$

Ответ: x = 0; y = 0; z = -2.

Решение произвольных систем линейных уравнений.

Матричный метод и метод Крамера применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений. Далее рассмотрим произвольные системы линейных уравнений.

ГЛАВА 3. МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА МНОГООТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКИ

3.1 Балансовые соотношения.

3.2 Модель многоотраслевой экономики.

3.3. Продуктивные модели экономики.

3.1. Балансовые соотношения

Макроэкономика функционирования многоотраслевого хозяйства требует баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль, с одной стороны, является производителем, а с другой — потребителем продукции других отраслей.

Возникает довольно непростая задача расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного рода.

Впервые эта проблема была сформулирована в 1936 г. в виде математической модели «затраты–выпуск» в трудах американского экономиста В.Леонтьева, который попытался проанализировать причины экономической депрессии в США 1929–1932 г.г.

В 1973 г. за разработку метода «затраты–выпуск» и его применение при решении важнейших экономических задач Леонтьеву была присуждена Нобелевская премия. Эта модель основана на алгебре матриц и использует аппарат матричного анализа.

Для простоты будем полагать, что производственная сфера состоит из n отраслей, каждая из которых производит свой продукт. Для обеспечения своего производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей. Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период (например, год).

Введем обозначения: x_i — общий объем продукции i -ой отрасли

x_{ij} — объем продукции i -ой отрасли, потребляемый j -ой отраслью

y_j — объем продукции i-ой отрасли, предназначенный для реализации

Цель балансового анализа — ответить на вопрос: каким должен быть объем производства каждой из n отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли?

Балансовый принцип связи различных отраслей промышленности состоит в том, что валовый выпуск i -ой отрасли должен быть равен сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах. В самой простой форме (гипотеза линейности) балансовые соотношения имеют вид: $x_j = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \cdots + x_{in} + y_i, \quad i = 1, \dots, n$

Эти уравнения называются **соотношениями баланса**.

Мы будем рассматривать стоимостный межотраслевой баланс.

3.2. Модель многоотраслевой экономики

Леонтьевым на основании анализа экономики США в период перед второй мировой войной был установлен важный факт: в течении длительного времени величины $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ меняются очень слабо и могут рассматриваться как постоянные числа. В силу указанного факта можно сделать следующие допущения: для производства продукции i -ой отрасли объемом i x нужно использовать продукцию j -ой отрасли объемом $a_{ij}x_j$, где a_{ij} — постоянное число. При таком допущении технология производства принимается линейной, а само это допущение называется гипотезой линейности. При этом числа ij a называются коэффициентами прямых затрат.

При таком допущении технология производства принимается *линейной*, а само это допущение называется *гипотезой линейности*. При этом числа a_{ij} называются коэффициентами прямых затрат. Поскольку

$$x_{ij} = a_{ij}x_j \ ,$$

балансовые соотношения можно переписать в виде системы:

$$\begin{cases} x^1 = a^{11}x^1 + a^{12}x^2 + \cdots + a^1{}_n x_n + y^1 \\ x^2 = a^{21}x^1 + a^{22}x^2 + \cdots + a^2{}_n x_n + y^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + y_n \end{cases}$$

Введем в рассмотрение:

вектор–столбец объемов произведенной продукции: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

вектор–столбец объемов продукции конечного потребления: $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Матрицу коэффициентов прямых затрат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Система уравнений в матричном виде имеет вид $X = AX + Y$. Это соотношение называется *линейного межотраслевого баланса*. Вместе с описанием матриц это уравнение носит название модели Леонтьева.

Это уравнение можно использовать в двух целях:

1. Если известен X, требуется рассчитать Y;

2. Для целей планирования: для некоторого периода времени известен Y и требуется определить X.

3.3. Продуктивные модели экономики

Система уравнений имеет ряд особенностей, вытекающих из характера данной задачи: все элементы матрицы и векторов должны быть неотрицательными. Матрица A, все элементы которой неотрицательны, называется продуктивной, если для любого вектора Y с неотрицательными компонентами существует решение уравнения $X = AX + Y$, все элементы, которого неотрицательны. В этом случае и модель Леонтьева называется *продуктивной*. Для решения уравнения

$$X = AX + Y$$

X разработана соответствующая математическая теория исследования решения и его особенностей.

Перепишем его в виде (E – A)X=Y. Если (E − A) невырожденная, т.е. E - A $\neq 0$, то существует обратная матрица $(E-A)^{-1}$, значит существует и единственное решение: $X=(E-A)^{-1} Y$

Матрица $S=(E-A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*.

Выясним экономический смысл матрицы полных затрат $S=\{s_{ij}\}$

Рассмотрим единичные векторы конечного продукта: $y_1 = (1,0,0,\dots,0), \dots, y_n = (0,0,0,\dots,1)$. Для них получаем соответствующие векторы валового выпуска: $x_1 = (s_{11}, s_{21}, \dots, s_{n1,)\dots,} x_n = (s_{1n}, s_{2n}, \dots, s_{nn),}$ Следовательно, каждый элемент матрицы полных затрат есть величина валового выпуска продукции i -ой отрасли, необходимого для обеспечения выпуска единицы конечного продукта j -й отрасли. Существует несколько критериев продуктивности матрицы A:

1. A продуктивна тогда и только тогда, когда существует $(E-A)^{-1}$ и ее элементы неотрицательны.

2. A с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу не превосходит единицы: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, причем, хотя бы для одного столбца эта сумма, строго меньше единицы.

Пример. В таблице приведены данные по балансу между двумя отраслями за некоторый период. Найти необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление 1-ой отрасли увеличить в два раза

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
		1	2		
Производство	1	$x_{11} = 11$	$x_{12} = 12$	$Y_1 = 77$	$X_1 = 100$
	2	$x_{21} = 21$	$x_{22} = 22$	$Y_2 = 157$	$X_2 = 200$

Решение. Запишем матрицу прямых затрат

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{x_1} & \frac{x_{12}}{x_2} \\ \frac{x_{21}}{x_1} & \frac{x_{22}}{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,11 & 0,06 \\ 0,21 & 0,11 \end{pmatrix}$, заметим, что матрица A

продуктивна, так как ее элементы положительны и сумма элементов в каждом столбце меньше единицы.

Найдем матрицу полных затрат: $S = (E - A)^{-1}$:

$$(E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}89 & -0{,}06 \\ -0{,}21 & 0{,}89 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу полученной:

$$S = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}7795} \begin{pmatrix} 0{,}89 & 0{,}06 \\ 0{,}21 & 0{,}89 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}14 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 1{,}14 \end{pmatrix}$$

По условию вектор конечного продукта должен равняться: $Y = \begin{pmatrix} 154 \\ 157 \end{pmatrix}$.

Найдем вектор валового выпуска: $(E - A)^{-1}\ Y = \begin{pmatrix} 1{,}14 & 0{,}08 \\ 0{,}27 & 1{,}14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 154 \\ 157 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 188{,}12 \\ 220{,}56 \end{pmatrix}$

Следовательно, валовой выпуск в 1-ой отрасли необходимо увеличить на 88,12 усл. ед. (188,12- 100) , а во второй отрасли на 20,56 усл. ед. (220,56- 200) .

Межотраслевые поставки x_{ij} найдем по формуле $x_{ij} = a_{ij}x_j$. Так,

$x_{11} = 0{,}11 \cdot 188{,}12 = 20{,}69;$ $x_{21} = 0{,}21 \cdot 188{,}12 = 39{,}50;$

$x_{12} = 0{,}06 \cdot 220{,}56 = 13{,}23;$ $x_{22} = 0{,}11 \cdot 220{,}56 = 24{,}26$,

т.е. получим следующие данные по балансу между двумя отраслями на следующий период в усл. ед.

Отрасль		Потребление		Конечный продукт	Валовой продукт
		1	2		
Производство	1	$x_{11} = 20{,}69$	$x_{12} = 13{,}23$	$Y_1 = 154{,}2$	$x_1 = 188{,}12$
	2	$x_{21} = 39{,}50$	$x_{22} = 24{,}26$	$Y_2 = 157$	$x_2 = 220{,}56$

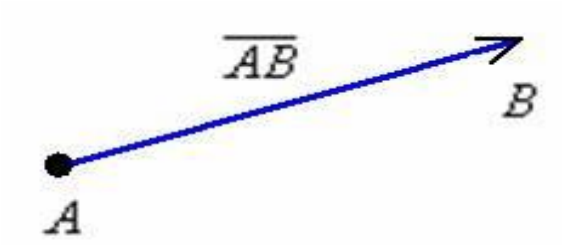
ГЛАВА 4. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

4.1. Векторы на плоскости и в пространстве.

4.2. Скалярное, векторное и смешанные произведения.

4.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Вектором называется направленный отрезок, для которого указано его начало и конец:



е

В данном случае началом отрезка является точка A, концом отрезка – точка B . Сам вектор обозначен через $\overline{AB}$. **Направление** имеет существенное значение, если переставить стрелку в другой конец отрезка, то получится вектор $\overline{BA}$, и это уже **совершенно другой вектор**. Понятие вектора удобно отождествлять с движением физического тела: согласитесь, зайти в двери института или выйти из дверей института – это совершенно разные вещи.

Отдельные точки плоскости, пространства удобно считать так называемым нулевым вектором $\bar{O}$. У такого вектора конец и начало совпадают.

1) Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами: $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$ ... и так далее. При этом первая буква **обязательно** обозначает точку-начало вектора, а вторая буква – точку-конец вектора.

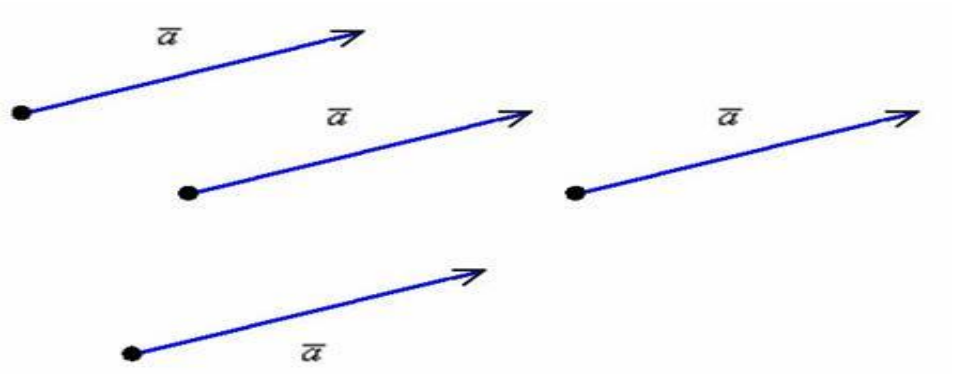
2) Векторы также записывают маленькими латинскими буквами:
$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$. В частности, наш вектор $\overline{AB}$ можно для краткости обозначить маленькой латинской буквой $\bar{a}$.

Длиной или **модулем** ненулевого вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB . Длина нулевого вектора $\bar{O}$ равна нулю. Логично.

Длина вектора обозначается знаком модуля: $|\overline{AB}|$, $|\bar{a}|$

Как находить длину вектора мы узнаем (или повторим, для кого как) чуть позже.

Если совсем просто – **вектор можно отложить от любой точки**:



Итак, **свободный вектор** – это **множество** одинаковых направленных отрезков.

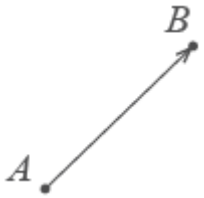
Величины, не имеющие направления, называются скалярными. Масса, работа, электрический заряд никуда не направлены. Они характеризуются лишь числовым значением — «сколько килограмм» или «сколько джоулей».

Физические величины, имеющие не только абсолютное значение, но и направление, называются векторными.

Скорость, сила, ускорение — векторы. Для них важно «сколько» и важно «куда». Например, ускорение свободного падения $\bar{g}$ направлено к поверхности Земли, а величина его равна 9,8 м/с^2. Импульс, напряженность электрического поля, индукция магнитного поля — тоже векторные величины.

Вот другой пример.

Автомобиль движется из А в В. Конечный результат — его перемещение из точки А в точку В, то есть перемещение на вектор $\overline{AB}$.



Теперь понятно, почему вектор — это направленный отрезок. **Длиной вектора** называется длина этого отрезка. Обозначается: $|\bar{a}|$ или $|\overline{AB}|$.

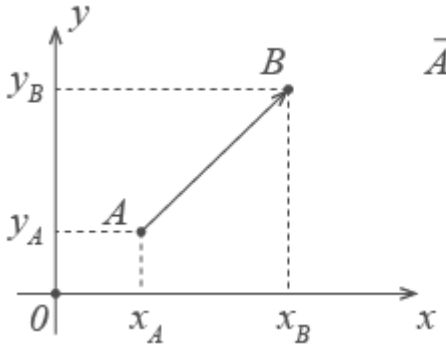
Понятия «больше» и «меньше» для векторов не существует — ведь направления их могут быть разными. Сравнивать можно только длины векторов.

Равными называются векторы, имеющие одинаковые длины и одинаковое направление. Это значит, что вектор можно перенести параллельно себе в любую точку плоскости.

Единичным называется вектор, длина которого равна 1. Нулевым — вектор, длина которого равна нулю, то есть его начало совпадает с концом.

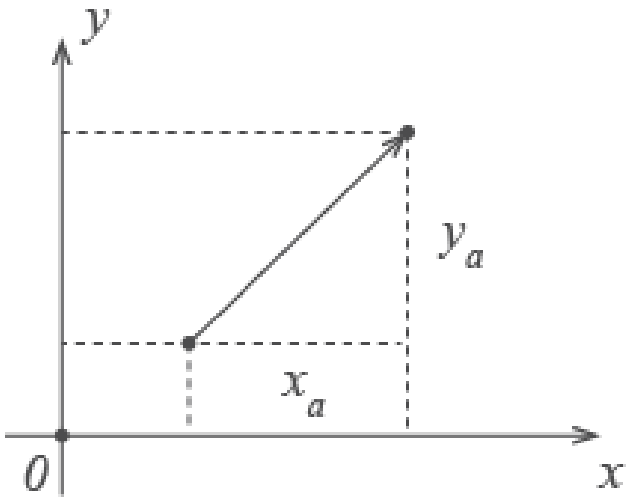
Удобнее всего работать с векторами в прямоугольной системе координат — той самой, в которой рисуем графики функций. Каждой точке в системе координат соответствуют два числа — ее координаты по x и y, абсцисса и ордината. Вектор также задается двумя координатами: $\bar{a}(x_a, y_a)$

Здесь в скобках записаны координаты вектора $\bar{a}$ - по x и по y. Находятся они просто: координата конца вектора минус координата его начала.



$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$$

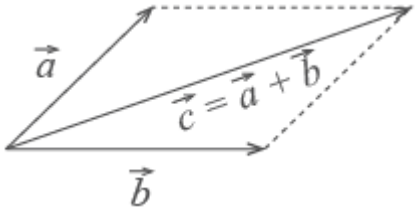
Если координаты вектора заданы, его длина находится по формуле



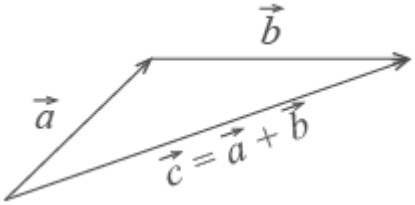
$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

Сложение векторов

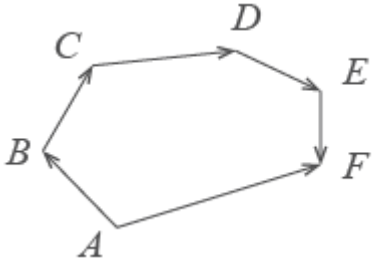
1. Правило параллелограмма. Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, помещаем начала обоих в одну точку. Достраиваем до параллелограмма и из той же точки проводим диагональ параллелограмма. Это и будет сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



2. Второй способ сложения векторов — правило треугольника. Возьмем те же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. К концу первого вектора пристроим начало второго. Теперь соединим начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



По тому же правилу можно сложить и несколько векторов. Пристраиваем их один за другим, а затем соединяем начало первого с концом последнего.



$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$

Представьте, что вы идете из пункта A в пункт B, из B в C, из C в D, затем в E и в F. Конечный результат этих действий — перемещение из A в F.

При сложении векторов $\vec{a}(x_a, y_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b)$ получаем:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c}(x_a + x_b, y_a + y_b)$$

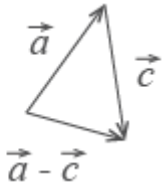
Вычитание векторов

Вектор $-\vec{c}$ направлен противоположно вектору $\vec{c}$. Длины векторов $\vec{c}$ и $-\vec{c}$ равны.



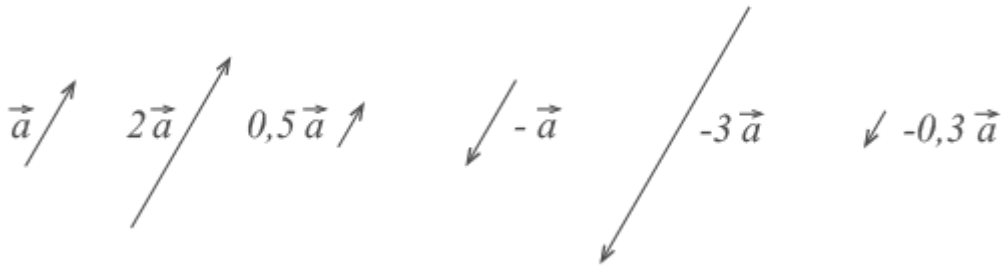
Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ - это сумма вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{c}$.

$\vec{a} - \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{c})$



Умножение вектора на число

При умножении вектора $\vec{a}$ на число k получается вектор, длина которого в k раз отличается от длины $\vec{a}$. Он сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если k больше нуля, и направлен противоположно $\vec{a}$, если k меньше нуля.

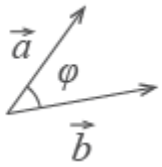


4.2. Скалярное, векторное и смешанные произведения

Векторы можно умножать не только на числа, но и друг на друга.

Скалярным произведением векторов называется произведение длин векторов на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$



Если векторы перпендикулярны, их скалярное произведение равно нулю.

Скалярное произведение выражается через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

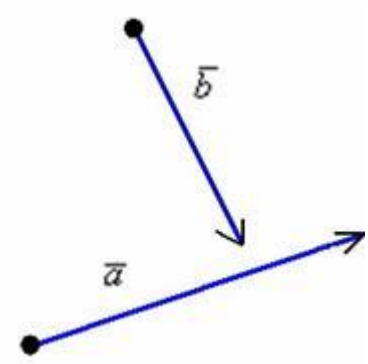
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

Из формулы для скалярного произведения можно найти угол между векторами:

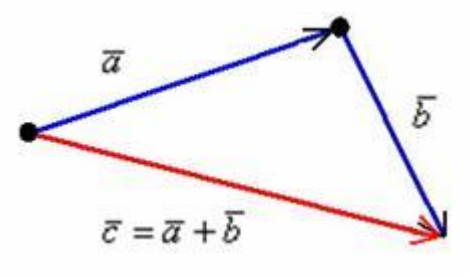
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

Действия с векторами. Коллинеарность векторов Правило сложения векторов по правилу треугольников.

Рассмотрим два произвольных ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$:



Требуется найти сумму данных векторов. В силу того, что все векторы считаются свободными, отложим вектор $\vec{b}$ от конца вектора $\vec{a}$:



Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\vec{c}$. Для лучшего понимания правила в него целесообразно вложить физический смысл: пусть некоторое тело совершило путь по вектору $\vec{a}$, а затем по вектору $\vec{b}$. Тогда сумма векторов $\vec{a} + \vec{b}$ представляет собой вектор результирующего пути $\vec{c}$ с началом в точке отправления и концом в точке прибытия. Аналогичное правило формулируется для суммы любого количества векторов.

Умножение вектора на число

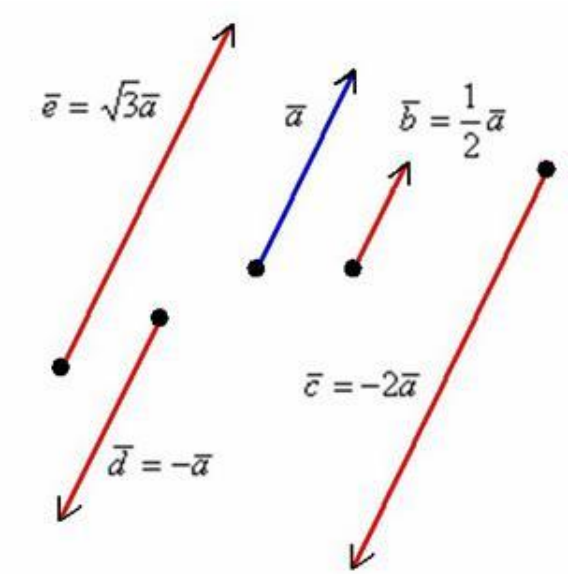
Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Представьте два коллинеарных вектора. Если стрелки данных векторов направлены в одинаковом направлении, то такие векторы называются **сонаправленными**. Если стрелки смотрят в разные стороны, то векторы будут **противоположно направлены**.

Обозначения: коллинеарность векторов записывают привычным значком параллельности: $\vec{a} \parallel \vec{b}$, при этом возможна детализация: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ (векторы сонаправлены) или $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ (векторы направлены противоположно).

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число λ является такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, причём векторы $\vec{a}$

и $\vec{b}$ сонаправлены при $\lambda \geq 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$.

Правило умножения вектора на число легче понять с помощью рисунка:



1) Если множитель λ отрицательный, то вектор **меняет направление** на противоположное.

2) Если множитель заключен в пределах $-1 < \lambda < 0$ или $0 < \lambda < 1$, то длина вектора уменьшается. Так, длина вектора $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}$ в два раза меньше длины вектора $\vec{a}$. Если множитель λ по модулю больше единицы, то длина вектора увеличивается в λ раз.

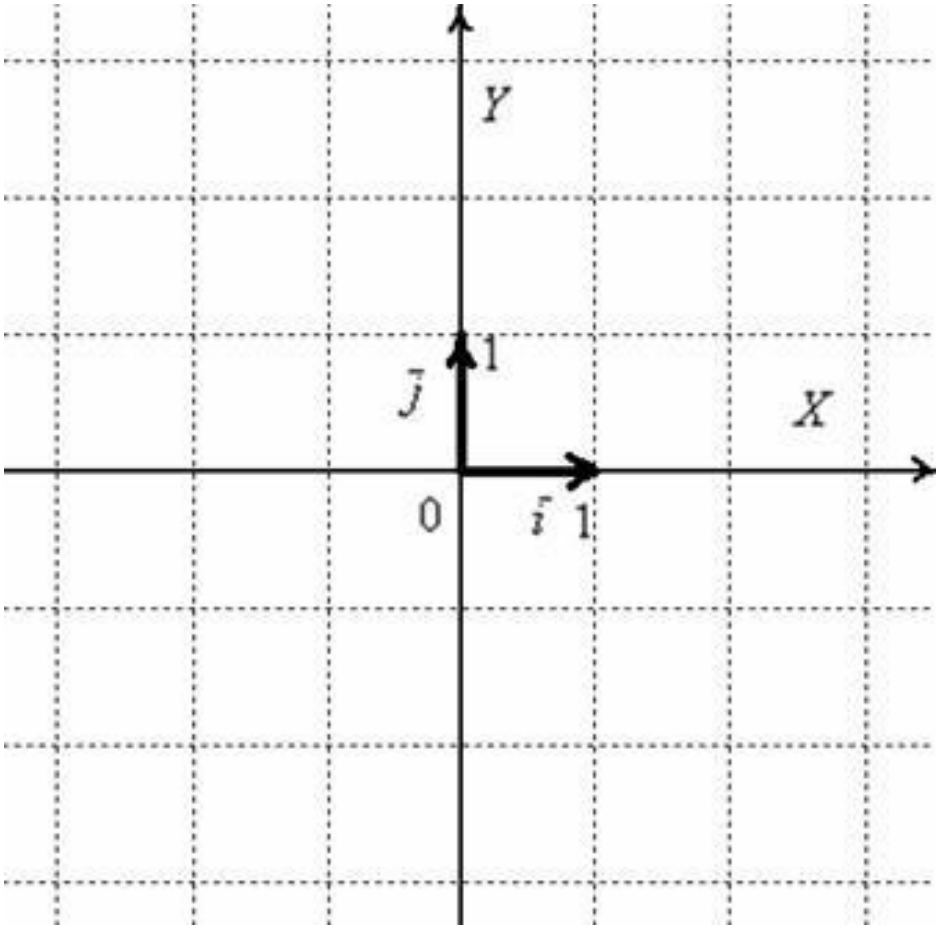
3) **Векторы коллинеарны**, при этом один вектор выражен через другой, например, $\vec{c} = -2\vec{a}$. **Обратное тоже справедливо**: если один вектор можно выразить через другой, то такие векторы обязательно коллинеарны. Таким образом: **если мы умножаем вектор на число, то получится коллинеарный** (по отношению к исходному) **вектор**.

4) Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}$ сонаправлены. Векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ также сонаправлены. Любой вектор первой группы противоположно направлен по отношению к любому вектору второй группы.

Два вектора равны, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Заметьте, что сонаправленность подразумевает коллинеарность векторов. Определение будет неточным (избыточным), если сказать: «Два вектора равны, если они коллинеарны, сонаправлены и имеют одинаковую длину».

Координаты вектора на плоскости и в пространстве.

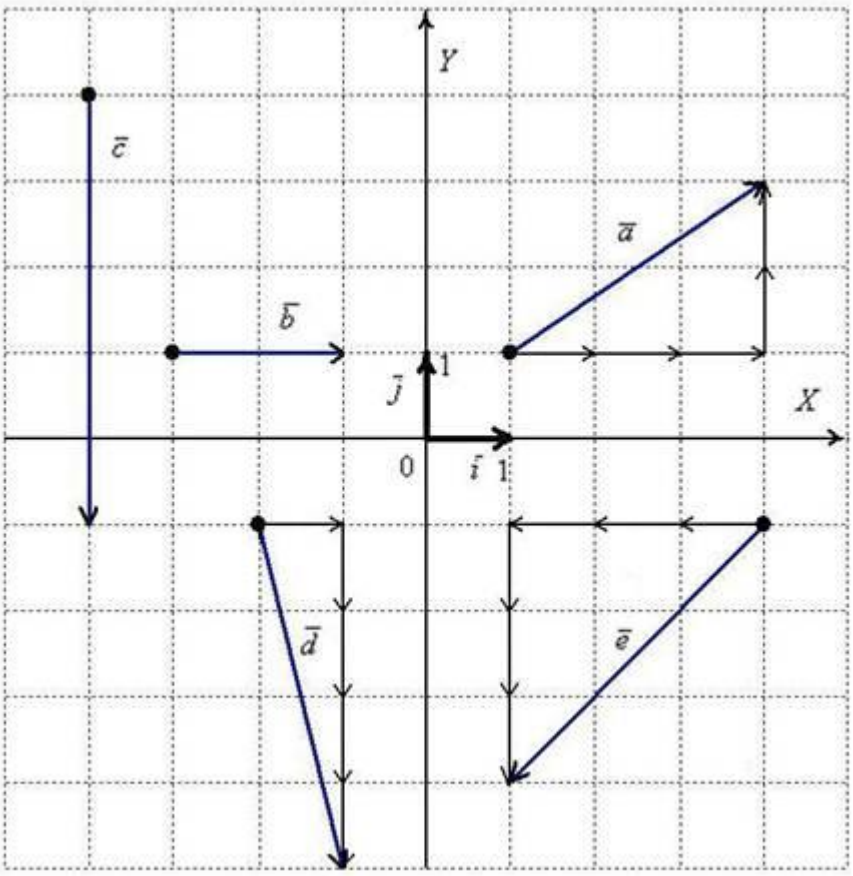
Первым пунктом рассмотрим векторы на плоскости. Изобразим декартову прямоугольную систему координат и от начала координат отложим **единичные** векторы $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$:



Векторы $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$ **ортогональны**. Ортогональность векторов записывают привычным значком перпендикулярности, например: $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$.

Рассматриваемые векторы называют **координатными векторами** или **ортами**. Данные векторы образуют **базис** на плоскости. Базис и начало координат задают всю систему **Базис** записывают в круглых скобках, внутри которых **в строгой последовательности** перечисляются базисные векторы, например: ($\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$). Координатные векторы **нельзя** переставлять местами.

Любой вектор $\vec{v}$ плоскости **единственным образом** выражается в виде: $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{\imath} + v_2 \cdot \vec{\jmath}$, где v_1, v_2 – **числа**, которые называются **координатами вектора** в данном базисе. А само выражение $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{\imath} + v_2 \cdot \vec{\jmath}$ называется **разложением вектора** v$^{\rightarrow}$ **по базису (**$\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$**)**.



$\vec{a} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$. На чертеже хорошо видно, что при разложении вектора по базису используются следующие правила:
1) умножения вектора на число: $3\vec{\imath}$ и $2\vec{\jmath}$
2) сложение векторов по правилу треугольника: $3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

Векторы $\vec{b} = 2\vec{\imath}, \vec{c} = -5\vec{\jmath}$ иллюстрируют в точности правило умножения вектора на число, вектор $\vec{b} = 2\vec{\imath}$ сонаправлен с базисным вектором $\vec{\imath}$, вектор $\vec{c} = -5\vec{\jmath}$ направлен противоположно по отношению к базисному вектору $\vec{\jmath}$. У данных векторов одна из координат равна нулю, дотошно можно записать так:

$$\vec{b} = 2\vec{\imath} + 0 \cdot \vec{\jmath}$$
$$\vec{c} = 0 \cdot \vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$$

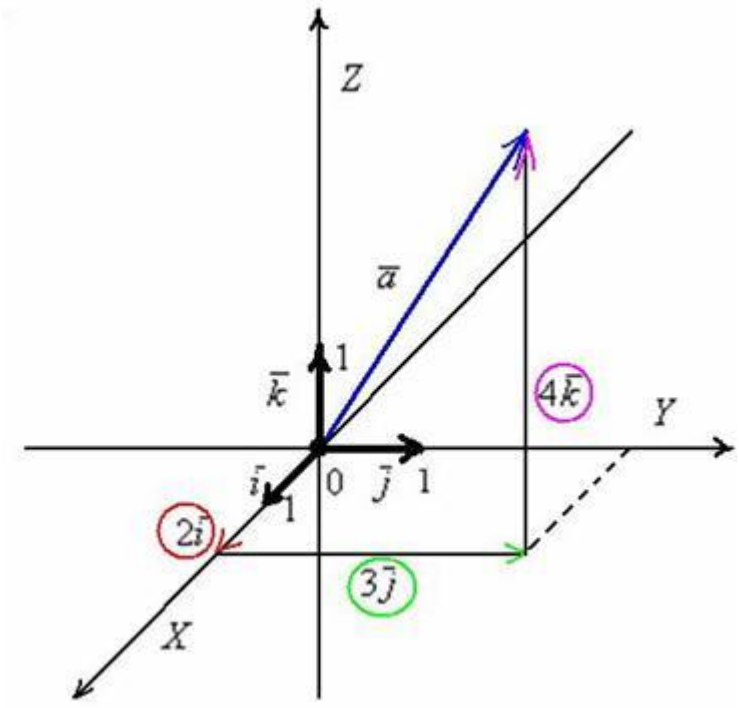
А базисные векторы, так: $\vec{\imath} = 1 \cdot \vec{\imath} + 0 \cdot \vec{\jmath}$, $\vec{\jmath} = 0 \cdot \vec{\imath} + 1 \cdot \vec{\jmath}$ (по сути, они выражаются сами через себя).

И, наконец: $\vec{d} = \vec{\imath} - 4\vec{\jmath}, \vec{e} = -3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$.

Рассмотренное разложение вида $\vec{d} = v_1 \cdot \vec{\imath} + v_2 \cdot \vec{\jmath}$ называют также разложением вектора в системе орт (т.е. в системе единичных векторов). Но это не единственный способ записи вектора, распространён следующий вариант:

$\vec{a}$ (3;2)
$\vec{b}$ (2;0)
$\vec{c}$ (0; -5)
$\vec{d}$ (1; -4)
$\vec{e}$ (-3; -3)
Или со знаком равенства:
$\vec{a}$ = (3;2)
$\vec{b}$ = (2;0)
$\vec{c}$ = (0; -5)
$\vec{d}$ = (1; -4)
$\vec{e}$ = (-3; -3)
Сами базисные векторы записываются так: $\vec{\imath}$ (1; 0) и $\vec{\jmath}$ (0;1).

Сложение векторов в пространстве:



На рисунке ортонормированный базис $(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ трехмерного пространства и прямоугольная система координат, единичные векторы $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ данного базиса попарно ортогональны: $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}, \vec{\imath} \perp \vec{k}$ и$\vec{\jmath} \perp \vec{k}$. Ось *OX* наклонена под углом 45 градусов.

Графики и свойства функций.

Любой вектор $\vec{v}$ трехмерного пространства можно **единственным способом** разложить по

ортонормированному базису ($\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$): $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} + v_3 \cdot \vec{k}$, где v_1, v_2, v_3 – координаты вектора $\vec{v}$ (числа) в данном базисе.

Пример. Разложить вектор по базису: $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$. На рисунке (см выше) умножение вектора на число: $2\vec{i}$ (красная стрелка), $3\vec{j}$ (зеленая стрелка) и $4\vec{k}$ (малиновая стрелка). Сложение трёх векторов: $2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Вектор суммы $\vec{a}$ начинается в исходной точке отправления (начало вектора $2\vec{i}$) и утыкается в итоговую точку прибытия (конец вектора $4\vec{k}$).

Все векторы трехмерного пространства свободны. Отложим вектор $\vec{a}$ от любой другой точки, и его разложение $2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ «останется при нём».

Аналогично плоскому случаю, помимо записи $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ широко используются версии со скобками: $\vec{a}$ (2; 3; 4) либо $\vec{a}$=(2; 3; 4).

Если в разложении отсутствует один (или два) координатных вектора, то вместо них ставятся нули. Примеры: вектор $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{k}$ (дотошно $\vec{b} = -\vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 3\vec{k}$) – запишем $\vec{b}$ (-1; 0; 3);

вектор $\vec{c} = 2\vec{j} - 5\vec{k}$ (дотошно $\vec{c} = 0 \cdot \vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$) – запишем $\vec{c}$ (0; 2; -5);

вектор $\vec{d} = 3\vec{k}$ (дотошно $\vec{d} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 3\vec{k}$) – запишем $\vec{d}$ (0; 0; 3).

Базисные векторы записываются следующим образом:

$\vec{i}$ (1; 0; 0)

$\vec{j}$ (0; 1; 0)

$\vec{k}$ (0; 0; 1)

λ $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты: $\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$

Если даны две точки пространства $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то вектор $\overline{AB}$ имеет следующие координаты: $\overline{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

То есть, **из координат конца вектора** нужно вычесть соответствующие координаты **начала вектора**.

Пример.

Даны две точки плоскости $A(2; 1)$ и $B(-2; 3)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$

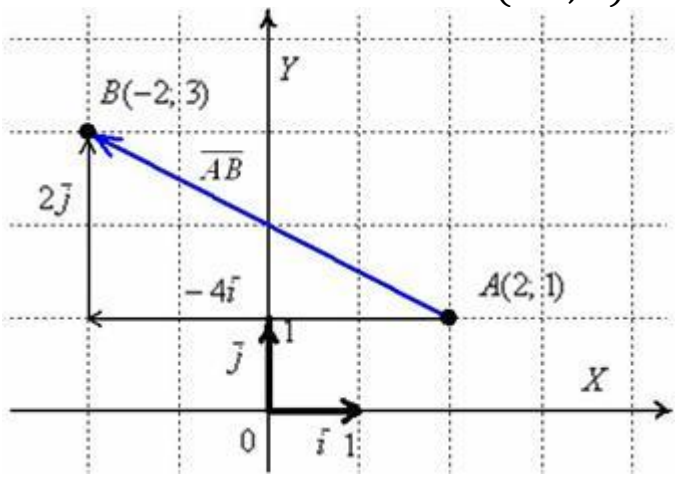
Решение: по соответствующей формуле:

$\overline{AB}(-2\ -2;\ 3\ -1) = \overline{AB}(-4; 2)$

Как вариант, можно было использовать следующую запись: $\overline{AB}(-2\ -2;\ 3\ -1) = \overline{AB}(-4; 2)$.

Ответ:

$\overline{AB}(-4; 2)$



Координаты точек – это обычные координаты в прямоугольной системе координат.

Координаты же вектора – это его разложение по базису $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, в данном случае $\overline{AB} = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$. Записи координат точек и координат векторов вроде бы схожи: $A-2; 1)$, $B(-2; 3)$, $\overline{AB}(-4; 2)$, а **смысл координат** абсолютно **разный.**

Пример 2

а) Даны точки $A(-4; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.

б) Даны точки $A(2; 0)$, $B(-7; 1)$ и $C(4; 1)$. Найти векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{BC}$.

в) Даны точки $F(-2;\ -1; 0)$ и $E(0;\ -1; -2)$. Найти векторы $\overline{FE}$ и $\overline{EF}$.

г) Даны точки $A_1(10; 5;\ -4)$, $A_2(-8; 6; 3)$, $A_3(1; 1;\ -1)$, $A_4(0; 0; 1)$. Найти векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$.

Длина, как уже отмечалось, обозначается знаком модуля.

Если даны две точки плоскости $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, то длину отрезка AB можно вычислить по формуле $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Если даны две точки пространства $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то длину отрезка AB можно вычислить по формуле $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Примечание: Формулы останутся корректными, если переставить местами соответствующие координаты: $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ и $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$, но более стандартен первый вариант

Пример 3

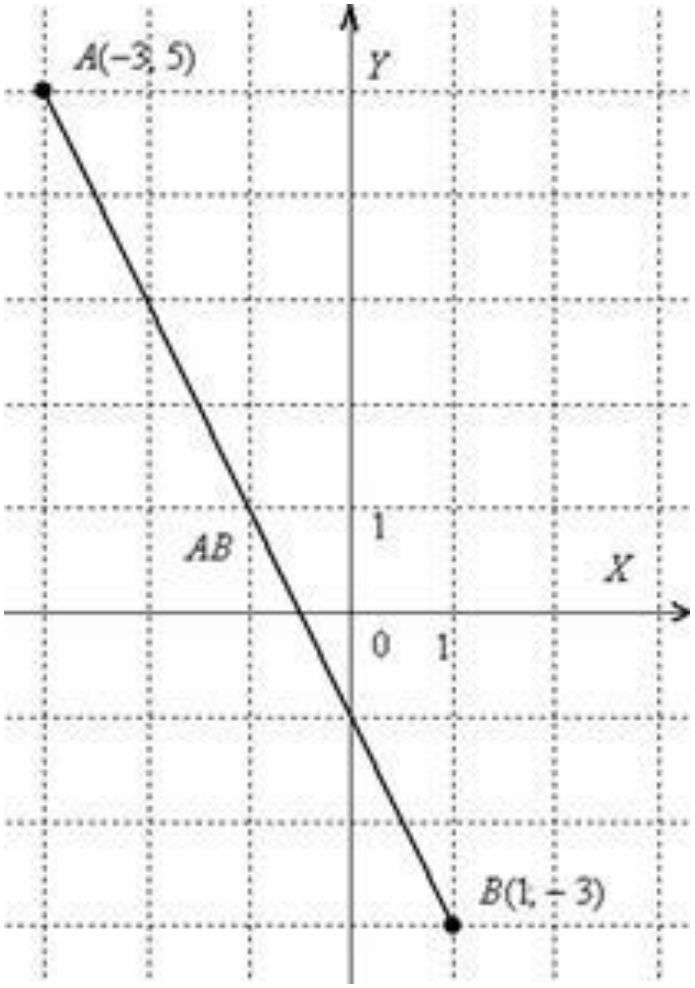
Даны точки $A(-3; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти длину отрезка AB.

Решение: по соответствующей формуле:

$$|AB| = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Ответ: $|AB| = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

Для наглядности чертёж



Отрезок AB – **это не вектор**, и перемещать его куда-либо, конечно, нельзя.

Длина вектора.

Если дан вектор плоскости $\vec{v}(v_1\ ;\ v_2\ )$, то его длина вычисляется по формуле $|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$.

Если дан вектор пространства $\vec{v}(v_1;\ v_2;\ v_3)$, то его длина вычисляется по формуле $|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_2}^2}$.

Данные формулы (как и формулы длины отрезка) легко выводятся с помощью теоремы Пифагора.

Пример 5

Даны точки $A(-3; 5)$ и $B(1; -3)$. Найти длину вектора $\overline{AB}$.

Решение: Сначала найдём вектор $\overline{AB}$:

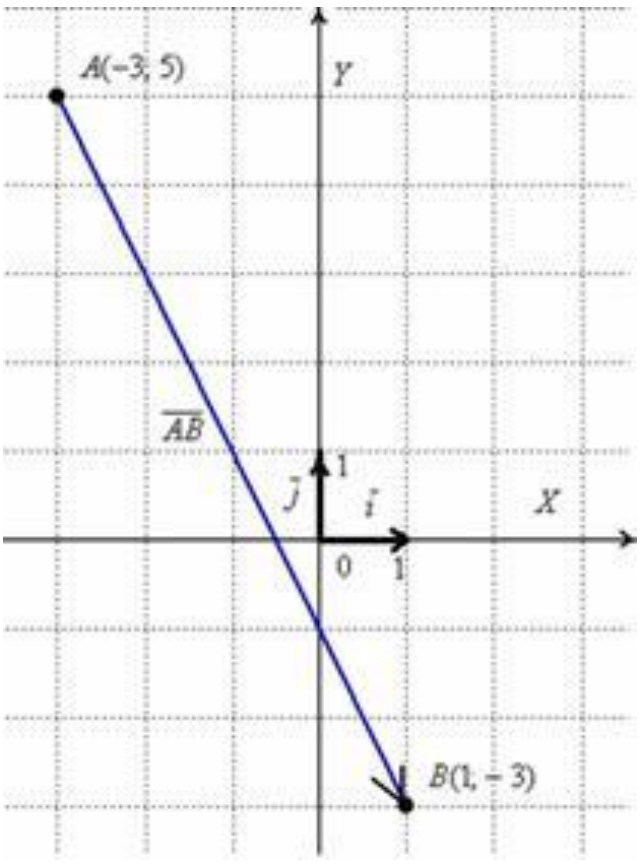
$$\overline{AB}\ (1-(-3);\ -3-5) = \overline{AB}\ (4;\ -8)$$

По формуле $|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}$ вычислим длину вектора:

$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

Ответ: $|AB| = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед.

Выполним чертеж к задаче:



Задачу 3 можно было решить и вторым способом, повторим условие: Даны точки $A(-3;5)$ и $B(1;-3)$. Найти длину отрезка AB.

Вместо применения формулы $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ поступаем так:

1) Находим вектор

$\overline{AB}\ (1-(-3);\ -3-5) = \overline{AB}\ (4;\ -8)$.

2) А теперь ссылаемся на то, что длина отрезка AB равна длине вектора $\overline{AB}$:

$|AB| = |\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ ед. $\approx 8{,}94$ ед. Этот способ широко практикуется в ходе решений задач аналитической геометрии.

Пример 6

а) Даны точки $A(0;\ 2;5)$ и $B(-4;7;15)$. Найти длину вектора $\overline{BA}$.

б) Даны векторы $\vec{a}(-2;6)$, $\vec{b}(-4\sqrt{2};2;0)$, $\vec{c} = 4\vec{\imath} + \sqrt{2}\vec{\jmath}$ и $\vec{d} = 4\vec{\jmath} - 3\vec{k}$. Найти их длины.

Решения и ответы в конце урока.

Действия с векторами в координатах

В первой части урока мы рассматривали правила сложения векторов и умножения вектора на число. Но рассматривали их с принципиально-графической точки зрения. Посмотрим, как данные правила работают аналитически – когда заданы координаты векторов:

1) **Правило сложения векторов**. Рассмотрим два вектора плоскости $\vec{v} = (v_1;\ v_2)$ и $\vec{w} = (w_1;\ w_2)$. Для того, чтобы сложить векторы, нужно **сложить их соответствующие координаты**: $\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1;\ v_2 + w_2)$. Как просто. На всякий случай запишу частный случай – формулу разности векторов: $\vec{v} - \vec{w} = (v_1 - w_1;\ v_2 - w_2)$. Аналогичное правило справедливо для суммы любого количества векторов, добавим например, вектор $\vec{s} = (s_1;\ s_2)$ и найдём сумму трёх векторов: $\vec{v} + \vec{w} + \vec{s} = (v_1 + w_1 + s_1;\ v_2 + w_2 + s_2)$.

Если речь идёт о векторах в пространстве, то всё точно так же, только добавится дополнительная координата. Если даны векторы $\vec{v} = (v_1;\ v_2;\ v_3)$, $\vec{w} = (w_1;\ w_2;\ w_3)$, то их суммой является вектор $\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1;\ v_2 + w_2;\ v_3 + w_3)$.

2) **Правило умножения вектора на число.** Ещё проще! Для того чтобы вектор $\vec{v} = (v_1;\ v_2)$ умножить на число λ, нужно каждую координату данного вектора умножить на число λ:

$\lambda\vec{v} = (\lambda v_1;\ \lambda v_2)$.

Для пространственного вектора $\vec{v} = (v_1;\ v_2;\ v_3)$, правило такое же:

$\lambda\vec{v} = (\lambda v_1;\ \lambda v_2;\ \lambda v_3)$

Приведённые факты строго доказываются в курсе аналитической геометрии.

Примечание: Данные правила справедливы не только для ортонормированных базисов $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$, $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$ но и для произвольного аффинного базиса плоскости или пространства. Более подробно о базисах читайте в статье **Линейная (не) зависимость векторов. Базис векторов**.

Пример 7.

Даны векторы $\vec{a}(1;-2)$ и $\vec{b}(2;3)$. Найти $2\vec{a},\ \vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$

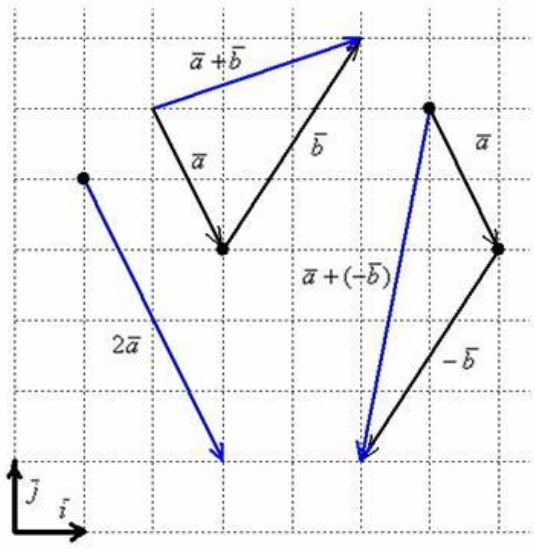
Решение чисто аналитическое:

$$2\vec{a} = 2(1;-2) = (2;-4)$$

$$\vec{a}+\vec{b} = (1;-2)+(2;3) = (1+2;-2+3) = (3;1)$$

$$\vec{a}-\vec{b} = (1;-2)-(2;3) = (1-2;-2-3) = (-1;\ -5)$$

Ответ: $2\vec{a} = (2;-4)$, $\vec{a}+\vec{b} = (3;1)$, $\vec{a}-\vec{b} = (-1;\ -5)$



Пример 8.

Даны векторы $\vec{a}(0;4;\ -7)$ и $\vec{b}(7;\ -9;1)$. Найти $3\vec{a}-2\vec{b}$ и $-\vec{a}+4\vec{b}$.

Решение: Для действий с векторами справедлив обычный алгебраический приоритет: сначала умножаем, потом складываем:

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(0; 4; -7) - 2(7; -9; 1)$$
$$= (0; 12; -21) - (14; -18; 2) =$$
$$= (0 - 14; 12 - (-18); -21 - 2) = (-14; 30 - 23)$$

$$-\vec{a} + 4\vec{b} = -(0; 4; -7) + 4(7; -9; 1) = (0; -4; 7) + (28; -36; 4)$$
$$== (0 + 28; -4 - 36; 7 + 4) = (28; -40; 11)$$

Ответ: $3\vec{a} - 2\vec{b} = (-14; 30 - 23),\ -\vec{a} + 4\vec{b} = (28; -40; 11)$

Пример 9

Даны векторы $\vec{a}(1; -2),\ \vec{b}(2; 0),\ \vec{c}(-4; 2)$. Найти $3\vec{a} - 5\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ и $-2(\vec{a} - 2\vec{c}) + 4\vec{b}$

Скалярное произведение векторов и его свойства

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется *число*, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Обозначается $\vec{a}\vec{b}, \vec{a} \cdot \vec{b}, (\vec{a}, \vec{b})$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,\ \varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$$

Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b});\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
3. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ или $|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2}$;
4. $\vec{a} \perp \vec{b} \leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;
5. Выражение скалярного произведения через координаты

Найдём скалярное произведение векторов, перемножая их как многочлены

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z\vec{k}) = a_x b_x \vec{i}\vec{i} + a_x b_y \vec{i}\vec{j} + + a_x b_z \vec{i}\vec{k} + a_y b_x \vec{j}\vec{i} + a_y b_y \vec{j}\vec{j} + a_y b_z \vec{j}\vec{k} + a_z b_x \vec{k}\vec{i} + a_z b_y \vec{k}\vec{j} + a_z b_z \vec{k}\vec{k}$$

принимая во внимание, что

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$

$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

$= a_x b_x + 0 + 0 + 0 + a_y b_y + 0 + 0 + 0 + a_z b_z.$

Окончательно получим: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

6. Угол между векторами $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$;

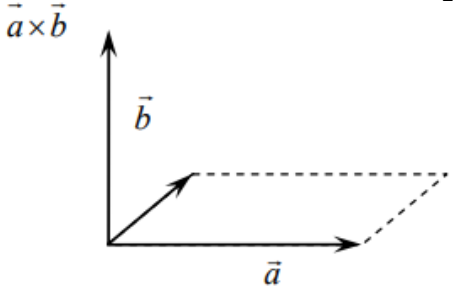
7. Проекция вектора на заданное направление $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

Векторное произведение векторов и его свойства

Три некомпланарных (не лежащих в одной плоскости) вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку*, если с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и *левую*, если по часовой.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется *вектор* $\vec{a} \cdot \vec{b}$, который:

- перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} \perp \vec{a}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} \perp \vec{b}$;
- имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, т.е. $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$;
- векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{a} \cdot \vec{b}$ образуют правую тройку.
- Обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}, [\vec{a}, \vec{b}]$.



Из определения вытекают следующие соотношения $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j}$

Свойства векторного произведения

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -(\vec{b} \cdot \vec{a})$;

2. $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$;

3. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;

4. $\vec{a} \parallel \vec{b} \leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

5. Выражение векторного произведения через координаты

Найдём векторное произведение векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{\imath} + a_y \vec{\jmath} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x \vec{\imath} + b_y \vec{\jmath} + b_z\vec{k})$$
$$= a_x b_x(\vec{\imath} \cdot \vec{\imath}) + a_x b_y(\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath}) + a_x b_z(\vec{\imath} \cdot \vec{k}) + a_y b_x(\vec{\jmath} \cdot \vec{\imath})$$
$$+ a_y b_y(\vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath}) + a_y b_z(\vec{\jmath} \cdot \vec{k}) + a_z b_x(\vec{k} \cdot \vec{\imath})$$
$$+ a_z b_y(\vec{k} \cdot \vec{\jmath}) + a_z b_z(\vec{k} \cdot \vec{k}) =$$

принимая во внимание, что

	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$	$\vec{k}$
$\vec{\imath}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$\overrightarrow{-\jmath}$
$\vec{\jmath}$	$\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{\imath}$
$\vec{k}$	$\vec{\jmath}$	$\overrightarrow{-\imath}$	$\vec{0}$

$$= \vec{0} + a_x b_y\vec{k} - a_x b_z\vec{\jmath} - a_y b_x\vec{k} + \vec{0} + a_y b_z\vec{\imath} + a_z b_x\vec{\jmath} - a_z b_y\vec{\imath} + \vec{0} =$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{\imath} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$
$$== \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

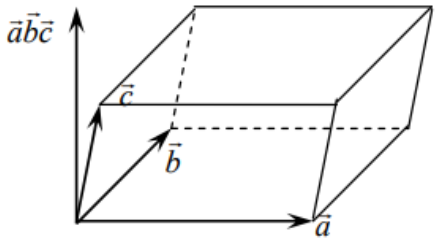
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} \text{ или } \vec{a} \cdot \vec{b}$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

6. $S_{\text{пар}} = |\vec{a} \cdot \vec{b}|, S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\vec{a} \cdot \vec{b}|$.

Смешанное произведение векторов и его свойства

Рассмотрим произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, составленное следующим образом: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Такое произведение называется *векторно-скалярным* или *смешанным*.

Выясним геометрический смысл выражения $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и вектор $\vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{b}$.



Имеем: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot \text{пр}_{\vec{d}}\vec{c}, |\vec{d}| = |\vec{a} \cdot \vec{b}| = S$, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c} = H$ для правой тройки векторов и $\text{пр}_{\vec{d}}\vec{c} = -H$ для левой, где H— высота параллелепипеда. Получаем: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = S \cdot (\pm H) = \pm V$, где V — объём параллелепипеда, образованного векторами $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

Таким образом, смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус", если они образуют левую тройку.

Свойства смешанного произведения

1. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$;
2. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$;
3. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}, \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}, \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$;
4. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ – компланарны;
5. Выражение смешанного произведения через координаты

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left((a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})\right) \cdot \vec{c} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

6. Взаимная ориентация векторов в пространстве: если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}-$ правая тройка, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}-$ левая тройка;

7. $V_{\text{пар}} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|, V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

4. n-мерные линейные векторные пространства. Линейная зависимость системы векторов.

n-мерный вектор.

Ранее было сказано, что матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется вектором. Теперь мы дадим более строгое определение этого понятия.

Последовательность n действительных чисел называется *n-мерным вектором*. Обозначается $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ называются *координатами* вектора, а *n-размерностью* вектора.

Два n-мерных вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ называются *равными*, когда их соответствующие координаты:

$$\vec{a} = \vec{b} \leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \dots \\ a_n = b_n \end{cases}$$

Линейные операции на n-мерными векторами

Суммой векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ называется вектор $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$.

Произведением вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$.

Вектор $\vec{0}$ называется *нулевым*, если для любого вектора выполняется равенство $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Вектор $-\vec{a}$ называется *противоположным* вектору $\vec{a}$, если $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

поскольку операции над n -мерными векторами определяются через операции над их координатами, то многие свойства арифметических операций справедливы и для операций над векторами:

1. $\vec{a} + b = b + \vec{a}$;
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
3. $\lambda_1(\lambda_2 \vec{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{a}$;
4. $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$;
5. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;
6. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Скалярное произведение

Скалярным произведением векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ называется число:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n)$.

Длиной (модулем) вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ называется число $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Углом между векторами $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ называется число $\varphi \in [0, \pi]$, для которого $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

ГЛАВА 5. n -МЕРНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО. БАЗИС

5.1. Линейная зависимость системы векторов.

5.2. Переход к новому базису.

5.1. Линейная зависимость системы векторов.

Множество L элементов x, y,z K называется линейным (векторным) пространством, если:

1. Для любых двух элементов x ∈L и y∈L определена операция сложения;

2. Для любого элемента x ∈L и любого числа α определена операция умножения элемента x на число α ;

3. Определено равенство элементов из L;

4. Операции (1) и (2) удовлетворяют условиям:

a. x+y= y+x;

b. (x+y)+z= x +(y+z);

c. α(βx)=(αβ) x;

d. (α + β)x= αx+β;

e. α (x+y)= αx+ αy;

f. существует элемент, называемый нулевым, такой, что x+0=x;

g. для любого x ∈L имеет место x ·1 =1·x =x

h. для любого x ∈L существует элемент −x, называемый противоположным, такой, что x+ (−x)=0.

Совокупность всех n -мерных векторов образует линейное векторное **пространство $\mathbf{R^n}$**. Свойства линейного векторного пространства:

1. В каждом линейном векторном пространстве существует единственный элемент $\vec{0}$;

2. В каждом линейном векторном пространстве любому элементу соответствует единственный противоположный элемент;

3. Для всякого элемента $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{0} \cdot \vec{a} = \vec{0}$;

4. Для любого числа α справедливо равенство $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$;

5. Для каждого элемента $\vec{a}$ справедливо $-\vec{a} = -1 \cdot (\vec{a})$.

Пример. Убедимся в том, что множество всех диагональных матриц порядка n образуют линейное пространство. Решение. Для матриц определена операция сложения и умножения на число. Свойства действий следуют из свойства действий над матрицами.

Нулевой элемент $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$,

противоположенный элемент $O=\begin{pmatrix} -a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -a_{nn} \end{pmatrix}$

Определение линейного оператора и его основные свойства. Линейное пространство операторов, действующих из X в У

Пусть X и У – линейные пространства. Элементы этих пространств будем называть векторами.

Определение 1. Оператором $\widetilde{A}: X \to У$ называется правило, по которому каждому вектору $x \in X$ ставится в соответствие определенный вектор $y \in У$ и обозначается $y = \widetilde{A}(x)$ или $y = \widetilde{A}x$.

Множество X	**Правило**	**Множество У**
Произвольное	Отображение	Произвольное
Векторное пространство	Оператор	Векторное пространство
Нечисловое	Функционал	Числовое
Числовое	Функция	Числовое

Определение 2. Оператор $\widetilde{A}: X \to У$ называется линейным, если для любых x_1 и x_2 из множества X и $\forall \lambda \in R$ выполняются соотношения:

1) $\widetilde{A}(x_1 + x_2) = \widetilde{A}(x_1) + \widetilde{A}(x_2)$ (свойство аддитивности),

2) $\widetilde{A}(\lambda \cdot x_1) = \lambda \cdot \widetilde{A}(x_1)$ (свойство однородности).

Линейный оператор переводит нулевой вектор пространства X в нулевой вектор пространства У: $\widetilde{A}(0) = \widetilde{A}(0 \cdot x) = 0 \cdot \widetilde{A}(x) = 0 \in У$.

Вектор $y = \widetilde{A}(x)$ называется образом вектора x, а вектор x называется прообразом вектора y.

Пусть $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ – линейные операторы, действующие из X в У.

Определение 3. Два оператора $\widetilde{A}: X \to У$ и $\widetilde{B}: X \to У$ называются равными, если для $\forall x \in X$ $\widetilde{A}(x) = \widetilde{B}(x)$.

Определение 4. Суммой двух линейных операторов $\widetilde{A}: X \to У$ и $\widetilde{B}: X \to У$ называется линейный оператор $\widetilde{A} + \widetilde{B} : X \to У$, определяемый равенством:

$(\widetilde{A} + \widetilde{B})(x) = \widetilde{A}(x) + \widetilde{B}(x)$.

Определение 5. Произведением линейного оператора $\widetilde{A}: X \to У$ на число $\lambda \in R$ называется линейный оператор $\lambda \widetilde{A}$, определяемый равенством:

$(\lambda\widetilde{A})(x) = \lambda \cdot (\widetilde{A}x)$.

Определение 6. Нулевым оператором $\widetilde{0}$ называется оператор, для которого $\widetilde{0}(x) = 0$ для $\forall x \in X$.

Нулевой оператор переводит все элементы из X в нулевой элемент пространства У.

Определение 7. Противоположным к оператору $\widetilde{A}$ называется линейный оператор $-\widetilde{A}$, определяемый равенством: $-\widetilde{A} = (-1) \cdot \widetilde{A}$.

Множество всех линейных операторов $\widetilde{A}: X \to У$ обозначим L(X,У). Это множество с указанными выше операциями суммы операторов и умножения на скаляр оператора, нулевым оператором $\widetilde{0}$ и противоположным оператором образует векторное (линейное) пространство.

Примеры линейных операторов

1) X=У= R^n, $\forall x \in R^n$ отображение $y = \alpha x$ R^n представляет собой умножение вектора на число и является преобразованием подобия;

2) X- множество матриц-столбцов размера n×1,

У- множество матриц-столбцов размера m×1,

Отображение У=A·X представляет собой умножение матрицы A размера m×n на столбцы X размера n×1;

3) Числовая функция y = к·x.

5.2. Переход к новому базису.

Определяется также как в случае трехмерных геометрических векторов: если для системы k векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ равенство $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}$ верно только при $\lambda_i = 0$ $(i = 1, \dots, k)$, то эта система называется *линейно независимой.*

Следовательно, решение вопроса о линейной зависимости или независимости системы n уравнений с k неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1k}\lambda_k = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2k}\lambda_k = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \ldots. + a_{nk}\lambda_k = 0 \end{cases}$$

Можно показать, что если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимы, то хотя бы один из них можно представить в виде комбинации остальных, и, наоборот.

Базис линейного векторного пространства и координаты вектора.

Любая совокупность n линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n$ называется *базисом* пространства $\mathbf{R^n}$, если каждый вектор из пространства R^n можно представить в виде линейной комбинации векторов этой совокупности, т.е.

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots. + x_n\vec{e}_n$$

Такое направление вектора называется разложением его по базису. Числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ называются координатами вектора в этом базисе.

Теорема. Координаты вектора относительно некоторого базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n$определяются единственным образом.

Доказательство:

Пусть имеется два разложения некоторого вектора $\vec{x}$ относительно базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$:

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots. + x_n\vec{e}_n$

$\vec{x} = x_1'\vec{e}_1 + x_2'\vec{e}_2 + \ldots. + x_n'\vec{e}_n$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$\vec{0} = (x_1 - x_1')\vec{e}_1 + (x_2 - x_2')\vec{e}_2 + \ldots. + (x_n - x_n')\vec{e}_n.$

Так как векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n$ линейно независимы, то значит, что коэффициенты линейной комбинации могут быть только нулями, то есть

$x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \ldots., x_n = x'_n.$

Одним из базисов пространства $\mathbf{R^n}$ является система

$$\vec{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$$
$$\vec{e}_2 = (0,1,\ldots,0)$$

…

$$\vec{e}_n = (0,0,\ldots,1)$$

Действительно, система

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$ имеет только тривиальное (нулевое)

Решение. Значит система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ линейно независима. И любой вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ разлагается по этой системе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ следующим образом $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_1\vec{e}_1 + \dots + a_n\vec{e}_n$. Т.е. координаты вектора этого коэффициенты в разложении этого вектора по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Любой другой базис пространства $\mathbf{R^n}$ также состоит из n векторов.

Размерностью пространства $\mathbf{R^n}$ называется число векторов в любом его базисе. Это означает, что если размерность пространства равна n, то в нем можно указать n линейно независимых векторов, а любые n+1 векторов этого пространства линейно независимы.

Переход к новому базису

Поскольку $\mathbf{R^n}$ может иметь не единственный базис встает вопрос, о переходе от разложения в одном базисе к разложению в другом базисе.

Пусть имеется два базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ и $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n$, и пусть некоторый вектор раскладывается по базисам $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i'\vec{\varepsilon}_i$.

Очевидно, что векторы базиса $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ также можно разложить по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$:

$$\begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 = \tau_{11}\vec{e}_1 + \tau_{21}\vec{e}_2 + \dots + \tau_{n1}\vec{e}_n \\ \vec{\varepsilon}_2 = \tau_{12}\vec{e}_1 + \tau_{22}\vec{e}_2 + \dots + \tau_{n2}\vec{e}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{\varepsilon}_n = \tau_{1n}\vec{e}_1 + \tau_{2n}\vec{e}_2 + \dots + \tau_{nn}\vec{e}_n \end{cases}.$$

Составим матрицу перехода T:

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ \dots \\ x_n{}' \end{pmatrix}, \text{тогда } X = T \cdot X' \text{или обратное соотношение } X' = T^{-1} \cdot X.$$

Матрица T называется *матрицей преобразования координат* при переходе от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \dots, \vec{\varepsilon}_n$.

Пример. Координаты вектора $\vec{x} = (6; 6; 1)$ даны в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Записать его координаты в базисе $\vec{\varepsilon}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \frac{5}{6}\vec{e}_3, \vec{\varepsilon}_2 = -5\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{\varepsilon}_1 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

Решение. Запишем матрицу перехода $T = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{5}{6} & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Строим обратную матрицу $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{5}{6} & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Поэтому

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ \frac{1}{6} & -\frac{11}{6} & 2 \\ -\frac{5}{6} & \frac{25}{6} & -4 \end{pmatrix}.$$

Тогда $x' = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ \frac{1}{6} & -\frac{11}{6} & 2 \\ -\frac{5}{6} & \frac{25}{6} & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}$. □

ГЛАВА 6. РАНГ МАТРИЦЫ. РАНГ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

6.1. Ранг матрицы. ранг системы векторов

Рассмотрим матрицу A размера m×n . Выделим в ней k строк и k столбцов (k ≤ min (m;n)). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k -го порядка. Все такие определители называются **минорами этой матрицы**.

Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется рангом матрицы. Обозначается r, r(A), rang (A).

Из определения следует:

• ранг матрицы не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. r ≤ min (m;n);

• r (A) = 0 тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е. A = O;

• для квадратной матрицы n -го порядка r (A)=n тогда и только тогда, когда матрица A — невырожденная.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется **базисным**. У матрицы может быть несколько базисных миноров. Отметим свойства ранга матрицы:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.

2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.

3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Пример. Определим ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение: с помощью элементарных преобразований приведем матрицу к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Три первых столбца образуют базисный минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Это определитель 3-го порядка, поэтому r(A) = 3.

Линейная независимость рядов матрицы.

Понятие ранга матрицы тесно связано с понятием линейной независимости ее строк или столбцов. Рассмотрим матрицу.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

В матрице A обозначим ее строки:

$e_1 = (a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n})$

$e_2 = (a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2n})$

……

$e_m = (a_{m1}\ a_{m2}\ \ldots\ a_{mn})$

Строка e называется *линейной комбинацией* строк $e_1, e_2, \ldots, e_m$, если $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m -$ целые числа.

Строки матрицы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк равна нулевой строке **0** = (0,0, …, 0).

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_m e_m = \mathbf{0}.$$

Теорема. Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных.

Пусть для определенности $\lambda_m \neq 0$ тогда

$$e_m = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right) e_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_m}\right) e_2 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right) e_{m-1}. \square$$

Если линейная комбинация строк равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны нулю, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$, то строки $e_1, e_2, \ldots, e_m$ называют *линейно независимыми.*

Теорема (о ранге матрицы). Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк, через которые линейно выражаются все остальные ее строки.

Доказательство: Пусть матрица A размера m×n имеет ранг r. Это означает, что существует отличный от нуля минор r -го порядка. Пусть для определенности это

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Докажем, что строки $e_1, e_2, \ldots, e_r$ линейно независимы. Предположим противное, что $e_r = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_{r-1} e_{r-1}$. Вычтем из нее первую строку умноженную на λ_1, вторую на λ_2 и т.д. На основании свойств определителя при этом определитель не изменится. С другой стороны определитель, содержащий нулевую строку равен нулю. Предположение неверно. Строки $e_1, e_2, \ldots, e_r$ линейно независимы.

Покажем, что любые $(r + 1)$ строк линейно зависимы, т.е. любая строка выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_r$. Рассмотрим минор $(r + 1)$-го порядка, добавив i-ю строку и j-й столбец:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

Этот минор равен нулю, т.к. ранг равен r. Разложим его по последнему столбцу $a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{rj}A_{rj} + a_{ij}A_{ij} = 0$. Алгебраическое дополнение $A_{ij} \neq 0$, т.к. совпадает с базисным минором. Разделив на него равенство выразим a_{ij} через остальные

$$a_{ij} = a_{1j}\left(-\frac{A_{1j}}{A_{ij}}\right) + a_{2j}\left(-\frac{A_{2j}}{A_{ij}}\right) + \ldots + a_{rj}\left(-\frac{A_{rj}}{A_{ij}}\right).$$

Получили, что каждый элемент i-ой строки выражается через элементы строк $e_1, e_2, \ldots, e_r$, т.е. i-ая строка ест линейная комбинация строк $e_1, e_2, \ldots, e_r$. □

Строки $e_1, e_2, \ldots, e_r$ будем называть *базисным*.

Пример. Найдем максимальное число линейно независимых строк матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.

Решение: определим ранг матрицы, используя элементарные преобразования.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad r(A) = 2.$$

Матрица содержит две линейно независимые строки.

ГЛАВА 7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

7.1. Свойства комплексных чисел.

7.2. Примеры применения комплексных чисел в экономике.

7.1. Свойства комплексных чисел

Комплексным числом называется выражение следующего вида:

$z = a + ib = Re\ z + i\ Im\ z$ - алгебраическая форма,

где a или Re z – действительная, a b или Im z – мнимая части комплексного числа.

Комплексно сопряженным числом называется число, отличающиеся от исходного только знаком (знаками) перед мнимой единицей (единицами) $z* = a - ib$.

При комплексном сопряжении меняются знаки перед всеми мнимыми единицами, входящими в это комплексное число.

1. Два комплексных числа равны, если их действительные и мнимые части соответственно равны

$z_1 = z_2 \Rightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$.

2. Сумма комплексных чисел есть комплексное число

$z_1 + z_2 = z_3 \Rightarrow a_1 + a_2 = a_3, b_1 + b_2 = b_3$.

3. Произведение комплексных чисел есть комплексное число $z_1z_2 = z_3$. Действительно

$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + i^2b_1b_2 + ia_1b_2 + +ia_2b_1 = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + +b_1a_2)$,

где используется

$$i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1,\ \ i^3 = i^2i = -i,\ \ i^4 = 1.$$

4. Частное комплексных чисел равно комплексному числу

$$\frac{z_1}{z_2} = z_3 \ \ \rightarrow \ \ z_3 = \frac{z_1z_2^*}{z_1z_2^*} = \frac{z_1z_2^*}{|z_2|^2}.$$

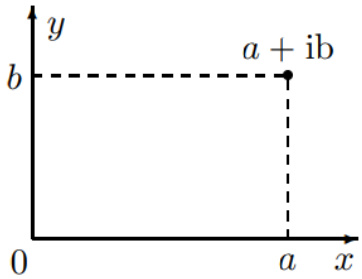
6. Модуль комплексного числа определяется, как квадратный корень из произведения комплексного числа на его комплексно сопряженное

$$zz^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

$$\boxed{|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Комплексное число в декартовой и полярной системах координат.

Задача. Каков геометрический образ комплексного числа z = a + ib?



Пара чисел — это точка на плоскости. Ее отображение в декартовой системе координат для z = x + iy, где x и y — координаты комплексного числа на комплексной плоскости, представлено на рисунке.

Задача 2. Решить уравнение: $z^3 = 1$.

$$z^3 - 1 = 0$$

$$(z-1)(z^2+z+1) = 0$$

$$z_1 = 1, z^2 + z + 1 = 0;$$

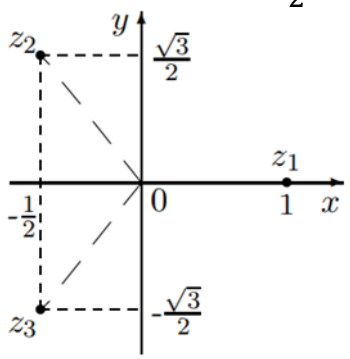
$$z_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2};\ \sqrt{-3} = \sqrt{3}\sqrt{-1} = i\sqrt{3}$$

Пример 2. Отобразить на декартовой плоскости решение задачи 2.

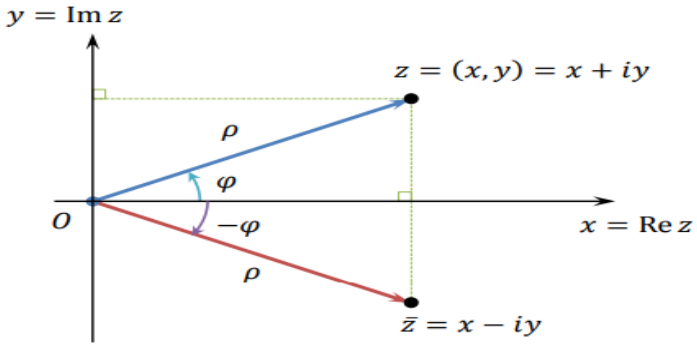
$z_1 = 1, z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$x_1 = 1, x_{2,3} = -\frac{1}{2}$,

$y_1 = 0, y_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Комплексная плоскость



Каждому комплексному числу $z = x + iy$ можно поставить в соответствие точку (x, y) на плоскости в правой декартовой системе координат Oxy (или вектор $\{x, y\}$, отложенный от начала отсчёта). Вещественным числам соответствуют точки оси Ox, которая называется вещественной осью. Чисто мнимым числам соответствуют точки оси Oy, которая называется мнимой осью.

Комплексно сопряжённому числу $\vec{z}$ соответствует точка комплексной плоскости, симметричная точке z относительно вещественной оси.

Точка z на плоскости может быть задана не только своими декартовыми координатами, но и своими полярными координатами ρ, φ. Вещественное число ρ называется модулем комплексного числа z:

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

а вещественное число φ называется аргументом числа z: Arg z = φ. Поскольку $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, $z = x + iy$, то $z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ — тригонометрическая форма записи комплексного числа.

Любое комплексное число, кроме нуля, может быть записано в тригонометрической форме. Для точки на плоскости угол φ определён с точностью до $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому различают главное значение аргумента: arg $z \in [0; 2\pi)$ или arg $z \in (-\pi; \pi]$, и многозначный аргумент: Arg z = arg z + $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, Arg $z \in (-\infty, +\infty)$.

Для того чтобы определить аргумент комплексного числа $z = x + iy$, можно использовать формулу $\mathrm{tg}\varphi = y\,x$, но при этом знания $\mathrm{tg}\varphi$ ещё не достаточно, чтобы найти φ: необходимо учитывать, в какой четверти лежит φ (а это определяется знаками x и y).

Теорема. При умножении комплексных чисел $z_1 = \rho_1 (\cos\varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$ их модули перемножаются, а аргументы складываются: $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

При делении комплексных чисел $z_1 = \rho_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$ их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Следствие. Формула Муавра: $(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача. Попытайтесь проверить следующее очень важное равенство:

$$\boxed{\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}} - \text{ формула Эйлера}$$

$|\cos\varphi + i\sin\varphi| = 1$, т. к. $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$;

$\left|e^{i\varphi}\right| = 1$, т. к. $\sqrt{e^{i\varphi}e^{-i\varphi}} = \sqrt{e^0} = 1$;

а также, при $\varphi = 0$:

$$\cos 0 + i\sin 0 = 1, \quad e^{i0} = 1$$

$e^{i\varphi}$

$$\boxed{z = |z|e^{i\varphi}} - \text{показательная форма}$$

7.2. Примеры применения комплексных чисел в экономике.

Комплексные числа очень мало используются в экономике, однако не стоит игнорировать их применение в некоторых случаях.

Наращение капитала осуществляется разными способами. Чаще всего используется наращение по сложной, годовой, процентной ставке. Важной иллюстрацией финансовой операции является график наращения. При наращении по сложной годовой процентной ставке графиком является экспонента. Другие способы наращения представляются прямыми, гиперболами. При переменной процентной ставке графики бывают сложными. Так или иначе, мы имеем дело с обычными графиками функции одной вещественной переменной (рис.). Основной проблемой стандартных способов наращения капитала является ощущение банковской системы, что операцию можно прекратить в любой момент, хотя это далеко не так.

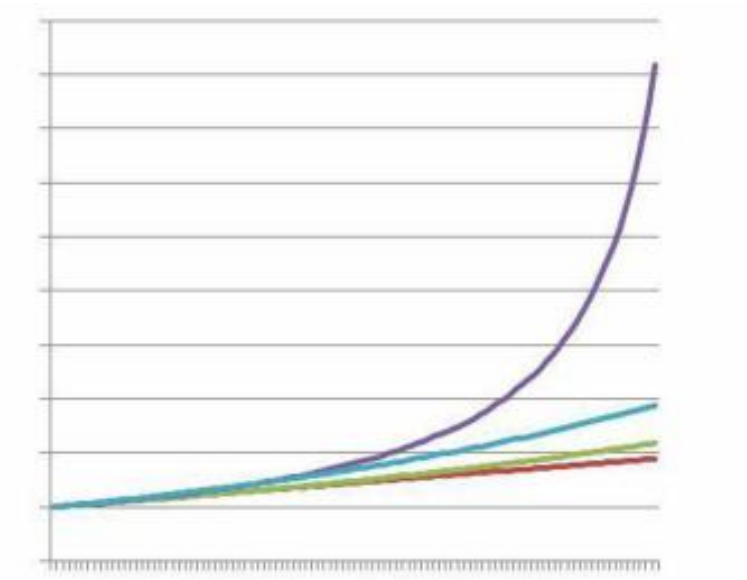
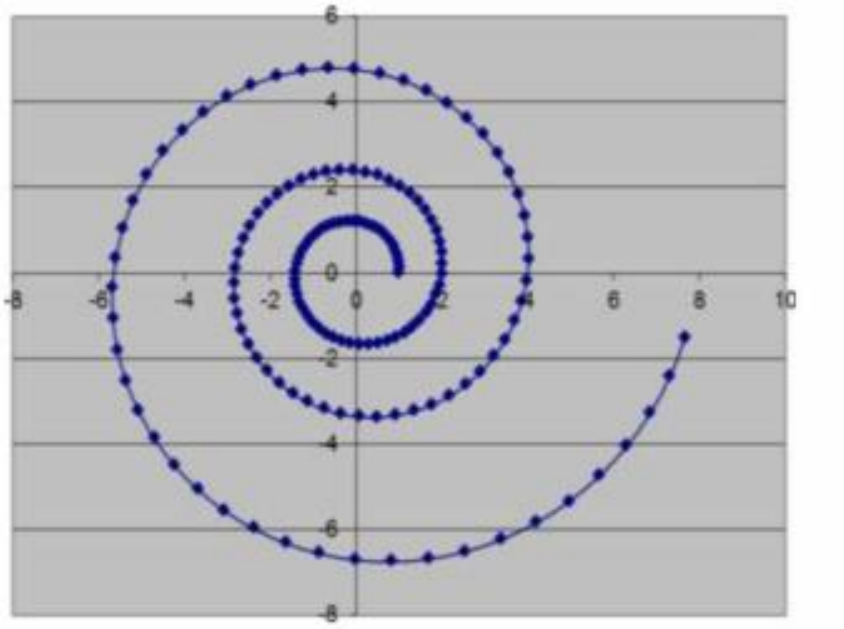


Рис.7.1. Традиционные способы наращения

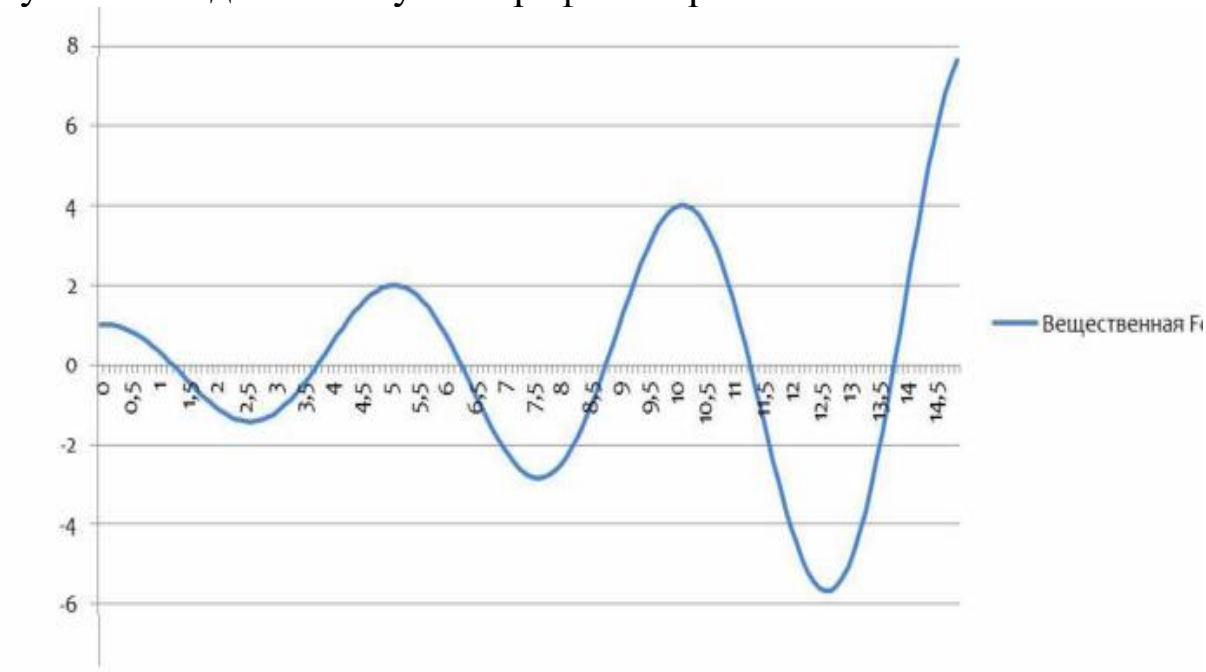
Комплексные числа z = a+i•b расширяют понятие вещественного числа. Над ними можно выполнять те же операции, что и обычные числа: сложение, умножение, возведение в степень, извлечение корней. Иначе говоря, комплексные числа образуют такое же алгебраическое поле, каким является множество вещественных чисел. Отличие лишь в том, что отсутствует важное для экономики свойство полной упорядоченности комплексных чисел.

Комплексные числа можно представить тремя способами (см выше: на комплексной декартовой плоскости, тригонометрический способ, экспоненциальный). Рассмотрим наращивание по сложной процентной ставке: $FV = PV(1+r)^t$, где начальная сумма PV наращивается в течение срока t по ставке г. Всегда считалось, что ставка г - вещественное число. Предположим, что ставка г является комплексным числом $г=a+i•b$. В таком случае мы можем изменить два параметра: вещественную и мнимую часть ставки г. После наращения комплексную часть числа FV можно опустить и рассматривать как реальную денежную сумму только вещественную часть PV. Мы наблюдаем синусоидальные колебательные явления. В экономике такое встречается довольно часто. В качестве примера можно привести сезонные колебания. Стоит отметить, что график наращения комплексной суммы FV в комплексной плоскости выглядит как спираль, которая пересекает вещественную ось. Для примера можно взять комплексную ставку г=a+1,09*, тогда мы получим график наращения, который изображен на рис. 2. Период

наращения капитала составит 5 лет, а коэффициент роста капитала за этот период будет равен 2.

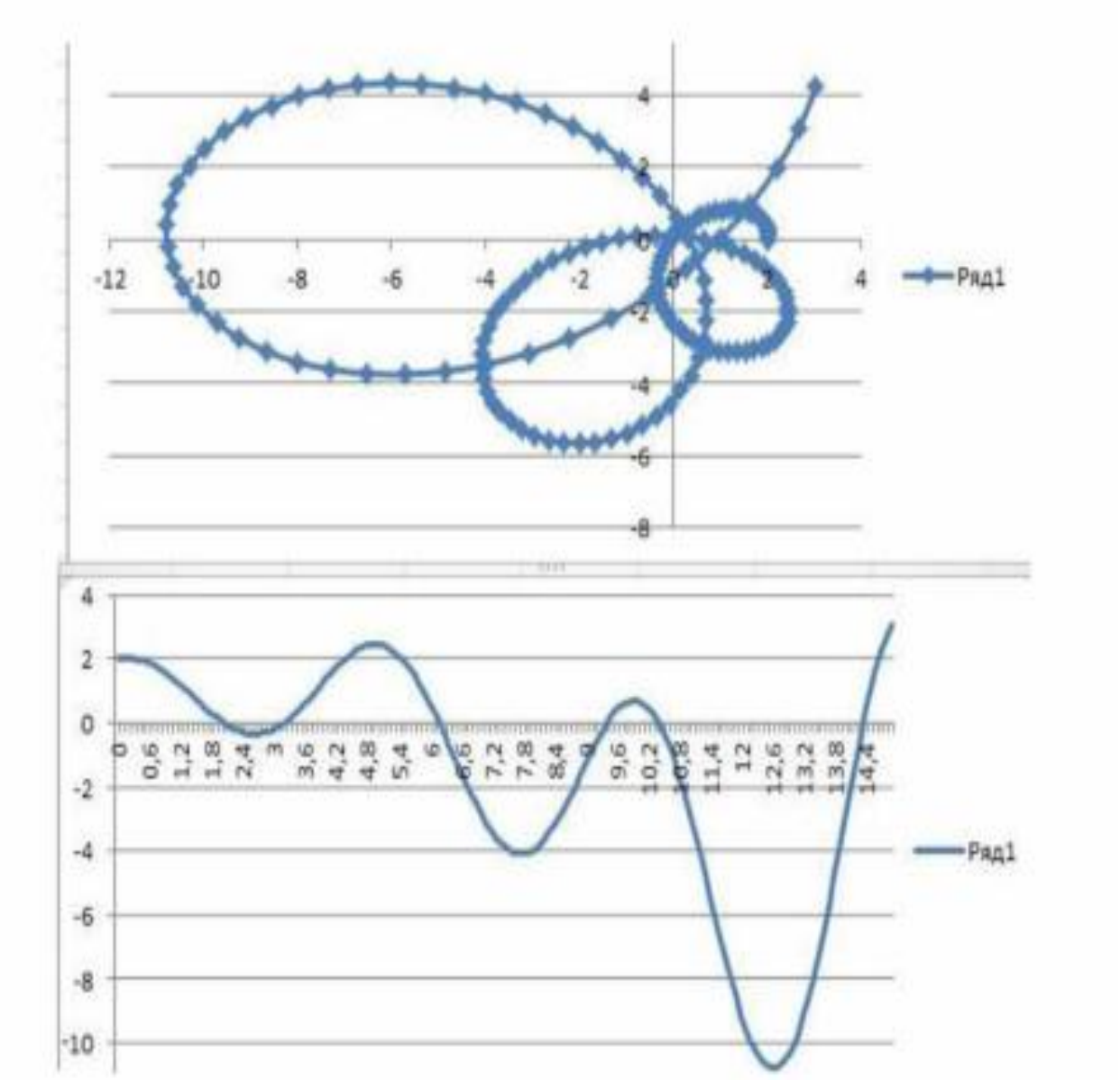


Если мы переходим к вещественным деньгам, то можно отбросить мнимую составляющую наращенной комплексной суммы. Тогда мы получим график на рис. 7.2.



Это можно объяснить довольно просто. После того, как финансовая операция началась. В определенные момент наращенная сумма FV будет положительной, т. е. стоит прекратить операцию с прибылью. Спустя некоторое время выход из операции приведет лишь к значительным убыткам, но спустя еще определенное время мы снова получаем еще большую прибыль и т. д.

Можно составлять портфели ценных бумаг используя депозиты с разными комплексными ставками. На рис. 7.3. мы можем увидеть сумму двух комплексных вложений. Если мы будем менять весовые коэффициенты вкладов в этой сумме, то сможем добиться желаемых свойств итогового портфеля.



ГЛАВА 8. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ

8.1. Собственные значения и собственные вектора

Определение: Пусть L - заданное n - мерное линейное пространство. Ненулевой Вектор $\vec{x} \in L$ называется собственным вектором линейного преобразования A, если существует такое число l, что выполняется равенство: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

При этом число λ называется собственным значением (характеристическим числом) линейного преобразования A, соответствующего вектору $\vec{x}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение: Если линейное преобразование A в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ имеет матрицу, то собственные значения линейного преобразования A можно найти как корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением, а его левая часть – характеристическим многочленом линейного преобразования A.

Следует отметить, что характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Рассмотрим частный случай. Пусть A - некоторое линейное преобразование плоскости, матрица которого равна $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда преобразование A может быть задано формулами:

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$;

в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Если преобразование A имеет собственный вектор с собственным значением λ, то $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

$$\begin{cases} x_1' = \lambda x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = \lambda x_1 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Т.к. собственный вектор $\vec{x}$ ненулевой, то x_1 и x_2 не равны нулю одновременно.

Т.к. данная система однородна, то для того, чтобы она имела нетривиальное

решение, определитель системы должен быть равен нулю. В противном случае

по правилу Крамера система имеет единственное решение - нулевое, что невозможно.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = \\ = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})$$

Полученное уравнение является характеристическим уравнением линейного Преобразования A.

Таким образом, можно найти собственный вектор $\vec{x}(x_1, x_2)$ линейного преобразования A с собственным значением λ, где λ - корень характеристического уравнения, а x_1 и x_2 - корни системы уравнений при подстановке в нее значения λ.

Понятно, что если характеристическое уравнение не имеет ействительных корней, то линейное преобразование A не имеет собственных векторов.

Следует отметить, что если $\vec{x}$ - собственный вектор преобразования A, то и любой вектор ему коллинеарный - тоже собственный с тем же самым собственным значением λ.

Действительно, $A(k\vec{x}) = kA\vec{x} = k\lambda\vec{x} = \lambda(k\vec{x})$. Если учесть, что векторы имеют одно начало, то эти векторы образуют так называемое собственное направление или собственную прямую. Т.к. характеристическое уравнение может иметь два различных действительных Корня λ_1 и λ_2, то в этом случае при подстановке их в систему уравнений получим бесконечное количество решений. (Т.к. уравнения линейно зависимы). Это множество решений определяет две собственные прямые. Если характеристическое уравнение имеет два равных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то либо имеется лишь одна собственная прямая, либо, если при подстановке в систему она превращается в систему вида: $\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \end{cases}$. Эта система удовлетворяет любым

значениям x_1 и x_2. Тогда все векторы будут собственными, и такое преобразование называется преобразованием подобия.

Пример. Найти характеристические числа и собственные векторы линейного преобразования с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Запишем линейное преобразование в виде:

$x_1' = \lambda x_1 = 5x_1 + 4x_2$

$x_2' = \lambda x_1 = 2x_1 + 3x_2$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 15 - 3\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0;$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = 7;\ \lambda_2 = 1;$

Для корня $\lambda_1 = 7$: $\begin{cases} (5-7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-7)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 - 2x_2 = 0$. Собственные векторы для первого корня характеристического уравнения имеют координаты: $(t, 0{,}5t)$ где t- параметр.

Для корня $\lambda_2 = 1$: $\begin{cases} (5-1)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-1)x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

Из системы получается зависимость: $x_1 + x_2 = 0$. Собственные векторы для второго корня характеристического уравнения имеют координаты: $(t, -t)$ где t- параметр.

Полученные собственные векторы можно записать в виде:

$$\vec{u}_1 = t(\vec{e}_1 + 0{,}5\vec{e}_2);\ \ \vec{u}_2 = t(\vec{e}_1 - \vec{e}_2).$$

Пример. Найти собственные значения и собственные вектора матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{4} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \end{pmatrix}$$

Решение. Условие для нахождения характеристического значения

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{4-\lambda} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2-\lambda} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2-\lambda} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{(4-\lambda)(2-\lambda)^2 - 3 - 3 - (4-\lambda) + 3(2-\lambda) + 3(2-\lambda) = 0}$$

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемы

$$\boldsymbol{\lambda^3 - 8\lambda^2 + 25\lambda - 18 = 0}$$

Преобразуем выражение

$$\boldsymbol{\lambda^3 - \lambda^2 - 7\lambda^2 + 7\lambda + 18\lambda - 18 = 0}$$

или

$$\boldsymbol{\lambda^2(\lambda - 1) - 7\lambda(\lambda - 1) + 18(\lambda - 1) = 0}$$

Вынесем общий множитель за скобки. Тогда получим уравнение

$$\boldsymbol{(\lambda - 1)(\lambda^2 - 7\lambda + 18) = 0}$$

Произведение равно нулю, когда один из сомножителей равен нулю. Заметим, что второй сомножитель в ноль не обращается, так как дискриминант меньше нуля.

Поэтому, характеристическое уравнение имеет всего один действительный корень.

$$\lambda = 1$$

Для нахождения собственного вектора подставим это собственное значение в систему (**).

$$\begin{cases} \boldsymbol{3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = 0} \end{cases}$$

Второе и третье уравнения одинаковые, первое разделим на 3.
Поэтому систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 - x_2 - x_3 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = 0} \end{cases}$$

Сложим оба уравнения, а затем из второго вычтем первое.
Получим

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x_1 = 0} \\ \boldsymbol{2x_2 + 2x_3 = 0} \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 0} \\ \boldsymbol{x_3 = -x_2} \end{cases}$$

Имеем собственный вектор

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ГЛАВА 9. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

9.1. Квадратичные формы.

Квадратичной формой $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух разных переменных, взятых с некоторым коэффициентом:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Запишем квадратичную форму в стандартном виде:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + a_{1n}x_1x_n +$$
$$+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \ldots + a_{2n}x_2x_n + \ldots +$$
$$+ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \ldots + a_{nn}x_nx_n$$

причем предполагаем, что $a_{ij} = a_{ji}$.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется матрицей

квадратичной формы. Квадратичная форма называется невырожденной, если r(A)=n . В матричной записи квадратичная форма имеет вид:

$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX$, где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$

Вид матрицы квадратичной формы определяется базисом, в котором задан вектор. При невырожденном линейном преобразовании переменных

$X = CY$, где $C = (c_{ij})$. Квадратичная форма принимает вид

$\Phi = X^T AX = (CY)^T A(CY) = (Y^T C^T)A(CY) =$
$Y^T(C^T AC)Y$, т. е. $A' = C^T AC$.

При некоторых удачно выбранных преобразованиях вид квадратичной формы можно существенно упростить. Квадратичная форма называется *канонической*, если $a_{ij} = 0, i \neq$ j, а ее матрица является диагональной

$\Phi = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$.

Теорема. Любая квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.

Чтобы привести квадратичную форму к каноническому виду, следует перейти к базису собственных векторов матрицы квадратичной формы A. Если собственные числа матрицы A различны, то соответствующие собственные векторы образуют ортогональный базис, который можно нормировать. В этом ортонормированном базисе матрица квадратичной формы будет иметь вид

$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n -$ собственные числа.

Линейное преобразование, которое приводит матрицу квадратичной формы к каноническому виду, имеет матрицу H. Матрица H, столбцами которой являются координаты векторов ортонормированного базиса, называется ортогональной, а линейное преобразование с такой матрицей – ортогональным преобразованием. Можно показать, что для ортогональной матрицы выполняется соотношение T T H^T = H H^T E, что означает $H^{-1} = H^T$.

Пример. Привести квадратичную форму

$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$ к каноничному виду.

Решение. Запишем матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем ее собственные числа $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 6,\ \lambda_2 = 3$. В базисе собственных векторов матрица квадратичной формы имеет вид $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, а квадратичная форма $\Phi(x_1', x_2', x_3') = -2{x_1'}^2 + 6{x_2'}^2 + 3{x_3'}^2$. □

ГЛАВА 10. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД *ЖОРДАНА - ГАУССА*

10.1. Произвольные системы линейных уравнений. Метод *Жордана – Гаусса.*
10.2. Опорные решения системы линейных уравнений.

10.1. Произвольные системы линейных уравнений. Метод *Жордана – Гаусса*.

Пусть задана *система линейных алгебраических уравнений*

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ij}x + i = a_{i0}, \qquad j = 1,2,..,m.$$

В матричной форме данная система имеет следующий вид: $Ax=A_0$.
Матрица $A_p=[A, A_0]$ называется ***расширенной матрицей***.

Метод полного исключения Жордана - Гаусса состоит из конечного числа однотипных итераций и заключается в сведении матрицы к единичному виду. Метод основывается на двух операциях:

1. одну из строк *расширенной матрицы* умножают на множитель, отличный от нуля;
2. из каждой строки *расширенной матрицы* вычитают одну строку, умноженную на некоторое число.

Каждое из таких элементарных преобразований (называемых преобразованием Гаусса) приводит к новой системе линейных уравнений, которая эквивалентна начальной системе.

Первая итерация *метода полного исключения*.

1. Среди элементов A выбирают произвольный элемент, отличный от нуля. Его называют *направляющим элементом итерации*. Строку и столбец, содержащие направляющий элемент, называют *направляющими*.
2. Все элементы направляющей строки *расширенной матрицы* делят на направляющий элемент. В результате получают направляющую строку с направляющим элементом, равным единице. Далее из элементов каждой строки матрицы A вычитают

элементы новой направляющей строки, умноженные на элементы, которые расположены на пересечении данной строки и направляющего столбца.

Матрицу, в которую преобразовалась *расширенная матрица* A_p после первой итерации, обозначим $A_p^{(1)}$. В ней все элементы направляющего столбца, кроме направляющего элемента (равного 1), стали нулями. Совокупность элементов первых n столбцов матрицы A_p, лежащих вне направляющей строки и столбца предыдущей (предыдущих) итерации называют главной частью матрицы $A_p^{(1)}$.

Вторая и дальнейшие итерации метода проводятся аналогично первой, причем до тех пор, пока имеется возможность выбора направляющего элемента.

Если после k -й итерации главная часть матрицы не содержит ни одного элемента или содержит только нули, то процесс заканчивается.

Пусть процесс оборвался после итерации 1. Предположим вначале, что среди строк матрицы $A^{(l)}$ есть такие, которые не были направляющими ни в одной из предыдущих итераций, например, строка с номером i. Тогда очевидно,

$a_{ij}=0$; j = 1, 2, ., n.

Поскольку для любой строки справедливо

$$A^{(i)}x = a_{i0}, \quad (10.1)$$

то уравнение для i -й строки имеет вид

$$0x_1 + 0x_2 + . + 0x_n = a_{i0}^{(l)} \qquad (10.2)$$

Если $a_{i0}^{(l)} \neq 0$, то уравнение (10.2) противоречиво, и данная система уравнений неразрешима.

Если $a_{i0}^{(l)} = 0$, то уравнение (10.2) представляет собой тождество и i -я строка может быть отброшена.

Перебрав одну за другой все строки матрицы $A^{(l)}$, которые не являлись направляющими, либо устанавливают неразрешимость системы уравнений, либо отбрасывают все нулевые строки.

Таким образом, в системе окажется равно l уравнений. Примем для определенности, что это первые по порядку l уравнений. Тогда полученную систему уравнений можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)} = a_{i0}^{(l)},\ i = 1,2,.,l. \qquad (10.3)$$

Пусть i -й направляющей строке соответствует i -й направляющий столбец вследствие соответствующего выбора направляющего элемента. Тогда

$$a_{ij}^{(l)} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases} \quad i = 1,2,.,l.$$

Следовательно, (1.3) можно записать в виде:

$$x_i = a_{i0}^{(l)} - \sum_{j=l+1}^{n} a_{ij}^{(l)} x_j, \qquad i = 1,2,.,l \qquad (10.5)$$

причем переменные x_i (i=1, ., l) являются базисными, а переменные x_j (j=l+1, ., n) - небазисными.

При $x_j = 0$ (j=l+1, ., n) получим одно из базисных решений системы уравнений $x_i = a_{i0}^{(l)},\ i = 1,2,.,l,\ x_j = 0; j = i+1,.,n.$

Задавая для x_j произвольные значения α_j, получим полное множество решений.

Если x_i - i -я компонента этого решения, то

$$x_i = \begin{cases} a_{i0} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\alpha_j, & \text{если } i = 1,\dots,l \\ \alpha_i, \text{если } i = l+1, & l+2,\dots,n \end{cases} \qquad (10.6)$$

Обозначим

$x_0 = (a_{10}, a_{20}, \dots, a_{l0}, 0, \dots, 0)$

$x_j = (-a_{1j}, -a_{2j}, \dots, -aij, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0), \qquad 1 \leq j \leq n.$

Тогда общее (полное) *решение системы линейных уравнений* определяется соотношением, аналогичным (10.6):

$$x_{\text{общ}} = x_0 + \sum_{j=i+1}^{n} a_j x_j \qquad (10.7)$$

где x_0 - *базисное решение* начальной системы уравнений; $= \sum_{j=i+1}^{n} a_j x_j$ - полное решение соответствующей однородной системы уравнений (то есть при $A_0=0$).

Обозначим *расширенную матрицу* системы уравнений после k -й итерации через

$$A_p^{(k)} = \left[a_{i0}^{(k)}, a_{i1}^{(k)}, ., a_i n^{(k)}\right], \qquad i = 1,2,.,m.$$

Пусть $a_{ij}^{(k)}$ - направляющий элемент преобразования на (k+1) -й итерации. Тогда в результате (k+1) -й итерации *метода полного исключения* Гаусса получим матрицу $A_p^{(k+1)}$, элементы которой определяются следующими соотношениями:

1. для всех элементов направляющей строки

$$a_{il}^{(k+1)} = \frac{a_{il}^{(k)}}{a_{ij}^{(k)}}, \qquad l = 1,2,.,n; \tag{10.8}$$

2. для элементов направляющего столбца

$$a_{rj}k + 1 = 0; \;\; r = 1,.,n, \quad \text{причем } r \neq u; \; a_{ij(k+1)} = 1; \tag{10.9}$$

3. для всех остальных элементов матрицы

$$a_{ri}^{k+1} = a_{ri}^{k} - \frac{a_{il}^{(k)}}{a_{ij}^{(k)}} a_{rj}^{(k)}, \qquad l \neq j, r \neq i. \tag{10.10}$$

Пример: Решить систему уравнений методом Жордана-Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 20, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$$

Разделив 1-ю строку на 2, получим

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$$

Исключим теперь члены с x_1 из 2-го и 3-го уравнений, вычитая из 2-й строки 1-ю, умноженную на 4, а из 3-й – 1-ю, умноженную на 3. Это дает

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10, \\ -14x_2 - 14x_3 = -42, \\ -13x_2 - 8x_3 = -19. \end{cases}$$

Разделим 2-ю и 3-ю строки соответственно на –14 и –1:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10, \\ x_2 + x_3 = 3, \\ 13x_2 + 8x_3 = 19. \end{cases}$$

Умножим 2-ю строку на 13 и вычтем из 3-й:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10, \\ x_2 + x_3 = 3, \\ -5x_3 = -20. \end{cases}$$

Разделим, наконец, 3-ю строку на –5:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10, \\ x_2 + x_3 = 3, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

Тогда решением является $x_3=4$, $x_2=3$, $x_3=-1$,$x_1=10-4x_2-3x_3=2$

Здесь имеет место случай, когда число уравнений равно числу неизвестных, и решение единственно.

10.2. Опорные решения системы линейных уравнений

Применение математических методов в экономике приводит к необходимости отыскания неотрицательных решений системы линейных уравнений, т.е. таких, в которых $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \dots, x_j \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

При этом особое значение имеют неотрицательные базисные решения, которые принято называть **опорными решениями**.

Таким образом, у опорных решений все базисные неизвестные должны иметь только неотрицательные значения.

Отсюда естественным образом получается один из способов отыскания опорных решений системы: из всех базисных решений выбрать одно, несколько или все (сколько требуется по условию задачи) неотрицательные решения (конечно, если они существуют в нужном количестве или вообще существуют).

Отсюда же видно, что число опорных решений системы может быть значительно меньше числа базисных решений, т.е. пытаться предварительно отыскать все базисные решения – не слишком благодарная работа. Еще раз отметим, что в базисном решении системы значения базисных неизвестных равны свободным членам системы, приведенной к единичному базису, и для того, чтобы базисное решение оказалось опорным, необходимо и достаточно, чтобы эти свободные члены были неотрицательными.

Поэтому задачу отыскания опорных решений системы естественно начать с того, чтобы сделать все ее свободные члены неотрицательными (для этого каждое уравнение с отрицательным свободным членом достаточно умножить на (-1)).

Далее можно воспользоваться тем же алгоритмом приведения системы к единичному базису, что и при получении базисных решений, только его следует дополнить **специальным правилом**

выбора ключевого элемента: ключевой столбец (допустим p-й) выбирается так, чтобы он имел хотя бы один положительный элемент a_{ip}, и составляются отношения $\frac{b_i}{a_{ip}}$ свободных членов b_i к соответствующим положительным элементам ключевого столбца; то уравнение (пусть q-е), для которого указанное отношение оказывается наименьшим, выбирается в качестве ключевого (ключевой строки).

Таким образом

$$\frac{b_q}{a_{qp}} = \min_{\text{для } a_{ip}>0} \left\{ \frac{b_i}{a_{ip}} \right\} \qquad (11.1)$$

После получения исходного (первого) опорного решения системы возникает вторая задача, как последовательно перейти от него к следующему, тоже опорному решению. Оказывается, для этого можно использовать алгоритм преобразования однократного замещения, дополненный этим же правилом (1) выбора ключевого элемента.

Преобразования системы с неотрицательными свободными членами к единичному базису, а также преобразования однократного замещения (и те, и другие), при которых выбор ключевого элемента производится по указанному правилу (1), принято называть **симплексными преобразованиями**.

Для симплексных преобразований справедлива следующая теорема:

Если все свободные члены уравнений системы неотрицательны, то после симплексных преобразований системы они останутся неотрицательными.

Сформулированная теорема подтверждает правило отыскания опорного решения методом Жордана-Гаусса, состоящее в соблюдении следующих условий:

1) все свободные члены уравнений системы должны быть неотрицательными; если есть хотя бы один отрицательный свободный член, то соответствующее ему уравнение нужно умножить на (-1);

2) в базис можно ввести только то неизвестное, у которого есть хотя бы один положительный коэффициент;

3) если при неизвестной, вводимой в базис, имеются положительные коэффициенты в нескольких уравнениях, то неизвестная вводится в базис в том уравнении, которому

соответствует наименьшее отношение свободных членов к этим положительным коэффициентам.

Пример 11.1. Найдите опорное решение системы уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1} \\ \boldsymbol{-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -2} \\ \boldsymbol{2x_1 \quad + x_3 - 2x_4 - x_5 = 2}. \end{cases}$$

Решение.

Так как во втором уравнении свободный член $b_2 = -2 < 0$, умножим это уравнение на (-1). Заполним исходную таблицу Гаусса.

i	Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{d_i}$
1		1	-2	1	2	-1	1	2
2		1	-1	2	-1	-1	2	2
3		2	0	1	-2	-1	2	2

Все свободные члены положительные. При неизвестной x_1 есть положительные коэффициенты, значит, можно ее ввести в базис. Поскольку положительные коэффициенты при x_1 присутствуют во всех трех уравнениях, следует найти (согласно формуле (1)) минимальное отношение свободных членов к этим положительным коэффициентам, т.е. $\min\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}\right\} = 1$.

Это минимальное отношение соответствует как первой, так и третьей строке, следовательно, x_1 можно вводить в базис как в первом уравнении, так и в третьем. Введем x_1 в базис в первом уравнении: ключевой элемент a_{11} , ключевая строка первая, ключевой столбец первый.

Составляем таблицу Гаусса I итерации.

i	Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{d_i}$
1	$\boldsymbol{x_1}$	1	-2	1	2	-1	1	2
2		0	1	1	-3	0	1	0
3		0	4	-1	-6	1	0	-2

При неизвестной x_3 есть положительные коэффициенты в первом и во втором уравнениях, причем во втором уравнении нет базисной переменной. Но x_3 можно ввести в базис только в том

случае, если минимальное отношение свободных членов к положительным коэффициентам соответствует второму уравнению.

Находим $\min\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{1}\right\}=1.$

Отсюда следует, что x_2 можно ввести в базис во втором уравнении.

Составляем таблицу Гаусса II итерации.

i	Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{d_i}$
1	$\boldsymbol{x_1}$	1	-3	0	5	-1	0	2
2	$\boldsymbol{x_3}$	0	1	1	-3	0	1	0
3		0	5	0	-9	1	1	-2

При неизвестной x_5 всего один положительный коэффициент (в третьем уравнении), поэтому ее можно ввести в базис в третьем уравнении.

Составляем таблицу Гаусса III итерации.

i	Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{d_i}$
1	$\boldsymbol{x_1}$	1	2	0	-4	0	1	0
2	$\boldsymbol{x_3}$	0	1	1	-3	0	1	0
3	$\boldsymbol{x_5}$	0	5	0	-9	1	1	-2

Итак, система приведена к единичному базису. Выпишем общее решение системы

$$\begin{cases}\boldsymbol{x_1=1-2x_2+4x_4}\\ \boldsymbol{x_3=1-x_2+3x_4}\\ \boldsymbol{x_5=1-5x_2+9x_4}\end{cases}$$

и опорное решение $\bar{X}_{\text{опор}}=(1;0;1;0;1)$.

Ответ: $\bar{X}_{\text{опор}}=(1;0;1;0;1)$.

Пример 2. Найдите опорное решение системы уравнений

$$\begin{cases}\boldsymbol{-x_1+x_2\quad -x_4+3x_5=-1}\\ \boldsymbol{2x_1+x_2-x_3+2x_4+2x_5=1}\\ \boldsymbol{2x_1+x_2-3x_3+x_4+2x_5=4.}\end{cases}$$

Решение.

Так как $b_1=-1<0$, то в таблицу исходной системы запишем результат умножения первого уравнения на (-1).

i	Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{d_i}$
1		1	-1	0	1	-3	1	-1

i	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	d_i
2		2	1	-1	2	2	1	7
3		2	1	-3	1	2	4	7

При неизвестной x_2 есть два положительных коэффициента и так как $\min\left\{\frac{1}{1},\frac{4}{1}\right\}=1$, то вводим x_2 в базис во втором уравнении.

В таблице Гаусса I итерации

i	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	d_i
1		3	0	-1	3	-1	2	6
2	x_2	2	1	-1	2	2	1	7
3		0	0	-2	-1	0	3	0

Неизвестную x_1 нельзя ввести в базис, не выводя из него x_2, т.к. $\min\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$, что соответствует второму уравнению.

Точно так же нельзя ввести в базис неизвестную x_4, не выводя из него x_2, т.к. $\min\left\{\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$ приходится на второе уравнение. У неизвестной x_5 единственный положительный коэффициент также приходится на второе уравнение. У неизвестной x_3 все коэффициенты отрицательные.

Поэтому мы не можем получить опорное решение системы, вводя в базис первой неизвестную x_2. Этот вывод можно было бы сделать быстрее, заметив, что в третьей строке при положительном свободном члене $b_1{}'=3$ нет ни одного положительного коэффициента при неизвестных.

Попытаемся начать приведение системы к единичному базису с других неизвестных.

Для неизвестной x_1 : $\min\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{4}{2}\right\}=\frac{1}{2}$, поэтому вводим x_1 в базис во втором уравнении.

При этом исходная таблица имеет вид:

i	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	d_i
1		1	-1	0	1	-3	1	-1
2		2	1	-1	2	2	1	7
3		2	1	-3	1	2	4	7

В третьей строке таблицы I итерации

i	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	d_i
1		0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-4	$\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{2}$
2	x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
3		0	0	-2	-1	0	3	0

опять нет ни одного положительного коэффициента при неизвестных (при положительном свободном члене). Поэтому мы не можем получить опорные решения, вводя в базис первой неизвестную x_1.

Для неизвестной x_5: $\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{4}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, поэтому вводим x_5: в базис во втором уравнении. При этом исходная таблица имеет вид:

i	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	d_i
1		1	-1	0	1	-3	1	-1
2		2	1	-1	2	2	1	7
3		2	1	-3	1	2	4	7

А в третьей строке таблицы I итерации та же картина:

i	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	d_i
1		4	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	4	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{19}{2}$
2	x_5	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
3		0	0	-2	-1	0	3	0

Для неизвестной x_4: $\min\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{4}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, поэтому вводим x_4: в базис во втором уравнении. При этом исходная таблица имеет вид:

i	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	d_i
1		1	-1	0	1	-3	1	-1
2		2	1	-1	2	2	1	7
3		2	1	-3	1	2	4	7

Таблица I итерации выглядит так:

i	Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{d_i}$
1		0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-4	$\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{2}$
2	$\boldsymbol{x_4}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
3		1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	1	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$

Теперь ни x_1 , ни x_2, ни x_5: нельзя ввести в базис, не выводя из него x_4. Остается единственная возможность: ввести в базис x_3 в первом уравнении. Получим таблицу II итерации:

i	Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{d_i}$
1	$\boldsymbol{x_3}$	0	-3	1	0	-8	1	-9
2	$\boldsymbol{x_4}$	1	-1	0	1	-3	1	-1
3		1	-7	0	0	-19	6	-19

Теперь в базис можно ввести лишь неизвестную x_1, но только убрав из него x_4 (так как $\min\left\{\frac{1}{1},\frac{6}{1}\right\} = 1$ приходится на второе уравнение).

Мы исчерпали **все допустимые** возможности выбора первой базисной неизвестной (и других) и не смогли получить опорного решения. Следовательно, мы доказали, что данная система опорных решений не имеет.

Ответ: система не имеет опорных решений.

Заметим, что в нескольких случаях преобразования данной системы к единичному базису мы приходили к одному и тому же уравнению $-2x_3 - x_4 = 3$, которое не может иметь неотрицательных решений. Легко обнаружить, что это уравнение является следствием второго и третьего уравнений исходной системы (оно получается вычитанием второго уравнения из третьего).

Вспоминая, что при элементарных преобразованиях системы мы получаем на каждом шаге систему, эквивалентную исходной, можем сделать полезный практический вывод: если в процессе симплексных преобразований (а они также являются элементарными) хотя бы в одном уравнении при положительном свободном члене нет ни одного положительного коэффициента, то (так как оно не может иметь неотрицательных решений)

полученная система, а, следовательно, и исходная, не имеют опорных решений.

Поэтому в примере 2 поиски опорных решений можно было прекратить после получения таблицы I итерации с базисной неизвестной x_2, которая уже содержала уравнение $-2x_3 - x_4 = 3$ (в третьей строке).

Отметим, что совместная система линейных уравнений может иметь хотя бы одно опорное решение (пример 1), несколько опорных решений, не иметь опорных решений (система примера 2; она совместная и имеет, что легко проверить, базисное решение $\bar{X}_{\text{баз}} = (6; 0; 1; -5; 0)$, но не имеет опорных решений).

Обратим внимание на то обстоятельство, что некоторые неудобства в процесс отыскания опорных решений могут внести свободные члены, равные нулю. Они могут содержаться в исходной системе или могут появиться в системе (даже если все начальные свободные члены были положительны) в процессе симплексных преобразований, если при выборе ключевого элемента минимальное отношение свободных членов к соответствующим коэффициентам при неизвестной (формула (1)) одинаково хотя бы для двух уравнений. Так было при решении примера 14: в I итерации было получено $b_3{}' = 0$, во II итерации получилось $b_1{}'' = 0$.

Неудобство нулевого свободного члена состоит в том, что он может существенно ограничивать выбор ключевого элемента (в первую очередь выбор ключевой строки), так как если в i-й строке с нулевым b_i есть положительный коэффициент при неизвестной, вводимой в базис, то она должна вводиться именно в этой, i-й строке, т.к. отношение, равное 0, является минимальным (и единственным, если нет других нулевых свободных членов).

При решении примера 1 этого неудобства не возникло, так как в таблице I итерации при $b_3' = 0$ коэффициент при неизвестной x_3, вводимой в базис, оказался отрицательным $a_{33}' = -1$, как и коэффициент при неизвестной x_5 , вводимой в базис в таблице II итерации при $b_1'' = 0 (a_{15}'' = -1)$. Но так бывает не всегда.

Пример 3. Найдите опорное решение системы

$$\begin{cases} -\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{2x_2} - \boldsymbol{2x_3} + \boldsymbol{x_4} = \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{2x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{2x_3} - \boldsymbol{x_4} + \boldsymbol{2x_5} = \boldsymbol{3} \\ -\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{2x_4} + \boldsymbol{x_5} = \boldsymbol{2}. \end{cases}$$

Решение.

Заполним исходную таблицу Гаусса.

i	Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{d_i}$
1		-1	-2	-2	1	0	1	-3
2		2	1	2	-1	2	3	9
3		-1	-1	0	2	1	2	3

При неизвестной x_4 есть два положительных коэффициента и так как $\min\left\{\frac{1}{1}, \frac{2}{2}\right\} = 1$, то ввести x_4 в базис можно как в первом, так и в третьем уравнении. Введем x_4 в базис в первом уравнении.

Получим таблицу I итерации:

i	Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{d_i}$
1	$\boldsymbol{x_4}$	-1	-2	-2	1	0	1	-3
2		1	-1	0	0	2	4	6
3		1	3	4	0	1	0	9

Теперь в базис можно вводить неизвестные $\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, x_5}$ и только в третьем уравнении ($\boldsymbol{b_3' = 0}$). Введем в базис $\boldsymbol{x_1}$ и заполним таблицу II итерации:

i	Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{d_i}$
1	$\boldsymbol{x_4}$	0	1	2	1	1	1	6
2		0	-4	-4	0	1	4	-3
3	$\boldsymbol{x_1}$	1	3	4	0	1	0	9

Здесь во втором (единственном неиспользованном уравнении) положительный коэффициент только при $\boldsymbol{x_5}$, но $\boldsymbol{\min\left\{\frac{4}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{1}\right\} = 0}$ приходится на уже использованное третье уравнение. Поэтому будем пробовать вводить в базис

второй неизвестной одну из неизвестных $\boldsymbol{x_2}$, $\boldsymbol{x_3}$ и $\boldsymbol{x_5}$ (по очереди) и заполнять новые таблицы I и II итерации.

Начнем с неизвестной $\boldsymbol{x_2}$:

№ итерации	i	Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{d_i}$
I	1	$\boldsymbol{x_4}$	-1	-2	-2	1	0	1	-3
	2		1	-1	0	0	2	4	6
	3		1	3	4	0	1	0	9
II	1	$\boldsymbol{x_4}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	1	3
	2		$\frac{4}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{7}{3}$	4	9
	3	$\boldsymbol{x_2}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{}{3}$	0	3

Опять возникла та же ситуация: вводить в базис можно $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_3}$ и $\boldsymbol{x_5}$, но только в уже использованном третьем уравнении.

Результат повторился бы, если бы вторую неизвестную вводили в базис $\boldsymbol{x_3}$ или $\boldsymbol{x_5}$ (читателю предоставляется возможность убедиться в этом самостоятельно).

Возникает предположение об отсутствии опорных решений у данной системы. И это действительно лишь предположение: в отличие от примера 2 мы рассмотрели не все допустимые возможности выбора базисных неизвестных (ведь первой неизвестной могла быть выбрана не только $\boldsymbol{x_4}$, а и любая из остальных). Конечно, можно было бы продолжить процесс симплексных преобразований исходной системы.

Но мы поступим иначе. Обратим внимание на третье уравнение системы, полученной после первого симплексного преобразования:

$$\boldsymbol{x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_5 = 0}.$$

Все его коэффициенты неотрицательны, а свободный член равен нулю. Поэтому, если система и имеет хотя бы одно неотрицательное решение, то в нем обязательно должно быть $\boldsymbol{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0}$ и $\boldsymbol{x_5 = 0}$. В противном случае (если хотя бы одна из перечисленных переменных отлична от нуля, т.е.

положительна) равенство невозможно (его левая часть будет положительной, а правая равна 0).

Остается проверить, имеет ли система неотрицательные решения, у которых

$$\boldsymbol{x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0}.$$

Подставляя указанные значения неизвестных в исходную систему, получим систему трех уравнений относительно неизвестной $\boldsymbol{x_4}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_4 = 1} \\ \boldsymbol{-x_4 = 3} \\ \boldsymbol{2x_4 = 2} \end{cases}.$$

Она, очевидно, несовместна. Следовательно, заданная система действительно не имеет опорных решений.

Ответ: система не имеет опорных решений.

Пример 4. Найдите опорное решение системы

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 1} \\ \boldsymbol{-x_1 - 3x_2 - 5x_3 \quad - 7x_5 = 0} \\ \boldsymbol{3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 = 3}. \end{cases}$$

Решение.

Сразу замечаем, что во втором уравнении системы свободный член равен нулю, а все коэффициенты при переменных неположительны. Умножим это уравнение на (-1) (при этом свободный член останется равным нулю, т.е. неотрицательным): $\boldsymbol{x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_5 = 0}$.

В этом уравнении свободный член равен нулю, а все коэффициенты при переменных неотрицательны. Отсюда следует, что если существует опорное решение данной системы, то в нем $\boldsymbol{x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0}$. Подставляя в систему эти значения переменных, для неизвестного $\boldsymbol{x_4}$ получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_4 = 1} \\ \boldsymbol{3x_4 = 3'} \end{cases}$$

из которой находим $\boldsymbol{x_4 = 1 \geq 0}$.

Таким образом единственное опорное решение данной системы $\bar{X}_{\text{опор}} = (0; 0; 0; 1; 0)$.

Ответ: $\bar{X}_{\text{опор}} = (0; 0; 0; 1; 0)$.

Примеры 3 и 4 показывают, что отыскание опорных решений системы, имеющей (или приобретающей) хотя бы один нулевой свободный член требует повышенного внимания и особой аккуратности. Поэтому (если, конечно, это представляется возможным) следует такой ситуации избегать.

Заметим, что, как и раньше, таблицы Гаусса исходной системы и всех последующих итераций удобно записывать в виде одной большой таблицы, причем теперь (для симплексных преобразований) мы дополним ее столбцом отношений свободных членов к нужным положительным элементам столбцов с переменными (т.е. к положительным элементам будущих ключевых столбцов).

Пример 5. Найдите опорное решение системы

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1} \\ \boldsymbol{-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 2} \\ \boldsymbol{2x_1 \quad + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2}. \end{cases}$$

Решение.

Таблица 10.1

№ итерации	i	Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{d_i}$	$\boldsymbol{\frac{b_i}{a_{ip}}}$
Исходная система	1		1	-2	1	2	-1	1	2	
	2		-1	1	-2	1	1	2	2	
	3		2	0	1	2	-1	2	6	
I	1		0	-1	-1	3	0	3	4	
	2	$\boldsymbol{x_5}$	-1	1	-2	1	1	2	2	
	3		1	1	-1	3	0	4	8	
II	1		0	-1	-1	3	0	3	4	1
	2	$\boldsymbol{x_5}$	0	2	-3	4	1	6	10	$\boldsymbol{\frac{3}{2}}$
	3	$\boldsymbol{x_1}$	1	1	-1	3	0	4	8	$\boldsymbol{\frac{4}{3}}$
III	1	$\boldsymbol{x_4}$	0	$\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$	1	0	1	$\boldsymbol{\frac{4}{3}}$	

	2	$\boldsymbol{x_5}$	0	$\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}$	$-\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$	0	1	2	$\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{3}}$	
	3	$\boldsymbol{x_1}$	1	2	0	0	0	1	4	

В результате симплексных преобразований (в таблицах Гаусса) система приведена к единичному базису. Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = 1 - 2x_2} \\ \boldsymbol{x_4 = 1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3} \\ \boldsymbol{x_5 = 2 - \frac{10}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3} \end{cases}, \quad \boldsymbol{\bar{X}_{\text{опор}} = (1; 0; 0; 1; 2)}.$$

Ответ: $\boldsymbol{\bar{X}_{\text{опор}} = (1; 0; 0; 1; 2)}$.

Как уже отмечалось, с помощью симплексных преобразований можно найти не только одно, а и несколько опорных решений (или даже все) данной системы линейных уравнений.

Для этого к системе, приведенной к единичному базису и определяющей тем самым какое-то одно (исходное) опорное решение, следует применить симплексное преобразование однократного замещения. В результате получится новое опорное решение.

Осуществить это симплексное преобразование можно лишь в том случае, если в соответствующей системе есть хотя бы один положительный коэффициент при какой-либо свободной переменной. Если же все коэффициенты при всех свободных переменных отрицательны или равны нулю, то перейти к другому опорному решению нельзя.

Так, в таблице III итерации примера 5 (определяющей опорное решение) у свободной переменной $\boldsymbol{x_3}$ нет положительных коэффициентов, а у свободной переменной $\boldsymbol{x_2}$ - есть, причем два. Так как $\min\left\{\frac{2}{10/3}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, то переменную $\boldsymbol{x_2}$ можно ввести в базис в третьем уравнении (вместо переменной $\boldsymbol{x_1}$).

Перепишем вновь таблицу III итерации и заполним таблицу IV итерации:

III '	1	$\boldsymbol{x_4}$	0	$\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$	$\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$	1	0	1	$\boldsymbol{\frac{4}{3}}$	
	2	$\boldsymbol{x_5}$	0	$\boldsymbol{\frac{10}{3}}$	$\boldsymbol{-\frac{5}{3}}$	0	1	2	$\boldsymbol{\frac{14}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{3}{5}}$
	3	$\boldsymbol{x_1}$	1	2	0	0	0	1	4	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$
IV	1	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{\frac{1}{6}}$	0	$\boldsymbol{-\frac{1}{3}}$	1	0	$\boldsymbol{\frac{7}{6}}$	2	
	2	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{-\frac{5}{3}}$	0	$\boldsymbol{-\frac{5}{3}}$	0	1	$\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	-2	
	3	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	1	0	0	0	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	2	

Из таблицы IV итерации находим $\boldsymbol{\bar{X}'_{\text{опор}} = (0; \frac{1}{2}; 0; \frac{7}{6}; \frac{1}{3})}$.

В таблице IV итерации у свободной переменной $\boldsymbol{x_3}$ нет положительных коэффициентов, а у переменной $\boldsymbol{x_1}$ - есть (два). И так как $\min\left\{\frac{7/6}{1/6}, \frac{1/2}{1/2}\right\} = 1$, то $\boldsymbol{x_1}$ можно ввести в базис вместо $\boldsymbol{x_2}$ и получить базисные переменные $\boldsymbol{x_1, x_4, x_5}$, что уже было в первом опорном решении.

Следовательно, новых опорных решений получить нельзя и система примера 18 имеет только два опорных решения:

$$\boldsymbol{\bar{X}_{\text{опор}} = (1; 0; 0; 1; 2)} \text{ и } \boldsymbol{\bar{X}'_{\text{опор}} = \left(0; \frac{1}{2}; 0; \frac{7}{6}; \frac{1}{3}\right)}.$$

Пример 6. Найдите все опорные решения системы

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 \quad - x_3 + 2x_4 = 4} \\ \boldsymbol{x_2 + 2x_3 + x_4 = 12} \end{cases}.$$

Решение.

Таблица 10.2

№ итерации	i	Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{d_i}$	$\boldsymbol{\frac{b_i}{a_{ip}}}$	Опорные решения
Исходная система	1	$\boldsymbol{x_1}$	1	0	-1	2	4	6		$\boldsymbol{\bar{X}_0 = (4; 12; 0; 0)}$ $\boldsymbol{p = 3, q = 2}$
	2	$\boldsymbol{x_2}$	0	1	2	1	12	16		
I	1	$\boldsymbol{x_1}$	1	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	0	$\boldsymbol{\frac{5}{2}}$	10	14	4	

	2	x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	6	8	12	$\bar{X}_1 = (10; 0; 6; 0)$ $p = 4, q = 1$
II	1				0	1	4		20	
	2		-		1	0	4		10	
III	1	x_4	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	2	3		$\bar{X}_3 = (0; 10; 0; 2)$
	2	x_2	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	0	10	13		

В последнем столбце таблицы 10.2 указаны четыре опорных решения данной системы, соответствующие таким парам базисных переменных: x_1, x_2; x_1, x_3; x_3, x_4; x_2, x_4; при этом буква p означает номер переменной, вводимой в базис на следующей итерации, а буква q- номер уравнения, в котором это происходит.

Заметим, что базисных решений эта система имеет $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$. Среди четырех полученных опорных решений отсутствуют решения с базисными переменными x_1, x_4 и x_2, x_3.

Анализ таблицы 2 показывает, что эти пары переменных нельзя ввести в базис при симплексных преобразованиях системы. При этом III итерация дала последнее опорное решение $\bar{X}_3$. Если теперь выбрать $\bar{a}_p = \bar{a}_1$, то получим $q = 1$ и придем к базису, состоящему из векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, а такой базис уже фигурировал в исходной системе. Выбирая $\bar{a}_p = \bar{a}_3$, найдем $q = 2$ и получим базис, участвовавший во II итерации.

Ответ: $\bar{X}_0 = (4; 12; 0; 0)$, $\bar{X}_1 = (10; 0; 6; 0)$, $\bar{X}_2 = (0; 0; 4; 4)$, $\bar{X}_3 = (0; 10; 0; 2)$.

Пример 7. Найдите все опорные решения системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 - x_5 = 5 \\ x_2 - x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_3 + 2x_5 = 4. \end{cases}$$

Решение.

Таблица 10.3

№ итерации	i	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	d_i	$\frac{b_i}{a_{ip}}$	Опорные решения
Исходная система	1	x_1	1	0	0	2	-1	5	7		$\bar{X}_1 = (5;3;4;0;0)$ $p=5, q=2$
	2	x_2	0	1	0	-1	3	3	6	1	
	3	x_3	0	0	1	0	2	4	7	2	
I	1	x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	6	9	$\frac{18}{5}$	$\bar{X}_2 = (6;0;2;0;1)$ $p=4, q=3$
	2	x_5	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	1	2		
	3	x_3	0	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	2	3	3	
II	1	x_1	1	2	$-\frac{5}{2}$	0	0	1	$\frac{3}{2}$		$\bar{X}_3 = (1;0;0;3;2)$ $p=2, q=1$
	2	x_5	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	2	$\frac{7}{2}$		
	3	x_4	0	-1	$\frac{3}{2}$	1	0	3	$\frac{9}{2}$		
III	1	x_2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$		$\bar{X}_4 = \left(0;\frac{1}{2};0;\frac{7}{2};2\right)$ $p=3, q=2$
	2	x_5	0	0	$\frac{1}{2}$	0	1	2	$\frac{7}{2}$	7	
	3	x_4	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{21}{4}$	21	
IV	1	x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{19}{2}$		$\bar{X}_5 = \left(0;\frac{11}{2};4;\frac{5}{2};0\right)$
	2	x_3	0	0	1	0	2	4	7		
	3	x_4	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$		

После проведения IV итерации получено последнее (пятое) опорное решение. В самом деле, если выбрать $\bar{a}_p = \bar{a}_1$, то получим $q = 3$ и базис из векторов $\bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_1$, но к нему уже была приведена исходная система. Если же взять $\bar{a}_p = \bar{a}_5$, то получим $q = 2$ и базис, участвовавший в III итерации.

Ответ: $\bar{X}_1 = (5; 3; 4; 0; 0)$, $\bar{X}_2 = (6; 0; 2; 0; 1)$, $\bar{X}_3 = (1; 0; 0; 3; 2)$, $\bar{X}_4 = \left(0; \frac{1}{2}; 0; \frac{7}{2}; 2\right)$, $\bar{X}_5 = \left(0; \frac{11}{2}; 4; \frac{5}{2}; 0\right)$.

Пример 8. Найдите общее и опорное решение системы. Перейдите от одного опорного решения к другому.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 2x_5 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$$

Решение.

Таблица 10.4

№ итерации	i	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	d_i	$\frac{b_i}{a_{ip}}$	Опорные решения
Исходная система	1		1	-2	2	-1	-2	1	-1	1	
	2		2	1	-1	3	-1	2	6	1	
	3		1	2	-1	2	1	2	7	2	
I	1	x_1	1	-2	2	-1	-2	1	-1		
	2		0	5	-5	5	3	0	8	0	
	3		0	4	-3	3	3	1	8	$\frac{1}{4}$	
II	1	x_1	1	0	0	1	$-\frac{4}{5}$	1	$\frac{11}{5}$		
	2	x_2	0	1	-1	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{8}{5}$		
	3		0	0	1	-1	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{8}{5}$		
III	1	x_1	1	0	0	1	$-\frac{4}{5}$	1	$\frac{11}{5}$		$\bar{X}_1 = (1; 1; 1; 0; 0)$ $p = 4; q = 1$
	2	x_2	0	1	0	0	$\frac{6}{5}$	1	$\frac{16}{5}$		
	3	x_3	0	0	1	-1	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{8}{5}$		
IV	1	x_4	1	0	0	1	$-\frac{4}{5}$	1	$\frac{11}{5}$		$\bar{X}_2 = (0; 1; 2; 1; 0)$
	2	x_2	0	1	0	0	$\frac{6}{5}$	1	$\frac{16}{5}$		
	3	x_3	1	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	2	$\frac{19}{5}$		

Из таблицы III итерации выписываем общее решение (которому соответствует первое опорное решение $\bar{X}_1$):

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + \frac{4}{5}x_5 \\ x_2 = 1 \quad\quad - \frac{6}{5}x_5 \\ x_3 = 1 + x_4 - \frac{3}{5}x_5. \end{cases}$$

Можно было бы выписать общее решение из таблицы IV итерации (которому соответствует второе опорное решение $\bar{X}_2$):

$$\begin{cases} x_2 = 1 \quad - \frac{6}{5}x_5 \\ x_3 = 2 - x_1 + \frac{1}{5}x_5 \\ x_4 = 1 - x_1 + \frac{4}{5}x_5. \end{cases}$$

Ответ: общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + \frac{4}{5}x_5 \\ x_2 = 1 \quad\quad - \frac{6}{5}x_5 \\ x_3 = 1 + x_4 - \frac{3}{5}x_5 \end{cases},$$

опорные решения $\bar{X}_1 = (1; 1; 1; 0; 0)$, $\bar{X}_2 = (0; 1; 2; 1; 0)$.

Пример 9. Найдите общее и опорное решение системы. Перейдите от одного опорного решения к другому:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Решение.

Таблица 10.5

№ итерации	i	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	d_i	$\frac{b_i}{a_{ip}}$	Опорные решения
Исходная система	1		-2	1	-3	1	-1	1	-3	1	
	2		1	-1	1	2	-2	2	3	1	
	3		2	1	-1	1	2	1	6	1	
I	1	x_4	-2	1	-3	1	-1	1	-3		
	2		5	-3	7	0	0	0	9	0	
	3		4	0	2	0	3	0	9	0	
II	1	x_4	4	1	0	1	$\frac{7}{2}$	1	$\frac{21}{2}$		Умножим 2е уравнение на $(-\frac{1}{3})$
	2		-9	-3	0	0	$-\frac{21}{2}$	0	$-\frac{45}{2}$		
	3	x_3	2	0	1	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{9}{2}$		
II'	1	x_4	4	1	0	1	$\frac{7}{2}$	1	$\frac{21}{2}$	1	
	2		3	1	0	0	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{15}{2}$	0	
	3	x_3	2	0	1	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{9}{2}$		
III	1	x_4	1	0	0	1	0	1	3		$\bar{X}_1 = (0;0;0;1;0)$
	2	x_2	3	1	0	0	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{15}{2}$		
	3	x_3	2	0	1	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{9}{2}$		

Общее решение имеет вид

$$\begin{cases} x_2 = -3x_1 - \frac{7}{2}x_5 \\ x_3 = -2x_1 - \frac{3}{2}x_5 \\ x_4 = 1 - x_1 \end{cases},$$

В опорном решении $\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{1}$ равными нулю оказались не только свободные переменные $\boldsymbol{x_1}$ и $\boldsymbol{x_5}$, но и две базисные $-\boldsymbol{x_2}$ и $\boldsymbol{x_3}$. Этот результат мы могли получить и раньше, обратив внимание, что в третьей строке I итерации симплексной таблицы 5 все коэффициенты оказались неотрицательными при нулевом свободном члене. Из уравнения $4\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{2x_3} + \boldsymbol{3x_5} = \boldsymbol{0}$ следует: $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_3} == \boldsymbol{x_5} = \boldsymbol{0}$. Теперь система относительно остальных неизвестных $\boldsymbol{x_2}$ и $\boldsymbol{x_4}$ записывается в виде

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_4} = \boldsymbol{1} \\ -\boldsymbol{3x_2} \quad = \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

откуда $\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{x_4} = \boldsymbol{1}$.

Поэтому единственное неотрицательное решение исходной системы есть $\bar{\mathbf{X}}_\mathbf{1} = (\mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{1}; \mathbf{0})$.

Ответ: общее решение системы

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_2} = \quad -\boldsymbol{3x_1} - \dfrac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x_5} \\ \boldsymbol{x_3} = -\boldsymbol{2x_1} - \dfrac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{x_5} \\ \boldsymbol{x_4} = \quad \boldsymbol{1} - \boldsymbol{x_1} \end{cases},$$

единственное опорное решение $\bar{\mathbf{X}}_{\text{опор}} = (\mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{0}; \mathbf{1}; \mathbf{0})$.

Пример 10. Найдите опорное решение системы и перейдите от одного решения к другому. Выпишите общее решение системы.

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x_1} + \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{2x_3} \quad - \boldsymbol{2x_5} = \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{2x_1} + \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{2x_4} + \boldsymbol{2x_5} = \boldsymbol{2} \\ -\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{2x_2} + \boldsymbol{x_3} - \boldsymbol{x_4} + \boldsymbol{x_5} = \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

Решение.

Таблица 10.6

№ итерации	i	Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{d_i}$	$\dfrac{\boldsymbol{b_i}}{\boldsymbol{a_{ip}}}$
Исходная система	1		2	1	-2	0	-2	3	2	$\boldsymbol{\frac{3}{2}}$
	2		2	1	-1	-2	2	2	4	1
	3		-1	-2	1	-1	1	0	-2	

I	1		0	0	-1	2	-4	1	-2	
	2	$\boldsymbol{x_1}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	1	2	1
	3		0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2	2	1	0	$\frac{1}{2}$
II	1		0	-3	0	-2	0	3	-2	
	2	$\boldsymbol{x_1}$	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{2}$	2	
	3	$\boldsymbol{x_5}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	

Замечаем, что в первой строке таблицы II итерации все коэффициенты не положительны при положительном свободном члене. Соответствующее уравнение имеет вид $-3\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{2x_4} = \boldsymbol{3}$.

Это уравнение (а вместе с ним и вся полученная после второго симплексного преобразования система уравнений) не имеет неотрицательных решений.

Следовательно, исходная система опорных решений не имеет.

Теперь, отказавшись от требования неотрицательности переменных, найдем общее решение системы, введя в III итерации в число базисных переменных $\boldsymbol{x_2}$ в первом уравнении ($\boldsymbol{a''_{12} = -3 \neq 0}$).

№ итерации	i	Базис	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{b_i}$	$\boldsymbol{d_i}$
III	1	$\boldsymbol{x_2}$	0	1	0	$\frac{2}{3}$	0	-1	$\frac{2}{3}$
	2	$\boldsymbol{x_1}$	1	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{6}$	0	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{6}$
	3	$\boldsymbol{x_5}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Ответ: общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1 = \frac{7}{4} + \frac{3}{4}x_3 + \frac{5}{6}x_4} \\ \boldsymbol{x_2 = -1 \quad - \frac{2}{3}x_4} \\ \boldsymbol{x_5 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{2}x_4} \end{cases},$$

ГЛАВА 11. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

11.1. Уравнение прямой на плоскости

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка

$$Ax + By + C = 0, \qquad (12.1)$$

причем постоянные A, B не равны нулю одновременно.

Уравнение (1) называют **общим уравнением прямой.** В зависимости от значений постоянных A,B и C возможны следующие частные случаи:

- C = 0, A ≠0, B ≠ 0 – проходит через начало координат
- A = 0, B ≠0, C ≠0 { By + C = 0}- параллельна оси Ox
- B = 0, A ≠0, C ≠ 0 { Ax + C = 0} – параллельна оси Oy
- B = C = 0, A ≠0 – совпадает с осью Oy
- A = C = 0, B ≠0 – совпадает с осью Ox

Уравнение прямой на плоскости может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой по точке и вектору нормали

Определение. В декартовой прямоугольной системе координат вектор с компонентами (A, B) перпендикулярен прямой Ax + By + C = 0.

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(1, 2) перпендикулярно вектору **n**(3, -1).

Решение. Составим при A = 3 и B = -1 уравнение: 3x – y + C = 0. Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки A. Получаем: 3 – 2 + C = 0, следовательно, C = -1. Окончательно получим: 3x – y – 1 = 0.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть в пространстве заданы две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Если какой-либо из знаменателей равен нулю, следует приравнять нулю соответствующий числитель.На плоскости, записанное выше, упрощается:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

если $x_1 \neq x_2$ и $x = x_1$, если $x_1 = x_2$.

Дробь $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$ называется **угловым коэффициентом** .

Пример 2. Найти уравнение прямой, проходящей через две точки A(1, 2) и B(3, 4).

Решение. Применяя записанную выше формулу, получаем:

$$y - 2 = \frac{4 - 2}{3 - 1}(x - 1)$$
$$y - 2 = x - 1$$
$$x - y + 1 = 0$$

Уравнение прямой, заданной точкой лежащей на ней и угловым коэффициентом.

Если общее уравнение прямой на плоскости Ax + By + C = 0 привести к виду:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

и обозначить $-\frac{A}{B} = k;\ -\frac{C}{B} = b;$ т. е. $y = kx + b$ то получим **уравнением прямой с угловым коэффициентом k**.

Уравнение прямой по точке и направляющему вектору

По аналогии с пунктом, рассматривающим уравнение через вектор нормали можно ввести задание прямой через точку и направляющий вектор.

Определение. Каждый ненулевой вектор $\vec{a}$ (α_1 , α_2), компоненты которого удовлетворяют условию A α_1 + B α_2 = 0 называется направляющим вектором прямой Ax + By + C = 0.

Пример 3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(1, 2) с направляющим вектором $\vec{a}$(1, -1).

Решение будем искать в виде: Ax + By + C = 0. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:

1 * A + (-1) * B = 0, т.е. A = B.

Тогда получим вид: Ax + Ay + C = 0, или x + y + C / A = 0. при x = 1, y = 2 получаем C/ A = -3, т.е. искомое:

x + y - 3 = 0

Уравнение прямой в отрезках

Если в общем уравнении Ax + By + C = 0 C≠0, то, разделив на –C, получим: $\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}y = 1$ или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где $a = -\frac{C}{A}$; $b = -\frac{C}{B}$.

Геометрический смысл коэффициентов в том, что коэффициент a является координатой точки пересечения прямой с осью Ox, a b – координатой точки пересечения с осью Oy.

Пример 4. Задано общее уравнение x – y + 1 = 0. Найти его в виде уравнение прямой в отрезках.

C = 1, $-\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$, a = -1, b = 1.

Нормальное уравнение прямой

Если уравнение прямой на плоскости Ax + By + C = 0 умножить на число $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, которое называется **нормирующем множителем**, то получим

xcosφ + ysinφ - p = 0 –

нормальное уравнение. Знак ± нормирующего множителя надо выбирать так, чтобы μ * C < 0. p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, а φ - угол, образованный этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox.

Пример 5. Дано 12x – 5y – 65 = 0. Требуется написать различные типы уравнений этой линии.

уравнение прямой в отрезках: $\frac{12}{65}x - \frac{5}{65}y = 1$

$\frac{x}{(65/12)} + \frac{y}{(-13)} = 1$

уравнение прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

$y = \frac{12}{5}x - \frac{65}{5} = \frac{12}{5}x - 13.$

нормальное уравнение прямой:

$\mu = \frac{1}{\sqrt{12^2+(-5)^2}} = \frac{1}{13}$ $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 5 = 0$; cos φ = 12/13; sin φ= -5/13; p = 5.

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить в отрезках, например, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример 6. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Найти её, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см ^{2} .

Решение. Искомое уравнение имеет вид: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,ab /2 = 8; ab=16; a=4, a=-4. a = -4 < 0 не подходит по условию задачи. Итого: $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$ или x + y – 4 = 0.

Пример 7. Какая прямая проходит через точку A(-2, -3) и начало координат.

Решение**.** Имеем: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x-0}{-2-0}=\frac{y-0}{-3-0};\ \frac{x}{-2}=\frac{y}{-3}.$$

Угол между прямыми на плоскости.

Определение. Если заданы две прямые $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$, то острый угол между ними будет определяться как

$$\tan\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Две прямые параллельны, если $k_1 = k_2$. Две прямые перпендикулярны, если $k_1 = -1/ k_2$.

Теорема. Ax + By + C = 0 и $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ параллельны, когда пропорциональны коэффициенты $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$. Если еще и $C_1 = \lambda C$, то они совпадают. Координаты точки пересечения находятся как решение системы этих уравнений.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой

Определение. Прямая, проходящая через точку $M_1 (x_1 , y_1)$ и перпендикулярная к y = kx + b имеет вид:

$$y-y_1=-\frac{1}{k}(x-x_1)$$

Расстояние от точки до прямой

Теорема. Если задана точка $M(x_0 , y_0)$, то расстояние до Ax + By + C =0 определяется как

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Доказательство. Пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на заданную прямую. Тогда расстояние между точками M и M_1:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \quad (2)$$

Координаты x_1 и y_1 могут быть найдены как решение системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы – это линия, проходящей через заданную точку M_0 перпендикулярно заданной прямой. Преобразовать первое к виду:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + Ax_0 + By_0 + C = 0$,

то, решая, получим:

$$x - x_0 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C),$$

$$y - y_0 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_0 + By_0 + C)$$

Подставляя эти выражения в (2), находим:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Теорема доказана.

Пример 8. Определить угол между: y = -3 x + 7; y = 2 x + 1.

$k_1 = -3$; $k_2 = 2$; $tg\varphi = \left|\frac{2-(-3)}{1-(-3)2}\right| = 1$; $\varphi = \pi/4$.

Пример 9. Показать, что 3x – 5y + 7 = 0 и 10x + 6y – 3 = 0 перпендикулярны.

Решение. Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, k 1* k 2 = -1, следовательно, они перпендикулярны.

Пример 10. Даны вершины треугольника A(0; 1), B (6; 5), C (12; -1). Найти высоту, проведенной из вершины C.

Решение. Находим сторону AB: $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}$; $\frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}$; 4 x = 6 y – 6;

2 x – 3 y + 3 = 0; $y = \frac{2}{3} \cdot x + 1$

Искомая высота имеет вид: Ax + By + C = 0 или y = kx + b .

k =$-\frac{3}{2}$. Тогда y =$-\frac{3}{2}x + b$.

Т.к. высота проходит через точку C, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению:$-1 = -\frac{3}{2} \cdot 12 + b$ откуда b = 17. Итого: y= $-\frac{3}{2} \cdot x + 17$.

Ответ: 3 x + 2 y – 34 = 0

11.2. Кривые второго порядка.

Определение. Уравнением второй степени с двумя неизвестными называется уравнение вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

где $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Уравнение второй степени называется **Каноническим**, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. Не содержит произведения переменных ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$);

2. Если содержит квадрат какой-либо переменной, то не содержит её первой степени ($a_{ii} \neq 0 => a_i = 0$);

3. Если содержит первую степень, то только одной переменной, и тогда свободный член равен нулю ($\exists a_i \neq 0 => a_0 = 0$);

4. Если свободный член не равен нулю, то он равен 1 или -1.

Кривой второго порядка называется множество точек плоскости, удовлетворяющих какому-либо уравнению 2-й степени.

Теорема. Для любой кривой второго 2-го порядка на плоскости существует ортонормированная система координат, в которой эта кривая задаётся каноническим уравнением.

Классификацию кривых второго порядка:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	эллипс;
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	мнимый эллипс;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	точка O(0; 0);
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	гипербола;
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 <=> \left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0 <=> \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$	Пара пересекающихся прямых;
$y^2=2px$	парабола;
$y^2=a^2 <=> \left[\begin{matrix} y=a \\ y=-a \end{matrix}\right.$	пара параллельных прямых;
$y^2=0$	сдвоенная прямая;
$y^2=-a^2$	Пара мнимых параллельных прямых.

ОКРУЖНОСТЬ

П р и м е р 1. Окружность радиуса R (рис.11.1) есть множество всех точек плоскости, удаленных на расстояние R от некоторой ее точки O (центр окружности).

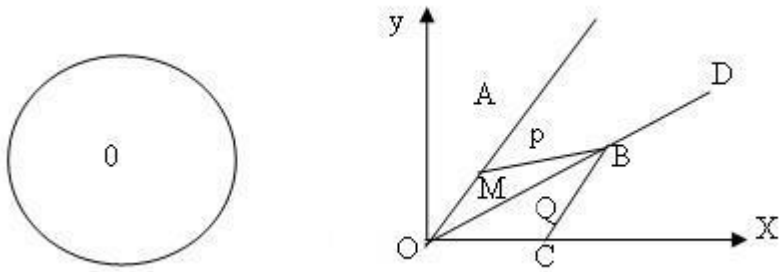


Рис. 11.1

Иными словами, на окружности расположены те и только те точки, расстояние которых от центра окружности равно ее радиусу.

П р и м е р 2. Биссектриса угла ABC (рис 3). есть множество всех точек, лежащих внутри угла и равноудаленных от его сторон.

Этим утверждается, что: 1) для каждой точки M, лежащей на биссектрисе BD, даны перепендикуляры MP и MQ, опущенных

соответственно на стороны BA и BC угла, равны между собой: MP = MQ и 2) всякая точка, находящаяся внутри угла ABC и не лежащая на его биссектрисе, будет ближе к одной стороне угла, чем к другой.

3. Окружность

Выведем уравнение окружности (рис.11.2) с центром $C(x_0, y_0)$ и радиусом R. Для произвольной точки M(x,y) окружности выполнено равенство

$$MC = R. \qquad (1)$$

Отсюда вспоминая формулу расстояния между двумя точками, имеем

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R \quad (2)$$

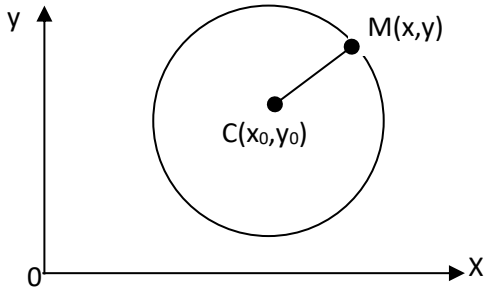


Рис. 11.2.

Так как обе части равенства (2) положительны, то, возводя в квадрат, получим равносильное уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Итак, координаты любой точки *M(x,y)* данной окружности удовлетворяют уравнению (3) . Справедливо также обратное утверждение.

Таким образом, уравнение (3) представляет собой уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(x_0, y_0)$. Это уравнение носит название *нормального уравнения окружности.*

В частности, полагая $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, получим уравнение окружности с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (4)$$

Уравнение окружности (3) после несложных преобразований можно привести к виду.

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \qquad (5)$$

где $\alpha = -2x_0$, $\beta = -2y_0$, $\gamma = x_0^2 + y^2_0 - R^2$.

Пример 3. Два предприятия, отстоящие одно от другого на 100 км, производят некоторое изделие, причем фабрично-заводская цена изделия на обоих предприятиях одинакова и равняется р. Пусть транспортные расходы

на перевозку единицы изделия от предприятия А до потребителя составляют 9 сумм/км, а от предприятия В- 3 сумм/км. Как будет разделен рынок сбыта, если расходы потребителей должны быть одинаковыми?

Проведем через середину отрезка АВ оси системы координат. Допустим, что потребитель находится в точке Р(х,у); введем обозначения АР=s_1, ВР=s_2 (рис.11.3).

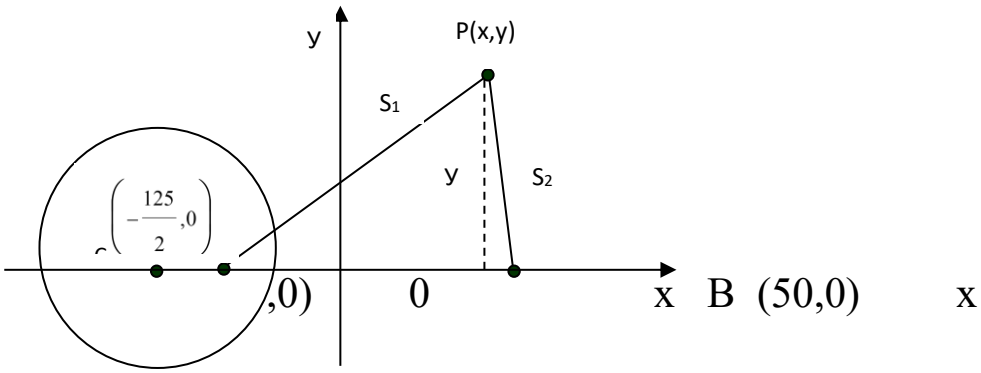


Рис.11.3.

Расходы потребителя на приобретение единицы изделия у предприятия А составляют: $p+s_1 \cdot 9$, а у предприятия В: $p+s_2 \cdot 3$,

Расходы потребителей одинаковы, если

$$p+9s_1=p+3s_2, \text{ или } 9s_1=3s_2, \text{ откуда } 3s_1=s_2.$$

из рис. 29 видно, что

$S_1^2=(50+x)^2+y^2$, или $s_1=\sqrt{(50+x)^2+y^2}$

и $S_2^2=(50-x)^2+y^2$, или $s_1=\sqrt{(50-x)^2+y^2}$

Для потребителя расходы на приобретение изделия одинаковы, если

$$3\sqrt{(50+x)^2+y^2}=\sqrt{(50-x)^2+y^2},$$

откуда

$$9(2500+100x+x^2+y^2)=2500-100x+x^2+y^2,$$

или

$$22500+900x+9x^2+9y^2=2500-100x+x^2+y^2,$$

или после сокращения

$$8x^2+8y^2+1000x+20000=0.$$

Деля обе части, уравнения на 8, получим:

$x^2+y^2+125x+250=0$, или $x^2+125x+y^2=-2500$.

Преобразуя далее, получим:

$$x^2+2x\cdot\frac{125}{2}+\frac{15625}{4}+y^2=-2500+\frac{15625}{4},$$

откуда в итоге

$$\left(x+\frac{125}{2}\right)^2+y^2=\frac{5625}{4}.$$

Это-уравнение окружности, центр которой находится на оси абсцисс и имеет абсциссу $-\frac{125}{2}=-62{,}5$, а радиус есть

$$r=\frac{75}{2}=37{,}5.$$

Для потребителей, находящихся на этой окружности, расходы на приобретение изделия одинаковы. Для потребителей, находящихся вне окружности, расходы на приобретение изделия ниже на предприятии В, а для потребителей, находящихся внутри окружности, - на предприятии А.

Следовательно, рынок будет поделен так:

а) потребители, находящиеся внутри окружности, будут закупать данное изделие на предприятии А.

б) для покупателей, находящихся на окружности, безразлично. на каком предприятии будут производиться закупки;

в) потребители, находящиеся вне окружности, будут приобретать изделие на предприятии В.

2. Эллипс.

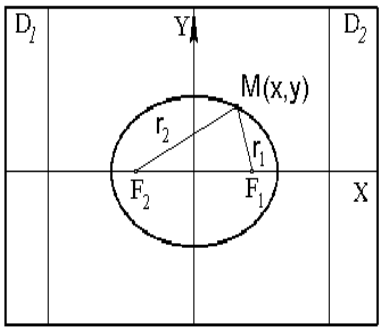


Рис.1

Определение: Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых ***фокусами*** F_1 и F_2 есть величина постоянная (ее обозначают через 2*а). Причем эта постоянная больше расстояния между фокусами.

Если оси координат расположены по отношению к эллипсу так, как показано на рисунке, а фокусы эллипса находятся на оси OX на равных расстояниях от начала координат в точках

$F_1(C;O), F_2(-C;0)$ то получится простейшее(каноническое) уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Здесь a - большая, b- малая полуоси эллипса, причем a, b и c (c - половина расстояния между фокусами) связаны соотношением

$$\boxed{a^2=b^2+c^2}$$

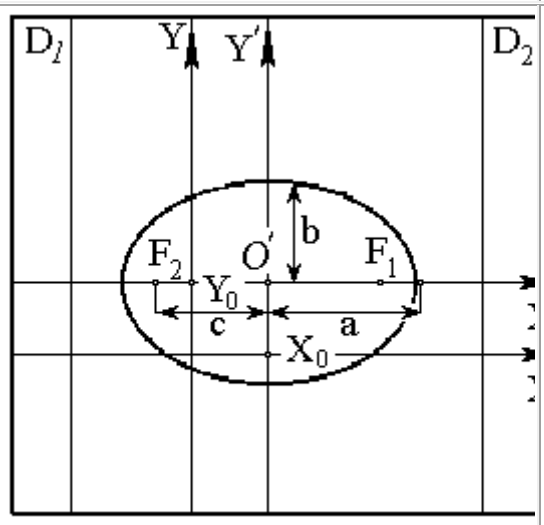
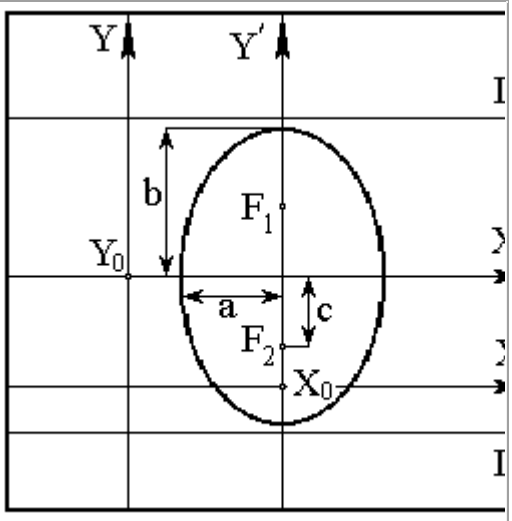
Форма эллипса (мера его "сжатия") характеризуется его ***эксцентриситетом.***

$\varepsilon=\frac{c}{a}$ (так как $c<a$, то $\varepsilon<1$)

Прямые: $D_1 \div x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $D_2 \div x = -\frac{a}{\varepsilon}$ перпендикулярные главной оси и проходящие на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от центра, называются ***директрисами*** эллипса.

Расположение эллипса и его параметры

$(x-x_0)^2/a^2+(y-y_0)^2/b^2=1;\ O'(x_0,y_0)$ – центр.

1) $a>b\ c=\sqrt{a^2-b^2}$	2) $a<b\ c=\sqrt{b^2-a^2}$
$F_1(x_0+c;\ y_0)F_2(x_0-c;\ y_0)$	$F_1(x_0;y_0+c)F_2(x_0;\ y_0-c)$
 Рис.2	 Рис.3

П.2. Эксцентриситет.

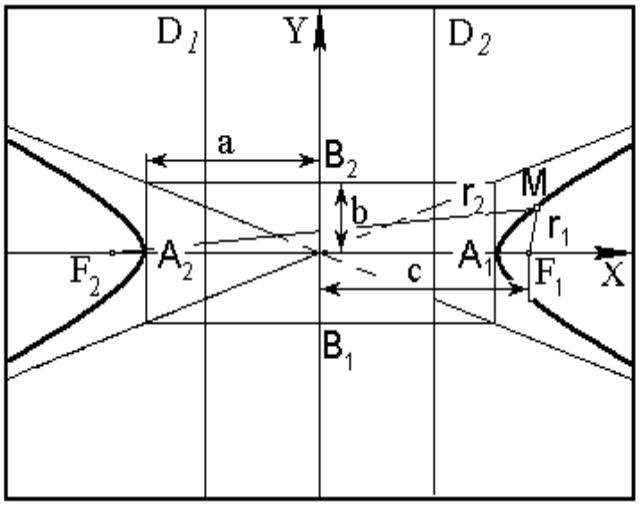
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

1. $a>b;\ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ - ***эксцентриситет.***
2. $a<b;\ \varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$ - ***эксцентриситет.***

П.I. Уравнения директрис.

1. $a>b\ D_1: x=x_0-\frac{a}{\varepsilon}\ \ D_2: x=x_0+\frac{a}{\varepsilon}$

2. $b > a$ $D_1 : y = y_0 - \frac{b}{\varepsilon}$ $D_2 : y = y_0 + \frac{b}{\varepsilon}$



2 Гипербола

Определение: гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (ее обозначают через $2a$), причем эта постоянная меньше расстояния между фокусами $|r_1 - r_2| = 2a$.

Если поместить фокусы гиперболы в точках $F_1(c;0)$и $F_2(-c;0)$, то получится каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b^2 = c^2 - a^2$.

Точки: $A_1(a;0)$и $A_2(-a;0)$ называются вершинами гиперболы. Отрезок A_1A_2 такой, что $|A_1A_2| = 2a$, называется действительной осью гиперболы, а отрезок B_1B_2 такой, что $|B_1B_2| = 2b$ - мнимой осью. Гипербола имеет две ***асимптоты***, уравнения которых $y = \pm\frac{b}{a}x$.

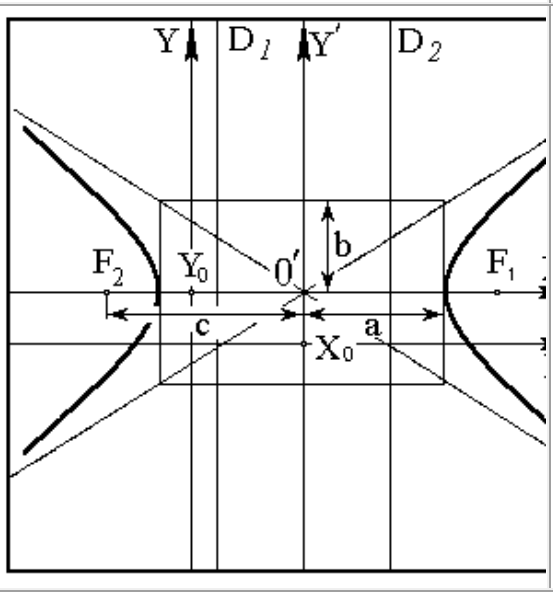
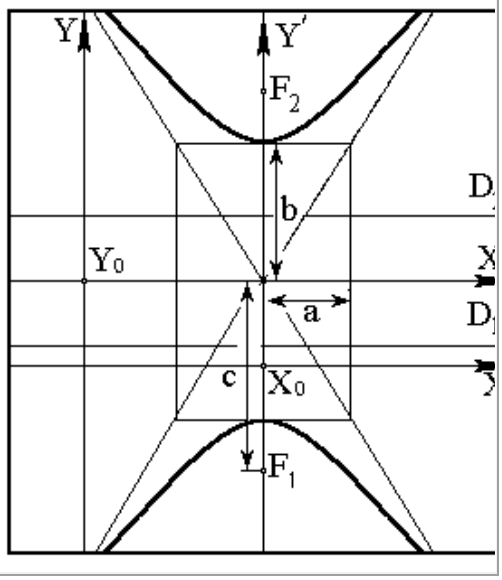
Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ называется ***эксцентриситетом*** гиперболы.

Уравнение $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ также является уравнением гиперболы, но действительной осью этой гиперболы служит отрезок оси OY длины $2b$.

Две гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ имеют одни и те же полуоси и одни и те же асимптоты, но действительная ось одной служит мнимой осью другой, и наоборот. Такие две гиперболы называются ***сопряженными.***

Прямые $D_1 : x = -\frac{a}{\varepsilon}$ и $D_2 : x = \frac{a}{\varepsilon}$, перпендикулярные действительной оси и проходящие на расстоянии a/εот центра, называются ***директрисами*** гиперболы.

Расположение гиперболы.

1) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$	2) $\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1;$
$O'(x_0;\ y_0)$ - центр, $c=\sqrt{a^2+b^2}$,	$O'(x_0;\ y_0)$ - центр, $c=\sqrt{a^2+b^2}$,
$F_1(x_0+c;\ y_0)\ F_2(x_0-c;\ y_0)$	$F_1(x_0;\ y_0-c)\ F_2(x_0;\ y_0+c)$
	

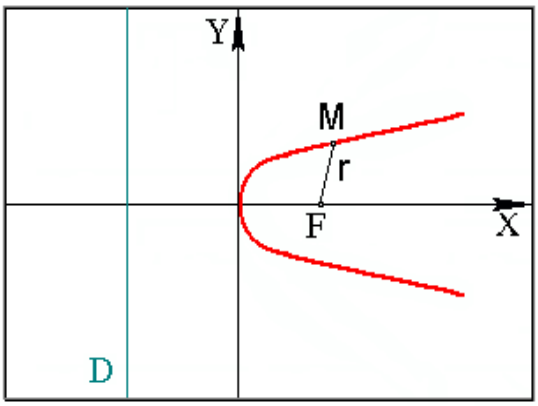
1) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;\ \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$ **-эксцентриситет.**

2) $\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1;\ \varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ **- эксцентриситет.**

Уравнение директрис гиперболы.

1) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;\ D_2: x=x_0+\frac{a}{\varepsilon};\ D_1: x=x_0-\frac{a}{\varepsilon}.$

2) $\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1;\ D_2: y=y_0+\frac{b}{\varepsilon};\ D_1: y=y_0-\frac{b}{\varepsilon}.$



$y-y_0=\pm b(x-x_0)/a$ - **уравнение асимптот гиперболы.**

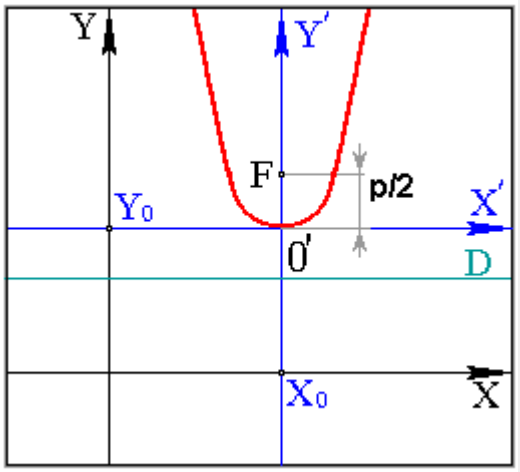
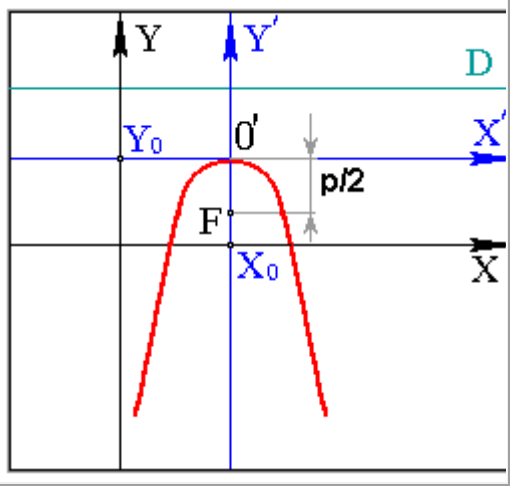
3. Парабола.

Определение: Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой ***фокусом***, и данной прямой, называемой ***директрисой.***

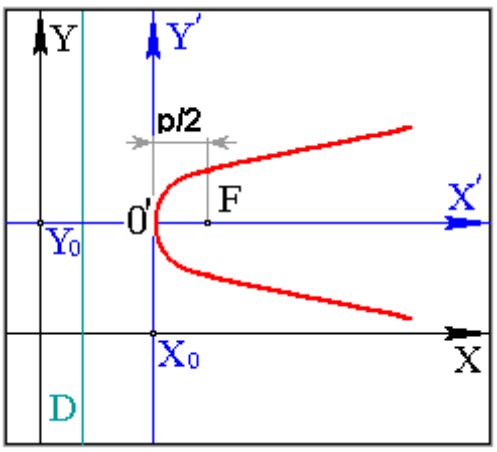
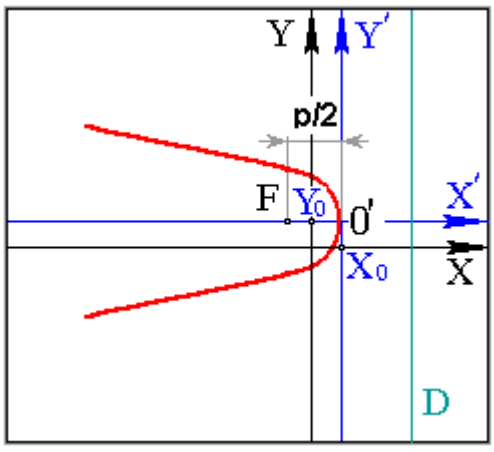
Если директрисой параболы является прямая: $x = -\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, то уравнение параболы имеет вид: $y^2 = 2px$ где p>0.

Положение параболы и ее параметры.

1) $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$; $O'(x_0;\ y_0)$- вершина,

$p > 0, F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$:	$p < 0, F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$:
	

2) $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)^2$; $O'(x_0;\ y_0)$- вершина,

$p > 0, F\left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right)$:	$p < 0, F\left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right)$:
	

Уравнение директрисы параболы.

1. $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$;

$p > 0\ D: y = y_0 - \frac{p}{2}; p < 0\ D: y = y_0 - \frac{p}{2}$.

2. $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)^2$;

$p > 0\ D: x = x_0 - \frac{p}{2}; p < 0\ D: x = x_0 - \frac{p}{2}$.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, (1)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, (1I)
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, A > B (2)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, A < B, (2I)
$\varepsilon = \frac{c}{a}$,	$\varepsilon = \frac{c}{b}$,
Уравнения директрис:$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.	Уравнения директрис:$y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$.

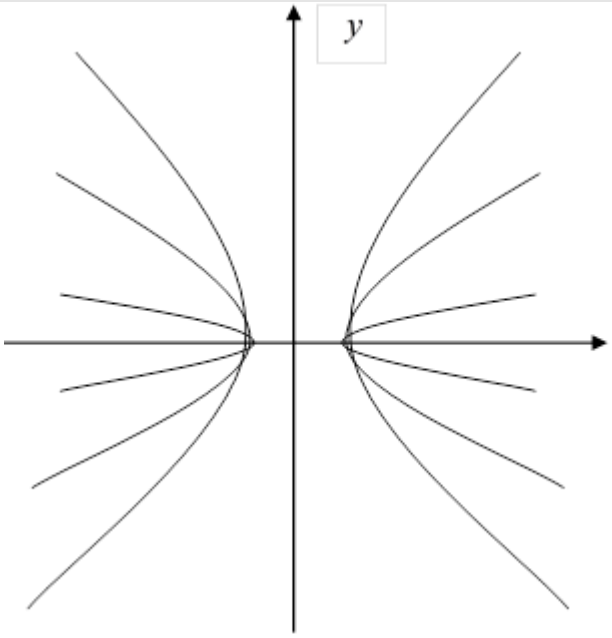


Рис. 11.4

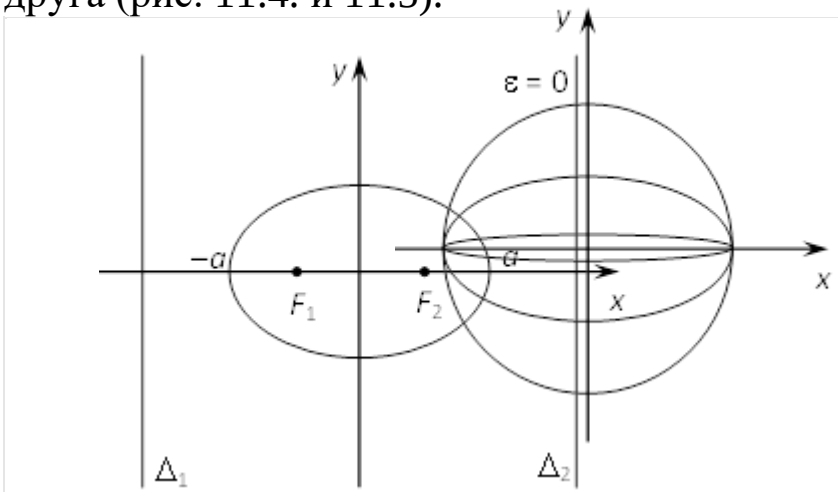
Рассмотрим гиперболу (1). Для неё $\varepsilon > 1$, т. к. $c > a$. Вспомнив, что $c^2 = a^2 + b^2$, получаем: $\varepsilon = \sqrt{1 + (b/a)^2}$. Исследуем, как меняется форма гиперболы в зависимости от её эксцентриситета.

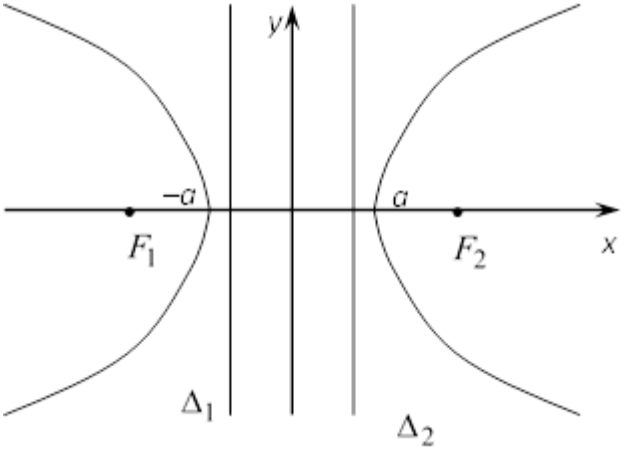
Зафиксируем полуось a .Если $\varepsilon \to 1$, то $b \to 0$, т. е. гипербола будет очень узкой. С ростом ε растёт и b , т. е. ветви гиперболы расширяются (см. рис. 11.4). Если же $\varepsilon \to +\infty$, то и $b \to +\infty$, т. е. гипербола по внешнему виду приближается к паре параллельных прямых.

Рассмотрим теперь эллипс **(**2**)**. Для него $0 \le \varepsilon < 1$, т. к. $c < a$. Для эллипса (2) $c^2 = a^2 - b^2$, поэтому $\varepsilon = \sqrt{1 + (b/a)^2}$. Исследуем, как меняется форма эллипса в зависимости от его эксцентриситета. Опять зафиксируем полуось a .При $\varepsilon = 0$ получаем $a = b$, и эллипс вырождается в окружность. С ростом ε полуось b уменьшается, эллипс «худеет», а если $\varepsilon \to 1$, то $b \to 0$, т. е. эллипс и вовсе стремится пре-

вратиться в отрезок (рис 11.5).

Теперь вернемся к директрисам. Так как для гиперболы (1) $\varepsilon > 1$, а для эллипса (2) $\varepsilon < 1$, то для гиперболы $a/\varepsilon < 1$, а для эллипса $a/\varepsilon < 1$. Это значит, что как для гиперболы, так и для эллипса директрисы не пересекаются этой кривой. Кроме того, директриса и соответствующий ей фокус отделены кривой друг от друга (рис. 11.4. и 11.5).





Теорема (основное свойство эллипса и гиперболы по отношению к директрисам). Для всех точек гиперболы (эллипса) отношение расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей этому фокусу директрисы есть число постоянное, равное эксцентриситету гиперболы (эллипса). И обратно: если для какой-либо точки плоскости отношение расстояния до фокуса заданной гиперболы (эллипса) к расстоянию до соответствующей этому фокусу директрисы равно

эксцентриситету заданной гиперболы (эллипса), то эта точка принадлежит гиперболе (эллипсу).

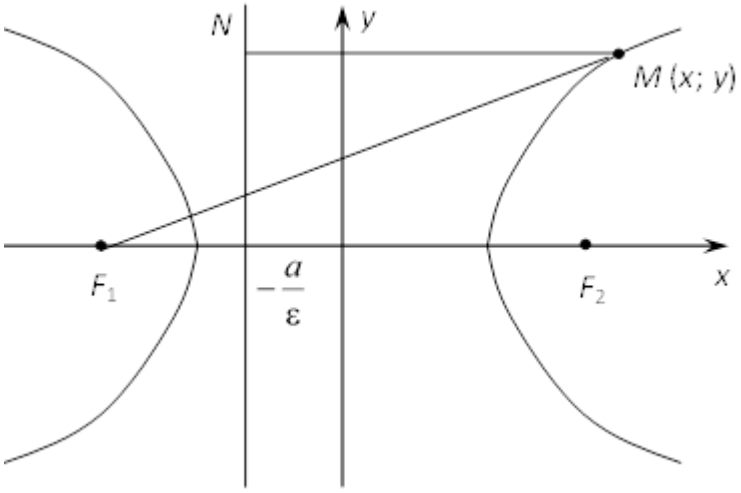


Рис. 5.

►Докажем утверждение для левого фокуса и левой директрисы гиперболы (1) (в остальных случаях вы его докажете самостоятельно в качестве упражнения).

На рис. 11.6 точки имеют следующие координаты: $M(x;y)$, $N(-a/\varepsilon;y)$, $F_1(-c;0)$.

Тогда

$MF_1 = [\S1,\ (5)] = |a+cx/a| = |a+\varepsilon x|\ ;\ \rho(M,\Delta_1) = MN = \sqrt{(x+a/\varepsilon)^2} = |x+a/\varepsilon|.$

Из этих двух равенств и получаем:

$$\frac{MF_1}{\rho(M,\Delta_1)} = \frac{|a+\varepsilon x|}{|x+a/\varepsilon|} = \varepsilon\ .$$

Докажем обратное утверждение. Пусть для некоторой точки $M(x;y)$ плоскости справедливо соотношение:

$$\frac{MF_1}{\rho(M,\Delta_1)} = \varepsilon \qquad (12.3)$$

Так как $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$, а $\rho(M,\Delta_1) = |x+a/\varepsilon|$, то

(3) $\Leftrightarrow \left\{\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{|x+a/\varepsilon|} = \varepsilon\right\} \Leftrightarrow \left\{\sqrt{(x+c)^2+y^2} = |cx/a+a|\right\} \Leftrightarrow$

$\{x^2+2cx+c^2+y^2 = c^2x^2/a^2+2cx+a^2\} \Leftrightarrow \left\{\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2 = a^2-c^2\right\}.$

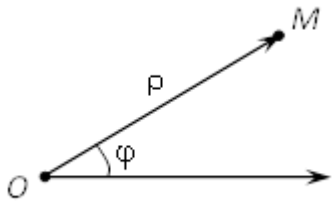
Учитывая, что $c^2-a^2=b^2$, из последнего уравнения получаем $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Таким образом, точка M удовлетворяет уравнению заданной гиперболы. ◄

На основании доказанной теоремы мы можем сформулировать общее определение эллипса, гиперболы и параболы.

Определение. Гиперболой (эллипсом, параболой) называется множество точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния до заданной точки к расстоянию до заданной прямой в этой плоскости есть число постоянное, равное e, причём e > 1 (e < 1, e = 1).

Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы

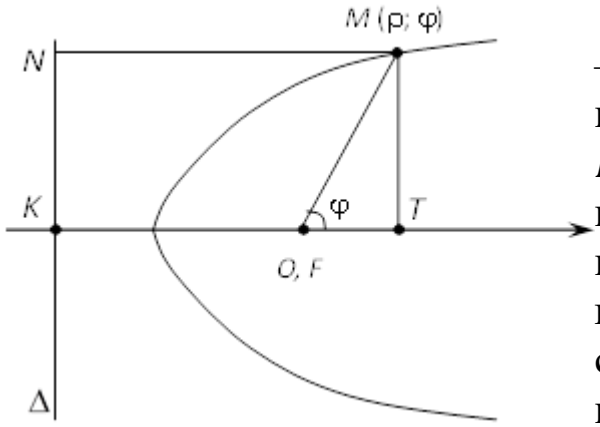
Полярная система координат



Выберем на плоскости произвольную точку O, которую назовём полюсом, и проведём луч с началом в этой точке, который назовём полярной осью. Каждой точке M плоскости поставим в соответствие упорядоченную пару чисел $(\rho;\varphi)$, где ρ — расстояние от точки M до полюса, а φ — угол между полярной осью и радиус-вектором точки M (рис.1). Получим соответствие между множеством точек плоскости и множеством упорядоченных пар действительных чисел. Если

Рис. 11.7. $\rho \in [0,+\infty)$, а $\varphi \in [0,2\pi)$ или $\varphi \in [-\pi,\pi)$, то это соответствие будет взаимно однозначным на плоскости с выколотой точкой (полюсом).

Вывод полярных уравнений



Выберем одну из трёх кривых — эллипс, параболу или одну из ветвей гиперболы и обозначим её L. Полярную систему координат построим следующим образом: полюс поместим в фокус (для гиперболы берём фокус, соответствующий выбранной ветви), а полярную ось проведём перпендикулярно соответствующей этому фокусу директрисе в направлении от неё. Расстояние от фокуса до директрисы назовём фокальным

Рис.11.7. параметром кривой и обозначим

Его P. Тогда (рис. 2): $MF = \rho$, $\rho(M, \Delta) = MN = KT = KF + FT = p + \rho\cos\varphi$;

$\{M \in L\} \Leftrightarrow$ [T § 4] $\Leftrightarrow \left\{\frac{MF}{\rho(M,\Delta)} = \varepsilon\right\} \Leftrightarrow \left\{\frac{\rho}{p+\rho\cos\varphi} = \varepsilon\right\} \Leftrightarrow \{\rho = \varepsilon(p + \rho\cos\varphi)\}$,

Откуда получаем уравнение

$$\rho = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\varphi},$$

(12.2)

которое и называется полярным. Это уравнение задаёт эллипс, параболу, левую ветвь гиперболы, когда полюс находится в левом фокусе, и правую её ветвь, когда фокус находится в правом фокусе.

Если рассматриваемая кривая – это эллипс, то $\varepsilon < 1$ и из (1) видно, что $D(\rho) = [-\pi, \pi)$.

Если рассматриваемая кривая – парабола, то $\varepsilon = 1$ и $D(\rho) = [-\pi, \pi)$.

В случае же, когда рассматривается одна из ветвей гиперболы, причём полюс находится в соответствующем фокусе, то для нахождения $D(\rho)$ требуется решить неравенство $\rho \geq 0$, или $1 - \varepsilon\cos\varphi > 0$, откуда находим $\cos\varphi < 1/\varepsilon$. Таким образом, для одной из ветвей гиперболы

$$D(\rho) = \left(-\pi; -arc\cos\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(arc\cos\frac{1}{\varepsilon};\ \pi\right].$$

Это означает, что любой луч, выпущенный из фокуса эллипса, пересекает этот эллипс; единственный луч, выпущенный из фокуса параболы и не пересекающий её – это полярная ось; а лучи, выпущенные из фокуса гиперболы и не пересекающие соответствующую её ветвь, образуют целый угол.

Упражнение. Покажите, что полярное уравнение ветви гиперболы в том случае, когда полюс лежит в её противоположном фокусе, выглядит так:

$$\rho = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\varphi}.$$

Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе

Во-первых, вспомним, что уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$ выглядит так:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

(12.3)

Пусть задано некоторое уравнение

$F(x, y) = 0.$

(12.4)

Если $\forall x_0 \in \langle \alpha; \beta \rangle$ существует единственное число y_0 такое, что $F(x_0; y_0) = 0$, то говорят, что уравнение (2) на промежутке $\langle \alpha; \beta \rangle$ задаёт некоторую функцию $y = y(x)$. Такой способ задания функции называется неявным. Подробно теорию неявных функций вы будете изучать в курсе математического анализа. В частности, вам докажут правило, что для дифференцирования функции, заданной неявно, достаточно продифференцировать равенство, её задающее, считая переменную y зависящей от переменной x.

Составим уравнение касательной к гиперболе

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

(12.5)

В точке $M(x_0; y_0)$. Уравнение (3) неявно задаёт две непрерывные функции: одну при $y \geq 0$, а вторую при $y \leq 0$. Для нахождения производной дифференцируем равенство (3):

$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y \cdot y(x)}{b^2} = 0$, откуда при $y \neq 0$ находим $y'(x) = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$.

Тогда $y'(M_0) = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}$, $y_0 \neq 0$. Используя (12.1), запишем уравнение касательной к гиперболе (12.3) в точке $M(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}(x - x_0), y_0 \neq 0.$$

Умножив это уравнение на y_0 и разделив его на b^2, получим уравнение:

$$\frac{y_0 y}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2},$$

Которое равносильно следующему:

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}.$$

В силу того, что точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит гиперболе (12.3), уравнение касательной приобретает конечный вид:

$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

(12.4)

Замечание. Уравнение (4) получено при условии, что $y_0 \neq 0$, т. е. во всех точках гиперболы, за исключением её вершин. Если

же $y_0 \neq 0$, то $x_0^2 = a^2$, из (12.4) следует, что $x_0 x / x_0^2 = 1$ или $x = x_0$, что совпадает с уравнением касательной к гиперболе в её вершине. Таким образом, несмотря на то, что уравнение касательной к гиперболе в некоторой её точке выводилось при условии, что эта точка не является вершиной, окончательное уравнение (4) подходит и для вершины тоже.

Таким же образом составим и уравнение касательной к параболе

$y^2 = 2px.$

(12.5)

(5) $\Longrightarrow \{2y \cdot y'(x) = 2p\} \Longrightarrow \left\{y'(x) = \frac{p}{y}, y_0 \neq 0\right\} \Longrightarrow \left\{y'(M_0) = \frac{p}{y_0}, y_0 \neq 0\right\} \Longrightarrow \; \Longrightarrow [(1)] \Longrightarrow \left\{y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0), y_0 \neq 0\right\} \Longrightarrow \{y_0 y - y_0^2 = px - px_0, y_0 \neq 0\} \Longrightarrow\Longrightarrow \{y_0 y = px + y_0^2 - px_0\} \Longrightarrow$ [точка $M(x_0; y_0)$ принадлежит параболе (5)] $\Longrightarrow y_0 y = p(x + x_0).$ (12.6)

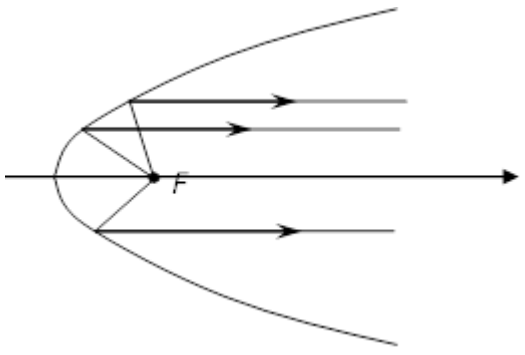
Замечание. Если $y_0 = 0$, то и $x_0 = 0$ – это вершина параболы. При $y_0 = x_0 = 0$ из (6) получаем $x = 0$. Это уравнение оси Oy, которая и является касательной к параболе в её вершине. Таким образом, и в этом случае, полученное уравнение (6) задаёт касательную к параболе во всех её точках, несмотря на то, что выводилось оно при условии $y_0 \neq 0$.

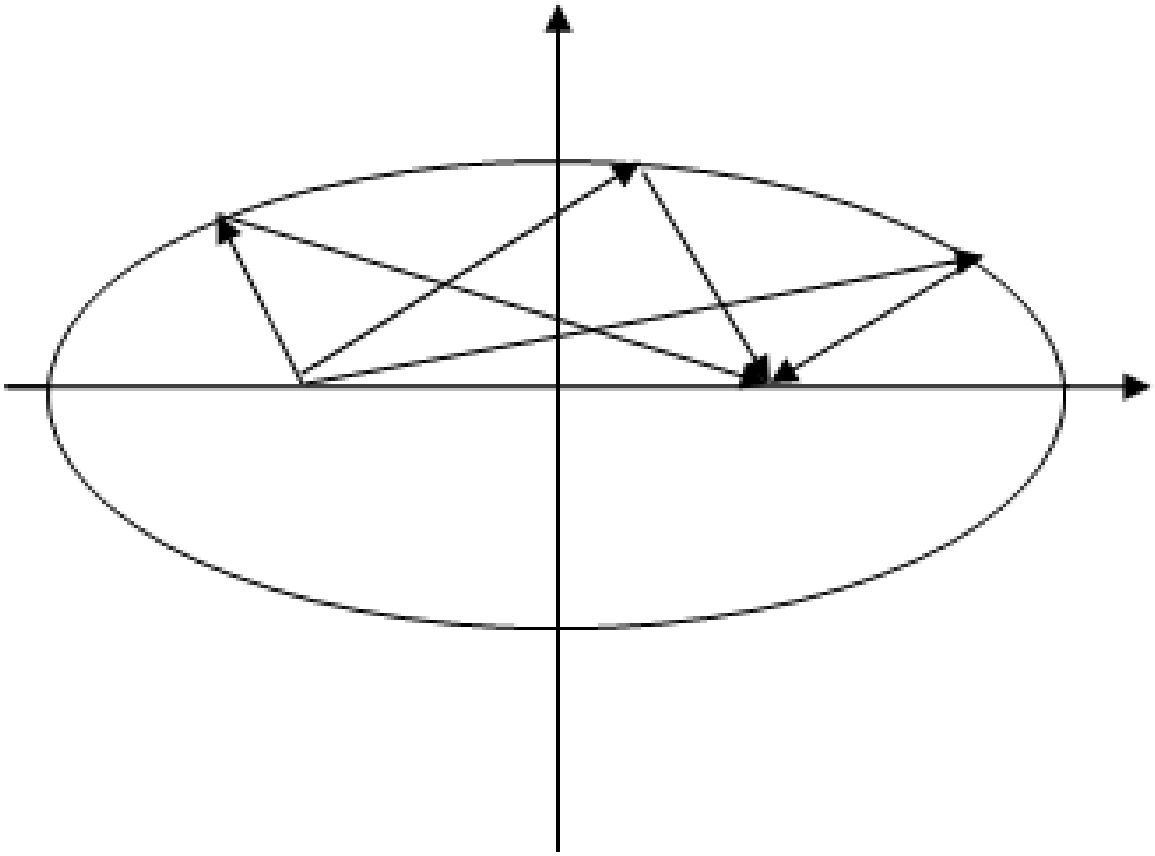
Упражнение. Показать, что уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

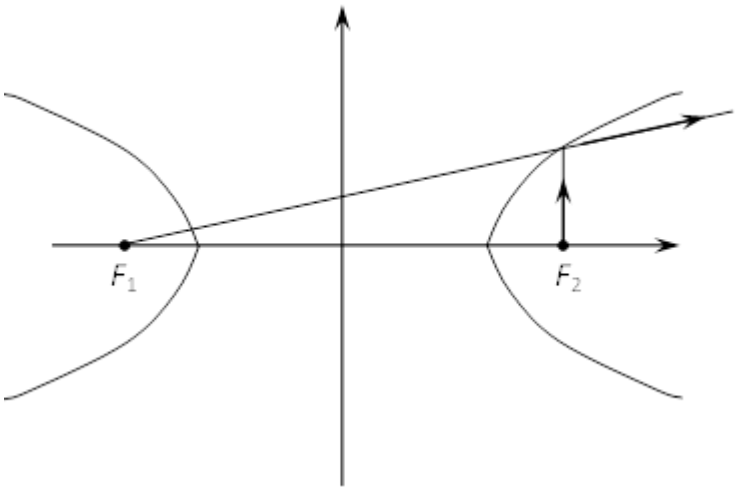
В точке $M(x_0; y_0)$ имеет вид: $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$

Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

Теорема. Лучи света, выходящий из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса проходят через другой его фокус (рис. 11.8).







Лучи света, выходящие из фокуса параболы, после отражения от неё образуют пучок лучей, параллельных оси параболы (рис. 11.9).

Лучи света, выходящие из одного фокуса гиперболы, после отражения от гиперболы, кажутся выходящими из другого её фокуса (рис. 11.10).

Рис. 11.10

Покажем, что нормаль к гиперболе, проведенная в точке $M(x_0; y_0)$, образует одинаковые углы с лучом, выходящим из правого фокуса, и с лучом, кажущимся выходящим из левого фокуса.

Обозначим $\varphi_1 = \angle(\vec{n}, M_0F_2), \varphi_2 = \angle(\vec{n}, F_1M_0)$ (рис. 4). Согласно (4) § 6 $\vec{n}(x_0/a^2; -y_0/b^2)$. Кроме того, $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$, поэтому

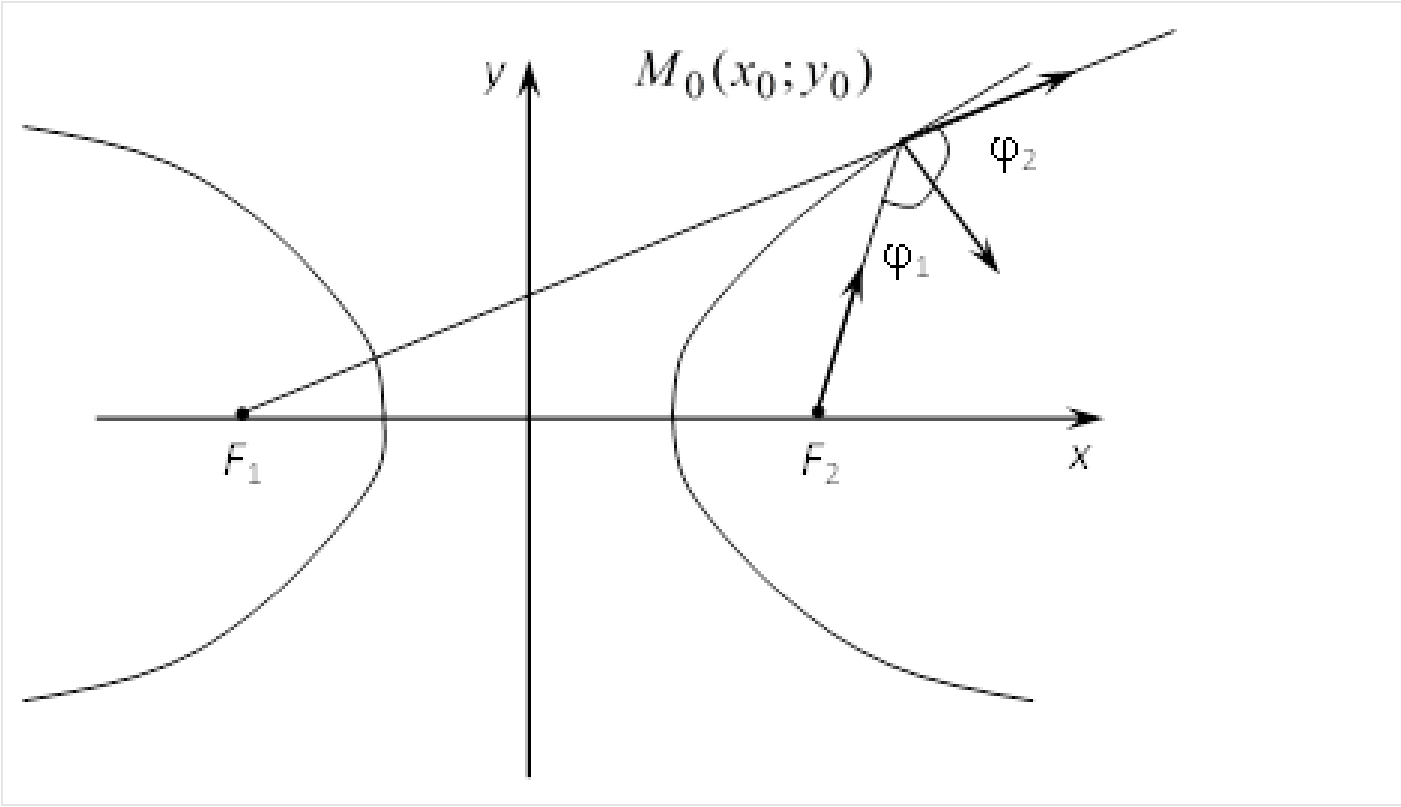


Рис. 11.10.

$M_0F_2(c-x_0,-y_0), F_1M_0(x_0+c,y_0)$.

Тогда:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0F_2}}{|\vec{n}||\overrightarrow{M_0F_2}|} = [(5)\S1] = \frac{\frac{cx_0}{a^2}-\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}}{|\vec{n}|\left|a-\frac{c}{a}x_0\right|} = \frac{\frac{cx_0}{a^2}-1}{a|\vec{n}|\left|1-\frac{c}{a^2}x_0\right|} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a|\vec{n}|}, x_0 \geq a \\ -\frac{1}{a|\vec{n}|}, x_0 \leq -a \end{cases} \quad (1)$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{F_1M_0}}{|\vec{n}||\overrightarrow{F_1M_0}|} = [(6)\S1] = \frac{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{cx_0}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}}{|\vec{n}|\left|a+\frac{c}{a}x_0\right|} = \frac{\frac{cx_0}{a^2}+1}{a|\vec{n}|\left|1+\frac{c}{a^2}x_0\right|} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a|\vec{n}|}, x_0 \geq a \\ -\frac{1}{a|\vec{n}|}, x_0 \leq -a \end{cases}. (2)$$

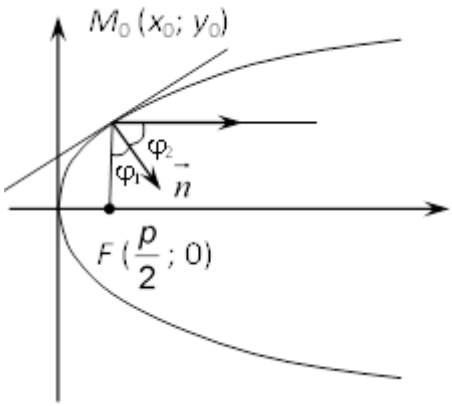
Сравнивая (1) и (2) и учитывая, что оба угла φ_1 и φ_1Находятся в пределах от 0 до π, получаем, что $\varphi_1 = \varphi_1$.

Для параболы. Обозначим $\varphi_1 = (\vec{n}, \overrightarrow{M_0F})$, $\varphi_2 = (\vec{n}, \vec{\imath})$ (рис. 11.11). На основании (6) § 6 $\vec{n}(p, -y_0)$. Тогда $M_0F\left(\frac{p}{2}-x_0, -y_0\right)$ и

$$\cos\varphi_1 = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0F}}{|\vec{n}|\left|\overrightarrow{M_0F}\right|} = \frac{\frac{p^2}{2} - x_0p + y_0^2}{|\vec{n}|\sqrt{\frac{p^2}{4} - px_0 + x_0^2 + y_0^2}} = [y_0^2 = 2px_0] =$$

$$= \frac{\frac{p^2}{2} + px_0}{|\vec{n}|\sqrt{\frac{p^2}{4} + x_0^2 + px_0}} = \frac{p\left(\frac{p}{2} + x_0\right)}{|\vec{n}|\left(\frac{p}{2} + x_0\right)} = \frac{p}{|\vec{n}|}, \cos\varphi_2$$

$$= \frac{\vec{n}\cdot\vec{i}}{|\vec{n}|\cdot 1} == \frac{p}{|\vec{n}|}.$$



Сравнивая последние два равенства, опять же получаем, что $\varphi_1 = \varphi_2$.

Для эллипса оптическое свойство доказывается точно так же, как и для гиперболы, поэтому вы это можете сделать самостоятельно в качестве упражнения. ◄

ГЛАВА 12. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

12.1. Прямая линия в пространстве. Плоскость в трехмерном пространстве.

12.2. Уравнения плоскости.

12.3. Поверхности второго порядка.

12.1. Прямая линия в пространстве. Плоскость в трехмерном пространстве.

Пусть в пространстве плоскость Q задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярным этой плоскости. Выведем уравнение этой плоскости. Возьмем на ней произвольную точку $M(x, y, z)$ и составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. При любом расположении точки $M(x, y, z)$ на плоскости Q векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$, т.е. $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Это уравнение называется *уравнение плоскости в векторной форме.* Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ *называется нормальным вектором плоскости.*

Обозначая через $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, запишем уравнение в виде $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$

Это уравнение называется общим уравнением плоскости.

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. Если $D = 0$, то уравнение принимает вид $Ax + By + Cz = 0$. Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0,0,0)$ Плоскость проходит через начало координат.

2. Если $C = 0$, то уравнение принимает вид $Ax + By + D = 0$.

Нормальный вектор $\vec{n} = (A, B, 0)$ перпендикулярен оси Oz.

Следовательно, плоскость параллельна оси Oz; если $B = 0 -$ параллельна оси Oy, если $A = 0 -$ параллельна оси Ox.

3. Если $C = D = 0$, то плоскость проходит через $O(0,0,0)$ параллельно оси Oz, т.е. проходит через ось Oz. Аналогично с другими осями.

4. Если $A = B = 0$, то уравнение принимает вид $Cz + D = 0$ или $z = -\frac{D}{C}$.

Плоскость параллельна плоскости Oxy. Аналогично с другими плоскостями.

5. Если $A = B = D = 0$, то уравнение принимает вид $Cz = 0$ или $z = 0$.

Это уравнение плоскости Oxy. Аналогично с другими плоскостями.

Через три точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость. Найдем уравнение плоскости Q проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$ на плоскости и составим векторы $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$. Эти векторы лежат в плоскости Q, следовательно, они компланарны. Запишем условие компланарности трех векторов (смешанное произведение равно нулю):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$ Т.о. это *уравнение плоскости проходящей через три точки.*

Пусть плоскость отсекает на осях Ox, Oy и Oz соответственно отрезки a, b, c, т.е. проходит через точки $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$. Подставляя координаты точек в предыдущее уравнение, получим

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим $bcx + acy + abz = abc$ или $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ *уравнение плоскости в отрезках.*

Задача.

Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2:

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$

Угол φ между плоскостями это угол между нормалями $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, \mathrm{C}_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, \mathrm{C}_2)$. Поэтому $\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ или $\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$.

Если плоскости *перпендикулярны*, то перпендикулярны и их нормали, т.е. $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 -$ условие *перпендикулярности* двух плоскостей.

Если плоскости перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормали т.е. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} -$ условие *параллельности* двух плоскостей.

Пусть задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние d от точки до плоскости находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

12.2. Уравнения плоскости

Положение прямой в пространстве определено, если задана какая-либо точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямой и вектор $\vec{S} = (m, n, p)$, параллельный этой прямой − направляющий вектор.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y, z)$. Обозначим радиус векторы точек M_0 и M соответственно $\overrightarrow{r_0}$ и $\vec{r}$. Очевидно, что $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{M_0M}$, но $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{S}$. Это уравнение называется *векторным уравнением прямой.*

Замечая, что $\vec{r} = (x, y, z), \overrightarrow{r_0} = (x_0, y_0, z_0), t\vec{S} = (tm, tn, tp)$ векторное уравнение прямой можно записать в виде $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_0 + tm)\vec{i} + (y_0 + tn)\vec{j} + (z_0 + tp)\vec{k}$. Отсюда следуют равенства: $x = x_0 + tm, y = y_0 + tn, z = z_0 + tp$. Они называются *параметрическими уравнениями прямой*.

Векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарны, значит их координаты пропорциональны: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$. Это уравнение называют *каноническим уравнением прямой*.

Замечание. Обращение в ноль одного из знаменателей означает обращение в ноль соответствующего числителя.

Прямая в пространстве. Основные задачи

Угол между прямыми это угол между направляющими векторами $\vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\left|\vec{S}_1\right| \cdot \left|\vec{S}_2\right|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Если прямые *перпендикулярны*, то $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Если прямые параллельны, то $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Прямая $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$ проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и имеет направляющий вектор $\vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$.

Прямая $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ проходит через точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и имеет направляющий вектор $\vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

Если $\vec{S}_1 \parallel \vec{S}_2$, то прямые параллельны. В противном случае прямые либо пересекаются, либо скрещивающиеся.

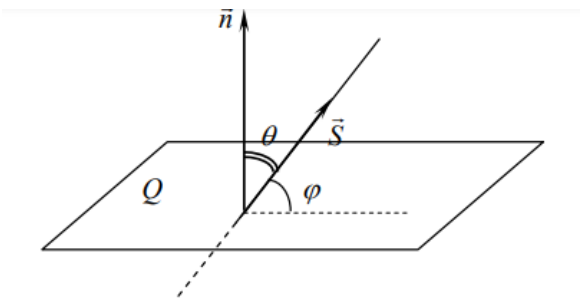
Прямые лежат водной плоскости, если векторы $\vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ и $\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ компланарны. Т.е.

$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$. В этом случае прямые пересекаются.

Прямая и плоскость в пространстве. основные задачи

Плоскость задана уравнением Ax+By+Cz+D =0, а прямая уравнениями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$



$$\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Если прямая и плоскость *параллельны*, то векторы $\vec{n}$ и $\vec{S}$ перпендикулярны, т.е. $Am + Bn + Cp = 0$.

Прямая перпендикулярна плоскости если векторы $\vec{n}$ и $\vec{S}$ параллельны, поэтому $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

Пусть требуется найти точку пересечения прямой $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ с плоскостью Ax+By+Cz+D =0. Для этого надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} \\ \mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{Cz} + \mathrm{D} = 0 \end{cases}.$$

Если переписать уравнение прямой в параметрическом виде: $\begin{cases} x = x_0 + tm \\ y = y_0 + tn \\ z = z_0 + tp \end{cases}$ и подставить эти выражения в уравнение плоскости, получим

$$A(x_0 + tm) + B(y_0 + tn) + C(z_0 + tp) + D = 0 \text{ или}$$
$$t(Am + Bn + Cp) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0.$$

Если прямая не параллельна плоскости, т.е. $Am + Bn + Cp \neq 0$, находим $t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$. Подставив найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Пример. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2}, x + 3y - 5z + 9 = 0$$

Запишем параметрические уравнения прямой:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2} = t \implies \begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Подставляем в уравнение плоскости:

$$(-1 - 3t) + 3(-2 + 2t) - 5(3 - 2t) + 9 = 0,$$
$$-1 - 3t - 6 + 6t - 15 + 10t + 9 = 0,$$
$$13t - 13 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Координаты точки пересечения прямой и плоскости будут (-4; 0; 1).

Рассмотрим случай, когда $Am + Bn + Cp = 0$:

1. Если $F = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая параллельна плоскости.

2. Если $F = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то прямая лежит в плоскости.

Если плоскость и прямая параллельны, становится актуальна задача вычисления расстояния от прямой до плоскости или от точки до плоскости. При этом, первая задача сводиться ко второй, если мы укажем точку на заданной прямой.

Пример. Найти расстояние от точки $A(2, 3, -1)$ до плоскости $7x - 6y - 6z + 42 = 0$.

Решение: Расстояние от точки до плоскости определяется по формуле

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|,$$

в которой следует положить $A = 7; B = -6; C = -6;\ x_1 = 2;\ y_1 = 3;\ z_1 = -1$.

Подставляя эти значения в формулу, будем иметь

$$d = \left|\frac{7 \cdot 2 + (-6) \cdot 3 + (-6) \cdot (-1) + 42}{\sqrt{7^2 + (-6)^2 + (-6)^2}}\right| = \left|\frac{14 - 18 + 6 + 42}{11}\right| = 4.$$

12.3. Поверхности второго порядка

Поверхность, образованная движением прямой L, сохраняющей постоянное направление, вдоль некоторой кривой K, называется *цилиндрической поверхность или цилиндром.*

Кривая K называется *направляющей*, а прямая L — *образующей*.

Пусть кривая K лежит в плоскости Oxy и ее уравнение F(x,y)=0 , а прямая L параллельна оси Oz.

Название цилиндра определяется названием направляющей: эллиптический (круговой), гиперболический и параболический цилиндр.

Поверхность, образованная прямыми линиями, проходящими через данную точку P и пересекающими данную линию K, называется конической поверхностью или конусом.

Линия K — направляющая, точка P — вершина, а прямая, описывающая поверхность — образующая.

Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

Эллипсоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a>0, b>0, c>0.$$

Исследуем данную поверхность методом сечений. Проведем плоскость параллельную плоскости Oxy. Уравнение такой плоскости z=h. Линия, получаемая в сечении, определяется системой уравнения

Исследуем данную поверхность методом сечений. Проведем плоскость параллельную плоскости Oxy. Уравнение такой плоскости $z=h$. Линия, получаемая в сечении, определяется системой уравнения

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ z=h\end{cases}\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}.$$

- Если $|h|>c, c>0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<0$. Точек пересечения с плоскостью нет.
- Если $|h|=c$, т. е. $h=\pm c$, то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}0$. Линия пересечения выражается в две точки $(0,0,-c)$ и $(0,0,c)$. Плоскости $z=c$ и $z=-c$ касаются данной поверхности.
- Если $|h|<c$, получим уравнение

$$\frac{x^2}{\left(a^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1.$$ Это эллипс с полуосями a_1

$$=a^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$$

и $b_1=b^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, причем чем меньше $|h|$, тем больше полуоси a_1 и b_1.

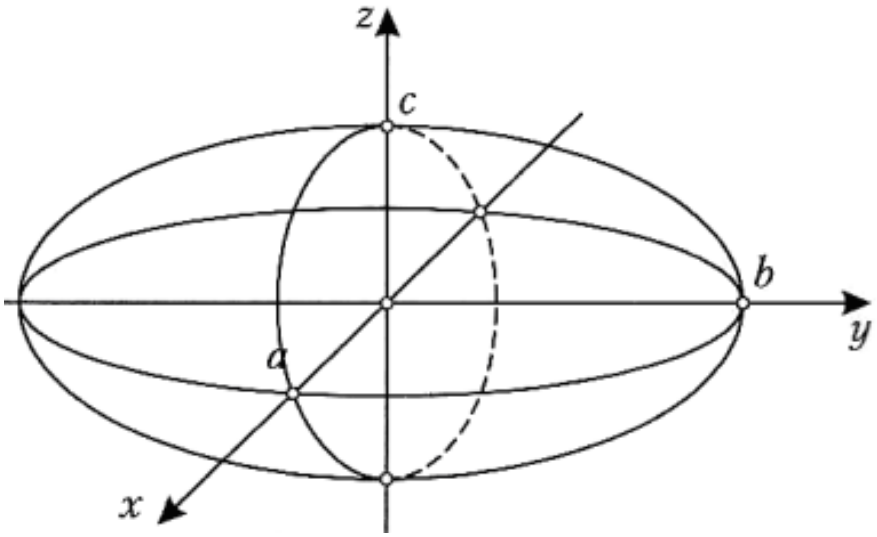
Аналогичные результаты получатся при сечении плоскостями $x=h$ и $y=h$.

Данная поверхность симметрична относительно всех трех координатных осей. Координатные оси пересекаются с

поверхностью в точках $(\pm a, 0,0), (0, \pm b, 0), (0,0, \pm c)$. Параметры a, b, c называются *полуосями эллипсоида.*

Если $a = b = c$, то эллипсоид превращается в сферу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Если любые две полуоси равны, то эллипсоид называется *эллипсоидом вращения.*



Однополостным гиперболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, a > 0, b > 0, c > 0.$

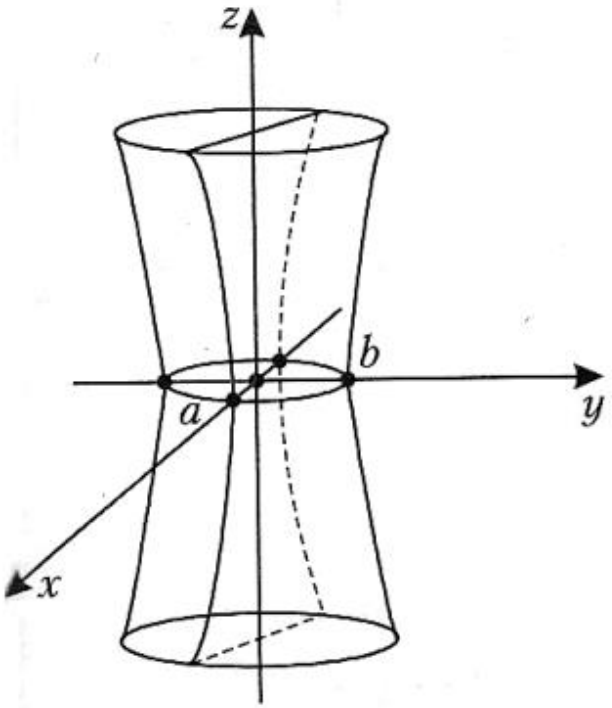
Применим метод сечений:

- $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} =$

1. Это гипербола плоскости yOz.

- Аналогично в плоскости xOz имеем гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
- В плоскости xOy имеем эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Сечение $z = h$ дает нам эллипс $\frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1$ полуоси которого возрастают по мере удаления от начала координат.

- В сечениях параллельных координатным плоскостям yOz и xOz получим гиперболы.



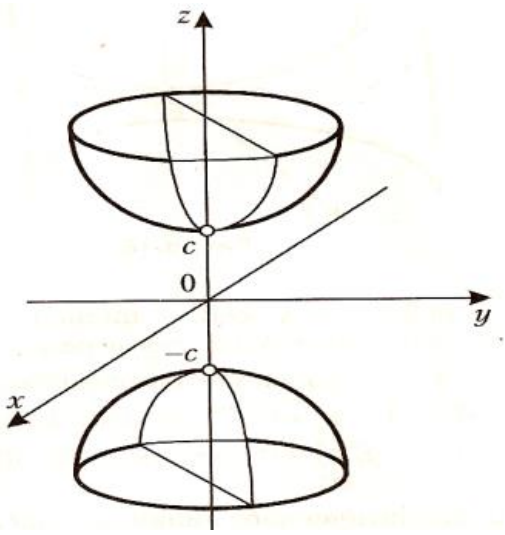
Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, a>0, b>0, c>0.$$

Применим метод сечений:

- $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}\Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Это соотношение не имеет смысла, значит поверхность не пересекает плоскость yOz.
- Положим $y=0$ получим в плоскости xOz гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.
- В плоскости xOy имеем гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.
- Сечение $x=h$ дает нам эллипс $\frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2}=1$ полуоси которого возрастают по мере удаления от начала координат.

Поверхность вытянута вдоль оси Ox и представляет собой две полости.

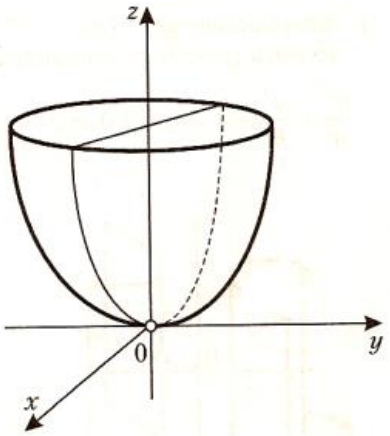


Эллиптическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, p>0, q>0.$

- Отмети, что $z>0$ при любых x и y. Причем $z=0$ при $x=0, y=0$. Значит проходит через начало координат и лежит в верхнем полупространстве.
- Сечение, проходящее через ось Oz дает параболу вытянутую вдоль оси $Oz: x^2=2pz, y^2=2qz.$
- Сечение $z=h$ дает эллипс $\frac{x^2}{\left(\sqrt{2ph}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{2qh}\right)^2}=1.$

Поверхность имеет форму чаши. Если $p=q$ поверхность называется *параболоидом вращения.*



Гиперболическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

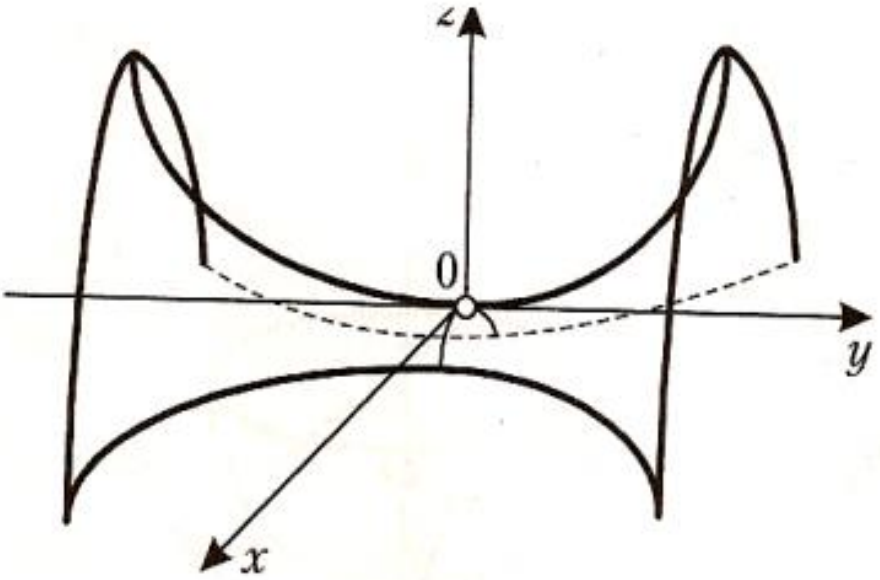
$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, p>0, q>0.$

- Сечение плоскостью $z = 0$ дает пару пересекающихся прямых:

$\frac{y}{\sqrt{q}} - \frac{x}{\sqrt{p}} = 0, \frac{y}{\sqrt{q}} + \frac{x}{\sqrt{p}} = 0$. Т.е. поверхность пересекается с xOy по прямым линиям.

- При $x = 0$ в плоскости yOz получим параболу $y^2 = -2qz$.
- Пологая $x = h$, получим ту же параболу, но приподнятую вверх $y^2 = -2qz + \frac{qh^2}{p}$.
- В плоскости xOz имеем параболу $x^2 = 2pz$

Поверхность имеет форму седла.



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник. – М.: Высшая школа, 1998.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной и аналитической геометрии: Учебник для вузов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1997.
3. Высшая математика для экономистов: Учебник / Под ред. Проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд. – М.: Банки и биржи; ЮНИТИ, 2004.
4. Клюшин В.Л. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2006.
5. Коробов П.Н. Математическое программирование и моделирование экономических процессов: Учебник. СПб.: ООО «Издательство ДНК», 2003.
6. Красс М.С. Математика для экономических специальностей: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 1999.
7. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2003.
8. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. – 2-е изд., испр. – М.: ИНФРА-М, 2007.
9. Справочник по математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ИНФРА-М, 2007.
10. Шведенко, С. В. Комплексные числа и их изображение : учеб, пособие / С. В. Шведенко. - М., 2000.-36 с.
11. С.Н. Кузнецова, М.В. Лукина. Конспект лекций для студентов экономических специальностей. I курс (модуль 1–2). Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. 72 с.
12. https://books.ifmo.ru/file/pdf/669.pdf
13. https://www.istu.edu/docs/education/faculty/zvf/ood/magistratyra/matematika/uchebnye_materialy/konspekt_lekciy_123_semestra_vlasov.pdf

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ…… 3
ГЛАВА 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА…… 4
1.1. Определители и их свойства…… 4
1.2. Миноры и алгебраические дополнения……7
ГЛАВА 2. МАТРИЦЫ…….. 11
2.1. Понятие о матрице. Матрицы и действия над ними……11
2.2. Выполнение операции с матрицами в Excel……..17
2.3. Матричный способ решения системы линейных……..21
уравнений……21
2.4. Матричный метод решения систем линейных уравнений... 27
2.5. Решения систем линейных уравнений методом Крамера… 29
ГЛАВА 3. МОДЕЛЬ ЛЕОНТЬЕВА МНОГООТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКИ……... 32
3.1. Балансовые соотношения…… 32
3.2. Модель многоотраслевой экономики……33
3.3. Продуктивные модели экономики…… 34
ГЛАВА 4. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ……37
4.1. Векторы на плоскости и в пространстве……37
4.2. Скалярное, векторное и смешанные произведения…….. 41
ГЛАВА 5. n -МЕРНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО. БАЗИС…… 59
5.1. Линейная зависимость системы векторов…… 59
5.2. Переход к новому базису……61
ГЛАВА 6. РАНГ МАТРИЦЫ. РАНГ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ……65
6.1. Ранг матрицы. ранг системы векторов……... 65
ГЛАВА 7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА…….. 69
7.1. Свойства комплексных чисел…… 69
7.2. Примеры применения комплексных чисел в экономике. ……69
7.1. Свойства комплексных чисел…… 69
7.2. Примеры применения комплексных чисел в экономике…..72
ГЛАВА 8. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ……...76
8.1. Собственные значения и собственные вектора……76
ГЛАВА 9. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ…….. 80

9.1. Квадратичные формы…….. 80
ГЛАВА 10. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД *ЖОРДАНА - ГАУССА*……82
10.1. Произвольные системы линейных уравнений. Метод *Жордана – Гаусса*…… 82
10.2. Опорные решения системы линейных уравнений…….. 86
ГЛАВА 11. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ……... 107
11.1. Уравнение прямой на плоскости……107
11.2. Кривые второго порядка……..112
ГЛАВА 12. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ……131
12.1. Прямая линия в пространстве. Плоскость в трехмерном пространстве…….. 131
12.2. Уравнения плоскости……... 133
12.3. Поверхности второго порядка……136
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ……... 142

О.М. НОРКУЛОВ, З.С. ГАНИЕВА,
С.Ф. ФАХРИДДИНОВА

МАТЕМАТИКА
(1 ЧАСТЬ)

Учебное пособие

Редактор: З.Мелиев
Корректировщик: Ж. Шодмонов

Учебное пособие представлено к публикации по решению Совета Самаркандского института экономики и сервиса (протокол № 4 от 10 ноября 2023 г.).

ISBN: 978-9910-753-46-6

Лицензия № 033337 (27.07.2022)
© Издательство «FAN BULOG‘I»,
Самарканд 2024.
Разрешено на печать 15.03.2024 г.

0708

Распечатано 2024 г.
Формат бумаги 60x84 1/16., Бумага офсетная.
Гарнитура “Times New Roman”.
Печать офсетная. Усл. п. л. 9.12
Заказ № 0047A/24. Тираж 50 эк.

Распечатано в полиграфии
Самаркандского института
экономики и сервиса.
LICENSE № 025316
REESTR № X-119112
Адрес: г. Самарканд, ул. Шохруха 60.