O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

SAMARQAND IQTISODIYOT VA SERVIS INSTITUTI

J.B.Quljanov, U.Z.Raximova,
Sh.B.O‘razaliyev

MATEMATIKA 1

O‘QUV QO‘LLANMA

SAMARQAND - 2023

UO‘K: 512.628.2(075.8)
Q 75
KBK: 22.161.6ya73

J.B.Quljanov, U.Z.Raximova, Sh.B.O‘razaliyev.
“Matematika 1” Matn]: **o‘quv qo‘llanma** / Samarqand iqtisodiyot va servis instituti – Samarqand.: “FAN BULOG‘I” nashriyoti, 2023 - 269 bet.

Taqrizchilar:

J.M.Maxmudov – SamDU dotsenti, f.-m.f.d.

X.Q,Qarshiboyev – SamISI, dotsenti.

Mazkur o‘quv qo‘llanma Samarqand iqtisodiyot va servis instituti O‘quv-uslubiy Kengashi tomonidan tasdiqlangan “Matematika 1” fani amaldagi dasturiga mos bo‘lib, u 60410100 - Buxgalteriya hisobi va audit (tarmoqlar bo‘yicha) ta’lim yo‘nalishi bo‘yicha bilim oladigan talabalar uchun mo‘ljallangan bo‘lib, undan boshqa ta’lim yo‘nalishdagi bakalavriatlar ham foydalanishlari mumkin.

Mazkur o‘quv qo‘llanmada chiziqli algebra va analitik geometriya, matematik analizga kirish, qatorlar nazariyasi, differensial tenglamalar nazariyasi bo‘limlari keltirilgan. O‘quv qo‘llanmada oldin fanning nazariy qismlari qisqacha ayrim boblarda esa kengroq berilgan bo‘lib, qulay usullarni qo‘llab misol va masalalar yechilgan. Misol va masalalar yechilgandan so‘ng, tahlil qilingan.

O‘quv qo‘llanma Samarqand iqtisodiyot va servis instituti Kengashining 2023 – yil 10 - noyabragi 4 - sonli qaroriga muvofiq o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan.

ISBN: 978-9910-753-48-0

©J.B.Quljanov va boshq., SamISI. 2023 y.
© “Fan bulog‘i” nashriyoti, 2023 y.

KIRISH

Milliy iqtisodiyotimizni shakllantirish jarayoni O‘zbekistonimizga mustaqillikga erishgandan so‘ng boshlandi, hamda sog‘lom aql-idrok, jahon xo‘jalik tajribasi, umuminsoniy qadriyatlarmizning ustuvorligiga muvofiq o‘zgarib bormoqda.

Iqtisodiy o‘zgarishlar qanchalik mantiqli va barqaror davom etsa, hayot- faoliyatimizning boshqa sohalarini ijtimoiy jihatdan shunchalik og‘riqsiz qayta ko‘rishimiz mumkin. Mehnatning, moliyaviy, moddiy va axborot resurslarining erkin harakatlnishini ko‘zda to‘tuvchi bozorgina har xil mahsulot ishlab chiqaruvchida iste’molchilarning ehtiyojlari, hamda talablarini qondirish mayl- istagini uyg‘otadi. Jamiyatda zarur bo‘lmagan, yoki samarasiz mehnatni o‘z hududidan chiqarib tashlaydi.

“Matematika 1” fanini o‘qitishdan asosiy maqsad, milliy iqtisodiyot va uning tarmoqlari kabi murakkab iqtisodiy tizimlarni modellashtirish asoslari bilan tanishish, aniq iqtisodiy obyektlar misolida modellashtirishning qo‘yilishi, ularning iqtisodiy mazmuni, ularni yechish va olingan natijalarni iqtisodiy talqin qilish kabi bosqichlarni o‘rgatishdan iborat. Dasturni tuzish, milliy iqtisodiyotiyotning xozirgi tizimiga asoslangan va bu tizimga ta’lluqli bo‘lgan modellar, uni to‘liq ifodalaydi degan tushunchadan kelib chiqib amalga oshirilgan. “Matematika 1” fanining yutuqlaridan foydalangan holda, hozirgi paytda iqtisodiy fan va amaliyot murakkab iqtisodiy, xo‘jalik va nazariy masalalarni hal qilmoqda.

O‘quv qo‘llanmada Iqtisodiyot yo’nalishlardagi mutuxassis kadrlar yetishishidagi ro‘li va ahamiyati ko‘rib chiqilgan. Bu o‘quv qo‘llanmada tanlangan masalalar aynan mutaxassislik uchun yo‘naltirilsa, uning ahamiyati yanada yaxshi bo‘ladi. Oliy ta`lim muassasalarida o‘qitilayotgan “Matematika 1” fani taraqqiyotining ustivor yo‘nalishlarini nazariy va amaliy tahlil qilish, talabalarga faqatgina tushunchalar berib qolmasdan ularga misol va masalalar yechish yordamida ularni mustaqil mantiqiy fikrlashi, erkin matematik mushohada yurita olishiga erishish, muhim qarorlar qabul qila olish

uchun zamin yaratish bugungi kun professor o‘qituvchilarning dolzarb vazifasi hisoblanadi. Qo‘llanmada oliy matematikaning ayrim mavzularini yoritishda (amaliyot darslarida) tanlanishi mumkin bo‘lgan metodlar namunalari keltirilgan.

Mazkur o‘quv qo‘llanma matematikaning chiziqli algebra asoslari va ularning tadbiqlari, analitik geometriya va ularning tadbiqlari , matematik analiz asoslari va uning tadbiqlari va differensial tenglamalar bo‘limlarini o‘z ichiga oladi.

O‘quv qo‘llanma 4 bobdan va har bir bobda mavzular bo‘yicha tayanch iboralar, nazorat savollari va mustaqil bajarish uchun topshiriqlar berilgan.

Mazkur o‘quv qo‘llanma Samarqand iqtisodiyot va servis instituti O‘quv-uslubiy Kengashi tomonidan tasdiqlangan “Matematika 1” fani amaldagi dasturiga mos bo‘lib, u 60410100 - Buxgalteriya hisobi va audit (tarmoqlar bo‘yicha) ta’lim yo‘nalishlari bo‘yicha bilim oladigan talabalar uchun mo‘ljallangan.

I BOB. CHIZIQLI ALGEBRA ASOSLARI VA ULARNING TADBIQLARI

1.1-§. Matritsalar va ular ustida amallar

Matritsalar haqida umumiy tushunchalar

Matritsalarni algebraik nuqtai nazaridan sonlar to'plami deb qarash mumkin. Har bir belgini, odatda, bir "element" sifatida aniqlanadi. Har bir matritsa to'g'ri to'rtburchaklar shaklda bo'lib, barch satr va ustun elementlar bilan to'ldirilgan bo'lishi zarur. Masalan, agar matritsa 5 satr va 3 ustundan iborat bo'lsa, har bir satrda 5 element va har bir ustunda 3 element bo'lishi kerak. Ba'zi elementlar nol bo'lishi mumkin. Matritsaning o'lchovi uning "tartibi" deb ataladi. Tartibi quyidagicha aniqlanadi:

(Qatorlar soni) × (u stunlar soni)

Misol uchun, yuqoridagi A matritsa 5 satr va 3 ustundan iborat va shuning uchun uning o'lchovi 5 × 3. Bitta nsatr yoki ustundan iborat matritsalarni odatda vektor deb qabul qilingan. Misol uchun, avtomobil ijara narxlarini belgilanganda biz 1 × 5 satr-matritsani vektor sifatida

$$p = \begin{bmatrix} 139 & 160 & 205 & 340 & 430 \end{bmatrix}$$

va birinchi hafta uchun zarur avtomobillarni 5 × 1 ustun-matritsani ustun-vektor deb qarash mumkin

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ta'rif. *O'lchamlari* $m \times n$ *bo'lgan matritsa deb, satrlar soni m ga, ustunlar soni n ga teng bo'lgan va* $m \cdot n$ *ta sondan tashkil topgan to'g'ri to'rtburchak shaklidagi sonli jadvalga aytiladi.*

Ta'rif. *Agar dioganal matritsada barcha* $i = \overline{1,n}$ *lar uchun* $a_{ii} = 1$ *bo'lsa, bunday matritsa birlik matritsa deb ataladi va* E *bilan belgilanadi, ya'ni*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matritsalar ustida amallar

Bir xil o'lchovli matritsalarni qo'shish va ayirish mumkin. Bunda matritsalarning mos elementlari qo'shiladi va ayiriladi.

Misol. A va B do'konlarda Q va P turdagi ikki xil mahsulot sotilayotgan bo'lsin. A va B matritsalar orqali oxirgi 4 hafta davomida bu do'konlarda sotilgan mahsulot miqdori quyidagi matritsa ko'rinishiba ifodalanib, bunda ustunlar haftalarni va satrlar mos ravishda Q va R mahsulotlar miqdorini ifodalaydi.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 12 & 7 \\ 10 & 12 & 9 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{va} \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 3 & 4 \\ 8 & 18 & 21 & 5 \end{bmatrix}$$

4 hafta davomida sotilgan mahsulot hajmni aniqlovchi matritsani toping.

Yechish. A va B matritsalar yig'indisi har bir hafta uchun sotilgan mahsulot hajmini aniqlaydi. Masalan, 1- haftada sotilgan mahsulot hajmini 5+8=13 bo'ladi. Umumiy sotuv hajmi esa quyidagi matritsa orqali aniqlanadi

$$T = A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 12 & 7 \\ 10 & 12 & 9 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 9 & 3 & 4 \\ 8 & 18 & 21 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5+8 & 4+9 & 12+3 & 7+4 \\ 10+8 & 12+18 & 9+21 & 14+5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 13 & 15 & 11 \\ 18 & 30 & 30 & 19 \end{bmatrix}$$

Ta'rif. *Bir xil* $m \times n$ *o'lchamli* $A = (a_{ij})$ *va* $B = (b_{ij})$ *matritsalar uchun ularning yig'indisi deb shunday* $m \times n$ *o'lchamli* $C = (c_{ij})$ *matritsaga aytiladiki, istalgan* $i = \overline{1,n}$ *va* $j = \overline{1,m}$ *lar uchun* c_{ij} *-element,* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *tenglik orqali aniqlanadi va matritsalar yig'indisi* $A+B$ *shaklda belgilanadi, ya'ni* $C=A+B$.

Matsisani biror songa yoko matritsaga ko'paytirish mumkin. Matsisani biror songa ko'paytirganda uning barcha elementlari shu songa ko'paytiriladi. Matritsalarni matritsaga ko'paytirish murakkabroq bo'lib, keying bo'limda o'rganiladi.

Misol. Agar 17,5 % QQS (Qo'shimcha qiymat solig'i) qo'yilganda avtomashina ijarasiga bo'lgan narxlar $p = [139 \quad 160 \quad 205 \quad 340 \quad 430]$.

v soliqsiz narx vektori aniqlang.

Yechish. Dastlab biz narx vektorining qo'llanilashi mumkin bo'lgan quyi skalyar qiymatini aniqlashimiz zarur. Soliq stavkasi 17,5 % bo'lganligi uchun QQS da asosiy foiz stavkasi 117,5% bo'ladi. Suning uchu soliqsiz narx vektori

$$v = \left(\frac{1}{1.175}\right) \cdot p = \left(\frac{1}{1.175}\right) \cdot [139 \quad 160 \quad 205 \quad 340 \quad 430] =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{1.175}\right)139 \ \left(\frac{1}{1.175}\right)160 \ \left(\frac{1}{1.175}\right)205 \ \left(\frac{1}{1.175}\right)340 \ \left(\frac{1}{1.175}\right)430\right] =$$

$$= [118.30 \quad 136.17 \quad 174.47 \quad 289.36 \quad 365.96]$$

$m \times n$ o'lchovli A matritsa berilgan bo'lsin.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Har bir a_{ij} element uchun indeksdagi i element joylashgan satr nomerini va j indeks element joylashgan ustun nomerini anglatadi.

Masalan:

a_{11} = element 1 satr, 1 ustunda joylashgan

a_{12} = element 1 satr, 2 ustunda joylashgan

a_{1n} = element 1 satr, *n* ustunda joylashgan

a_{mn} = element *m satr*, *n* ustunda joylashgan anglatadi.

Agar $m \times n$ o'lchovli A matritsani $n \times r$ o'lchovli B matritsaga ko'paytirganda $m \times r$ o'lchovli AB matritsa hosil bo'ladi. Shuning uchun

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & \dots & c_{mr} \end{bmatrix} = c$$

deb yoza olamiz, bu yerda

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$
$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$c_{mr} = a_{m1}b_{1r} + a_{m2}b_{2r} + \cdots + a_{mn}b_{nr}$$

Misol.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 12 \\ 6 & 0 & 20 \\ 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 10 & 0.5 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 8 & 2.5 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ bo'lsa , C = AB =?

Yechish.

C matritsa elementlarini matritsalar ko'paytirish qoidasiga ko'ra aniqlaymiz:

$c_{11} = 4 \times 10 + 2 \times 6 + 12 \times 4 = 40 + 12 + 48 = 100$

$c_{12} = 4 \times 0.5 + 2 \times 3 + 12 \times 4 = 2 + 6 + 48 = 56$

$c_{13} = 4 \times 1 + 2 \times 8 + 12 \times 2 = 4 + 16 + 24 = 44$

$c_{14} = 4 \times 7 + 2 \times 2.5 + 12 \times 0 = 28 + 5 + 0 = 33$

$c_{21} = 6 \times 10 + 0 \times 6 + 20 \times 4 = 60 + 0 + 80 = 140$

$c_{22} = 6 \times 0.5 + 0 \times 3 + 20 \times 4 = 3 + 0 + 80 = 83$

$c_{23} = 6 \times 1 + 0 \times 8 + 20 \times 2 = 6 + 0 + 40 = 46$

$c_{24} = 6 \times 7 + 0 \times 2.5 + 20 \times 0 = 42 + 0 + 0 = 42$

Endi o'zingiz mustaqil oxirgi satr elementlarini hoisoblang. Unda siz

$$c_{31} = 78, \; c_{32} = 44,5, \; c_{33} = 75, \; c_{34} = 27$$

natijaga ega bo'lshingiz kerak.

Shuning uchun matritsalar ko'paytmasi

$$C = AB = \begin{bmatrix} 100 & 56 & 44 & 33 \\ 140 & 83 & 46 & 42 \\ 78 & 44.5 & 75 & 27 \end{bmatrix}$$

bo'ladi.

O'lchovi katta bo'lmagan matritsalar uchun matritsalar ko'paytmasini hisoblash mumkin, lekin o'lchovi katta matritsalar ko'paytmasi murakkab bo'ladi va ko'p vaqtni oladi. Iqtisodiyot tadbiqlarida matritsalar ko'paymasidan foydalanish unch muhim hisoblanmaydi. Agar matritsalar ko'paytmasidan foydalanish zarurati tug'ilsa, Excel dasturidan foydalanish mumkin.

Ta'rif. *$A=(a_{ij})_{m\times n}$ va $B=(b_{ij})_{n\times k}$ matritsalar ko'paytmasi deb, o'lchami $m\times k$ bo'lgan shunday $C=(c_{ij})_{m\times k}$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} - elementi,*

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot b_{sj},\quad i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,k}$$

tenglik orqali aniqlanib, matritsalar ko'paytmasi $A\cdot B$ ko'rinishda ifodalanadi, ya'ni $C=A\cdot B$.

$A^k=\underbrace{A\cdot A\cdot ...\cdot A}_{k-marta}$ - *A matritsaning « k-darajasi» .*

Ta'rif. *Agar A matritsa elementlarining tartib raqamlarini o'zgartirmagan holda satrlarini ustun yoki ustunlarini satr qilib almashtirsak, hosil bo'lgan yangi matritsa A matritsaning transponirlangani deb nomlanib, A' (yoki A^T) shaklda belgilanadi.*

Amallarning xossalari

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$
4. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$, $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;
5. $\lambda\cdot(A\cdot B)=(\lambda A)\cdot B=A\cdot(\lambda B)$.;
6. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$.

Shuni ta'kidlash kerakki $A\cdot B$ va $B\cdot A$ ko'paytmalar mavjud bo'lgan taqdirda ham $A\cdot B=B\cdot A$ tenglik o'rinli bo'lmasligi mumkin.

Misol. $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6&2&6\\10{,}5&6&3\\3&6&3\end{pmatrix}$ matritsalar uchun ko'paytmani aniqlang.

Yechish.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}6&2&6\\10{,}5&6&3\\3&6&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot6+0\cdot10{,}5+2\cdot3&1\cdot2+0\cdot6+2\cdot6&1\cdot6+0\cdot10{,}5+2\cdot3\\3\cdot6+1\cdot10{,}5+0\cdot3&3\cdot2+1\cdot6+0\cdot6&3\cdot6+1\cdot3+0\cdot3\\0\cdot6+2\cdot10{,}5+0\cdot3&0\cdot2+2\cdot6+0\cdot6&0\cdot6+2\cdot3+0\cdot3\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}12&14&12\\28{,}5&12&21\\21&12&6\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}6&2&6\\10{,}5&6&3\\3&6&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\\0&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&14&12\\28{,}5&12&21\\21&12&6\end{pmatrix}.$$

$$A^k=\underbrace{A\cdot A\cdot ...\cdot A}_{k-marta}$$

A matritsaning « *k*-darajasi» ni aniqlaymiz.

Shartli ravishda $A^0 = E$ va $A^1 = A$ deb qabul qilinadi.

Agar *A* matritsa elementlarining tartib raqamlarini o‘zgartirmagan holda satrlarini ustun yoki ustunlarini satr qilib almashtirsak, hosil bo‘lgan yangi matritsa A matritsaning transponirlangani deb nomlanib, A' (yoki A^T) shaklda belgilanadi. Masalan, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ bo ‘ladi.

A matritsani A' ga almashtirish matritsani transponirlash deb nomlanadi. Transponirlash quyidagi xossalarga ega:

$1.(A')' = A$ $\qquad$ $2.(\lambda A)' = \lambda \cdot A'$

$3.(A+B)' = A' + B'$ $\qquad$ $4.(A \cdot B)' = B' \cdot A'$

Matritsalar ustida amallarga keladigan iqtisodiy masalalar

Misol. T vaqtda neftga bo’lgan talab chiziqli bo’lsin

$$q^t = \beta_0 + \beta_1 x_1^t + \beta_2 x_2^t + \beta_3 x_3^t + \beta_4 x_4^t + \beta_5 x_5^t$$

bu yerda yuqorigi indekslardagi t vaqt davrini ifodalaydi(darajani emas)

$x_1 =$ neft narxi, $x_2 =$ o’rtacha daromad, $x_3 =$ o’rinbosar yoqilg’i narxi, $x_4 =$ komplemanın narxi (masalan, avtomobil), $x_5 =$ aholi.

Neftga bo’lgan T vaqtdagi bu chiziqli talab vektor ko’rinishida quyidagicha ifodalanilishi mumkin

$$q^t = \beta x^t = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1^t \\ x_2^t \\ x_3^t \\ x_4^t \\ x_5^t \end{bmatrix}$$

Misol. Neftga bo’lan talab (million barrelda) ni ***q=βx*** modelida tushuntirish mumkin va bunda

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.2 & -0.1 & 0.4 & 0.2 & -0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

bo’lsin,deb faraz qilaylik.

Tavsiflovchi o’zgaruvchilar vektori

$$x=\begin{bmatrix}1\\ x_1^t\\ x_2^t\\ x_3^t\\ x_4^t\\ x_5^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{Constant}\\ \text{Price}\\ \text{Income}\\ \text{Price of substitute}\\ \text{Price of complement}\\ \text{Population (in m.)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 30\\ 18.5\\ 52\\ 12.8\\ 61\end{bmatrix}$$

bo’lganda neftga bo’lgan talabni hisoblang.

Yechish. Neftga bo’lgan talabni quyidagicha hisoblanadi

$$q=\beta x=\begin{bmatrix}4.2 & -0.1 & 0.4 & 0.2 & -0.1 & 0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 30\\ 18.5\\ 52\\ 12.8\\ 61\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29.92\end{bmatrix}$$

Shunday qilib javob 29,92 million barrel.

Misol. Telefon apparatlarini ta’mirlovchi usta 70% telefonlarni past darajada, 20% o’rta darajada va 10% to’liq ta’mirdan chiqardi. Statistik ma’lumotlarga ko’ra 70% past darajada ta’mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 10% past darajada, 60% o’rta darajada, 30% ni to’liq ta’mirlashadi. O’rta darajada ta’mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 20% past darajada, 50% o’rta, 30% ni to’liq ta’mirlashadi. To’liq ta’mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 60% past darajada, 40% o’rta darajada ta’mirlashadi. Agar masala sharti shu tarzda davom etsa 1, 2, 3 – yillardan keyingi har bir darajada ta’mirlangan telefonlar ulushini aniqlashda matritsalar algebrasidan foydalanish qulay.

$$A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3\\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3\\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{X}_0=(0{,}7 \quad 0{,}2 \quad 0{,}1)$$

$$\mathrm{X}_1=\mathrm{X}_0\cdot\mathrm{A}=(0{,}17 \quad 0{,}56 \quad 0{,}27)$$

$$\mathrm{X}_2=\mathrm{X}_1\cdot\mathrm{A}=(0{,}291 \quad 0{,}490 \quad 0{,}219)$$

$$\mathrm{X}_3=\mathrm{X}_2\cdot\mathrm{A}=(0{,}2585 \quad 0{,}5072 \quad 0{,}2343)$$

Tayanch ibora va tushunchalar

Matritsa, matritsaning o‘lchami, matritsaning determinanti, maxsus matritsa, maxsusmas matritsa, bosh diagonal, diagonal matritsa, birlik matritsa, transponirlangan matritsa, teng matritsalar,

matritsalarning yig’indisi, matritsani songa ko‘paytirish, matritsalar ko‘paytmasi.

Takrorlash uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning o‘lchovi nima va u qanday yoziladi?
3. Kvadrat matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
4. Matritsaning determinanti nima?
5. Maxsus va maxsusmas Matritsalar qanday Matritsalar?
6. Diagonal matritsa deb nimaga aytiladi?
7. Birlik matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
8. Transponirlangan matritsa deb nimaga aytiladi?
9. Qanday matritsalar teng bo‘ladi?
10. Matritsalar yig’indisi nima?
11. Matritsani songa ko‘paytirish qanday bo‘ladi?
12. Qanday Matritsalarni ko‘paytirish mumkin?
13. Matritsalar qanday ko‘paytiriladi?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. AB va BA matritsalarning ko‘paytmasini toping

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -3\\ 5 & 2\end{pmatrix}.$$

2. $D=(AB)^T-C^2$ matritsani toping

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}.$$

3. Ushbu

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 5 & 7 & 1\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & -1 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 5 & 4 & 4\end{pmatrix}$$

matritsalarni ko‘paytiring.

4. Matritsalarni yig’indisini toping

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

5. ABC matritsalarni ko‘paytmasini toping.

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 7 & 5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-28 & 93\\ 38 & -126\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$$

1.2-§. Determinantlar nazariyasi

Ikkinchi va uchunchi tartibli determinantlar.

2 tartibli (2×2 o’lchovli) matris determinant deb qarama-qarshi burchakdagi elementlar ko’paytmasining ayirishdah hosil bo’lgan songa aytiladi. Odatda determinantlarni matritsalardan farqlash uchun ikki tomonidan vertikal to’g’ri chiziqlar bilan belgilanadi, matritsa kabi kvadrat qavslar emas.

2×2 o’lchovli A matritsa determinant |**A**| kabi belgilanadi.

Shuning uchun

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

Misol.

$A=\begin{bmatrix}5 & 7\\ 4 & 9\end{bmatrix}$ matritsa determinanti topilsin.

Yechish. Yuqoridagi formuladan foydalanib hisoblaymiz

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 4 & 9\end{vmatrix}=5\times 9-7\times 4=45-28=17$$

Agar matritsa satrlari yoki ustunlari orasida chiziqli bog'lanish mavjud bo'lsa, uning determinant nolga teng bo'ladi va u xos matritsa deyiladi.

Masalan, $A=\begin{bmatrix}5 & 8\\ 10 & 16\end{bmatrix}$ matritsa determinanti

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 4 & 9\end{vmatrix}=5\times16-8\times10=80-80=0,$$

shunig uchu A matritsa xos matritsadir.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

uchinchi tartibli martisa uchun |**A**| determinant quyidagicha hisoblanadi:

$$|A|=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

Bu birinchi satr elementlarini shu element turgan satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan matritsa determinantiga ko'paytirishdan hosil qilinmoqda. Masalan, 3x3 o'lchovli berilgan matritsa 1 satr va 1 ustunu o'chirilishidan hosil bo'lgan determinant elementga ko'paytirilgan. Agar biz a_{11} belgilashga e'tibor bersak, u holda bu usulni satr bo'yicha qo'llaganda ishora almashadi. Demak, ikkinchi qo'shiluvchi manfiy ishorali bo'ladi.

Misol.

$A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 1\\ 2 & 5 & 2\\ 9 & 0 & 4\end{bmatrix}$ matritsa determinanti topilsin.

Yechish. Yuqoridagi formulaga ko'ra, birinchi satr elementlari bo'yicha yoyilma quyidagicha bo'ladi

$$|A|=4\begin{vmatrix}5 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}2 & 2\\ 9 & 4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 5\\ 9 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=4(20-0)-6(8-18)+(0-45)=80+60-45=95$$

Ta'rif. *n-tartibli kvadrat* $A=(a_{ij})$ *matritsaning determinanti deb, quyidagi tenglik bilan aniqlangan songa aytiladi:*

Bu ta’rifdan foydalanib 2 $|A|=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\ A_{1k}$ va 3 tartibli determinantlarni hisoblash uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Determinant xossalari

1-xossa. *Agar* A*-matritsaning biron-bir satridagi (ustunidagi) barcha elementlari nolga teng bo’lsa, u holda uning determinanti nolga teng bo ‘ladi.*

2-xossa. *Agar* A*-matritsaning biron-bir satr (ustun) elementi* λ *soniga ko’paytirilsa, determinant qiymati ham* λ *soniga ko’payadi, ya’ni* $\lambda \cdot |A|$ *ga teng bo ‘ladi.*

3-xossa. A*-matritsa va uning transponirlangani* A' *matritsalarning determinantlari teng bo’ladi, ya’ni* $|A|=|A'|$ *tenglik o’rinlidir.*

4-xossa. *Agar* A*- matritsaning ikkita qo’shni satrlari o’rnini almashtirsak, hosil bo’lgan yangi* A_1 *matritsaning determinanti* A*-matritsa determinantining teskari ishora bilan olinganiga teng bo ‘ladi, ya’ni* $|A_1|=-|A|$ *tenglik o’rinli bo’ladi.*

5-xossa. *Agar* A*-matritsa bir xil ikki satrga (ustunga) ega bo’lsa, u holda uning determinanti nolga teng , ya’ni* $|A|=0$ *bo ‘ladi.*

6-xossa. *Agar* A*-matritsada ikki satrning (ustun) mos elementlari proporsional bo’lsa, u holda uning determinanti nolga teng, ya’ni* $|A|=0$ *bo ‘ladi.*

7-xossa. *Agar* A *matritsaning biron satr (ustun) elementlarini boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to’ldiruvchilariga*

ko'paytirib yig'indi hosil qilsak, bunday yig'indi nolga teng bo'ladi, ya'ni $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0, \quad i \neq j$.

8- xossa. *A matritsaning biron-bir satri (ustuni) elementlarini bir xil songa ko'paytirib, boshqasiga qo'shishdan hosil bo'lgan* A_1 *- matritsaning determinanti A matritsa determinantiga teng bo'ladi, ya'ni* $|A_1| = |A|$.

9-xossa. $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *sonlarni n-tartibli A matritsaning berilgan satr (ustun) mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmasining yig'indisi, A matritsaning berilgan satr (ustun) elementlarining* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *sonlari bilan almashtirilgan matritsa determinantiga teng bo 'ladi.*

10-xossa. *n-tartibli kvadrat A va B matritsalar uchun* $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ *tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni matritsalar ko'paytmasining determinanti, ularning determinantlari ko'paytmasiga teng bo'ladi.*

Misol. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = ?$

Yechish. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 12 + 21 + 10 - 21 + 6 = 33.$

Minor va algebraik to'ldiruvchi

Laplas yoyilmasi yordamida har qanday tartibli determinantni hisoblash mumkin. Lekin buning uchun ba'zi tushunchalar bilan tanishishimiz kerak (ba'zilaridan biz foydalandik ham).

Minorlar. A matritsa |**M*ij*** | minori deb ***i*** satr va ***j*** ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan determinantga aytiladi.

Masalan,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matritsa uchun

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Misol.

$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ matritsa uchun $|M_{31}|$ minorni hisoblang.

Yechish. Uchinchi satr va birinchi ustunni o'chirib

$$|M_{31}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 27 = -19$$

minorni hosil qilamiz.

Minor ta'rifidan foydalanib, 3 tartibli determinant hisoblash formulasini quyidagicha yozish mumkin

$$|A| = a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$$

Algebraik to'ldiruvchi. $(-1)^{i+j}$ ishora aniqlikdagi |**M***ij* | minorga $|C_{ij}|$ algebraik to'ldiruvchi deyiladi. $|C_{ij}|$ algebraik to'ldiruvchi ishorasi $(-1)^{i+j}$. Shunday qilib, satr va ustun nomerlari yig'indisi toq bo'lsa,u holda ishora manfiy bo'ladi. Masalan, 3 tartibli **A** matritsada $|C_{12}|$ algebraik to'ldiruvchini topish uchun 1 satr va 2 ustunni o'chiramiz, $i + j = 3$ bo'lgani uchun hosil bo'lgan determinantni $(-1)^3$ ga ko'paytiramiz. Demak,

$$|C_{12}| = (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Misol.

$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ matritsa uchun $|C_{22}|$ algebraik to'ldiruvchini toping.

Yechish. $i + j = 4$ bo'lgani uchun

$$|C_{22}| = (-1)^4 \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (+1)(48-12) = 36$$

Algebraik to'ldiruvchi ta'rifidan foydalanib, 3 tartibli determinant hisoblash formulasini quyidagicha yozish mumkin

$$|A| = a_{11}|C_{11}| + a_{12}|C_{12}| + a_{13}|C_{13}| \qquad (1)$$

Bu munosabat xuddi A determinantni hisoblash formulasidek ko'ringani bilan, shuni ta'kidlash kerakki, bu yerdagi ikkinchisi element ishorasi musbatligiga qaramasdan unga mos algebraik to'ldiruvchilardan manfiydir.

Yuqori tartibli detirminantlarni hisoblash

Laplas yoyilmasi. Har qanday *n* tartibli matritsa determinantini Laplas yoyilmasidan foydalanib hisoblash mumkin

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} |C_{ij}| \ , \quad j = 1,2,3,...,n$$

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |C_{ij}| \ , i = 1,2,3,...,n$$

bunda yig'indi 1 dan n gacha ustun bo'yicha ham (j) yoki satr bo'yicha ham (i) bo'lishi mumkin. Agar siz (1) 3 tartibli determinant hisoblash formulasiga e'tibor bersangiz, u Laplas yoyilmasini ifodalaganini anglaysiz. Agar berilgan matritsa 4 yoki yuqori tartibli bo'lsa, u holda algebraik to'ldiruvchilar 3 tartibli yoki yuqori tartibli bo'ladi. shunday qilib, Laplas yoilmasi tarbni pasytirish orqali hisoblashdir, ya'ni berilgan determinantning tartibi bittaga pasayadi. Har qanday yuqori tartibli determinantni Laplas yoyilmasidan foydalanib hisoblaganda unu tartibini ikkinchi tartibgacha tushirib hishoblash qulay.

Determinant tartibi yetarli katta bo'lganda ko'p hisoblashlar bajarishga to'g'ri keladi va shuning uchun tezroq hisoblash usullari zarur bo'ladi.

Oldin bu usulda hisoblashga misol ko'raylik.

Misol. Laplas yoyilmasidan foydalanib, quyidagi matritsa determinantni hisoblang

$$A=\begin{bmatrix}8 & 10 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 7 & 10\\ 2 & 2 & 1 & 4\\ 3 & 4 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

Yechish. Matritsa determinantini hisoblash uchun uni birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyamiz(bu ustonda nol elementi bo'lgani uchun hisoblashda bitta kam uchinchi tartibli determinant hisoblash qulaylik tug'diradi)

$$|A|=8\begin{vmatrix}5 & 7 & 10\\ 2 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 0\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}10 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 0\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}10 & 2 & 3\\ 5 & 7 & 10\\ 4 & 4 & 0\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}10 & 2 & 3\\ 5 & 7 & 10\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$$

Endi uchinchi tartibli har bir determinantni yana birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyamiz:

$$|A|=8\left(5\begin{vmatrix}1 & 4\\ 4 & 0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}7 & 10\\ 4 & 0\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}7 & 10\\ 1 & 4\end{vmatrix}\right)+2\left(10\begin{vmatrix}7 & 10\\ 4 & 0\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 3\\ 7 & 10\end{vmatrix}\right)-$$
$$-3\left(10\begin{vmatrix}7 & 10\\ 1 & 4\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & 3\\ 7 & 10\end{vmatrix}\right)=$$
$$=8\left[5(-16)-2(-40)+4(18)\right]+2\left[10(-40)-5(-12)+4(-1)\right]-$$
$$-3\left[10(18)-5(5)+2(-1)\right]=$$
$$=8[-80+80+72]+2[-400+60-4]-3[180-25-2]=$$
$$=8(72)+2(-344)-3(153)=$$
$$=576-688-459=-571$$

Ta'rif. *n-tartibli kvadrat $A=(a_{ij})$ matritsa a_{ij} elementining M_{ij}-minori deb, A-matritsaning i-satri va j-ustunini o'chirishdan keyin hosil bo'lgan $(n-1)$ tartibli matritsa determinantiga aytiladi.*

Ta'rif. *n-tartibli $A=(a_{ij})$ matritsa a_{ij}-elementining algebraik to'ldiruvchisi A_{ij} - deb quyidagi songa aytiladi $A_{ij}=(-1)^{i+j}\ M_{ij}$.*

Yig'indi $\sum_{s=1}^{n}a_{is}\ A_{is}$ – i-satr bo'yicha yoyilma, $\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\ A_{kj}$ yig'indi esa, j-ustun bo'yicha yoyilma deb ataladi.

Ta'rif. *n-tartibli kvadrat $A=(a_{ij})$ matritsaning determinanti deb, quyidagi tenglik bilan aniqlangan songa aytiladi:*

$$|A|=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\ \ A_{1k}$$

Teorema (Laplas teoremasi). *Istalgan i va j lar uchun*

$$\sum_{s=1}^{n}a_{is}\ A_{is}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\ A_{kj}=|A|\quad i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,n}$$

tenglik o‘rinli bo ‘ladi.

Misol. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ determinant hisoblansin.

I usul. Dastlab, to’rtinchi satr elementlari bo’yicha yoyib hisoblaymiz

$$|A| = a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + a_{43}A_{43} + a_{44}A_{44} = -a_{41}M_{41} + a_{42}M_{42} - a_{43}M_{43} + a_{44}M_{44}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 546.$$

II usul. Endi, determinantning xossalaridan foydalanib, uchinchi ustun elementlarini nolga aylantiramiz va shu ustun bo’yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & -10 & 0 & 6 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ -19 & 17 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -19 & 17 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} -10 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 17 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2(-40+12) + 7(68+18) = 546.$$

Bu usulni “*determinantni tartibini pasaytirib hisoblash usuli*” deb ham yuritiladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Algebra, algoritm, 2,3 va n-tartibli determinantlar, bosh diagonal, yordamchi diagonal, minor, algebraik to‘ldiruvchi, uchburchaklar qoidasi, diagonal qoidasi, determinantlarning xossalari, determinantni biror satri (ustuni) elementlari bo‘yicha yoyish.

Takrorlash uchun savollar

1. Algebra va algoritm iborasi nima bilan bog’liq?
2. 2-tartibli determinant qanday belgilanadi va u nimaga teng?
3. 3-tartibli determinant qanday belgilanadi va u qanday hisoblanadi?
4. Determinantlarning xossalari nimalardan iborat.

5. 4-tartibli determinantlarning kattaligi qanday hisoblanadi?

6. 5,6,…,n-tartibli determinantlar qanday belgilanadi va hisoblanadi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi determinantlar birinchi ustun elementlari bo‘yicha yoyib hisoblansin:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$; **3)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}$.

2. Quyidagi determinantlar nollar eng ko‘p bo‘lgan satr elementlari bo‘yicha yoyib hisoblansin:

1) $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}$ **3)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

3. Quyidagi determinantlar hisoblansin:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}$; **2)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$; **3)** $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}$; **5)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix}$; **6)** $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Ushbu determinantlarni tartibini pasaytirish usulidan foydalanib hisoblang:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -4 & -2 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -7 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 & 3 \end{vmatrix}$; **4)** $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

determinantlarning kattaligini hisoblang.

5. Ushbu

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix}\ ;\ 2)\ \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

determinantlarni birinchi satr elementlari bo‘yicha yoyib hisoblang.

1.3-§. Teskari matritsa va matritsa rangi

Teskari matritsa haqida teorema.

Teskari matritsa formulasini topishdan oldin ba’zi zarur tushunchalar bilan tanishamiz.

Transponirlangan matritsa. Marisa mos satrlarini uning mos ustunlariga almashtirishdan hosil bo’lgan matritsaga transponoirlangan matritsa deyiladi. A matritsaning trasponirlangani A^T kabi belgilanadi.

Masalan, $A=\begin{bmatrix} 5 & 20 \\ 16 & 9 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$ uchun transponirlangan matritsa $A^T=\begin{bmatrix} 5 & 16 & 12 \\ 20 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

Kofaktor matritsa. Matritsa har bir elementini uning algaebraik to’ldiruvchisi bilan almashtirishdan hosil bo’lgan matritsa kofaktor matritsa deyiladi va u C bilan belgilanadi.

Masalan, $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ uchun $C=\begin{bmatrix} 25 & -15 & -12 \\ -14 & -2 & 12 \\ -15 & 9 & -2 \end{bmatrix}$

Bu matritsa elementlari qanday hisoblanganini o’rganaylik. **A** matritsa $|C_{ij}|$ algebraik to’ldiruvchisini hisoblash uchun shu element joylashgan i satr va j ustu o’chirilib, hosil bo’lgan determinant $(-1)^{i+j}$ ishora aniqligida olinadi.

C matritsa elementlari quyidagicha hisoblangan

$$c_{11} = |C_{11}| = (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (25 - 0) = 25$$

$$c_{21} = |C_{21}| = (-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)(20 - 6) = -14$$

va h.k.

C matritsa qolgan elementlarni o'zingiz tekshiring.

Biriktirilgan matritsa. Kofaktor matritsaning trasponirlangan matritsasiga biriktirilgan matritsa deyiladi va *A* matritsaning biriktirilgan matritsasi *Adj A* kabi belgilanadi.

Masalan, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ matritsa uchun $AdjA = \begin{bmatrix} |C_{11}| & |C_{21}| & |C_{31}| \\ |C_{12}| & |C_{22}| & |C_{32}| \\ |C_{13}| & |C_{23}| & |C_{33}| \end{bmatrix}$

Yuqoridagi misoldagi $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ matritsa uchun kofaktor matritsa $C = \begin{bmatrix} 25 & -15 & -12 \\ -14 & -2 & 12 \\ -15 & 9 & -2 \end{bmatrix}$ va biriktirilgan matritsa $AdjA = C^T = \begin{bmatrix} 25 & -14 & -15 \\ -15 & -2 & 9 \\ -12 & 12 & -2 \end{bmatrix}$.

Teskari matritsa. Xos bo'lmagan, ya'ni |*A*| determinant nol bo'lmagan, *A* matritsaning teskari matritsasi

$$A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|}$$

formula yordamida hisoblanadi..

Misol. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ matritsaga A^{-1} teskari matritsa topilsin.

Yechish. Bu matritsa uchun yuqoridagi misolda biriktirilgan matritsa topgan edik. Bu matritsa determinantini hisoblaymiz

$$|A| = 3\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= 3(6-20) + 5(10-12) =$$
$$= 3(-14) + 5(-2) =$$
$$= -42 - 10 = -52$$

Shuning uchun,

$$\boldsymbol{AdjA} = \begin{bmatrix} 25 & -14 & -15 \\ -15 & -2 & 9 \\ -12 & 12 & -2 \end{bmatrix}$$

Bo'lgani uchun teskari matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 25 & -14 & -15 \\ -15 & -2 & 9 \\ -12 & 12 & -2 \end{bmatrix}}{-52} = \begin{bmatrix} -0.48 & 0.27 & 0.29 \\ 0.29 & 0.04 & -0.17 \\ 0.27 & -0.23 & 0.04 \end{bmatrix}$$

Bu matritsani hisoblash ko'p vaqt talab etadi, lekin siz bu usul asosiyligini bilishingiz kerak, elektron jadvalda hisoblashdan oldin. Endi misol yordamida har bir etapni aniqlaylik. Soddalik uchun 2x2 o'lchovli holni qaraylik.

Misol. $A = \begin{bmatrix} 20 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ matritsaga A^{-1} teskari matritsa toping.

Yechish. A matritsa to'rt elementli bo'lgani uchun, kofaktor matritsa bosh diagonal elementlari qarama-qarshi ishorali bo'ladi.

Bu matrrisaga kofaktor matritsa

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 20 \end{bmatrix}$$

matritsa bo'ladi.

Bu matritsaga biriktirilgan matritsa

$$\boldsymbol{AdjA} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 20 \end{bmatrix}$$

bo'ladi.

Bu matritsa determinanti

$$|A| = 20 \times 2 - 5 \times 6 = 40 - 30 = 10.$$

Demak bu matritsaga teskari matritsa

$$A^{-1}=\frac{AdjA}{|A|}=\frac{\begin{bmatrix}2 & -5\\ -6 & 20\end{bmatrix}}{10}=\begin{bmatrix}0.2 & -0.5\\ -0.6 & 2\end{bmatrix}.$$

Ta'rif. *A kvadrat matritsaga teskari matritsa deb, shunday A^{-1} matritsaga aytiladiki, uning uchun quyidagi $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ tenglik o'rinli bo'lsin.*

Ta'rif. *Agar A matritsa uchun $|A|\neq 0$ bo'lsa, bunday matritsa xos bo'lmagan matritsa, aks holda, ya'ni $|A|=0$ bo'lsa xos matritsa deyiladi.*

Teorema. *A kvadratik matritsaga teskari A^{-1} matritsa mavjud va yagona bo'lishi uchun, uning xos bo'lmagan matritsa bo'lishi zarur va yetarlidir.*

A-matritsa xos bo'lmagan matritsa bo'lsin, ya'ni $|A|\neq 0$ bo'lsin. U holda $$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\dots A_{j1}\dots A_{n1}\\ A_{12} & A_{22}\dots A_{j2}\dots A_{n2}\\ A_{1k} & A_{2k}\dots A_{jk}\dots A_{nk}\\ A_{1n} & A_{2n} & A_{jn}\dots A_{nn}\end{pmatrix}.$$

Misol. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani toping.

Yechish. $$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}=5+12+21+10-21+6=33\cdot$$

$$A_{11}=-16,\ A_{12}=9,\ A_{13}=31$$
$$A_{21}=9,\ A_{22}=-3,\ A_{23}=-3$$
$$A_{31}=11,\ A_{32}=0,\ A_{33}=-11$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}-16 & 9 & 11\\ 9 & -3 & 0\\ 31 & -3 & -11\end{pmatrix}=\frac{1}{33}\begin{pmatrix}-16 & 9 & 11\\ 9 & -3 & 0\\ 31 & -3 & -11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{16}{33} & \frac{3}{11} & \frac{1}{3}\\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} & 0\\ \frac{31}{33} & -\frac{1}{11} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Matritsaning rangi

Ta'rif. *A matritsaning rangi deb uning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga aytilib, $r(A)$ orqali belgilanadi.*

Ta'rif. *Matritsa ustidagi elementar almashtirishlar deb quyidagi almashtirishlarga aytiladi:*

1. Barcha elementlari noldan iborat satrni (ustunni) tashlab yuborish.

2. Satrning (ustunning) barcha elementlarini noldan farqli songa ko'paytirish.

3. Satr (ustun) o'rinlarini almashtirish.

4. Berilgan satr (ustun) elementlariga boshqa satr (ustun) elementlarini biron songa ko'paytirib qo'shish.

5. Matritsani transponirlash.

***Teorema**. Matritsa rangi uning ustida elementar almashtirishlarni bajarish natijasida o'zgarmaydi.*

Matritsa rangi uchun quyidagi xossalar o'rinli

1. $r(A+B) \le r(A)+r(B)$ 2. $r(A+B) \ge |r(A)-r(B)|$

3. $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$ 4. $r(A'A) = r(A)$

***Ta'rif.** Agar* $I_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),\ I_2 = (a_{21},\ a_{22}, \ldots, a_{2n}), \cdots, I_m = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn})$ *satrlar va* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ *sonlar uchun* $\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \cdots + \lambda_m I_m = 0$ *tenglik faqat* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = 0$ *shartdagina o'rinli bo'lsa, u holda* $I_1, I_2, \ldots, I_m$ *satrlar chiziqli erkli satrlar , aks holda esa ular chiziqli bog'liq satrlar deyiladi.*

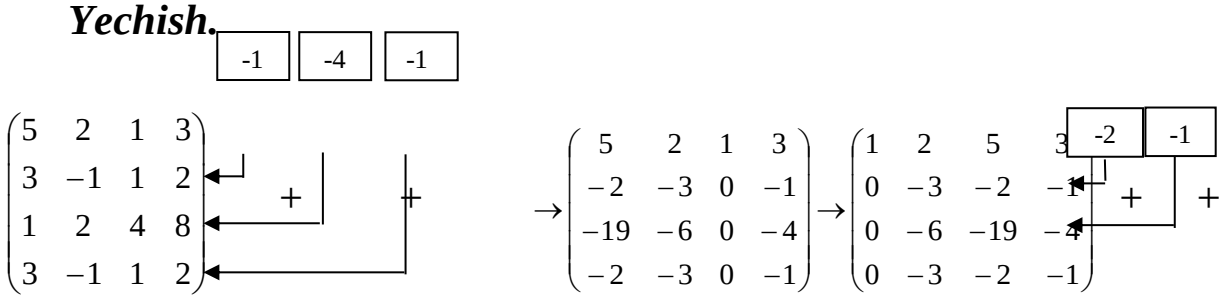
***Teorema**. Matritsa uchun uning chiziqli erkli satrlarning maksimal soni chiziqli erkli ustunlarning maksimal soniga teng bo'ladi.*

***Teorema**. Matritsa rangi undagi chiziqli erkli satrlarning (ustunlarning) maksimal soniga teng bo'ladi.*

Matritsa rangini "rang ta'rifi" bo'yicha hisoblash doim ham oson ish bo'lavermaydi. Matritsa rangini topish uchun matritsa ustida elementar almashtirishlar bajarish natijasida bu matritsani uchburchak yoki trapetsiya ko'rinishiga olib kelish mumkin.

Misol. Berilgan matritsalarning rangini toping. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Yechish.



$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ -19 & -6 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -19 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -15 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demak, *rang*(*A*) = 3.

Matritsani iqtisodda qo'llanilishi.

Misol. Neftga bo'lan talab (million barrelda) ni **q** = **βx** modelida tushuntirish mumkin va bunda

$$\beta = [\beta_0 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4 \ \beta_5] = [4.2 \ \ -0.1 \ \ 0.4 \ \ 0.2 \ \ -0.1 \ \ 0.2]$$

bo'lsin,deb faraz qilaylik.

Tavsiflovchi o'zgaruvchilar vektori

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1^t \\ x_2^t \\ x_3^t \\ x_4^t \\ x_5^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Constant} \\ \text{Price} \\ \text{Income} \\ \text{Price of substitute} \\ \text{Price of complement} \\ \text{Population (in m.)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 30 \\ 18.5 \\ 52 \\ 12.8 \\ 61 \end{bmatrix}$$

bo'lganda neftga bo'lgan talabni hisoblang.

Yechish. Neftga bo'lgan talabni quyidagicha hisoblanadi

$$q = \beta x = [4.2 \ \ -0.1 \ \ 0.4 \ \ 0.2 \ \ -0.1 \ \ 0.2] \begin{bmatrix} 1 \\ 30 \\ 18.5 \\ 52 \\ 12.8 \\ 61 \end{bmatrix} = [29.92]$$

Shunday qilib javob 29,92 million barrel.

Misol. Telefon apparatlarini ta'mirlovchi usta 70% telefonlarni past darajada, 20% o'rta darajada va 10% to'liq ta'mirdan chiqardi. Statistik ma'lumotlarga ko'ra 70% past darajada ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 10% past darajada, 60% o'rta darajada, 30% ni to'liq ta'mirlashadi. O'rta darajada ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 20% past darajada, 50% o'rta, 30% ni to'liq ta'mirlashadi. To'liq ta'mirlangan telefonlarni bir yildan keyin qayta 60% past darajada, 40% o'rta darajada ta'mirlashadi. Agar masala sharti shu tarzda davom etsa 1, 2, 3 – yillardan keyingi har bir

darajada ta’mirlangan telefonlar ulushini aniqlashda matritsalar algebrasidan foydalanish qulay.

$$X_0 = (0{,}7 \quad 0{,}2 \quad 0{,}1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} X_1 &= X_0 \cdot A = (0{,}17 \quad 0{,}56 \quad 0{,}27) \\ X_2 &= X_1 \cdot A = (0{,}291 \quad 0{,}490 \quad 0{,}219) \\ X_3 &= X_2 \cdot A = (0{,}2585 \quad 0{,}5072 \quad 0{,}2343) \end{aligned}$$

Tayanch ibora va tushunchalar

Matritsa, matritsaning o‘lchami, matritsaning determinanti, maxsus matritsa, maxsusmas matritsa, bosh diagonal, diagonal matritsa, birlik matritsa, transponirlangan matritsa, teng matritsalar, matritsalarning yig’indisi, matritsani songa ko‘paytirish, matritsalar ko‘paytmasi, matritsaning κ-tartibli minori, matritsaning rangi, elementar almashtirishlar, teskari matritsa.

Takrorlash uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Teskari matritsa qanday topiladi?
3. Matritsani songa ko‘paytirish qanday bo‘ladi?
3. Matritsaning rangi nima?
4. Elementar almashtirishlar deb qanday amallarga aytiladi?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Ushbu matritsaga teskari matritsani toping.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix};$$

2. Ushbu matritsaga teskari matritsani toping.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

3. λ ning qanday qiymatida A matritsaga teskari matritsa mavjud

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

4. Matritsa rangini toping:

$$1.\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}. \qquad 2.\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$3.\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.4-§. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari

Bizga n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1)$$

Agar chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlarga ega bo'lsa, sistema birgalikda deyiladi.

(1) sistemaning birgalikda bo'lish-bo'lmasligi shartini aniqlaymiz. Agar birgalikda bo'lgan sistema bitta yechimga ega bo'lsa, u aniq sistema, bittadan ortiq yechimga ega bo'lsa, aniqmas sistema deb ataladi. (1) sistema koeffitsiyentlaridan ushbu A matritsani

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Berilgan sistema noma'lumlari koeffisiyentlaridan A matrisani hamda bu matrisaga ozod hadlardan tuzilgan ustunni birlashtirib, ikkinchi V matrisani tuzamiz, ya'ni bular ushbu ko'rinishshda bo'ladi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ --------- \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ va } B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} & b_2 \\ ------------ \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

A matrisaga (1) sistemaning matrisasi, B matrisaga sistemaning kengaytirilgan matrisasi deyiladi. Quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. **(Kroneker-Kapelli teoremasi).** Chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda bo'lishi uchun sistema matrisasi A ning rangi sistema kengaytirilgan B matrisasining rangiga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zarurligi. (1) sistema birgalikda bo'lsin. $k_1,k_2,\ldots,k_s$ uning yechimlaridan biri bo'lsin. Bu sonlarni sistemadagi noma'lumlar o'rniga qo'yib, s ta ayniyat hosil qilamiz. Bu ayniyatlar B matrisaning oxirgi ustuni qolgan barcha ustunlarining mos ravishda koeffisiyetlar bilan ko'paytmasidan olingan yig'indisi ekanligini ko'rsatadi. B matrisaning har qanday boshqa ustuni A matrisaga ham kiradi va shuning uchun u matrisaning barcha ustunlari orqali chiziqli ifodalanadi. Aksincha, A matrisaning har qanday ustuni B matrisani ham ustuni bo'ladi, ya'ni bu matrisaning ustunlari orqali chiziqli ifodalanadi. Bundan A va B matrisalarning ustunlari sistemasi o'zaro ekvivalent ekanligi kelib chiqadi, shuning uchun bu matrisalarning rangi bir xil bo'ladi, ya'ni $r(A)=r(B)$ kelib chiqadi.

Yetarliligi. A va B matrisalar bir xil rangga ega bo'lsin. Bundan A matrisa ustunlarining istalgan maksimal chiziqli erkli sistemasi B matrisada ham maksimal chiziqli erkli sistema bo'lib qolishligi kelib chiqadi. Shunda qilib A matrisa ustunlari sistemasi orqali B matrisaning oxirgi ustuni chiziqli ifodalanadi. Demak, shunday $k_1,k_2,\ldots,k_s$ sonlar majmui mavjud bo'ladiki, A matrisaning bu sonlar bilan ko'paytirishdan olingan ustunlari yig'indisi ozod hadlardan iborat ustunga teng, ya'ni $k_1,k_2,\ldots,k_s$ sonlar (1) sistemaning

yechimi bo‘ladi, shunday qilib, A va B matrisalar ranglarining bir xilda bo‘lishidan (1) sistemaning birgalikda bo‘lishi kelib chiqadi. Teorema to‘liq isbotlandi.

Kroneker-Kapelli teoremasi yechim mavjud ekanligini tasdiqlaydi, lekin bu sistemaning barcha yechimlarini amalda topish uchun usulni bermaydi. Endi, ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning quyidagi qoidasini keltiramiz.

A matrisaning rangi B matrisaning rangiga teng bo‘lib, $r(A)=r(B)=k$ bo‘lsin. Bunda k son A matrisaning chiziqli erkli satrlarining maksimal soniga teng bo‘lib, k noma’lumlar soniga teng bo‘lsa, u holda sistema tenglamalari soni noma’lumlari soniga teng va uning determinanti noldan farqli bo‘ladi, bunday sistemaning yechimi yagona bo‘lib uni Kramer qoidasi bo‘yicha topish mumkin bo‘ladi.

Endi matrisalarning rangi k noma’lumlar sonidan kichik, ya’ni $k<n$ bo‘lsin. Bu holda k - tartibli minor noldan farqli bo‘ladi. Sistema tenglamalarining har qaysisida $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ noma’lumli hadlarini tenglamalarning o‘ng tomoniga o‘tkazamiz va bu noma’lumlar uchun biror $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n$ qiymatlari majmuini tanlab olib k noma’lumli k ta tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Hosil bo‘lgan sistemaga Kramer qoidasini qo‘llash mumkin va yagona $c_1, c_2, \ldots, c_k$ yechim majmui mavjud bo‘ladi. Sistema tenglamalarining o‘ng tomoniga o‘tkazilgan noma’lumlarni ***ozod*** **noma’lumlar** deb ataymiz. Chap tomondagi nomalumlar **bosh(bazis) o‘zgaruvchilar,** Ozod noma’lumlar uchun $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n$ sonlarni ixtiyoriy tanlab olishiiz mumkin bo‘lganligi uchun hosil bo‘lgan sistemaning cheksiz ko‘p turlicha yechimlari shu yo‘l bilan hosil qilinadi. Shunday qilib, bu holda cheksiz ko‘p yechimlar to‘plamiga ega bo‘lamiz.

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ noma’lumlarning $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ ozod noma’lumlar qatnashgan yechimiga ***umumiy yechim*** deb ataladi, chunki boshqa cheksiz ko‘p yechimlar $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ ozod noma’lumlarga ixtiyoriy qiymatlar majmuini berish bilan olinadi.

Tenglamalar sistemasini yechishga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini tekshring:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 1. \end{cases}$$

Yechish. Sistema koeffisiyentlaridan matrisa tuzamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Bu matrisaning rangi 2 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14 \neq 0$$

bo‘lib,

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 10 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -6 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

bo‘ladi. Kengaytirilgan matrisa

$$B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

ning rangi 3 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 10 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$$

$r(A) = 2,\ r(B) = 3$ bo‘lib, $r(A) \neq r(B)$ bo‘ladi, demak isbotlangan teoremaga asosan sistema birgalikda emas.

2-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini tekshring:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12. \end{cases}$$

Yechish. Sistema koeffisiyentlaridan tuzilgan matrisa

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -4\\ 7 & 10\end{pmatrix}$$

bo‘lib, $r(A)=2$, chunki $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-14\neq 0$, lekin 3-tartibli minori yo‘q.

Kengaytirilgan matrisaning rangi ham 2 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & -4 & -1\\ 7 & 10 & 12\end{vmatrix}=-144+40-14+112-24+30=0.$$

Birinchi ikkita tenglamaning chap qismlari chiziqli erkli, bu ikkita tenglamalar sistemasini yechib, noma’lumlar uchun ushbu qiymatlarni hosil qilamiz:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2=4,\\ x_1-4x_2=-1.\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-14\neq 0,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}4 & 2\\ -1 & -4\end{vmatrix}=-14,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-7$$

$$x_1=1,\quad x_2=\frac{1}{2}$$

Bu yechim 3-tenglamani ham qanoatlantiradi.

3-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases}x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1,\\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4,\\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4=1.\end{cases}$$

Yechish. Sistema matrisasining rangi $r(A)=2$, chunki

$$\begin{vmatrix}1 & 5 & 4\\ 2 & -1 & 2\\ 5 & 3 & 8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & -1 & -1\\ 5 & 3 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}1 & 5 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 5 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 5 & 8 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 5 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 8 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

bo‘lganligini, ya’ni kengaytirilgan matrisaning barcha 3-tartibli minorlari 0 ga teng bo‘lganligi uchun, uning ham rangi $r(B)=2$. Shunday qilib, sistema birgalikda va $r(A)=r(B)=k=2<4$ noma’lumlar sonidan kichik, bu holda birinchi va uchinchi tenglamalar sistemasini olaylik, chunki

$$\begin{vmatrix}1 & 5\\ 5 & 3\end{vmatrix}=3-10=-7\neq 0;$$

$$\begin{cases}x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1,\\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4=1\end{cases}$$

bundan

$$\begin{cases}x_1+5x_2=1-4x_3-3x_4,\\ 5x_1+3x_2=1-8x_3-x_4\end{cases}$$

bo‘lib, tenglamalar sistemasini x_1, x_2 asosiy noma’lumlarga nisbatan yechsak:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1-4x_3-3x_4 & 5\\ 1-8x_3-x_4 & 3\end{vmatrix}}{-7}=\frac{2}{7}-4x_3+\frac{4}{7}x_4,$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1-4x_3-3x_4\\ 5 & 1-8x_3-x_4\end{vmatrix}}{-7}=\frac{4}{7}-\frac{12}{7}x_3-2x_4$$

bo‘ladi. Ozod noma’lumlarni $x_3=C_1,\ x_4=C_2$ deb

$$x_1=\frac{2}{7}-4C_1+\frac{4}{7}C_2,$$

$$x_2=\frac{4}{7}-\frac{12}{7}C_1+2C_2$$

umumiy yechimni olamiz. C_1 va C_2 larga xar xil qiymatlar berib, masalan, $C_1=2,\ C_2=3$ bo‘lganda $x_1=-6,\ x_2=\frac{22}{7},\ x_3=2,\ x_4=3,$ ya’ni $\left(-6,\frac{22}{7},2,3\right)$ yechimni, $C_1=0, C_2=-3$ bo‘lganda

$x_1 = -\frac{10}{7},\ x_2 = -\frac{38}{7},\ \ x_3 = 0,\ \ x_4 = -3,$ ya'ni $\left(-\frac{10}{7}, -\frac{38}{7}, 0, -3\right)$ va hokazo cheksiz ko'p yechimlarni olish mumkin.

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi. (1) tenglamalar sistemasida ozod hadlar 0 lardan iborat bo'lsa, bunday sistemaga ***bir jinsli sistema*** deyiladi, yani

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0,\\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{aligned}\right\}$$

bo'lib, birjinsli sistema doimo birgalikda.

Bir jinsli sistema 0 dan farqli yechimga egaligini aniqlash muhimdir.

Teorema. Bir jinsli sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun sistema matrisasining rangi noma'lumlar sonidan kichik bo'lishi zarur va yetarlidir.

1-natija. Bir jinsli sistemada noma'lumlar soni tenglamalar sonidan katta bo'lsa, sistema 0 dan farqli yechimlarga ham ega bo'lishi mumkin.

2-natija. n noma'lumli n ta bir jinsli tenglamalar sistemasi 0 dan farqli yechimlarga ega bo'lishi uchun sistemaning determinanti 0 ga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

4-misol. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,\\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0,\\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema matrisasini va uning kengaytirilgan matrisasini tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

B matrisada oxirgi ustunni saqlab elementar almashtirishlar bajaramiz:

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&2&1&0\\1&1&-1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&-2&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

0 lardan iborat satrni tashlab

$B_1=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&0&-1\end{pmatrix}$ matrisani hosil qilamiz. Bunday almashtirishlarda B matrisa rangini aniqlash bilan A matrisaning ham rangini aniqlash imkoniyati tug'iladi. Shunday qilib, B matrisaning rangi 2 ga teng, A matrisaning rangi ham 2 ga teng. Demak, berilgan sistema birgalikda bo'ladi. Ma'lum bo'ldiki, uchinchi tenglama birinchi ikkita tenglamalarning chiziqli kombinasiyasidan iborat. Shuning uchun uchinchi tenglamani chiqarib

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\x_1+x_2+2x_3+x_4=0\end{cases}$$

to'rt noma'lumli ikkita tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz. Ikkita noma'lumni qolganlari orqali ifodalaymiz. Ma'lumki, x_1, x_2 noma'lumlarga nisbatan yechish mumkin emas, chunki ularning koeffisiyentlaridan tuzilgan determinant 0 ga teng. Sistemani x_2, x_3 larga nisbatan yechish mumkin, ya'ni

$$\begin{cases}x_2+x_3=1-x_1-x_4,\\x_2+2x_3=-x_1-x_4\end{cases}$$

x_2, x_3 larni ***bosh (bazis) o'zgaruvchilar,*** x_1, x_4 lar esa ozod(erkin) o'zgaruvchilar bo'ladi. Bu sistemani yechib $x_3=-1,\ x_2=2-x_1-x_4$ ni aniqlaymiz. x_1, x_4 o'zgaruvchilarga ketma-ket qiymatlar berib, cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lamiz. Masalan, $x_1=0,\ x_4=1$ bo'lganda $x_1=0,\ x_2=1$, $x_3=-1,\ x_4=1$ yechim hosil bo'ladi va hokazo. Tekshirib ko'rish mumkinki, bu yechim berilgan sistemani qanoatlantiradi.

5-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistema matrisasining rangini topamiz.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Birinchi uchta satrini qo‘shib, to‘rtinchi satridan ayiramiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

hosil bo‘lgan matrisaning ranggi 3 ga teng, chunki

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0.$$

Shunday kilib, A matrisaning rangi 3 ga teng, noma’lumlar soni to‘rtta, 2-teoremaga asosan sistema 0 dan farqli yechimga ega. Berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

sistemaga teng kuchli. x_1, x_2, x_3 noma’lumlar koeffisiyentidan tuzilgan determinant 0 dan farqli bo‘lgani uchun x_4 ni o‘ng tomonga o‘tkazib tenglamalar sistemasini yechamiz.

$$\Delta = 21,\quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} -x_4 & -1 & -3 \\ 2x_4 & 3 & 2 \\ -3x_4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -31x_4,\quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2-x_4 & -3 \\ 1 & 2x_4 & 2 \\ 3 & -3x_4 & 2 \end{vmatrix} = 43x_4,$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -x_4 \\ 1 & 3 & 2x_4 \\ 3 & 2 & -3x_4 \end{vmatrix} = -28x_4.$$

Kramer formulalariga asosan:

$$x_1 = -\frac{31}{21}x_4,\ x_2 = \frac{43}{21}x_4,\ x_3 = -\frac{28}{21}x_4 = -\frac{4}{3}x_4.$$

Bu yechimni berilgan sistemaga bevosita qo‘yib yechimning to‘g’riligiga ishonish mumkin**.**

Tenglamalar sistemani Gauss usulda yechish.

Umumiy holda qo‘llaniladigan usul - Gauss usulidir. Gauss usuli noma'lumlarni ketma-ket yo‘qotish usuli deb ham nomlanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi ustida bajariladigan elementar almashtirish deb quyidagilarga aytiladi:

- sistemadagi biron-bir tenglamani noldan farqli songa ko’paytirish,
- tenglamalar o’rnini almashtirish,
- biron-bir tenglamani songa ko’paytirib, boshqa bir tenglamaga qo’shish. Mana shu almashtirishlar natijasida hosil bo’lgan yangi tenglamalar sistemasi avvalgisiga ekvivalent, ya’ni yechimlar to’plami ikkala sistema uchun bir xil bo’ladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x + \cdots + a_{2j}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 \quad a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_i + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

sistema matritsasi va ozod hadlar ustuni yordamida kengaytirilgan matritsa hosil qilamiz,

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 \cdots x_n & & \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n} & | & b_2 \\ ---------- & & & | & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\cdots a_{mn} & | & b_m \end{array}\right)$$

.

Misol. Sistemani Gauss usuli bilan yeching.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+3x_4 = 20 \\ 5x_1-x_2+2x_3-x_4 = 17 \\ -3x_1+2x_2-x_3+2x_4 = 1 \\ x_1-x_2+4x_3-2x_4 = -4 \end{cases}.$$

Yechish. Sistemani Gauss usuli bilan yechamiz. Sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozib: $a_{11}=1$ hisoblashlar uchun qulaydir. Shuning uchun birinchi va to'rtinchi satrlarning or'nini almashtiramiz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{array}\right)$$

-5 3 -

\+ \+ \+

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right)$$

4 3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & -5 & -5 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} & \frac{19}{13} \end{array}\right).$$

Kengaytirilgan matritsa zinapoya ko'rinishiga keltirildi. Unga mos keluvchi sistemaning ko'rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_2 - 11x_3 - 4x_4 = -11 \\ 26x_3 - 7x_4 = -7 \\ \frac{19}{13}x_4 = \frac{19}{13} \end{cases}$$

oxirgi tenglamadan $x_4 = 1$, uchinchidan $x_3 = \frac{-7 + 7x_4}{26} = 0$, ikkinchidan $x_2 = 11 + 11x_3 - 4x_4 = 7$ va birinchidan $x_1 = -4 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5$ yechimlarni olamiz.

Tenglamalar sistemani Gauss-Jordan usulda yechish.

Tenglamalar sistemasini yechishda Gauss - Jordan usulining (Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi) mazmun-mohiyati quyidagidan iborat: dastlabki normal ko‘rinishda berilgan sistemaning kengaytirilgan (A/B) matritsasi quriladi. Yuqorida keltirilgan sistemaning teng kuchliligini saqlovchi elementar almashtirishlar yordamida, kengaytirilgan matritsaning chap qismida birlik matritsa hosil qilinadi.

Bunda birlik matritsadan o‘ngda yechimlar ustuni hosil bo‘ladi. Gauss – Jordan
usulini quyidagicha sxematik ifodalash mumkin:

$$(A|B) \sim (E|X^*).$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish Gauss-Jordan usuli noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotishning Gauss strategiyasi va teskari matritsa qurishning Jordan taktikasiga asoslanadi. Teskari matritsa oshkor shaklda qurilmaydi, balki o‘ng ustunda bir yo‘la teskari matritsaning ozod hadlar ustuniga ko‘paytmasi-yechimlar ustuni quriladi.

8-misol. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss-Jordan usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

Yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasi koeffitsiyentlaridan kengaytirilgan matritsa tuzamiz. Tenglamalar ustida bajariladigan almashtirishlar yordamida asosiy matritsani quyidagicha birlik matritsaga keltirib javobni topamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 7 & 11 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 27 & 27 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

CH.T.S ni iqtisodda qo'llanilishi.

Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisoddagi qo'llanilishi bu har qanday iqtisodiy masalaning matematik modelini tuzish va bu modelning optimal yechimi aynan chiziqli tenglamalar sistemasini yechimi bilan uzviy bog'liq hisoblanadi.

$S_1, S_2, \cdots, S_n$ n-ta mamlakat bo'lib, ularning milliy daromadlari mos ravishda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ larga teng bo'lsin. a_{ij} - S_j-mamlakatning S_i-mamlakatdan sotib olgan tovarlarga sarf qilgan milliy daromadning ulushi bo'lsin. Milliy daromad to'laligicha mamlakat ichida va boshqa mamlakatlardan tovar xaridi uchun sarf bo'ladi deb hisoblaymiz, ya'ni

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak.

Quyidagi matritsani qaraylik $A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\cdots a_{2n} \\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ - \\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}$,

bu matritsa savdo-sotiqning strukturaviy matritsasi deb nomlanadi. Istalgan $S_i\ (i=\overline{1,n})$ mamlakat uchun ichki va tashqi savdodan hosil bo'lgan tushumi $P_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n$ tenglik orqali aniqlanadi. Mamlakat olib borayotgan savdo-sotiqning muvozanatda bo'l'shi uchun har bir mamlakat savdosi kamomadsiz bo'lishi kerak, ya'n' har bir mamlakat savdosidan hosil bo'lgan tushum uning milliy daromadidan kam bo'lmasligi kerak. Ya'ni

$$P_i \geq x_i,\ i=\overline{1,n}$$

Agar $P_i > x_i$ deb faraz qilsak, u holda quyidagini hosil qilamiz:

$$Pi=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k > x_i,\quad i=\overline{1,n}$$

bu yerdan

$\sum_{i=1}^{n}P_i > \sum_{i=1}^{n}x_i$,ya'ni $\sum_{i=1}^{n}P_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\right)x_k=\sum_{k=1}^{n}x_k>\sum_{k=1}^{n}x_i$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa qarama-qarshilikdir. Demak, $P_i \geq x_i$ tengsizlik o'rniga $P_i = x_i$ tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Iqtisodiy nuqtai nazardan bu tushunarli holatdir, chunki mamlakatlarning barchasi bir paytda foyda ko'rolmaydi. Mamlakatlar milliy daromadi uchun $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektorni kiritsak u holda $P_i = x_i$, ya'ni $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k = x_i,\ \ i=\overline{1,n}$

tengliklardan quyidagi tenglamani hosil qilamiz: $\mathrm{AX}=\mathrm{X}$, ya'ni, qaralayotgan masala A matritsaning $\lambda=1$ xos soniga mos keladigan xos vektorini topish masalasiga kelar ekan.

Misol. To'rtta mamlakat savdosining strukturaviy matritsasi

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

budjetlar yig'indisi $x_1+x_2+x_3+x_4=6270$ (shartli pul birligi) bo'lsa, har bir mamlakatning budjeti topilsin.

Dastlab,berilgan strukturaviy matritsaning $\lambda = 1$ xos songa mos keluvchi xos vektorni topish kerak, ya'ni $(A - E)\bar{x} = 0$ tenglamani yechish kerak.

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & -0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bu sistemaning rangi uchga teng bo'lgani uchun, noma'lumlardan bittasi erkli o'zgaruvchi va qolganlari shu erkli o'zgaruvchi orqali ifodalanadi. Sistemani Gauss usuli bilan yechib, x xos vektorning kompanentlarini topamiz

$$x_1 = \frac{140}{121}c, \quad x_2 = \frac{146}{121}c, \quad x_3 = \frac{20}{11}c, \quad x_4 = c.$$

Topilgan qiymatni berilgan budjetlar yig'indisiga qo'yib c kattalikni topamiz:c=1210, bundan defitsitsiz savdoda mamlakatlar budjetining izlanayotgan kattaligini topamiz. $x_1 = 1400$, $x_2 = 1460$, $x_3 = 2200$, $x_4 = 1210$.

Tayanch iboralar

Chiziqli tenglamalar sistemasi(ChTS),tenglamalar sistemasining yechimi, yagona yechim, sistema birgalikda, aniq bo'lmagan sistema, ekvivalent sistema, birgalikda bo'lmagan sistema.

Takrorlash uchun savollar

1. Kroneker-Kapelli teoremasining sharti nimadan iborat?
2. Qanday matrisaga kengaytirilgan matrisa deyiladi?
3. Bir jinsli sistema deb qanday sistemaga aytiladi?
4. Bir jinsli sistema qanday holda birgalikda?
5. Bir jinsli sistema no'ldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?
6. Bosh (bazis) o'zgaruvchilar nima?
9. Gauss usulining mohiyati nima?
10. Noma'lumlarni ketma-ket yo'qotishning 1-qadami nimadan iborat?
11. Ikkinchi qadam qanday?
12. Teskari qadam nima?
13. Sistema birgalikda va aniq degani nima?

14.Sistema birgalikda va aniqmas deganda nima tushuniladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Berilgan tenglamalar sistemasining birgalikda ekanligini tekshiring, agar birgalikda bo‘lsa, ularni:

a) Gauss usuli bilan yeching:

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 17 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 12 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 17 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -7, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7; \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 7x_1 + x_3 = 6 \end{cases}$

b) Gauss-Gordan usuli bilan yeching:

11. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ 5x_1 + 2x_2 - 13x_3 = 21 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 3 \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 10 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -14 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -14 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -10 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -15; \end{cases}$

21) $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=7 \end{cases}$ 22) $\begin{cases} x+22y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=10 \end{cases}$

1.5-§.Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsalar usuli. Kramer qoidasi

Tenglamalar sistemani Kramer usulda yechish.

Matritsalarda “bo’lish” amali teskari matritsa tushunchasi yodamida tushuntiriladi.

Bu tushunchaning kiritilishiga sabablardan biri matritsaviy shaklagi chiziqli tenglamalar sistemasini yechimlarini topishni aniqlashda teskari matritsa usulini qollash mumkinligidir.

Masalan, to’r noma’lumli chiziqli tenglamalar sistemasini qaraylik:

$$\begin{aligned} 3x_1+8x_2+x_3+2x_4&=96 \\ 20x_1-2x_2+4x_3+0.5x_4&=69 \\ 11x_1+3x_2+3x_3-5x_4&=75 \\ x_1+12x_2+x_3+8x_4&=134 \end{aligned}$$

Ushbu tenglamalarni matritsaviy shaklida quyidagicha ifodalash mumkin:

• x_1, x_2, x_3 va x_4 to’rt noma’lum o’zgarmaydigan koeffitsientlari 4 × 4 o’lchamli **A** matritsani aniqlaydi

• to’rt noma’lum o’zgaruvchilarning o’zlari esa 4 × 1 o’lchovli x vektorni aniqlaydi

• tenglamaning o’ng tomondagi o’zgarmas sonlar 4 × 1 o’lchovli ***b*** vektorni aniqlaydi.

Sitemani quyidagicha yoza olamiz

$$Ax=\begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 & 2 \\ 20 & -2 & 4 & 0.5 \\ 11 & 3 & 3 & -5 \\ 1 & 12 & 1 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 96 \\ 69 \\ 75 \\ 134 \end{bmatrix}=b$$

Bu yozuvni to'g'riligini ***Ax*** matritsalar ko'paytirish qoidasidan foydalanib soda tekshirib ko'rish mumkin. ***A*** vektorning satr elementlari ***x*** vektorning ustun bo'yicha mos elementlariga ko'paytirilib, qo'shiladi. Agar siz ***Ax*** ko'paytma matritsa barcha elementlarini hisoblab, ***b*** matritsa mos elementlariga tenglashtirsangiz, u holda birgalikdagi chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilasiz.

Masalan, ***A*** matritsa birinchi satr elementlarini ***x*** vectorning mos elementlariga ko'paytirib, ***Ax*** ko'paytmaning birinchi elementini beradi

$$3x_1 + 8x_2 + x_3 + 2x_4.$$

Uni ***b*** m vektorning birinchi elementiga 96 ga tenglab, birinchi tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamalar sistemasini biror standart usullar yordamida yechish mumkin, lekin matritsaviy usulning afzalliklari mavjud bo'lib, ular bilaan keingi bo'limlarda tanishamiz.

Umumiy hol uchun ham matritsaviy usulni qollash mumkin.

n ta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma'lumli *n* chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ ozod hadlar.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Bu *n* noma'lumli *n* ta chiziqli tenglamalar sistemasini ***Ax = b*** matritsaviy ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda ***A*** $n \times n$ o'lchovli koeffisientlar matritsasi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ - noma'lumlar matritsasi, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ - ozod hadlar matritsasi.

Bu birgalikdagi ***Ax=b*** tenlamalar sistemasini qanday ***x*** no'malumlar uchun yechish mumkin? Agar ***Ax = b*** tenlamada A va b matritsa bo'lamasdan son bo'lganida, u holda bu munosabatdan ***x*** noma'lumni $x = A^{-1} \cdot b$ korinishida soda toppish mumkin bo'lar edi. ***x,*** ***A*** va ***b*** matritsalar bo'lganda ham shi manoda yechim topishga harakat qilamiz.

n ta noma'lum va m ta tenglamadan iborat chiziqli tenglamalar sistemasi deb quyidagi sistemaga aytiladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x + \cdots + a_{2j}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 \quad a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_i + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (4.1)$$

bu yerda $a_{ij}, b_i (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ - berilgan sonlar bo'lib, a_{ij} – noma'lumlar oldidagi koeffitsientlar, b_i – ozod hadlar deyiladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ - \ - \ - \ - \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

bu yerda A koeffitsientlar (4.1) yoki sistema matritsasi, B - ozod hadlar matritsasi deyiladi. U holda berilgan tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishda yoza olamiz: $AX = B$

Ta'rif*. Agarda tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lsa, u birgalikda deyiladi, aks holda birgalikda emas deyiladi.*

Ta'rif*. Birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasi yagona (cheksiz ko'p) yechimga ega bo'lsa, u aniq (noaniq) deyiladi.*

Bizga tenglamalar sistemasidan tashqari, quyidagi

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots. + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots. + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \ldots. + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi ham berilgan bo'lsin.

Ta'rif*. Agar tenglamalar sistemalarining yechimlar to'plami ustma-ust tushsa, u holda ular teng kuchli (ekvivalent) deyiladi.*

Kramer usuli ham chiziqli tenglamalar sistemasining yechishning bir usuli bo'lib, bunda yechimlar determinantlar orqali sodda topiladi. Bu usul biror aniq noma'lumni topishda matritsaviy usulga nisbatan samaraliroqdir. Excel dasturida teskari matritsa topish va ko'paytirishni bilishingizga qarasmasdan, qo'lda hisoblashdagi vaqt muhim emas. Shuning uchun iqtisodiy jarayonlarni o'rganishda Kramer usuli qulay hisoblanadi. Murakkabroq iqtisodiy matematika uchun Kramer qoidasi quyida algebraik formula ko'rinishida keltiriladi.

Ma'lumki, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n ta noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasining matritsaviy ko'rinishi $Ax = b$ bo'lib**,** bunda

A parameterlarning $n \times n$ o'lchovli matritsasi,

x noma'lumlarning $n \times 1$ o'lchovli vektori va

b ozod hadlarning $n \times 1$ o'lchovli matritsasi.

Kramer qoidasi har qanday x_i nomalumni toppish uchun A matritsa i ustuniga b matritsa elementlarini qo'yib, hosil bo'lgan matritsa determinantini berilgan A matritsa determinantiga bo'lishdan hosil qilishini anglatadi.

Demak,

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Misol. x_1 va x_2 noma'lumlarni Kramer qoidasi yordamida toping

$$5x_i + 0.4x_2 = 12$$

$$3x_1 + 3x_2 = 21$$

Yechish. Bu sistemaning matritsaviy ko'rinishi

$$Ax = \begin{bmatrix} 5 & 0.4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 21 \end{bmatrix} = b$$

Kramer qoidasini qo'llab, x_1 noma'lumni aniqlaymiz

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 0.4 \\ 21 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0.4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{36 - 8.4}{15 - 1.2} = \frac{27.6}{13.8} = 2$$

Xuddi shu kabi x_2 noma'lum ham aniqlanadi

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1.2 \\ 3 & 21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 0.4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{105-36}{15-1.2} = \frac{69}{13.8} = 5$$

Kramer teoremasi. *Agar sistema determinanti* $\Delta \neq 0$ *bo'lsa, u holda (4.1) sistema yagona yechimga ega bo'lib, bu yechim quyidagi formulalar orqali topiladi.*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1,n}$$

$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1,n}$ formulalar Kramer formulalari deb ,tenglamalar sistemasini bu formulalar orqali yechilishi esa Kramer yoki determinantlar usuli deyiladi.

tenglamalar sistemasini Kramer usulida yeching.

Misol. Tenglamalar sistemasini yeching. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

Yechish. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -16$. Asosiy determinan Δ = -16 $\neq 0$ bo'lgani uchun sistema yagona yechimga ega va uni Kramer formulalaridan topamiz

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -32, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 16, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -16. \quad x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1.$$

Tenglamalar sistemani matrisaviy usulda yechish.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ - \ - \ - \ - \\ a_{m1}\ a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

bu yerda A koeffitsientlar sistema matritsasi, B - ozod hadlar matritsasi deyiladi. U holda berilgan tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishda yoza olamiz:

$$AX = B$$

Tenglamalar sistemasida tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng, ya'ni $m = n$, bo'lsin. Bu holda sistema matritsasi A kvadrat matritsa bo'ladi. Agar $\Delta \neq 0$ bo'lsa, ya'ni A-xos bo'lmagan matritsa bo'lsa, u holda A^{-1} teskari matritsa mavjud bo'ladi, u holda $AX = B$ tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$ bu munosabatdan:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{nn} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ - - - - - - \\ A_{1j} & A_{2j} \cdots A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Oxirgi tenglikdan $x_j = \frac{1}{\Delta}(b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}) = \frac{\Delta j}{\Delta}$, $\Delta_j = \overline{1,n}$ ekanligi kelib chiqadi.

Masalan. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini matritsa usulida yechaylik. Sistemaga mos asosiy, ozod hadlar va noma'lumlar matritsalari mos ravishda
quyidagicha bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$|A| = 24 + 27 + 16 - 24 - 24 - 1 = 1 \neq 0$ bo'lgani uchun

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ bo'ladi.

U holda,

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Demak,

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$$

Ko’p tarmoqli iqtisod uchun balans modeli

Balans modelining asosiy masalasi: n ta tarmoqli xo’jalikning har bir ishlab chiqargan mahsulot miqdori qanday bo’lganda ehtiyoj to’la qondiriladi? Bu yerda shuni e’tiborga olish kerakki, n ta tarmoqning har biri ishlab chiqargan mahsulotning bir qismi shu tarmoq ehtiyoji uchun, bir qismi boshqa tarmoqlar ehtiyoji uchun va yana bir qismi ishlab chiqarish bilan bog’liq bo’lmagan ehtiyojlar uchun sarf etiladi.

Tarmoqlar orasidagi turli mahsulotlarni ishlab chiqarish va iste’mol qilish orqali bog’lanishni hisoblash masalasi ancha murakkab. Bu masalani birinchi bo’lib mashhur amerika iqtisodchisi V.V. Leontev 1936 yil matematik model ko’rinishida ifodalagan. U 1929-1932 yillarda amerika iqtisodiy inqirozini tahlil qilishga urungan bu model matritsalar algebrasiga asoslagan.

Ishlab chiqarishning ma’lum bir davridagi, aytaylik, bir yillik faoliyatini qaraylik. x_i deb i- tarmoqning shu davr davomida ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmining pul birligida ifodalangan qiymatini, bu yerda $i = 1, 2, \cdots, n$. x_{ij} deb $i-$tarmoq mahsulotining $j-$ tarmoq ehtiyoji uchun sarf etilgan hajmining pul miqdorini belgilaymiz. y_i deb i tarmoq mahsulotining noishlab chiqarish ehtiyoji hajmining pul miqdorini belgilaymiz. Tabiiyki, i tarmoq ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmi x_i, n ta tarmoq ehtiyojlari va noishlab chiqarish ehtiyojlari uchun sarf etilgan mahsulotlar hajmlarining pul miqdorlari yig’indisiga teng bo’lishi kerak, ya’ni $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$ - tenglamalar balans munosabatlari deb nomlanadi.

Agar $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ belgilash kiritsak, $a_{ij} - j$-tarmoqning mahsulot hajmi birligi uchun sarf etilgan i-tarmoq mahsulot hajmi qiymatini bildiradi. a_{ij}-bevosita xarajatlar koeffitsienti deb nomlanadi. a_{ij}-koeffitsientlarni qaralayotgan davrdagi ishlab chiqarish jarayonida qo’llanilayotgan texnologiya aniqlaydi. Qanchalik yangi, samarador texnologiya qo’llanilsa, a_{ij}-koeffitsientlar shunchalik kichik, sarf-xarajatlar shunchalik kam bo’lib, samaradorlik yuqori bo’ladi.

Qaralayotgan davr ichida a_{ij} koeffitsientlarni o'zgarmas deb olib, ya'ni sarf- xarajatlarni yalpi xarajatlarga chiziqli bog'liq deb qaraymiz.

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \quad (i,\ j = 1,2,\ldots,n)$$

Shu munosabat bilan ko'rilgan ko'p tarmoqli iqtisodiyot modelini chiziqli balans modeli deb ham nomlanadi. Bu holda tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\cdots a_{2n} \\ ------ \\ a_{n1}\ a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

bu yerda A -texnologik matritsa, X -yalpi mahsulot vektori, Y -yakuniy mahsulot vektori deb nomlanadi. Bu belgilashlarga asosan tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishida yozish mumkin.

$$\mathrm{X} = \mathrm{AX} + \mathrm{Y}.$$

Ko'p tarmoqli balansning asosiy masalasi berilgan yakuniy mahsulot vektori va bevosita xarajatlar matritsasi A- ga ko'ra X -yalpi mahsulot vektorini topishdan iborat bo'ladi, ya'ni oxirgi tenglamani noma'lum vektor X ga nisbatan yechish kerak. Buning uchun uni quyidagi ko'rinishga olib kelamiz $(E - A)\mathrm{X} = \mathrm{Y}$.

Agar det $(E - A) \neq 0$ bo'lsa, u holda teskari $(E - A)^{-1}$ matritsa mavjud bo'lib, yechim quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\mathrm{X} = (E - A)^{-1}\mathrm{Y}$$

$S = (E - A)^{-1}$ -matritsa bevosita xarajatlar matritsasi deb nomlanadi. Bu matritsaning iqtisodiy ma'nosini tushunish uchun $\mathrm{Y}_i = (0,0,\cdots,1,\cdots 0)$, $(i = 1,2,\cdots,n)$ i-o'rnida 1, qolgan joylarda 0 bo'lgan yakuniy mahsulot birlik vektorlarini qaraymiz. Ularga mos keluvchi tenglama yechimlari quyidagiga teng bo'ladi.

$$\mathrm{X}_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{X}_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \ \cdots, \quad \mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Demak, $S=(s_{ij})$ matritsaning s_{ij}-elementi i-tarmoqning j-tarmoq birlik yakuniy mahsuloti Y_j' ni, ishlab chiqarish uchun sarf qilinishi zarur bo'lgan mahsulot miqdori qiymatini bildiradi.

Qaralayotgan masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra, (11) tenglamada $y_i \geq 0,\ \left(i=\overline{1,n}\right),\ a_{ij} \geq 0\ \left(i,j=\overline{1,n}\right)$ bo'lib, tenglama yechimi uchun $x_i \geq 0\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ bo'lishi kerak. Bu holatni biz $Y \geq 0,\ A \geq 0$ va $X \geq 0$ deb belgilaymiz.

Agar istalgan $Y \geq 0$ vektor uchun $X \geq 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi (11) ning yechimi mavjud bo'lsa. $A \geq 0$ matritsa samarali matritsa deyiladi. Bu holda Leontev modeli ham samarali model deyiladi.

Misol. Quyidagi jadvalda tarmoqlarning reja davriga mo'ljallangan xarajat koeffisentlari va chekli mahsuloti shartli pul birligida berilgan.

Tarmoq		Iste'mol		Chekli mahsulot
		Sanoat	Qishloq xo'jaligi	
Ishlab chiqarish	Sanoat	0,3	0,25	300
	Qishloq xo'jaligi	0,15	0,12	100

Quyidagilarni

a) Tarmoqlarning rejalashtirilgan yalpi mahsulot miqdorini, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, tarmoqlarning so*f* mahsulotini;

b) Agar qishloq xo'jaligining chekli mahsuloti 20% ga, sanoatniki 10% ga oshirilsa, har bir tarmoqning zarur yalpi ishlab chiqarish miqdorini topish kerak.

Yechish. a) To'g'ridan – to'g'ri xarajatlar koeffisentini A matritsa va chekli mahsulot vektori *Y* ni yozib olamiz:

$$A=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,25 \\ 0,15 & 0,12 \end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix} 300 \\ 100 \end{pmatrix}$$

bundan $E-A=\begin{pmatrix}1-0,3 & -0,25\\ -0,15 & 1-0,12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,7 & -0,25\\ -0,15 & 0,88\end{pmatrix}$ matritsani yozib olamiz.

U holda to'la xarajatlar matritsasi

$$S=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0,5785}\begin{pmatrix}0,88 & 0,15\\ 0,25 & 0,7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,52 & 0,26\\ 0,43 & 1,21\end{pmatrix}.$$

Yalpi mahsulot vektorini aniqlaymiz:

$$X=\begin{pmatrix}1,52 & 0,26\\ 0,43 & 1,21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}300\\ 100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}482\\ 250\end{pmatrix}$$

Tarmoqlar mahsulot yetkazib berish miqdori x_{ij} ni $x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j$ formuladan topamiz. Masalan $x_{11}=a_{11}\cdot x_1=0.3\cdot 482=144.6.$

Tarmoqlarning yalpi mahsuloti, tarmoqlararo mahsulot yetkazib berish, shuningdek tarmoqlarning so*f* mahsulotlarini hisoblab topib, quyidagi jadvalni tuzamiz.

Tarmoq		Iste'mol		Chekli mahsulot	Yalpi mahsulot
		Sanoat	Qishloq xo'jaligi		
Ichlab chiqarish	Sanoat	144,6	62,5	300	482
	Qishloq xo'jaligi	72,3	30	100	150
Sof mahsulot		265,1	157,5		
Yalpi mahsulot		482	250		

b) Shartga ko'ra chekli mahsulot vektori $Y=\begin{pmatrix}300\cdot 1,1\\ 100\cdot 1,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}330\\ 120\end{pmatrix}$

U holda mahsulot vektori quyidagicha bo'ladi: $X=S\cdot Y=\begin{pmatrix}1,52 & 0,26\\ 0,43 & 1,21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}330\\ 120\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}532,8\\ 287,1\end{pmatrix}.$

Shunday qilib sanoatdagi ishlab chiqarishni 532,8 shartli pul birligigacha, qishloq xo'jaligida 287.1 shartli pul birligigacha oshirish kerak.

Takrorlash uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti deb nimaga aytiladi?

2. Chiziqli tenglamalar sistemasi qachon yagona yechimga ega bo‘ladi?

3. Chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo‘lsa, u qanday topiladi?

4. Kramer formulalari nimadan iborat?

5. Tenglamalar sistemasining matrisali yozuvi qanday bo‘ladi?

6. Tenglamalar sistemasi matrisalar yordamida qanday yechiladi?

7. Teskari matrisa qanday topiladi?

8. Qanday tenglamalar sistemasiga birgalikda deyiladi?

Mustaril bajarish uchun topshiriqlar

Berilgan tenglamalar sistemasining birgalikda ekanligini tekshiring, agar birgalikda bo‘lsa, ularni:

c) Kramer qoidasidan foydalanib,

d) Matrisa usuli,

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 17 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 12 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 17 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -7, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7; \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 7x_1 + x_3 = 6 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ 5x_1 + 2x_2 - 13x_3 = 21 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 3 \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 10 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -14 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -14 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -10 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -15; \end{cases}$

1.6-§. Kvadratik formalar

Kvadratik formalar maxsus matritsaviy funksiya bo'lib, ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning maksimumi va minimumlarini topishda qo'llaniladi. Ekonometrikaning ko'pgina modellari parametrlarini baholashda ma'lum bir kvadratik formalarni minimallashtirish yechim ko'rinishini olish imkonini beradi.

Ta'rif. *n ta o'zgaruvchining kvadratik formasi deb*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$$

tenglik orqali aniqlangan f funksiyaga aytiladi.

Bu yerda a_{ij}-lar kvadratik formaning koeffitsientlari deyiladi. Ular haqiqiy sonlar bo'lib, $a_{ij} = a_{ji}$ shartlarni qanoatlantiradi. Shu koeffitsientlar yordamida tuzilgan $A = (a_{ij})\ (i, j = 1,2,\ldots,n)$ matritsa kvadratik formaning matritsasi deyiladi, $a_{ij} = a_{ji}$ shart bajarilgani uchun bunday matritsalarni simmetrik matritsalar ko'rinishida ifoda qilish mumkin:

$$f(X) = \mathrm{X}'A\mathrm{X} \qquad (3)$$

bu yerda $\mathrm{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ - matritsa ustundan iboratdir.

$C = (c_{ij})(i, j = 1,2,\ldots,n)$ n-tartibli xos bo'lmagan matritsa bo'lib, $\mathrm{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ va $\mathrm{Y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ lar $\mathrm{X} = C\mathrm{Y}$ tenglik orqali bog'langan bo'lsin. U holda (3) tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz,

$$f = \mathrm{X}'A\mathrm{X} = (C\mathrm{Y})'\, A(C\mathrm{Y}) = (\mathrm{Y}'C')A(C\mathrm{Y}) = \mathrm{Y}'(C'AC)\mathrm{Y} = \mathrm{Y}'A^*\mathrm{Y}$$

Demak, $X = CY$ xos bo'lmagan chiziqli almashtirishda f kvadratik formaga mos keluvchi matritsa quyidagicha bo'lar ekan

$$A^* = C'AC$$

Agarda barcha $i \neq j$ lar uchun $a_{ij} = 0$ bo'lsa, ya'n' $f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$ ko'rinishda bo'lsa, demakki kvadratik formaning matritsasi diagonal ko'rinishda bo'lsa u holda $f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ forma kanonik kvadratik forma deyiladi.

Misol. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_5^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltiraymiz.

Kvadratik formanga mos matritsa $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi.

Shu matritsaning xos son va xos vektorlarini topamiz.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 . \quad -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0 . \quad \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6.$$

Xos vektorlarni topamiz.

a) $\lambda_1 = -2$ uchun $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ yoki $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$ yoki

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

Bu sistemani notriveal yechimlaridan biri $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) λ_2=3 uchun xuddi a) punktdagi kabi mulohazalarda $e_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) λ_3=6 uchun ham xuddi a) punktdagi kabi mulohazalarda $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

yechimlarni hosil qilamiz.

Normal vektorlar uchun $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ shart o'rinli ekanligini inobatga olib, $e_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ vektorni $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ga ko'paytirib, $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ normal vektorni hosil qilamiz. Xuddi shu kabi, $e_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $e_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ qolgan normal vektorni hosil qilamiz.

e_1,e_2,e_3 xos vektorlar o'zaro juft-juft orthogonal,yani $e_1^T\cdot e_2=e_1^T\cdot e_3=e_2^T\cdot e_3=0$ bo'lgani uchun C matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$C=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\end{pmatrix}$$

O'zgaruvchilarning $X=CY$ orthogonal almashtirilishida berilgan kvadratik forma quyidagi $F(y_1,y_2,y_3)=3y_1^2+6y_2^2-2y_3^2$ kanonik ko'rinishga keladi, bunda

$$y_1=-\frac{x_1}{\sqrt{3}}+\frac{x_2}{\sqrt{3}}+\frac{x_3}{\sqrt{3}},\ y_2=\frac{x_1}{\sqrt{6}}-\frac{x_2}{\sqrt{6}}+\frac{2x_3}{\sqrt{6}},\ y_3=\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{x_2}{\sqrt{2}}$$

va aksincha

$$x_1=-\frac{y_1}{\sqrt{3}}+\frac{y_2}{\sqrt{6}}+\frac{y_3}{\sqrt{2}},\ x_2=\frac{y_1}{\sqrt{3}}-\frac{y_2}{\sqrt{6}}+\frac{y_3}{\sqrt{2}},\ x_3=\frac{y_1}{\sqrt{3}}+\frac{2y_2}{\sqrt{6}}.$$

Ta'rif. *Agar barcha* $x\neq 0$, *uchun* $q(x)=x^TAx>0$ *bo'lsa,* $q(x)$ *kvadratik forma va A matritsa* ***musbat aniqlangan*** *deyiladi.*

Agar barcha $x\neq 0$, *uchun* $q(x)=x^TAx\geq 0$ *bo'lsa,* $q(x)$ *kvadratik forma va A matritsa* ***yarim musbat aniqlangan*** *deyiladi.*

Agar barcha $x\neq 0$, *uchun* $q(x)=x^TAx<0$ *bo'lsa,* $q(x)$ *kvadratik forma va A matritsa* ***manfiy aniqlangan*** *deyiladi.*

Agar barcha $x\neq 0$, *uchun* $q(x)=x^TAx\leq 0$ *bo'lsa,* $q(x)$ *kvadratik forma va A matritsa* ***yarim manfiy aniqlangan*** *deyiladi.*

Agar ba'zi **x** *lar uchun kvadratik forma musbat va boshqa* **x** *lar uchun manfiy aniqlangan bo'lsa, u holda A matritsa uchun* ***aniqmas(xosmas)*** *deyiladi.*

Teorema. *Agar matritsaning xos sonlari musbat aniqlangan bo'lishi uchun A haqiqiy simmetrik matritsa musbat aniqlangan bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Agar A haqiqiy simmetrik matritsa yarim musbat aniqlangan bo'lishi uchun matritsaning xos sonlari noldan katta yoki nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar matritsaning xos sonlari manfiy aniqlangan bo'lishi uchun A haqiqiy simmetrik matritsa manfiy aniqlangan bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar A haqiqiy simmetrik matritsa yarim manfiy aniqlangan bo'lishi uchun matritsaning xos sonlari noldan kichik yoki nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Teorema*. Istalgan kvadratik formani xos bo'lmagan chiziqli almashtirish yordamida kanonik ko'rinishga olib kelish mumkin.*

Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi koeffitsientlari ma'n'sida yagona bo'lmaydi. Lekin quyidagi teorema o'rinlidir.

Teorema*. (Kvadratik forma uchun inertsiya qonuni). Kvadratik formaning barcha kanonik ko'rinishlaridagi musbat va manfiy hadlari soni bir xil bo'ladi.*

Teorema*.* $f = X'AX$ *kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun* A *matritsaning barcha bosh minorlari musbat bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'n'*

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2i} \\ \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{ii} \end{vmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'lishi uchun esa $(-1)^i \Delta_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n$ *shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.*

Teorema. *A matritsaning musbat aniqlangan bo'lishi uchun A matritsa bosh minorlari musbat aniqlangan bo'lishi zarur va yetarlidir.*

A matritsa bosh minorlari quyidagi matritsa determinantlaridan tuziladi:

$$A_1 = a_{11},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ldots$$

Misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsa musbat yoki manfiy aniqlanganlikka tekshiring.

Yechish. Berigan matritsaning xos sonlari $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ va $\lambda_3 = 3$, uyqoridagi teoremaga ko'ra kvadratik forma musbat aniqlangan.
Quyidagicha yozish mumkin:

$$q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 \cdot$$

Ixtiyoriy x_1, x_2, x_3 qiymatlarni olganda ham $q(x)$ musbatdir. Hamda barcha asosiy minorlar ham musbat aniqlangan. Natijada berilgan matritsa ham musbat aniqlangan.

Misol. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$matritsa musbat yoki manfiy aniqlanganlikka tekshiring.

Yechish. Berigan matritsaning xos soni $\lambda = -1$ ikki karralidir. Uyqoridagi teoremaga ko'ra kvadratik forma manfiy aniqlangan, hamda quyidagicha yoziladi:

$$q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 - x_2^2.$$

x o'zgaruvchi vektor oldidagi ishora manfiy.

Almashtirishning chiziqli modeli

$S_1, S_2, \cdots, S_n$ n-ta mamlakat bo'lib, ularning milliy daromadlari mos ravishda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ larga teng bo'lsin. a_{ij} - S_j -mamlakatning S_i - mamlakatdan sotib olgan tovarlarga sarf qilgan milliy daromadning

ulushi bo'lsin. Milliy daromad to'laligicha mamlakat ichida va boshqa mamlakatlardan tovar xaridi uchun sarf bo'ladi deb hisoblaymiz, ya'ni

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak.

Quyidagi matritsani qaraylik $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ - - - - - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$,

bu matritsa savdo-sotiqning strukturaviy matritsasi deb nomlanadi. Istalgan $S_i\,(i = \overline{1,n})$ mamlakat uchun ichki va tashqi savdodan hosil bo'lgan tushumi $P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$ tenglik orqali aniqlanadi. Mamlakat olib borayotgan savdo-sotiqning muvozanatda bo'l'shi uchun har bir mamlakat savdosi kamomadsiz bo'lishi kerak, ya'n' har bir mamlakat savdosidan hosil bo'lgan tushum uning milliy daromadidan kam bo'lmasligi kerak. Ya'ni

$$P_i \geq x_i, \; i = \overline{1,n}$$

Agar $P_i > x_i$ deb faraz qilsak, u holda quyidagini hosil qilamiz:

$$Pi = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k > x_i, \quad i = \overline{1,n}$$

bu yerdan $\sum_{i=1}^{n} P_i > \sum_{i=1}^{n} x_i$,ya'ni

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\right)x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k > \sum_{k=1}^{n} x_i$$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa qarama-qarshilikdir. Demak, $P_i \geq x_i$ tengsizlik o'rniga $P_i = x_i$ tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Iqtisodiy nuqtai nazardan bu tushunarli holatdir, chunki mamlakatlarning barchasi bir paytda foyda ko'rolmaydi. Mamlakatlar milliy daromadi uchun $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektorni kiritsak u holda $P_i = x_i$, ya'ni $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = x_i, \quad i = \overline{1,n}$

tengliklardan quyidagi tenglamani hosil qilamiz: $\mathrm{AX} = \mathrm{X}$, ya'ni, qaralayotgan masala A matritsaning $\lambda = 1$ xos soniga mos keladigan xos vektorini topish masalasiga kelar ekan.

Misol. To’rtta mamlakat savdosining strukturaviy matritsasi

$$A=\begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4\end{pmatrix}$$

budjetlar yig’indisi $x_1+x_2+x_3+x_4=6270$ (shartli pul birligi) bo’lsa, har bir mamlakatning budjeti topilsin.

Dastlab,berilgan strukturaviy matritsaning $\lambda=1$ xos songa mos keluvchi xos vektorni topish kerak, ya’ni $(A-E)\bar{x}=0$ tenglamani yechish kerak.

$$\begin{pmatrix}-0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2\\ 0{,}4 & -0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}3 & -0{,}5 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Bu sistemaning rangi uchga teng bo’lgani uchun, noma’lumlardan bittasi erkli o’zgaruvchi va qolganlari shu erkli o’zgaruvchi orqali ifodalanadi. Sistemani Gauss usuli bilan yechib, x xos vektorning kompanentlarini topamiz

$$x_1=\frac{140}{121}c,\quad x_2=\frac{146}{121}c,\quad x_3=\frac{20}{11}c,\quad x_4=c.$$

Topilgan qiymatni berilgan budjetlar yig’indisiga qo’yib c kattalikni topamiz:c=1210, bundan defitsitsiz savdoda mamlakatlar budjetining izlanayotgan kattaligini topamiz. $x_1=1400$, $x_2=1460$, $x_3=2200$, $x_4=1210$.

Misol. X_1, X_2, X_3 davlat byudjetiga ega uchta mamlakat savdosini qaraylik. Butun davlat byudjeti har bir mamlakat uchun yoki mamlakat ichida tovar olish uchun yoki boshqa mamlakatlardan import olish uchun sarflanadi deb hisoblaymiz. Aytaylik, birinchi mamlakat o’z byudjetining yarimini mamlakat ichidagi tovar ayirboshlashga, byudjetning $\frac{1}{4}$ qismini ikkinchi mamlakatdan va qolgan $\frac{1}{4}$ qismini uchinchi mamlakatdan mahsulot olishga sarflansin. Ikkinchi mamlakat ichki tovar uchun ham, birinchi va uchinchi mamlakatdan mahsulot olish uchun ham byudjetni teng miqdorda taqsimlasin. Uchinch mamlakat byudjetning $\frac{1}{2}$ qismiga birinchi mamlakatdan, qolgan $\frac{1}{2}$ qismiga ikkinchi mamlakatdan tovar sotib olib, mamlakat ichida hech

qanday mahsulot ayirboshlamasin. Shu xalqaro savdo modelining X xos vektori topaylik.

Bu xalqaro savdoning strukturaviy matritsasini kiritamiz.

$$A=\begin{matrix} I & II & III \end{matrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Bunda, $a_{ij}-j-$mamlakatning $i-$mamlakatdan sotib olgan mahsulotining davlat byudjetidagi qismi. Bu matritsa har bir ustuni elementlarining yig'indisi birga teng.

i mamlakat bir yillik savdodan so'ng quyidagi tushumga ega bo'ladi:

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$$

Masalan, birinchi mamlakat uchun tushum quyidagicha bo'ladi:

$$P_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3$$

Savdoning muvozanatli bo'lishi uchun har bir mamlakat uchun savdoning tanqissizligini talab qilish zarur, yayni barcha $i=1,\ 2,\ 3$ uchun $P_i = X_i$ bo'lishi kerak.

Matritsaviy ko'rinishda bu tenglik $AX = X$ kabi ifodalanadi,bu erda $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

.

Demak, qaralayotgan hol uchun X ni aniqlovchi tenglamalar sistemasi

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

ko'rinishiga ega.

Bu sistemaning umumiy yechimi $\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = \frac{3}{2}x_3 \end{cases}$ korinishda bo'ladi.

Shuning uchun xos vektor deb $\bar{x} = x^T = (4;\ 3;\ 2)$ vektorni olish mumkin. Xususan, bu savdoda ishtirok etayotgan mamlakatlar savdolarini

muvozanatlashlari uchun ularning davlat byudjetlari $x_1 : x_2 : x_3 = 4:3:2$ kabi nisbatda bo'lgandagina erishishlari mumkinligini anglatadi.

Inersiya qonuni

Faraz qilaylik $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ har qanday koeffitsentli kompleks sonlardan iborat bo'lib aynimagan chiziqli almashtirishlarni qo'llash mumkin bo'lsin.

Har qanday n o'zgaruvchili, rangi r bo'lgan kvadratik formani kanonik ko'rinishga:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_n y_n^2$$

keltirish mumkin, bu yerda $c_1, c_2, \ldots, c_n$ larni hammasi noldan farqli. Shuni ham aytish kerakki har qanday kompleks sondan aynimagan chiziqli almashtirish kiritib kvadratik ildiz chiqarish mumkin: $z_i = \sqrt{c_i y_i}$ $i = \overline{1,r}$. Bu almashtirish kvadratik formani quyidagi ko'rinishga keltiradi:

$$f = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_r^2 \qquad (5)$$

Bu ko'rinishga normal ko'rinish deyiladi.

Demak, koeffitsentlari birga teng bo'lgan $r-$ ta noma'lum kvadratlarining yig'indisiga normal ko'rinish deyiladi.

Agar chiziqli forma f va g bir xil r ranga ega bo'lsa, f ni (5) normal ko'rinishga keltirish mumkin. Demak, $g-$ni ham (5) ko'rinishga keltirish mumkin.

Teorema. Ikkita kompleks kvadratik formalarni kompleks hadli chiziqli almashtirishlar natijasida bir-biriga keltirish mumkin, agarda bu formaning rangi bir xil bo'lsa.

Isboti: Teoremadan kelib chiqadiki har qanday r no'malum r kvadratlar yig'indidan r noma'lumli noldan farqli bo'lgan kompleks koeffitsiyentli yig'indidan bo'lsa uni kvadratik formaga keltirish mumkin.

Har qanday haqiqiy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik formani haqiqiy chiziqli almashtirishlar natijasida haqiqiy koeffitsiyentli normal ko‘rinishga keltirish mumkin.

Har qanday $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n no‘malum rangi r ga teng bo‘lgan kvadratik formani quyidagi ko‘rinishdagi kanonik formaga keltirish mumkin

$$f = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_k y_k^2 - c_{k+1} c_{k+1}^2 - c_r y_r^2,\ 0 \le k \le r,$$

bu yerda $c_1, c_2, \ldots, c_{k+1}, \ldots, c_r$ lar musbat va noldan farqli sonlar, u vaqtda haqiqiy koeffitsiyentli aynimagan chiziqli almashtirish natijasida quyidagi hosil bo‘ladi $z_i = \sqrt{c_i y_i}, i = 1,2,...,r, z_j = y_j, j = \overline{r+1, \ldots, n}$ dan keyin f normal ko‘rinishga keladi

$$f = z_1^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - z_{k+2}^2 - \ldots - z_r^2$$

Bu kvadratlarning umumiy soni kvadratik formaning rangiga teng. Haqiqiy kvadratik forma har xil almashtirishlar yordamida normal ko‘rinishga keltirish mumkin. Lekin no‘malumlarni nomerlari bo‘yicha faqat bitta normal ko‘rinishga keltirish mumkin. Buni haqiqiy hadli kvadratik formaga keltirish mumkinligiga inersiya qonuni deyiladi.

Bu qonunni quyidagi teorema ifodalaydi.

Teorema. Normal ko‘rinishdagi musbat va manfiy kvadratlar soni, berilgan musbat hadli kvadratik formaga haqiqiy koeffitsentli haqiqiy aynimagan chiziqli almashtirishlarni tanlashga bog‘liq emas.

Isboti: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik formani $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o‘zgaruvchili n no‘malumli rangi r teng. Ikki xil usul bilan normal ko‘rinishga kelsin

$$f = y_1^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2 = z_1^2 + z_i^2 + \ldots + z_i^2 - z_{i+1}^2 - \ldots - z_r^2.$$

(6)

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ o‘zgaruvchilardan $y_1, y_2, \ldots, y_n$ o‘zgaruvchilarga aynimagan chiziqli almashtirishlar orqali o‘tdik, endi teskarisi ikkinchi

o‘zgaruvchilar ham birinchi o‘zgaruvchilar chiziqli ifodalanadi aniqlovchisi esa nolda farqli bo‘ladi

$$y_i = \sum_{s=1}^{n} a_{is} x_s, \quad i = \overline{1,n} \qquad (7)$$

Xuddi shunday

$$z_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (8)$$

bu yerda aniqlovchi yana noldan farqli bo‘ladi, (7) va (8) koeffitsentlar noldan farqli.

Bu yerda $k < i$ deb kuyidagi sistemani yozish mumkin.

$$y_i = 0, \ldots, y_k = 0, \;\; z_{i+1} = 0, \ldots, z_r = 0, \ldots, z_n = 0 \qquad (9)$$

(7) va (8) sistemalarga o‘ng tomonlarini tenglashtirib olsak $n - i + k$ ta chiziqli $n -$ no‘malumli bir jinsli tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Bu sistemada tenglamalar soni no‘malumlar sonidan kam, shuning uchun sistema nolga teng bo‘lmagan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yechimlarga ega. Agar (6) tenglikdagi y va z larni o‘rniga o‘zlarini qiymatlari bilan almashtirsak va no‘malumlarni o‘rniga $a_1, a_2, \ldots, a_n$ qo‘ysak va $y_i(a)$ va $z_j(a)$ deb $y_i\, z_j$ **belgilab olsak (6) tenglik quyidagi ko‘rinishni oladi.**

$$-y_{k+1}^2(a) - \cdots - y_r^2(a) = z_1^2(a) + \cdots + z_i^2(a) \qquad (10)$$

(7) va (8) tenglikni hamma hadlari haqiqiy sonlar bo‘lgani uchun (10) kvadratik forma hamma koeffitsentlari musbat. Bundan (6) dagi hamma kvadratlarni tengligi kelib chiqadi. Bu yerdan quyidagi tenlik kelib chiqadi:

$$z_1(a) = 0, \ldots, z_i(a) = 0 \qquad (11)$$

Ikkinchi tamondan

$$z_{i+1}(a) = 0, \ldots, z_r(a) = 0, \ldots, z_n(a) = 0 \qquad (12)$$

Shunday qilib $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $n -$ no‘malumli n ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi $z_i = 0, \; i = \overline{1,n}$ (11) va (12) xususiyatga ega bo‘lib $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yechimlarga ega bo‘ladi va aniqlovchisi nolga teng bo‘lishi

shart. Bu qarama-qarshilik, lekin (11) tenglikda aynimagan almashtirishni taklif qilingan edi. Xuddi shunday bo‘ladi, $i<k$ bo‘lganda ham. Bu yerdan $i=k$ kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Normal formadagi musbat kvadratlar soniga haqiqiy f kvadratik formani inersiyasini inersiya musbat indeksi deyiladi, manfiy kvadratlar soni esa inersiyaning manfiy indeksi deyiladi.

Musbat va manfiy indekslar ayirmasiga f formaning signaturasi deyiladi.

Teorema. Ikkita n no‘malumli kvadratik formaga bir-biriga keltiriladi aynimagan chiziqli almashtirishlar natijasida, agarda ular bir xil rang va bir xil signaturaga ega bo‘lsa.

Isboti. Faraz qilaylik haqiqiy aynimagan almashtirish natijasida $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ kvadratik forma g kvadratik formaga keltirilgan bo‘lsin. Bizga ma’lumki chiziqli almashtirishlar rangni o‘zgartirmaydi. Bu almashtirishlar signaturani ham o‘zgartirmaydi. Aks holda f va g lar bir-biriga keltirilmas edi. Bu esa inersiya qonuniga ikkinchi normal ko‘rinishga zid bo‘lib chiqardi.

Aks holda f va g bir xil ranga ega, bir xil signaturaga ega, bu esa f va g bir xil normal ko‘rinishga ega va shuninig uchun ularni biriga keltirish mumkin.

Agar g kvadratik forma kanonik berilgan bo‘lsin.

$$g=b_1y_1^2+b_ry_2^2+\cdots+b_ry_r^2 \qquad (13)$$

$b_k\neq 0,\ k=1,r.$ g kvadratik formaning rangi r ga teng. U vaqtda inersiya musbat indeksi (13) ni o‘ng tomonidagi musbat koeffitsiyentlar soniga teng bo‘ladi. Bu esa yuqoridagini tasdiqlaydi.

$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ kvadratik forma (13) ko‘rinishga ega bo‘ladi, agar f ni rangi r bo‘lib, inersiyani musbat indeksi (13) inersiyani musbat indeksiga teng bo‘lsa.

Har qanday kvadratik formani ikkita kvadratik formani ko‘paytma ko‘rinishiga yozish mumkin emas. Buning ma’lum shartlarni keltirib chiqarish kerakki kvadratik forma ajraladigan bo‘lsin.

Kompleks kvadratik forma $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ajraladi shu vaqtdagi uni rangi ikkinchini rangidan kichik yoki ikkalasinikiga teng bo‘lsa.

Haqiqiy kvadratik forma $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ikkita kvadratik forma ko‘rinishida bo‘lishi uchun shu vaqtdaki uni rangi birdan katta bo‘lmasa yoki nolga teng bo‘lsa, signaturasi esa nolga teng bo‘lsa.

Oldin chiziqli formalarni ko‘paytmasini ko‘rish kerak $f \cdot \varphi$

Agar bu formalardan birortasi nolga teng bo‘lsa, u holda ularning ko‘paytmasi koeffitsiyentlari nollardan iborat bo‘lgan kvadratik forma bo‘ladi va uni rangi nolga teng bo‘lsa.

Agar f va φ chiziqli formalar proporsional bo‘lsa, ya’ni $f = c\varphi, c \neq 0$, u holda φ nolga teng, faraz qilaylik $a_1 \neq 0$. U vaqtda aynimagan chiziqli almashtirishlar kiritib

$$y_1 = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n, \quad y_i = x_i, i = \overline{2, \ldots n}$$

Kvadratik formani $f \cdot \varphi$ ni $f\varphi = c_1 y_1^2$ ko‘rinishga keltiramiz.

O‘ng tomonda kvadratik formaning rangi 1 ga teng bo‘ladi. Shuning uchun $f \cdot \varphi$ kvadtratik formaning rangi 1 ga teng. Agar chiziqli f va φ chiziqli formalar proporsional emas, shuning uchun faraz qilaylik, misol uchun

$$\begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

bo‘lsa, u vaqtda chiziqli almashtirishlar

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_1 x_n, \\ y_2 &= b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n, \\ y_i &= x_i \quad i = 3,4,\ldots,n \end{aligned}$$

lar aynimagan bo‘ladi va $f \cdot \varphi$ kvadratik forma quyidagi ko‘rinishga keladi

$$f \cdot \varphi = y_1 \cdot y_2$$

O‘ng tomondagi kvadratik forma, formaning rangi 2 ga teng, haqiqiy koeffitsentlar bo‘lganida signatura 0 ga teng.

Endi isbotni teskarisidan boshlaymiz kvadratik formaning rangi 0 ga teng chekli, ikkita kvadratik formaning ko‘paytmasini qaraylik, ulardan birini nol deylik. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rangi 1 ga teng aynimagan chiziqli almashtirishlar kiritib quyidagi ko‘rinishga keltiramiz

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = cy_1^2,\ c \neq 0 \quad \text{ya’ni} \quad f = (cy_1)y_1$$

y_1 ni chiziqni almashtirib $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lar orqali ifodalab, ikkita chiziqli ko‘paytma ko‘rinishiga keltiramiz. U vaqtda rangi 2 ga teng signaturasi 0 ga teng bo‘lgan haqiqiy kvadratik formani aynimagan chiziqli almashtirish natijasida kuyidagi ko‘rinishga keladi

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1^2 - y_2^2.$$

Bu holga rangi 2 ga teng bo‘lgan kompleks kvadratik formani ham keltirish mumkin.

Lekin $y_1^2 - y_2^2 = (y_1 - y_2)(y_1 + y_2)$, ifodaning o‘ng tomonida y_1 va y_2 ularni chiziqli ifodalari $x_1, x_2, \ldots, x_n$ almashtirsak ikkita chiziqli formalarni ko‘paytmasi hosil bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

Musbat aniqlangan formalar

Haqiqiy musbat koeffitsentli $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik forma musbat aniqlangan deyiladi, agarda uni normal ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lsa, ya’ni n ta musbat kvadratga ega bo‘lib uni rangi va musbat inersiya indeksi no‘malumlar soniga teng bo‘lsa.

Teorema. Musbat koeffitsentli $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n-no‘malumli $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kvadratik forma musbat aniqlangan deyiladi, agarda no‘malumlarning har qanday haqiqiy qiymatlarida eng kamida ulardan birortasi noldan farqli bo‘lib, bu forma musbat qiymat qabul qilsa.

Isbot: Faraz qilayliki f kvadratik formani normal ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lsin, ya’ni

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 \qquad (14)$$

bu yerda

$$y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i, \ j = 1,2,\ldots,n \qquad (15)$$

a_{ij} koeffitsentlarning aniqlovchisi noldan farqli bo‘lsin. Agar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ istalgan haqiqiy qiymatlarini f ga qo‘ysak, ularni (14) va (15) ga y_i larni hammasini qo‘ysak (15) kelib chiqadi bundan kelib chiqqan hamma $y_1, y_2, ..., y_n$ nolga teng bo‘la olmaydi, chunki $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = 0, \ j = 1, \ldots, n$ sistema noldan farqi yechimga ega bo‘lishi mumkin, aniqlovchi 0 noldan farqi bo‘lishiga qaramasdan $y_1, y_2, ..., y_n$ larni qiymatlarini (14) f formani qiymatini topish mumkin, qaysiki ayrimlari noldan farqli bo‘lib, aniq musbat qiymatga ega bo‘lsa.

Endi teoremani teskarisini isbot qilamiz.

Faraz qilaylikki f musbat aniqlanmagan, ya’ni rang va musbat inersiya indeksi n dan kichik. Bu shuni ko‘rsatadiki chiziqli ayni almashtirishlar natijasida (14) normal ko‘rinishga keladi, lekin kvadratlarning hech bo‘lmasa birortasi nolga teng bo‘ladi, bo‘lmasa kvadratlar qatnashmaydi. Misol uchun y_n. Bu holda haqiqiy qiymatlarni tanlab olish mumkin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o‘zgaruvchilarni birortasi noldan farqli qaysikim f forma bu qiymatlarda nolga teng yoki bo‘lmasa manfiy.

Faraz qilaylik matritsasi $A = (a_{ij})$ ga teng bo‘lgan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n o‘zgaruvchili f kvadratik forma berilgan bo‘lsin. Bu matritsani minorlarini tartibi $1, 2, \ldots, n$ teng bo‘lsin va quyidagicha joylashgan bo‘lsin

$$a_{11}, \begin{vmatrix} a_{12} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1k} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2k} \\ - - - - - - \\ a_{k1} a_{k2} \ldots a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ - - - - - - \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Oxirgi menor kvadratik formani A matritsasiga to‘g‘ri keladi. Bu minorga kvadratik $f(x_1, \ldots, x_n)$ formani bosh minori deyiladi.

Teorema. Haqiqiy koeffitsentli n no‘malumli f kvadratik forma faqat musbat aniqlangan deyiladi, agarda hamma bosh minorlari aniq musbat bo‘lsa.

Isbot: Agar $n=1$ teorema to‘g‘ri, chunki bu holda forma ax^2 ko‘rinishga ega chunki $a>0$ bu musbat aniqlangan. Shuning uchun teoremani n no‘malumli uchun isbot qilish kerak. Buni $n-1$ no‘malum uchun isbot qilingan deb n uchun ko‘rsatamiz.

Ayrim almashtirishlardan keyin quyidagi matritsasi Q^tAQ matritsaga ega bo‘lgan kvadrat forma hosil bo‘ladi.

Shunga qaramasdan

$|Q^1|=|Q|, |QAQ|=|Q^1|\cdot|A|\cdot|Q|=|A||Q|^2$, ni $|A|$ aniqlovchi musbat songa ko‘paymoqda. Bizga berilgan quyidagi kvadratik forma

$$f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad (16)$$

Buni quyidagicha yozish mumkin

$$f=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})+2\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}x_ix_n+a_{nn}x_n^2, \qquad (17)$$

bu yerda $\varphi\ f(x_{11},\ldots,x_n)$ kvadratik hadlaridan tuzilgan $n-1$ no‘malumli kvadratik forma. Bu yerda φ kvadratik formaning hamma bosh minorlari f kvadratik formaga qatnashadi.

Faraz qilaylikki f forma musbat aniqlanmagan. U vaqtda φ forma ham musbat aniqlanmagan bo‘ladi.

Faraz qilaylikki $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ bosh minorlari musbat aniqlangan y vaqtdan, shartdan φ kvadratik formaning bosh minorlari musbat aniqlangan bo‘ladi (17) va asosan f kvadratik formani quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin

$$f=\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1}b_{in}y_iy_n+b_{nn}y_n^2 \qquad (18)$$

$b_{nn}-$ koeffitsiyentlarni aniq ko‘rinishi shart emas. Chunki

$y_i^2 + 2b_{1n}y_i y_n = (y_i + b_{in}y_n)^2 - b_{in}y_n^2$, shuning uchun aynimagan almashtirishlar natijasida $z_i = y_i + b_{in}, i = 1,2,\ldots,n-1,\ z_n = y_n$ f kvadratik formani quyidagi kanonik formaga keltirish mumkin

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + Cz_n^2, \qquad (19)$$

Bu yerda f formani musbat aniqlanganligini isbot qilish uchun C ni musbatlini ko‘rsatish kerak.

Bu yerda (19) ni o‘ng tomonidagi aniqlovchi C ga teng. Bu aniqlovchi musbat bo‘lishi kerak, chunki (19) ni o‘ng tamonidagi ifoda f kvadratik formadan ikki marta chiziqli almashtirish natijasida olingan aniqlovchi f formaning bosh minori bo‘lib, musbatdir

Kvadratik formalarga ta’luqli misol va masalalar

1-masala. Kvadratik formaning matritsasini yozing

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3,$$

Yechish: $a_{11} = 2, a_{22} = -3, a_{33} = 8,\ a_{12} = a_{21} = 2, a_{13} = a_{31} = -1 a_{23} = a_{32} = 3$
Bularni o‘rniga quyidagini yozish mumkin.

$$A = \begin{pmatrix} 22-1 \\ 2-53 \\ -138 \end{pmatrix}$$

2-masala. Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltirish

$$f(x_1, x_2) = 27x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$$

Yechish: $a_{11} = 27, a_{12} = -5, a_{22} = 3$
Harakteristik tenglamani tuzamiz

$$\begin{vmatrix} 27-\lambda & -5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(27-\lambda)(3-\lambda)\cdot 25 = 0$$

$$\lambda^2 - 30\lambda + 36 = 0,\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 28$$

3-masala. Ikkinchi tartibli kanonik ko‘rinishga keltiramiz:

$$17x^2 + 12xy + 8y + 8y^2 - 20 = 0$$

Yechish: Oldin koeffitsiyentlarini topamiz

$$a_{11} = 17;\ a_{12} = 6;\ a_{22} = 8$$

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Endi harakteristik tenglamani tuzamiz

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(17-\lambda)(8-\lambda) - 36 = 0,$$
$$\lambda^2 - 25\lambda + 100 = 0,$$
$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 20.$$

Natijada:

$$5(x')^2 + 20(y')^2 - 20 = 0;$$

$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 1$ ellipisning kanonik tenglamasi.

4-masala. Ikkinchi tartibli egri chiziqlini tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiring: $2x^2 + 8xy + 8y^2 - 20 = 0.$

Yechish: Oldin koeffitsentlarni topamiz.

$$a_{11} = 2;\ \ a_{12} = 4,\ \ a_{22} = 8, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Endi harakteristik tenglamani tuzamiz.

$$\begin{vmatrix}(2-\lambda) & 4\\ 4 & 8-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)(8-\lambda)-16=0$$

$$\lambda^2-10\lambda=0$$

$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=10$$

Natija: $10(y')^2-20=0$

$\frac{y'^2}{2}=1,$ parabolaning kanonik tenglamasi.

5-masala. Ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirish:

$$6x^2+2\sqrt{5}xy+2y^2-21=0$$

Yechish: Oldin koeffitsentlarni topamiz

$$a_{11}=6,\ a_{12}=\sqrt{5},a_{22}=2$$

$$A=\begin{pmatrix}6 & \sqrt{5}\\ \sqrt{5} & 3\end{pmatrix}$$

Endi harakteristik tenglamani tuzamiz

$$\begin{vmatrix}6-\lambda & \sqrt{5}\\ \sqrt{5} & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(6-\lambda)(2-\lambda)-5=0$$

$$\lambda^2-8\lambda+7=0$$

$$\lambda_1=\frac{7}{6},\ \lambda_2=\frac{8}{6}$$

Natijada: $\frac{7}{6}(x')^2+\frac{1}{6}(y')^2-21=0$

$\frac{x'^2}{18}+\frac{y'^2}{126}=1$ ellipsning kanonik tenglamasi.

6-masala. Ikkinchi tartibli egri chiziqning tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiring:

$$22x^2+2\sqrt{69}xy+2y^2-4=0.$$

Yechish: Oldin koeffitsiyentlarni topamiz

$$a_{11}=22,\ a_{12}=\sqrt{69},\ a_{22}=2,\ A=\begin{pmatrix}22 & \sqrt{69}\\ \sqrt{69} & 2\end{pmatrix}.$$

Endi harakteristik tenglamani tuzamiz

$$(22-\lambda)(2-\lambda)-69=0$$
$$\lambda^2-24\lambda-25=0$$
$$\lambda_1=\frac{49}{2},\ \lambda_2=\frac{1}{2}.$$

Natijada

$\frac{49}{8}x'^2-\frac{y'^2}{8}=1$ giperbolaning kanonik tenglamasi.

7-masala. Ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiring:

$$2x^2+6xy+2y^2+5=0$$
$$a_{12}=a_{21}=3$$
$$a_{22}=2$$

Yechish: Oldin koeffitsiyentlarni topamiz.

$$a_{11}=2, a_{12}=3, a_{22}=2, \qquad A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

Koeffsiyentlarga asoslanib harakteristik tenglamani tuzamiz

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$
$$(2-\lambda)(2-\lambda)-9=0$$
$$\lambda^2-4\lambda-3=0$$
$$\lambda_1=-1, \lambda_2=3$$

Natijada

$$-(x')^2+5(y')^2+5=0$$

$$\frac{x'^2}{5}-\frac{y'^2}{1}=1$$

giperbolaning kanonik tenglamasi.

8-masala. Kvadratik forma musbat aniqlanganmi?

$$f=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$$

Yechish: Oldin koeffitsentlarni aniqlaymiz.

$$a_{11}=5, a_{22}=1,\ \ a_{33}=5, a_{12}=a_{21}=2, a_{31}=a_{13}=-4,$$
$$a_{23}=a_{32}=-2$$

Endi bosh minorlarini hisoblab chizamiz.

$$5,\ \begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1,\ \begin{vmatrix}5 & 2 & -4\\ 2 & 1 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{vmatrix}=1$$

Bosh minorlarni hammasi musbat bo‘lgani uchun kvadratik forma musbat aniqlangan.

9-masala. Kvadratik forma qoidalaridan foydalanib ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiring va grafigini sxematik izohlang

$$5x^2+2\sqrt{3}xy+3y^2-6=0$$

Yechish: Harakteristik tenglamani tuzamiz va koeffitsiyentlarini aniqlaymiz.

$$a_{11}=5,\ a_{12}=\sqrt{3};\ a_{22}=3$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 12,$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 6$$

Endi maxsus vektorlarni koordinatlarini topamiz:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_1)m_1 + a_{12}n_1 = 0, \\ a_{12}m_1 + (a_{22}-\lambda_1)m_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3m_1 + \sqrt{3}n_1 = 0, \\ \sqrt{3}m_1 + n_1 = 0. \end{cases} \rightarrow m_1 = 1, n_1 = -\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_2)m_2 - a_{12}n_2 = 0, \\ a_{12}m_2 + (a_{22}-\lambda_2)n_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m_2 + \sqrt{3}n_2 = 0, \\ \sqrt{3}m_2 - 3n_2 = 0. \end{cases} \rightarrow m_2 = 1, n_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

U vaqtda maxsus vektorlar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\overline{U}_1(1;-\sqrt{3}), \qquad \left|\overline{U}_1\right| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\overline{U}_2\left(1;\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \qquad \left|\overline{U}_2\right| = \sqrt{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Endi birlik vektorlarni tarkibiy qismlarini topamiz

$$\bar{\ell}_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \bar{\ell}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right).$$

$$\frac{(x')^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2} + \frac{(y')^2}{1^2} = 1$$

Yangi sistemada chiziqni tenglamasini tuzamiz

$$2(x')^2 + 6(y')^2 = 6$$

y vaqtda kanonik ko‘rinish quyidagicha bo‘ladi

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Kvadratik formani matritsaviy ko‘rinishda yozing.

$f = -3x_1^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2^2 - x_3^2$

$f = x_1^2 - 6x_1x_2 - 8x_2x_3 + 14x_2^2 - 5x_3^2$

2.

$f = 3x_1^2 - 6x_1x_2 - x_2^2$

kvadratik forma berilgan

$$\begin{cases} x_1 = -y_1 - y_2, \\ x_2 = -3y_1 + 6y_2, \end{cases}$$

almashtirish yordamida hosil bo‘lgan kvadratik formani toping.

3.

Kvadratik forma $f(x_1; x_2) = 3x_1^2 - 6x_2^2 + 14x_1x_2$, berilgan. $\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2, \\ x_2 = 5y_1 + 3y_2, \end{cases}$

chiziqli almashtirish orqali hosil bo‘lgan kvadratik formani toping.

4. Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiring.

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 12x_1x_2 - 15x_1x_3 + 5x_2^2 - 3x_3^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 13x_1x_2 - 5x_1x_3 + 12x_2^2 - 13x_3^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 5x_1x_3 + 3x_2^2 - 13x_3^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = 15x_1^2 + 9x_1x_2 - 15x_1x_3 + 12x_2^2 - 6x_3^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 12x_1x_2 - 5x_1x_3 + 13x_2^2 - 3x_3^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_1x_2 - 5x_1x_3 + 12x_2^2 - 3x_3^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 12x_1x_2 - 15x_1x_3 + 3x_2^2 - 13x_3^2$

$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 12x_1x_2 - 15x_1x_3 + 3x_2^2 - 13x_3^2$

5. Quyidagi kvadratik formaning ishorasini aniqlang.

$f(x_1; x_2; x_3) = 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

$f(x_1; x_2; x_3) = 7x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 8x_2x_3$

$f(x_1; x_2; x_3) = -3x_1^2 - 6x_1x_2 + x_3^2 + 10x_1x_3 - 8x_2x_3$

II BOB. ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI HAMDA ULARNING TADBIQLARI

2.1-§. Analitik geometriya elementlari

Tekislikda to'g'ri chiziqning turli tenglamalari .

X to'plamda har bir *x* songa biror qoida yoki qonunga ko'ra *Y* to'plamning bitta *y* soni mos qo'yilgan bo'lsa, *X* to'plamda funkiya aniqlangan deb ataladi.

xOy tekislikning *y=f(x)* munosabatni qanoatlantiruvchi *M(x,y)* nuqtalar to'plami *y=f(x)* funksiyaning grafigi deyiladi.

Faraz qilaylik, o'rta hisobda bir haftada uy-ro'zg'or xarajatlari oziq-ovqat
(*C*) uchun, haftalik foyda (*Y*) bilan bog'langan bo'lib, *C=12+0.3Y* bo'lsin. Y ning ihtiyoriy qiymati uchun *C* ni baxolash mumkin.

Misol uchun, agar *Y*=90 bo'lsa, u holda *C*=12+27=39 *Y* – ga bog'liq bo'lgan holda *C* ning yagona qiymati mavjud. Bu funksiyaga misol bo'ladi. Bir yoki bir necha o'zgaruvchilar orasidagi bog'liqlik, bir funksiya yoki bir necha funksiyalar orqali aniqlanadi.

Masalan, talab funksiyasining umumiy ko'rinishi

$$Q_d = f(P)$$

Bunda tovarlar talab miqdori (*Q*) uning narxi (*P*) ga bog'liq. "*f* algebraik simvol emas, balki *P* ning funkiyasi hisoblanadi" va "*f* ko'paytiruv *P*" hisoblanmayadi. *P* "erkli o'zgaruvchi", *Q* esa *P* ga bog'langan va *P* orqali aniqlanadi. Funksiyalar bir necha erkli o'zgaruvchilarga ega bo'lishi mumkin. Masalan, ishlab chiqarish funktsiyasi umumiy shaklda

$$Q = f(K, L)$$

Bu ishlab chiqarish (*Q*) ikki erkli o'zgaruvchilar kapital (*K*) va mehnat (*L)* ga bog'liq deb aytiladi.

Funksiyaning aniq ko'rinishi bizga shuni ko'rsatadiki, erksiz o'zgaruvchi erkli o'zgaruvchi va o'zgarmaslarga bog'liq. Talab funksiysining aniq ko'rinishi

$$Q_d = 120 - 2P$$

bo’lsin. Istalgan berilgan qiymat uchun muayyan funksiya qiymatini hisoblash mumkin.

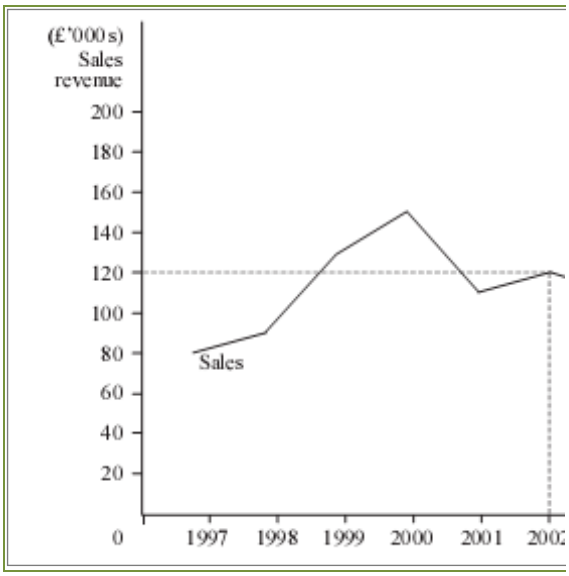
Misol. Agar $P = 10$ bo’lsa, u holda

$$Q_d = 120 - 2(10) = 120 - 20 = 100$$

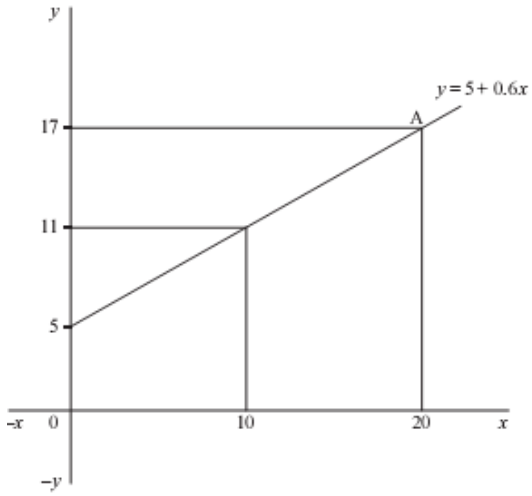
Agar $P=45$ bo’lsa, u holda

$$Q_d = 120 - 2(45) = 120 - 20 = 30$$

8.1- rasmda berilgan funksiyalar bilan tanishmiz. Bu kompaniyaning yillik savdo ko’rsatkichlarini ko’rsatadi. 2002 yilda uning savdosi qandayligini topish uchun, avval, gorizontal o’qi bo’yicha 2002 topish, "savdo" chizig’i va bu holatda £ 120,000 bo’lgan vertikal o’qi bo’ylab harakat qilish kerak. Ularning qiymatlarini oson ko’rish uchun, ushbu grafiklar ko’pincha, jadval sifatida beriladi.



2.1-rasm.



2.2-rasm.

Matematik funksiyalar ma’lumki “Dekart koordinatalar”da tasvirlanadi. Yuqoridagi rasmda *x* o’zgaruvchi gorizontal o’q bo’iycha, *y* vertikal o’q boyicha o’lchanadi. *x* va *y* lar musbat va manfiy yonalishlarda o’lchanadilar. Shu bilan birga, dekart o’qlari -∞ dan + ∞ gacha o’zgaradi. (yani minus cheksizdan plus cheksizgacha)

Grafikdagi ihtiyoriy nuqta ikkita “koordinataga” ega, *x* va *y* o’qlari bo’iycha. Misol, *A* nuqtaning koordinatalarini topish uchun x o’qi bo’yicha 20 birlik yurib vertical chiziq o’tkazamiz va *y* o’qi boyicha 17 birlik yurib gorizontal chiziq o’tkazamiz. Koordinatalari

(20, 17) nuqtani aniqlaydi. Ikkita son bir nuqtani ifodalaydi va uni grafikda ko'rsatish mumkin. Bitta o'q erkli o'zgaruvchi, ikkinchisi erksiz.

2.1- rasm orqali funksiyani shaklini aniqlash mumkin. 2.1 - rasmda dekart koordinatalarni qurib, quydagi funksiya shaklini chizamiz. Turli o'zgaruvchilarda y qiymatlarini hisoblaymiz:

Agar x=0 u holda y=5+0.6(0)=5

Agar x=10 u holda y=5+0.6(10)=5+6=11

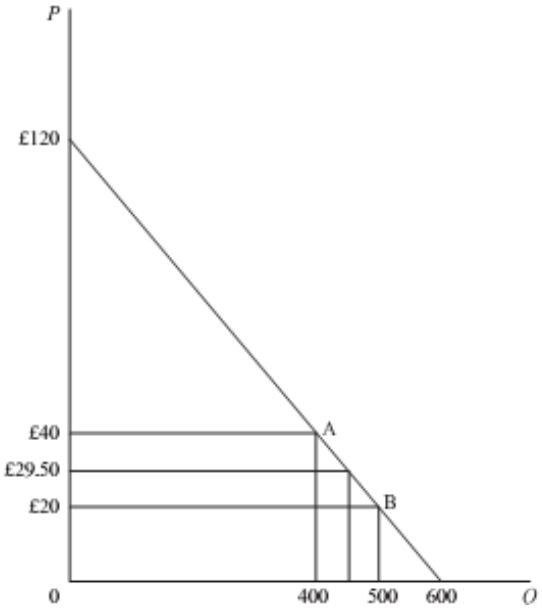
Agar x=20 u holda y=5+0.6(20)=5+12=17

Agar erkli o'zgaruvchi sohasida hech qanday chegaralar berilmagan bo'lsa u holda u ihtiyoriy tabiatiga qarab manfiy yoki musbat qiymat qabul qilishi mumkin. Lekin iqtisodiyotda ba'zi bir o'zgaruvchilar faqat musbat qiymat qabul qiladi. Faqat musbat qiymatli o'zgaruvchilarga ega bo'lgan chiziqli funksiya bitta o'q bilan bog'lanishi mumkin. Ikkita nuqta orqali bitta tog'ri chiziq o'tkazish mumkin.

Masalan, korxona talabi chiziqli funksiya bilan bogliq, 400 ta maxsulot narxi £ 40 va 500 ta maxsulot narxi £20 bo'lsin. 8.6 rasmda ikkita narx nuqtasi berilgan bo'lsa talab funksiyasi grafikning qolgan qismini chizing. Bu bizga narxni tog'ri belgilashga yordam beradi. Masalan, narx £ 29,50 bo'lganda maxsulot miqdori taxminan 450 bo'ladi.

Talab va narx orasidagi prognozni aniq berish mumkin, agarda boshlang'ich ma'lumotning algebraik ko'rinishi to'g'ri berilgan bo'lsa. Chiziqli talab funksiya shakli berilgan, a va b biz aniqlamoqchi bo'lgan parametrlar. 2.3- rasmdan agar p = 40, u holda Q = 400 bundan 40 = a-400b (1) agar p = 20, u holda Q = 500 bundan 20 = a-500b (2)

(1) va (2) tenglamalar ma'lumki chiziqli tenglamalar a va b topish tenglamalar sistemasining yechimini topishdir.



2.3-rasm.

Keyinchalik, biz faqat shakl va gravikdan foydalanamiz. Rasmdan ko'rinib turibdiki B va A nuqtalar orasidagi narxning £20 oshishi, talab miqdorining 100 taga kamayishiga olib keladi. A nuqtada miqdor 400 bo'ladi. £80 ga narxni qimmatlashtirish 400 miqdorni nolga olib keladi. 4×£20 = £80 ga narxni qimmatlashtirish bu degani talab miqdorini 4 × 100 = 400 birlikka kamaytirish demakdir.

Buning ma'nosi shuki, bu funksiyani o'q bilan kesishmasi £80 va £40 narxlar yigindisini beradi. (A narxi), £120 ni yig'indisini beradi. Bu *a* parametrning qiymati bo'ladi.

b-parametr qiymatini topish uchun bir birlik talabni oshirish uchun qanday narxlar zarur bo'ladi? £20 100 o'sishni ta'minlagani sababli, berilgan £20/100=£0.2 ga oshirish bir bilikka o'shishni ta'minlaydi.Bundan tashqari, narh £0,2 o'sganda talab bir birlik ko'payadi. Shuning uchun, b = 0,2 .

Bu funksiya quyidagiga teng

$$P = 120 - 0,2Q$$

Bu *Q* almashtirish yordamida to'g'ri *P* ning qiymatlarini topamiz

Agar *Q* = 400 bo'lsa *P* = 120-0.2 (400) = 120-80 = 40 bo'ladi.
Agar *Q* = 500 bo'lsa *P* = 120-0.2 (500) = 120-100 = 20 bo'ladi.

Bu P qiymatlarni grafikka qo'yib 7.6-rasmdan A va B nuqtalar orqali chiziq chizamiz va $P = 120\text{-}0.2Q$ chiziqli funktsiya hosil qilamiz.

Ushbu funktsiya uchun $Q = 600\text{-}5P$ hisoblanadi. Endi siz P ning berilgan qiymatlari uchun Q ning aniq qiymatini topishingiz mumkin, masalan, agar $P = £\ 29.50$ bo'lsa $Q = 600\text{-}5\ (29{,}50) = 452{,}5$.

$ax+by+c=0$ tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi.

1) agar $c=0$ bo'lsa, $ax+by=0$ -to'g'ri chiziq koordinata boshidan o'tadi.

2) agar $b=0$ bo'lsa, $x=-\frac{c}{a}=const$ - to'g'ri chiziq OY o'qqa parallel bo'ladi.

3) agar $a=0$ bo'lsa, $y=-\frac{c}{b}=const$ - to'g'ri chiziq OX o'qqa parallel bo'ladi.

4) agar $b=0$ va $c=0$ bo'lsa $x=0$- to'g'ri chiziq OY o'q bilan ustma-ust tushadi.

5) agar $b\neq 0$, $a=0$ va $c=0$ bo'lsa, $y=0$ to'g'ri chiziq OX o'q bilan ustma-ust tushadi.

$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$- to'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini.

$y=kx+d$ -to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ - $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

Fazoda tekislikning tenglamalari.

Dekart koordinatalar sistemasida biror tekislik berilgan bo'lsin.Shu tekislikdagi biror $M(x_0,y_0,z_0)$ nuqtani va shu tekislikka perpendikulyar $\vec{n}(A,B,C)$ - vektorni olaylik. $\vec{n}(A,B,C)$ - vector tekislikning normal vektori deyiladi. $M(x,y,z)$ -ixtiyoriy nuqta berilgan tekislikda yotishi uchun $\vec{n}(A,B,C)$ va $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0;y-y_0;z+z_0)$ vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'lsa.

U holda $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$ yoki $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z+z_0)=0$.

Qavslarni ochib va $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ belgilashdan so'ng $Ax+By+Cz+D=0$ - tekislikning umumiy ko'rinishdagi tenglamasini

hosil qilamiz. Bu yerda $\vec{n}(A,B,C)$ vektor tekislikning normal vektori deyiladi.

Agar $D=0$ bo'lsa, u holda $Ax+By+Cz=0$ tekislik koordinata boshidan o'tadi.

Agar $A=0$ bo'lsa, $By+Cz+D=0$ tekislik OX o'qqa parallel bo'ladi.

Agar $A=0, D=0$ bo'lsa, $By+Cz=0$ tekislik OX o'qdan o'tadi.

Agar $A=0$, $B=0$ bo'lsa, $Cx+D=0$ tekislik OXY tekislikka parallel bo'ladi.

Agar $A=0$, $B=0$, $D=0$ bo'lsa, $Cz=0$ (yoki $z=0$) tekislik OXY tekislik bilan ustma-ust tushadi.

Umumiy tenglamani ozod hadga nisbatan yechib : $Ax+By+Cz=D$ va tenglikning har ikkala qismini D koeffisentga bo'lib

$\frac{x}{\frac{D}{A}}+\frac{y}{\frac{D}{B}}+\frac{z}{\frac{D}{C}}=1$ yoki $\frac{D}{A}=a,\frac{D}{B}=b,\frac{D}{C}=c$ deb belgilab

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ -tekislikning kesmalardagi tenglamasini hosil qilamiz.

Umumiy tenglamaning barcha koeffisentlarini $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ - birkik vektorning uzunligiga bo'lib

$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$. munosabatga ega bo'lamiz.

Odatda $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\alpha$, $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\beta$, $\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos\gamma$ lar tekislikning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi va ular tekislik normal vektorining koordinata o'qlari bilan hosil qilgan burchak cosinislardir.

$\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=p$ deb,

$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma+p=0$ - tekislikning normal tenglamasini hosil qilamiz.

Uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi

$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Masalan. $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;-1)$, $M_3(2;0;2)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzaylik.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & 0-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix} = 0 \text{ yoki } \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ikki tekislik orasidagi burchak

$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ ikki tekislik orasidagi φ burchak ularga perpendikulyar bo'lgan $\vec{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ va $\vec{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ vektorlar orasidagi burchakka teng bo'ladi. Shuning uchun φ burchak quyidagi tenglikdan topiladi

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right| \cdot \left|\vec{n_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ - tekisliklarning paralellik sharti va

$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$ - ekisliklarning perpendikulyarlik sharti.

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofani hisoblaymiz. Buning uchun $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikka tushirilga perpendikulyarning asosini N deb belgilaylik. $\overrightarrow{HM_0}$ vektor $\vec{n}(A, B, C)$ tekislikning normal vektoriga kolleniar bo'ladi. $\overrightarrow{HM_0}$ va $\vec{n}(A, B, C)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini hisoblaylik:

$$\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n} = \left|\overrightarrow{HM_0}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n}\right) = d(M_0; \ddot{I}\ )\left|\vec{n}\right|(\pm 1).$$

Bundan $d = \frac{|\overrightarrow{HM_0}| \cdot |\vec{n}|}{|\vec{n}|}$. $H(x_1, y_1, z_1)$ tekislikdagi nuqta bo'lsin, u holda

$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ *yoki* $-(Ax_1 + By_1 + Cz_1) = D$.

Demak,

$$\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$$

va $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ .U holda $$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Masalan. $M_0(2; -3; 1)$ nuqtadan $x - 2y + 2z + 2 = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofani topaylik. $d = \frac{|1 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{12}{3} = 3.$

Fazoda to'g'ri chiziq tenglamalari. $M(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi: $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{k}$

$M(x_1, y_1, z_1)$ va $K(x_2, y_2, z_2)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$ - $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tib, $\vec{p}(m, n, k)$ vektorga parallel bo'lgan fazodagi to'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishdagi tenglamasi.

To'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi: $\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = kt + z_0. \end{cases}$

Agar tekisliklar parallel bo'lmasa, ular to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi, bu to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagi tenglamalar sistemasi orqali topiladi va to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi:

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Masalan. $M_1(2; -1; -1)$ va $M_2(3; 3; -1)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{3+1} = \frac{z+1}{-1+1} \text{ yoki } \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+1}{0}$$

Tayanch ibora va tushunchalar

Geometriya rivojlanish tarixi, analitik geometriya, koordinatlar usuli va sodda(asosiy) masalalar, nuqta koordinatlari, ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo‘lish, uchburchak yuzini topish. Tekislikda chiziq va uning tenglamasi, burchak koeffisiyent, to‘g’ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi, to‘g’ri chiziqning umumiy tenglamasi, to‘g’ri chiziqning o‘qlardan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi, berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziqlar tenglamasi, berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziq tenglamasi, to‘g’ri chiziqning normali, to‘g’ri chiziqning normal tenglamasi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Geometriya qachon paydo bo‘lgan va qanday tarixga ega?
2. Geometrik bilimlarning kelib chiqishi nima bilan bog’liq?
3. Geometriya tabiatshunoslikning boshqa bo‘limlari bilan qanday bog’langan?
4. Geometriyaning rivojida katta hissa qo‘shgan Markaziy Osiyolik olimlardan kimlarni bilasiz?
5. Koordinatlar usuli nima?
6. Analitik geometriya nimani o‘rganadi?
7. Berilgan ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?
8. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish qanday bajariladi?

Chiziqning tenglamasi deganda nima tushuniladi?

9. To‘g’ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi qanday yoziladi?
10. To‘g’ri chiziqning burchak koeffisiyenti deb nimaga aytiladi?
11. Berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday?
12. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziq tenglamasi qanday?
13. To‘g’ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy xollari nimalardan iborat?

14. To‘g’ri chiziqning koordinat o‘qlaridan ajratgan kesmalariga nisbatan tenglamasi qanday yoziladi?

15. To‘g’ri chiziqning normal tenglamasi qanday?

16. Normalning uzunligi nima?

17. To‘g’ri chiziqning umumiy tenglamasini normal tenglamaga qanday qilib keltiriladi?

18. To‘g’ri chiziqning tenglamasi normal ko‘rinishdaligini qanday tekshiriladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Son o‘qida $A(-5), B(4)$ va $C(-2)$ nuqtalar yasalsin va kesmalarning shu o‘qdagi *AB*, *VB* va *AB* kattaliklari topilsin. $AB + BC = AC$ ekanligi tekshirilsin.

Oldingi mashq $A(1), B(-4)$ va $C(5)$ nuqtalar uchun bajarilsin.

2. Uchlari $A(-4; 2), B(0; -1)$ va $C(3; 3)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning perimetrini toping.

3. $A(2; 1)$ nuqtadan ham, *Ou* o‘qdan ham 5 birlikka uzoqlashgan nuqta topilsin.

Ox o‘qida $A(8; 4)$ nuqtadan va koordinatlar boshidan baravar uzoqlikda turgan nuqta topilsin.

4. Uchlari $A(4; 3), B(-3; 2)$ va $C(1; -6)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakka tashqi chizilgan doiraning markazi va radiusi topilsin.

5. Ordinatalar o‘qida koordinatlar boshidan va $A(-2; 5)$ nuqtadan baravar uzoqlikda turgan nuqta topilsin.

6. Abssissalar o‘qida $A(-2; 3)$ nuqtadan $3\sqrt{5}$ birlikka uzoqlashgan nuqta topilsin.

7. $A(-3; -1)$ va $B(5; 3)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

8. $A(5; 3)$ va $B(6; -4)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

9. $A(-2; 1)$ va $B(3; 6)$ nuqtalar yasalsin. *AV* kesmani $AN : NB = 3 : 2$ nisbatda bo‘luvchi $N(x; y)$ nuqta topilsin.

10. $A(-2; 1)$ va $B(3; 6)$ nuqtalar yasalsin. *AV* kesmani $AM : MB = 2 : 1$ nisbatda bo‘luvchi $M(x; y)$ nuqta topilsin.

11. Uchlari $A(2;\ -1)$, $B(4;3)$ va $C(-2;1)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak tomonlarining o‘rtalari aniqlansin.

12. Uchlari $O(0;\ 0)$, $A(8;\ 0)$ va $B(0;\ 6)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakda OS mediana va OD bissektrisa uzunliklari aniqlansin.

13. Uchlari $A(2;\ 0)$, $B(5;3)$ va $C(2;6)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning yuzi hisoblansin.

14. Uchlari $A(3;\ 1)$, $B(4;6)$, $C(6;\ 3)$ va $D(5;-2)$ nuqtalarda bo‘lgan to‘rtburchakning yuzi hisoblansin.

15. OY o‘qidan $b=4$ kesama ajratib OX o‘qi bilan 135^0 burchak tashkil etuvchi to‘g’ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

16. OY o‘qidan $b=-2$ kesma ajratib OX o‘qi bilan 60^0 burchak tashkil etuvchi to‘g’ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

17. Koordinatlar boshidan o‘tib, OX o‘qi bilan: 1). 45^0, 2). 120^0, 3). 60^0, 4). 90^0 burchak tashkil etuvchi to‘g’ri chiziqlarni yasang va ularning tenglamalarini yozing.

18. 1) $3x+5y+15=0$; 2) $3x+2y=0$; 3) $y=-2$; 4) $x/4+y/4=1$ to‘g’ri chiziqlar uchun k va b parametrlarni aniqlang.

19. 1) $4x+3y-12=0$; 2) $4x+3y=0$; 3) $2x-7=0$; 4) $2y+7=0$ to‘g’ri chiziqlarning kesmalarga nisbatan tenglamalarini yozing va ularni yasang.

20. $A\,(2;\ 3)$ nuqtadan o‘tib, OX o‘qi bilan 60^0 burchak hosil qiluvchi to‘g’ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

21. 1) $2x-3y-6=0$; 2) $3x-2y+4=0$ to‘g’ri chiziq tenglamalarini, kesmalar bo‘yicha tenglamasiga keltiring.

22. $Ax+5y-40=0$ to‘g’ri chiziq A ning qanday qiymatlarida koordinat o‘qlaridan bir xil kesmalar ajratadi.

23. Uchlari $A(3;\ 4)$, $B(3;\ 2)$ va $C(-1;\ 2)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak tomonlarining tenglamalarini yozing.

24. To‘g’ri chiziqning koordinatlar boshidan uzoqligi 3, unga koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyar OX o‘qi bilan $\alpha=45^0$ burchak hosil qilsa, to‘g’ri chiziq tenglamasini yozing.

25. $x-y+3=0$ to‘g’ri chiziqqa koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyarning uzunligini va uning OX o‘qi bilan tashkil qilgan burchagini toping.

26. Ushbu 1) $\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y-6=0$, 2) $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}-7=0$

3) $\frac{3}{5}x+\frac{3}{4}y-2=0$, 4) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-4=0$

to‘g’ri chiziq tenglamalaridan qaysilari normal ko‘rinishda?

27. Ushbu 1) $5x+12y-26=0$, 2) $3x-4y+10=0$,

3) $y=3x+5$, 4) $2x+2y+7=0$

to‘g’ri chiziq tenglamalarini normal ko‘rinishga keltiring.

Ikkinchi tartibli chiziq va uning tenglamasi.

Ma’lumki, tekislikda to‘g’ri chiziq x va y o‘zgaruvchi kordinatlarga nisbatan birinchi darajali edi. Endi tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlarni o‘rganamiz. Ikkinchi tartibli chiziqlar x va y o‘zgaruvchi koordinatlarga nisbatan ikkinchi darajali tenglama bilan ifodalanadi. Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko‘rinishi

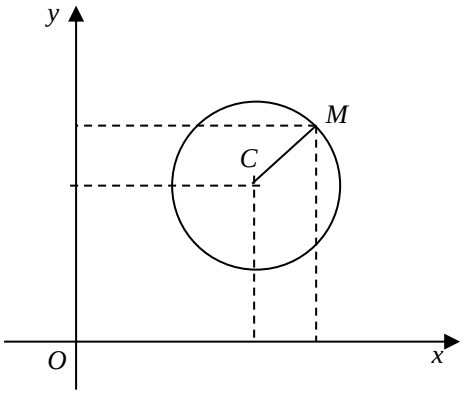
$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (1)$$

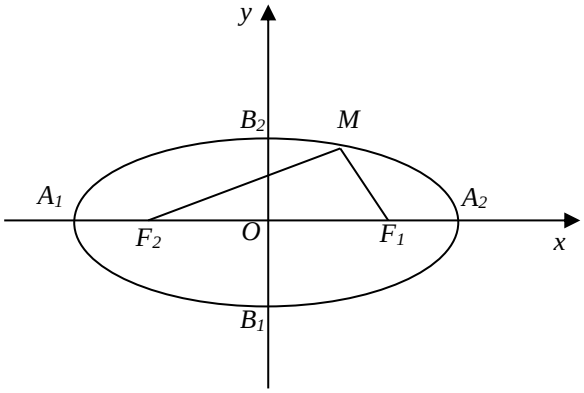
bo‘ladi. (1) tenglamaga **ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi** deyiladi. Quyida muayyan hollarda, ikkinchi tartibli chiziqlarning analitik ifodalarini topib, ularning xususiyatlarini o‘rganamiz.

1. Aylana va uning tenglamasi.

Ta’rif. Tekislikda biror $C(a, b)$ nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o‘rniga aylana deyiladi.

$M(x, y)$ aylanaga tegishli ixtiyoriy nuqta bo‘lsin (2.4-chizma). Aylana ta’rifiga ko‘ra CM masofa o‘zgarmas, bu masofani R bilan belgilaylik.





2.4-chizma **2.5-chizma**

ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan,

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \qquad ёки \qquad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikning ikkala tarafini kvadratga ko‘tarib,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (2)$$

tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaga markazi $C(a, b)$ nuqtada, radiusi R ga teng **aylananing kanonik(qonuniy) tenglamasi** deb ataladi. (2) dan

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = R^2 \text{ yoki}$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0$$

bo‘ladi. Bu tenglama (1) tenglamaning $A = C$, $B = 0$ bo‘lgan xususiy holidir. Demak, aylana ikkinchi tartibli chiziqdir.

Misol. Ikkinchi tartibli chiziq $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin. Uning aylana ekanligini ko‘rsating hamda markazini va radiusini toping.

Yechish. x va y li hadlar bo‘yicha to‘la kvadratlar ajratamiz:

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 + 4y + 4 - 4 - 23 = 0,$$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 - 9 - 4 - 23 = 0 \qquad \text{yoki} \qquad (x-3)^2 + (y+2)^2 = 36$$

bo‘ladi. Bu aylananing kanonik tenglamasidir. Uning markazi $C(3;\ -2)$, nuqtada, radiusi $R = 6$ bo‘ladi.

Ellips hamda uning tenglamasi. Ta’rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan ikkita nuqtalargacha bo‘lgan masofalar yig’indisi o‘zgarmas miqdordan iborat bo‘lgan nuqtalar geometrik o‘rniga ***ellips***

deyiladi. Berilgan nuqtalar F_1 va F_2 bo‘lsin. Bu nuqtalarga ellipsning fokuslari deyiladi. O‘zgarmas miqdorni $2a$, fokuslar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilab, koordinatlar sistemasini shunday olamizki, OX o‘qi fokuslardan o‘tsin va koordinatlar boshi F_1F_2 masofaning o‘rtasida bo‘lsin (2.5-chizma). $M(x, y)$ ellipsga tegishli ixtiyoriy nuqta bo‘lsa, ta’rifga ko‘ra

$$F_1M + F_2M = 2a \quad (3)$$

bo‘ladi. Ma’lumki, $F_1(+c;\ 0)$ va $F_2(-c;\ 0)$ bo‘lib, ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan:

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamadan irrasionallikni yo‘qotib,

$$x^2(a^2 - c)^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

ko‘rinishga keltiramiz. $a^2 - c^2 = b^2$ bilan belgilaymiz (chunki, $a > c$). Bu holda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

tenglamani hosil qilamiz. (4) tenglamaga ***ellipsning kanonik*** tenglamasi deyiladi.

Koordinatlar boshi, ellipsning **simmetriya markazi**, koordinatlar o‘qi **simmetriya o‘qlari** bo‘ladi.

$A_1(-a,\ 0)$, $A_2(a,\ 0)$, $B_1(0,\ -b)$, $B_2(0,\ +b)$

nuqtalar ellipsning uchlari, $a = OA_2$ *va* $b = OB_2$ masofalar mos ravishda **ellipsning katta va kichik yarim o‘qlari** deyiladi.

Shunday qilib, ellips ikkita simmetriya o‘qiga, simmetriya markaziga ega bo‘lgan yopiq egri chiziqdir.

$\varepsilon = c/a < 1$ kattalik ***ellipsning ekssentrisiteti*** deyiladi. Aylanani ellipsning $a = b,\ \varepsilon = 0$ bo‘lgan xususiy holi deb qarash mumkin.

$M(x, y)$ nuqtadan fokuslargacha bo‘lgan masofaga ellipsning fokal radiuslari deyiladi, ularni r_1 va r_2 bilan belgilasak, $r_1 = a + \varepsilon x,\quad r_2 = a - \varepsilon x$ bo‘ladi.

Misol. $16x^2 + 25y^2 = 400$ ellipsning yarim o‘qlarini, fokuslarini va ekssentrisitetini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani 400 ga bo‘lib,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

ko‘rinishga keltiramiz. Bu tenglamadan $a^2 = 25,\ b^2 = 16$ bo‘lib, yarim o‘qlari mos ravishda $a = 5,\ b = 4$ bo‘ladi. Ma’lumki, $b^2 = a^2 - c^2$, bo‘lib, $c^2 = 25 - 16 = 9,\ c = \pm 3$ bo‘ladi. Demak, fokuslari $F_1(3,0)$ va $F_2(-3,0)$ nuqtalarda bo‘ladi. Ekssentrisiteti esa, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

Giperbola va uning tenglamasi. Ta’rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan ikkita (fokus) nuqtalargacha bo‘lgan masofalar ayirmasi o‘zgarmas miqdordan iborat bo‘lgan nuqtalar geometrik o‘rniga ***giperbola*** deyiladi(ko‘rsatilgan ayirma absolyut qiymati bo‘yicha olinib, u fokuslar orasidagi masofadan kichik va 0 dan farqli).

O‘zgarmas miqdorni $2a$, fokuslar orasidagi masofani $2c$ va koordinat o‘qlarini ellipsdagidek olib, $c^2 - a^2 = b^2$ belgilash kiritib,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz. (5) tenglamaga ***giperbolaning kanonik*** tenglamasi deyiladi. Giperbolaning fokuslari $F_1(+c;\ 0)$ va $F_2(-c;\ 0)$ bo‘ladi (3-chizma). Koordinatlar o‘qi **simmetriya o‘qlari** va koordinatlar boshi $0(0;\ 0)$ **simmetriya markazi**dir. Giperbola kordinat o‘qlarini $A_1(-a;\ 0)$ *va* $A_2(a;\ 0)$ nuqtalarda kesib o‘tib, bu nuqtalarga **haqiqiy uchlari** va $a = 0A_2$ masofa **haqiqiy yarim o‘qi** deyiladi. $B_1(0,\ -b)$, *va* $B_2(0,\ b)$ nuqtalar giperbolaning **mavhum uchlari**, $b = 0B_2$ – **mavhum yarim o‘qi** deyiladi.

Giperbola ikkita asimptotalarga ega bo‘lib, uning tenglamalari

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad (6)$$

bo‘ladi.

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ kattalikka ***giperbolaning ekssentrisiteti*** deb ataladi.

Giperbola o‘qlari $a=b$ bo‘lsa, unga **teng tomonli giperbola** deyiladi va uning tenglamasi

$$x^2-y^2=a^2$$

bo‘ladi.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

giperbolalarga ***o‘zaro qo‘shma giperbolalar*** deb ataladi.

Misol. $9x^2-16y^2=144$ giperbolaning yarim o‘qlarini, fokuslarini, ekssentrisitetini hamda aksimptotalarining tenglamalarini toping.

Yechish. Berilgan tenlamani 144 ga bo‘lib tenglamani kanonik

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$$

ko‘rinishga keltiramiz. Bundan $a^2=16,\quad b^2=9$ bo‘lib, haqiqiy yarim o‘q $a=4$, mavhum yarim o‘q $b=3$ bo‘ladi.

$c^2=a^2+b^2$, $c^2=16+9,\quad c=\pm5$ bo‘lib, fokuslari

$F_1(+5;\ 0),\quad F_2(-5;\ 0)$ nuqtalarda bo‘ladi. Ekssentrisitet $\varepsilon=c/a=5/4$

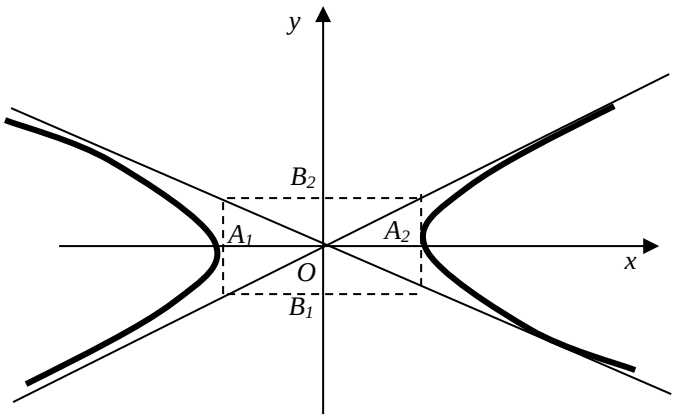
.

a va b larning qiymatini (6) asimptota tenglamasiga qo‘yib,

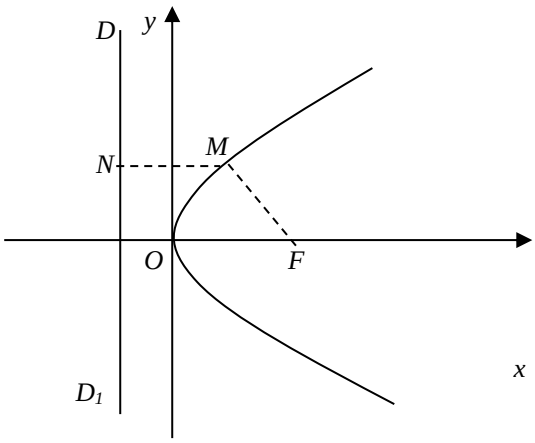
$$y=\pm\frac{3}{4}x$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Bu asimptotalar tenglamasidir.

$M(x,y)$ nuqtadan fokuslargacha bo‘lgan masofaga giperbolaning fokal radiuslari deyiladi, ularni r_1 va r_2 bilan belgilasak, nuqta o‘ng shoxlarida bo‘lganda $r_1=\varepsilon x-a,\quad r_2=\varepsilon x+a$ nuqta chap shoxlarida bo‘lganda $r_1=-\varepsilon x+a,\quad r_2=-\varepsilon x-a$ bo‘ladi.



2.6-chizma



2.7-chizma

Parabola va uning tenglamasi. Ta’rif. Tekislikda, har bir nuqtasidan berilgan nuqta(fokus)gacha va berilgan to‘g’ri chiziq (direktrisa)gacha masofalari o‘zaro teng bo‘lgan nuqtalar geometrik o‘rniga **parabola** deyiladi.

Koordinatlar sistemasini shunday olamizki, OX o‘qi F (fokus)dan o‘tib, DD_1 direktrisaga perpendikulyar, OY o‘qi esa fokus va direktrisaning o‘rtasidan o‘tsin(4-chizma). $M(x, y)$ parabolaga tegishli ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. F nuqtadan DD_1 to‘g’ri chiziqqacha bo‘lgan masofani p $(p > 0)$ bilan belgilaymiz. Bunda $F(p/2,\ 0)$ bo‘lib, direktrisaning tenglamasi

$$x = -\frac{p}{2}$$

bo‘ladi.

Ta’rifga asosan, $MN = MF$. $N(-\frac{p}{2},\ y)$.

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan,

$$x + p/2 = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}\ .$$

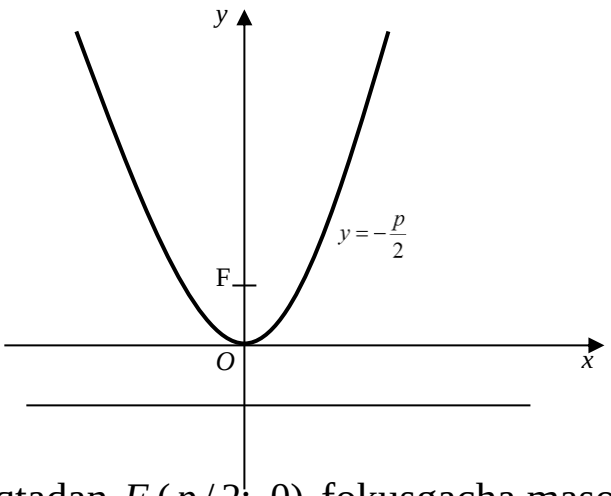
Bu tenglamadan irrasionallikni yo‘qotib,

$$y^2 = 2px \qquad (7)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu absissalar o‘qiga simmetrik ***parabolaning kanonik*** tenglamasi bo‘ladi. Ordinatlar o‘qi **simmetriya o‘qi** bo‘lsa, parabola tenglamasi

$$x^2 = 2py(p > 0)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu holda $y = -p/2$ direktrisa tenglamasi, $F = (0;\ p/2)$ nuqta fokus bo‘ladi (2.8-chizma).



2.8-chizma

$M\,(x,\ y)$ nuqtadan $F\,(p/2;\ 0)$ fokusgacha masofaga fokal radius deyiladi va $r = x + p/2$. $M\,(x,\ y)$ nuqtadan $F\,(0,\ p/2)$ fokusgacha masofa $r = y + p/2$ bo‘ladi.

Misol. $y^2 = 12x$ parabolaning fokusini va direktrisasining tenglamasini toping. $M\,(3;\ 6)$ nuqtadan fokusgacha bo‘lgan masofani aniqlang.

Yechish. Berilgan tenglamani (7) tenglama bilan solishtirib $2p = 12,$ bundan $p = 6,\quad p/2 = 3.$ Shunday qilib, fokus $F\,(3;\ 0)$ nuqtada direktrisa tenglamasi $x = -3$ ekanligini topamiz. $M\,(3;\ 6)$ nuqta uchun $x = 3,$ bo‘lib, fokal radius $r = 3 + 3 = 6,\quad r = 6$ bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ikkinchi tartibli chiziq, aylana, ellips, giperbola, parabola, ellips va giperbola yarim o‘qlari, asimptota, qo‘shma giperbola, kanonik tenglama, simmetriya markazi, simmetriya o‘qi, ekssentrisitet, fokus, direktrisa, parabola fokusi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli chiziqlar deb qanday chiziqlarga aytiladi?
2. Aylana, ellips, giperbola va parabola deb nimalarga aytiladi va ularning kanonik tenglamalari qanday bo‘ladi?

3. Ellips va giperbolalarning ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi?

4. Ekssentrisitet aylana uchun nimaga teng?

5. Ellips, gipebala va parabolalarning fokal radiuslari nima?

6. Ellips va giperbolalarning simmetriya markazi va simmetriya o‘qlari bormi?

7. Ellips va giperbolalarning yarim o‘qlari nimalardan iborat?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $A(-4;6)$ nuqta berilgan. Diametri OA kesmadan iborat aylana tenglamasi yozilsin.

2. 1) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$; 2) $x^2+y^2-8x=0$; 3) $x^2+y^2+4y=0$ aylanalar yasalsin.

3. $x^2+y^2+5x=0$ aylana $x+y=0$ to‘g’ri chiziq yasalsin va ularning kesishgan nuqtalari topilsin.

4. $A(1;2)$ nuqtadan o‘tuvchi va koordinat o‘qlariga urinuvchi aylana tenglamasi yozilsin.

5. $x^2+y^2+4x-6y=0$ aylananing Oy o‘q bilan kesishgan nuqtalariga o‘tkazilgan radiuslari orasidagi burchak topilsin.

6. $A(-1;3)$, $B(0;2)$ va $C(1;-1)$ nuqtalardan o‘tuvchi aylana tenglamasi yozilsin.

7. $A(4;4)$ nuqtadan va $x^2+y^2+4x-4y=0$ aylana bilan $y=-x$ to‘g’ri chiziqning kesishgan nuqtalaridan o‘tuvchi aylana tenglamasi yozilsin.

8. $y=-\sqrt{-x^2-4x}$ egri chiziqning joylashish sohasi aniqlanib, shakli chizilsin.

9. $x^2+y^2-8x-4y+16=0$ aylanaga koordinatlar boshidan o‘tkazilgan urinmalarning tenglamalari yozilsin.

10. $A(-3;0)$ va $B(3;6)$ nuqtalar berilgan. Diametri AV kesmadan iborat aylana tenglamasi yozilsin.

11. 1) $x^2+y^2-6x+4y-23=0$; 2) $x^2+y^2+5x-7y+2{,}5=0$; 3) $x^2+y^2+7y=0$

aylanalarning markazlari va radiuslari topilsin. Aylanalar yasalsin.

12. Koordinatlar boshidan va $x^2 + y^2 = a^2$ aylananing $x + y + a = 0$ to‘g’ri chiziq bilan kesishgan nuqtalaridan o‘tuvchi aylana tenglamasi yozilsin.

13. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$ aylananing Ox o‘q bilan kesishgan nuqtalariga o‘tkazilgan radiuslari orasidagi burchak topilsin.

14. $x^2 + 4y^2 = 16$ ellips yasalsin, uning fokuslari va ekssentrisiteti topilsin.

15. Agar ellipsning fokuslari orasidagi masofa 8 ga teng bo‘lib, kichik yarim o‘qi $b = 3$ bo‘lsa, uning kanonik tenglamasi yozilsin.

16. Agar ellipsning katta yarim o‘qi $a = 6$, ekssentrisiteti $\varepsilon = 0{,}5$ bo‘lsa, uning kanonik tenglamasi yozilsin.

17. Ellipsning katta yarim o‘qi $a = 5$ va c parametri 4,8 ga teng bo‘lsa, uning kichik yarim o‘qi b va ekssentrisiteti ε topilsin.

18. Ellipsning katta yarim o‘qi $a = 5$ va c parametri 4 ga teng bo‘lsa, uning kichik yarim o‘qi b va ekssentrisiteti ε topilsin.

19. Ellipsning katta yarim o‘qi $a = 5$ va c parametri 3 ga teng bo‘lsa, uning kichik yarim o‘qi b va ekssentrisiteti ε topilsin.

20. Koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lgan ellips $M(2;\sqrt{3})$ va $B(0;2)$ nuqtalardan o‘tadi. Uning tenglamasi yozilsin va M nuqtadan fokuslargacha bo‘lgan masofa topilsin.

21. Fokuslari Ox o‘qda yotuvchi ellips koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lib, $M(-4;\sqrt{21})$ nuqtadan o‘tadi va $\varepsilon = \frac{3}{4}$ ekssentrisitetga ega. Ellips tenglamasi yozilsin va M nuqtaning fokal radiuslari topilsin.

22. $x^2 + 2y^2 = 18$ ellipsning o‘qlari orasidagi burchakni teng ikkiga bo‘luvchi vatar uzunligi topilsin.

23. Agar ellipsning fokuslari orasidagi masofa uning katta va kichik yarim o‘qlarining uchlari orasidagi masofaga teng bo‘lsa, uning ekssentrisiteti ε topilsin.

24. $9x^2 + 25y^2 = 225$ ellipsda shunday $M(x, y)$ nuqta topilsinki, undan o‘ng fokusgacha bo‘lgan masofa chap fokusgacha bo‘lgan masofadan 4 marta katta bo‘lsin.

25. Katta yarim o‘qi 5 ga, kichik yarim o‘qi 3 ga teng bo‘lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing.

26. $M(0;3)$ nuqta orqali o‘tuvchi, fokuslari orasidagi masofa 4 ga teng bo‘lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing.

27. $9x^2+16y^2=114$ ellipsning ekssentrisitetini toping.

28. Giperbolaning haqiqiy o‘qi 18 ga, fokuslari orasidagi masofa 24 ga teng bo‘lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing.

29. $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{16}=1$ giperbola tenglamasi berilgan. Giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o‘qlarini, fokuslarini, ekssentrisitetini aniqlang.

30. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$ giperbola asimptotalarining tenglamalarini tuzing.

31. Giperbolaning kanonik tenglamasi berilgan:

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$.

Bu giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o‘qlarini, ekssentrisitetini, fokuslarini, uchlarini toping, asimptotalari tenglamalarini tuzing.

32. M nuqta $F(2;0)$ nuqtaga $x=9$ to‘g’ri chiziqqa qaraganda 3 marta yaqin turib harakat qiladi. M nuqtaning harakat trayektoriyasini toping.

33. $5x^2-4y^2=20$ giperbolaning yarim o‘qlarini, ekssentrisitetini va fokuslarining koordinatlarini toping. $M(-4;\sqrt{15})$ nuqtadagi fokal radiuslarining uzunliklarini toping.

34. Asimptotasi $y=\pm\frac{1}{2}x$ to‘g’ri chiziqdan iborat va (3;1) nuqtadan o‘tuvchi giperbolaning tenglamasini tuzing.

35. Giperbolaning direktrisalari orasidagi masofa 8 ga, fokuslari orasidagi masofa 12 ga teng. Giperbolaning tenglamasini tuzing.

36. Giperbolaning fokuslari abssissalari o‘qida yotib, uning fokuslari orasidagi masofa 6 ga va ekssentrisiteti 1,5 ga teng bo‘lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing.

37. Giperbolaning fokuslari abssissalar o‘qida yotib, uning haqiqiy yarim o‘qi 5 ga teng, uchlari esa markazi bilan fokusi orasidagi masofani teng ikkiga bo‘lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing.

38. $x^2 - 4y^2 = 16$ giperbolada ordinatasi 1 ga teng M nuqta olingan. Undan fokuslargacha bo‘lgan masofalar topilsin.

39. Fokuslari orasidagi masofa $2c = 10$, uchlari orasidagi masofa $2a = 8$ bo‘lgan giperbolaning kanonik tenglamasi yozilsin.

40. Hakikiy yarim o‘qi $a = 2\sqrt{5}$, ekssentrisiteti $\varepsilon = \sqrt{1{,}2}$ bo‘lgan giperbolaning kanonik tenglamasi yozilsin.

41. Uchlari $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ellipsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlarida bo‘lgan giperbolaning tenglamasi yozilsin.

42. Asimptotasi haqiqiy o‘q bilan 60^0 burchakni tashkil etuvchi giperbolaning ekssentrisiteti topilsin.

43. $y^2 = 4x$ parabola berilgan. Parabolaning shunday nuqtasini topingki, undan fokusigacha bo‘lgan masofa 1 ga teng bo‘lsin.

44. $x + 4 = 0$ to‘g’ri chiziq va $F(-2;0)$ nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o‘rnining tenglamasini tuzing.

45. $y^2 = 12x$ parabola fokusining koordinatalarini toping va direktrisasining tenglamasini tuzing.

III BOB. MATEMATIK ANALIZ ASOSLARI VA UNING TATBIQLARI

3.1-§. R^n fazoda nuqtalarning o‘zaro joylashishi. Nuqtalar ketma-ketligi va uning limiti

To’plam tushunchasi va uning ustida amallar.

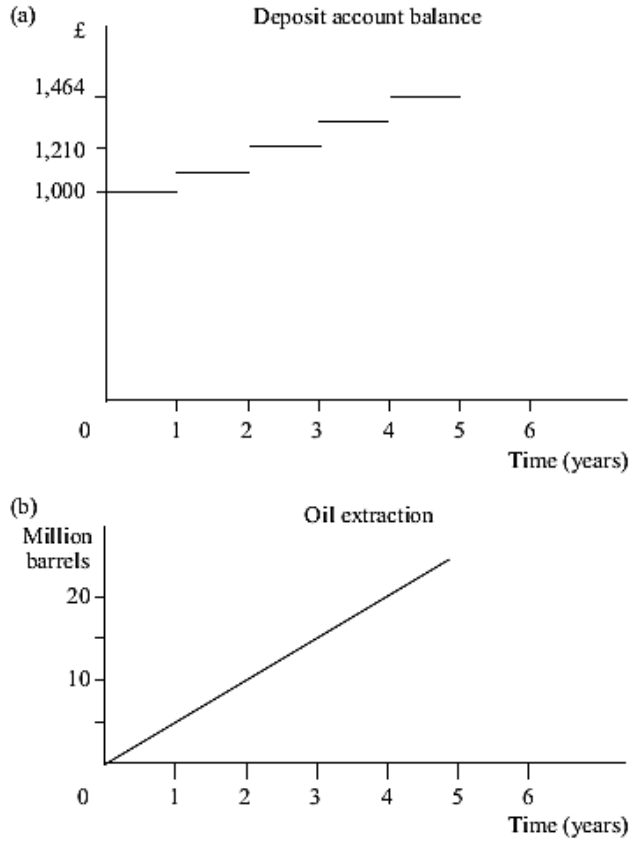
Qaralayotgan jarayonda bir xil son qiymatlarini qabul qiladigan miqdorlarga ***o‘zgarmas miqdorlar*** deyiladi. Masalan, qanday radiusli aylana olmaylik, uning uzunligining deametriga nisbati bir xil π sondan iborat bo‘ladi. Bu holda nisbat o‘zgarmas miqdordir.

Qaralayotgan jarayonda har xil son qiymatlari qabul qiladigan miqdorlarga ***o‘zgaruvchi miqdorlar*** deyiladi. Masalan, havo harorati (temperaturasi), vaqt, harakatning tezligi o‘zgaruvchi miqdorlardir. Bunday misollarni ko‘plab keltirish mumkin. Hamma o‘zgaruvchi miqdorlarni birdaniga o‘rganib bo‘lmaydi. Endi ikkita o‘zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog‘lanishni ko‘rib chiqamiz.

Sonlar ketma-ketligi.

Iqtisodiyotda biz ko’p o’zgarishlar, ya’ni ma’lum vaqt davomida o’suvchi yoki kamayuvchi miqdorlarga duch kelamiz. Pul miqdori, sarmoya depozit hisobining o’sib borishi unga to’langan foizlarning yig’ilishidan iboratdir. Ko’p yillar davomida ishlab chiqarish davom etaversa, u holda neft zahirasining miqdori kamayib boradi. Vaqt bo’yicha o’zgarishlar bilan bog’liq bo’lgan myammoni hal qilishda matematika qanday yordam berishi tushuntiriladi. Moliyalashtirish tadbiq etishlarning asosiy sohasi bo’lib, unda baholash metodlari, investitsiyaning turli ko’rinishlari o’rganiladi. Bundan boshqa qo’shimcha qilib aytish mumkinki, yildan yilga tezlik bilin kamayib ketayotgan tabiiy resurslarni boshqarish ham moliyalashtirishga bog’liq.

Depozit hisobiga qo’yilgan pulga odatda belgillangan vaqt oraliqlarida foiz to’lanadi. Shunday qilib, qo’yilgan pulni qaytarish aniq vaqt oralilarida amalga oshadi.



Misol uchun, yuqoridagi rasmda ixtiyoriy berilgan vaqt momentida depozitga qo'yilgan £1000 pulni yillik 10% stavkadagi jamg'arilgan pul miqdori ko'rsatilgan. Depozit hisobida vaqt va umumiy jamg'arma orasida o'zgarmas bog'liqlik mavjud emas. Buning o'rniga hisobga pul tushganda har bir yil oxirida "sakrash" holati yuz beradi. Foizlar qo'shilayotgan davrlar orasida hech qanday o'zgarish bo'lmaydi. Diskret funktsiyalar, bundan kelib chiqadiki, narx erkli o'zgaruvchining aniq qiymatlarida o'zgaruvchiga bog'liq ravishda aniqlanishi mumkin. Bundan, bir o'zgaruvchi bir qator qiymatlarni qabul qiladi, ammo kontinium qiymatlarni emas. Faraziy masshtablarga ko'ra xizmat davrining muddati va maosh orasidagi bog'liqlik quyidagicha bo'lishi mumkin:

0 yillar=£20,000, 1 yil=£21,800, 2 yil=£23,600, 3 yil=£25,400

O'qituvchining maoshi va xizmat qilish davri orasidagi munosabat diskret funktsiya. Vaqtning har qanday momentida maosh

qancha bo'lishi ma'lum, ammo vaqt va maosh orasida bog'liqlik uzluksiz emas. Uzluksiz funktsiyaga misol 7(b) rasmda ko'rsatilgan. Bu neft mavjud bo'lgan joydan yiliga 5 mln. barrel neft qazilmasi olinadigan neftning umumiy miqdorini ko'rsatadi. Olinadigan neft miqdori va vaqt davrlari orasidagi bog'liqlikni ko'rsatuvchi uzluksiz silliq funktsiy mavjud. Biz bu bobda bir qator diskret o'zgaruvchilik masalalarni tahlil qilamiz.

Har bir natural son uchun *s(n)* natural argumentli funksiya bilan ishlashimizga to'g'ri keladi. Odatda bunday funksiya **cheksiz (sonli) ketma-ketlik** yoki oddiy **ketma-ketlik** deyiladi. Uning *s(1), s(2), s(3),..., s(n),...* hadlari odatda $s_1, s_2, s_3,..., s_n, ...$ kabi belgilanadi. Biz ketma-ketlikni ifodalash uchun $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ belgidan yoki oddiy $\{s_n\}$ kabi belgilashdan foydalanamiz.

Masalan, $s_n = \frac{1}{n}$, n=1,2,3,... bo'lsa, u holda ketma-ketlik hadlari:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$$

Agar biz *n* ni yetarlicha katta qilsak, u holda bu ketma-ketlik hadlari yetarlicha kichik bo'ladi. bunday holda ketma-ketlik 0 ga yaqinlashadi deymiz.

Monoton ketma-ketliklar.

Ta'rif*. Natural sonlar to'plamida aniqlangan funksiyaga sonlar ketma-ketligi deyiladi, ya'ni,*

$$f : N \to R.$$

Agar $x_n = f(n),\ n \in N$, *deb belgilash kiritsak, sonlar ketma-ketligini,* $\{x_n\}_1^{\infty}$ *yoki* $x_1, x_2..., x_n...$ *ko'rinishda ifoda etish ham qabul qilingan. Bu yerda* x_n *-ketma-ketlikning n- hadi deyiladi.*

Masalan, $f(n) = \frac{1}{n}$ ketma-ketlikni $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ yoki $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ ko'rinishlarda ifoda etish mumkin. Bu ketma-ketlik monoton kamayuvchi, chegaralangan ketma-ketlikdir.Chunki $n \in N, m \in N$ uchun n<m bo'lsa $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$ bo'lib, istalgan $n \in N$ uchun $\frac{1}{n} \le 1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Ta'rif. *$\varepsilon > 0$ va a son uchun $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ interval a ning ε-atrofi deyiladi. Agar a=o bo'lsa, $(-\varepsilon,\varepsilon)$ interval qisqacha ε-atrof deyiladi.*

Ta'rif*. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun, ε-atrofdan tashqarida $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo'lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi.*

Ta'rif*. Agar istalgan $M > 0$ son uchun $(-M;M)$ atrof ichida $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik deyladi.*

Sonlar ketma-ketligi limiti ta'rifi.

Murakkab foizda investitsiyaning imkoniyatlarini ko'rib chiqamiz:

A dastlabki investitsiya qiymati, *F* investitsiyaning keyingi qiymati, *i* bir davrdagi foiz stavka (o'nli kasrlarda) va *n* vaqt muddatlari.

Har yil oxiridagi investitsiyaning narxi, dastlabki qo'yilgan omonatdan 1+*i* marta katta bo'ladi. £648 miqdor 2-nchi yil boshida oxirgi investitsiya dastlabki investitsiya £600 ning 1,08 ga ko'paytirishdan hosil qilingan edi (misol 7.3). 3-nchi yil boshidagi investitsiya narxi, 2-nchi yil boshidagi investitsiyaga 1,08 ga ko'paytirishdan hosil qilinadi. Shunday qilib, har qanday investitsiya uchun

1 yildan keyingi qiymat $= A(1+i)$

2 yildan keyingi qiymat $= A(1+i)(1+i) = A(1+i)^2$

3 yildan keyingi qiymat $= A(1+i)^2(1+i) = A(1+i)^3$ va h.k.

Biz ko'ryapmizki, har bir davrdagi keyingi qiymatlar *A* ni (1+*i*) ga ko'paytirishdan hosil bo'lyapti. Ularni hadlab qo'shib, *n* yildan keyingi investitsiya *A* ni $(1+i)^n$ ga ko'paytmasiga tengligini ko'ramiz.

Bu formula *i* foiz stavkadagi *n* davrdagi bolang'ich investitsiya *A* bo'lgandagi *F* oxirgi qiymatni topishni ifoda etadi

$$F = A(1+i)^n$$

Misol. Agar £600 miqdordagi investitsiya 3 yilga 8% foiz stavkada investitsiya qilinsa formuladan A=£300 n=3 i =8%=0.08

Oxirgi qiymat

$$F = A(1+i)^n = 600(1.08)^3 = 600(1,259715) = £755,83$$

Misol. Agar £4,000 miqdordagi pul 10 yil uchun yillik 11% da investitsiya qilingan bo'lsa, investitsiyaning oxirgi narxini toping.

Yechish.

$$A = £4,000 \qquad n = 10 \qquad i = 11\% = 0,11$$
$$F = A(1+i)^n = 4,000(1,11)^{10}$$
$$= 4,000(2,8394205)$$
$$= £11,357,68$$

Agar n ning yetarli katta qiymatlarida $\{s_n\}$ ketma-ketlik s ga yetarlicha yaqin bo'lsa, u holda $\{s_n\}$ ketma-ketlik s limitga ega deyiladi va quyidagicha yoziladi $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ yoki $n\to\infty$ da $s_n \to s$

Biror bir haqiqiy songa intilmaydigan ketma-ketlik uzoqlashuvchi deyiladi.

Masalan, $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ va $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketliklar uzoqlashuvchidir.

Ta'rif*. Agar $\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik limiti a songa teng (yoki a songa yaqinlashadi) deyiladi, Bu hol $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ shaklda ifoda etiladi.*

Demak, agar $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ deyiladi. Bunday ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Sonlar ketma-ketligi limiti xossalari

1. Istalgan α va β sonlar uchun $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a + \beta b$,
2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangandir.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n x_n = a \cdot b$.
4. $y_n \neq 0, n \in N$ va $b \neq 0$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ tenglik o'rinli bo'ladi.
5. Biror nomerdan boshlab $x_n \le y_n$ bo'lsa, u holda $a \le b$.

Teorema. *Agar* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *o'suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik bo'lib, yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u holda* $\{x_n\}$ *yaqinlashuvchi va* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n}\{x_n\}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n}\{x_n\}\right)$ *bo'ladi.*

Teorema. *Agar barcha natural* n *lar uchun* $x_n \le z_n \le y_n$ *bo'lib,* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ *bo'lsa, u holda* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Teorema. *(Ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi haqidagi teorema).*

Agar har bir natural n *uchun* $[a_n, b_n]$ $(a_n < b_n)$ *segment berilgan bo'lib, barcha* n *larda* $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$*munosabat o'rinli va* $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ *bo'lsa, u holda* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *va* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ *limitlar mavjud bo'lib* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ *,va istalgan natural* n *uchun* $a_n \le c \le b_n$ *tengsizlik o'rinlidir.*

Misol 1. $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$, $e = 2.718...$. Agar $h = \dfrac{1}{n}$ deb belgilasak, $n \to \infty$ da $h \to 0$ bo'lgani uchun quyidagi muhim limitga ega bo'lamiz:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Misol 2. $$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n+4}{4n^2+n-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(3+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2})}{n^2(4+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2})} =$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+2/n+4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}(4+1/n-3/n^2)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}(2/n)+\lim\limits_{n\to\infty}(4/n^2)}{\lim\limits_{n\to\infty}4+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)-\lim\limits_{n\to\infty}(3/n^2)} = \frac{3+0+0}{4+0-0} = \frac{3}{4}.$$

Tayanch ibora va tushunchalar

To‘plamlar va ular haqida asosiy tushunchalar, to‘plam turlari, ochiq va yopiq to‘plamlar, to‘plamlar ustida qanday amallar, sonli ketma-ketlik, umumiy had, chegaralangan va chegaralanmagan ketma-ketliklar, quyidan chegaralangan, cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar, ketma-ketlikning limiti, yaqinlashuvchi ketma – ketlik, nuqtaning atrofi, cheksiz limit, chekli limit.

Mustahkamlash uchun savollar

1. To‘plamlar va ular haqida asosiy tushunchalar
2. To‘plamning qanday turlarini bilasiz?
3. Ochiq va yopiq to‘plamlar ta’rifini ayting.
4. To‘plamlar ustida qanday amallarni bilasiz?
5. Sonli ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
6. Sonli ketma – ketlikning umumiy hadi nima?
7. Sonlar ketma – ketligi qanday belgilanadi?
8. Sonli ketma – ketlik qachon berilgan deyiladi?
9. Arifmetik va geometrik progressiyalar sonli ketma – ketliklarga misollar bo‘ladimi?
10. Sonli ketma – ketlik nechta elementga ega?
11. Sonli ketma – ketlikning geometrik tasviri qanday bo‘ladi?
12. Sonli ketma – ketliklar ustida qanday amallarni bajarish mumkin?
13. Qanday sonlar ketma – ketligi chegaralangan deyiladi va misollar keltiring?
14. Quyidan chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
15. Quyidan chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
16. Yuqoridan chegaralangan sonlar ketma-ketligiga misollar keltiring?
17. Chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
18. Chegaralanmagan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
19. Cheksiz ketma – ketlik deb nimaga aytiladi?
20. Cheksiz kichik ketma – ketlik qanday ta’riflanadi?
21. Cheksiz katta va kichik ketma – ketliklarga misollar keltiring?
22. Cheksiz katta va kichik ketma – ketliklar orasida qanday bog’lanish bor?
23. Cheksiz kichik ketma – ketliklar qanday xossalarga ega?
24. Ketma-ketlikning limiti deb nimaga aytiladi?
25. Qanday sonlar ketma – ketligi yaqinlashuvchi deyiladi?
26. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikni yig’indi ko‘rinishda qanday ifodalash mumkin?

27. Nuqtaning atrofi nima?
28. Cheksiz katta sonlar ketma-ketlikning limiti nimaga teng?
29. Chekli limit deganda nima tushuniladi?
30. Cheksiz kichik sonlar ketma-ketligining limiti nimaga teng?
31. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar qanday xossalarga ega?
32. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari qanday isbotlanadi?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Ushbu

$$x_n = \frac{1}{3n},\ x_n = \frac{n}{5n-1},\ x_n = \frac{1}{4n-1},\ x_n = 3n$$

sonli ketma-ketliklarning n=1,2,3,4,5, bo‘lgandagi qiymatlarini yozing?

2. $x_n = \frac{n}{n+2}$ sonli ketma-ketlikning chegaralanganligini ko‘rsating.

3. $x_n = \frac{3}{n},\ x_n = \frac{3(-1)^n}{2n},\ x_n = 3+(-1)^n$ sonlar ketma-ketligining geometrik tasvirini n=1,2,3,4,5,6 bo‘lganda ko‘rsating.

4. Bir necha arifmetik va geometrik progressiyalarning umumiy (n-hadi)ni yozing va n=1,2,3,4,5,6 bo‘lgandagi qiymatlarini yozing.

5. Ushbu

$$x_n = 3n,\ \ x_n = -5n+1,\ \ x_n = \frac{1}{y_n+1},\ \ x_n = (-1)^n 3n$$

sonlar ketma-ketliklari chegaralanganmi va qanday?

6. Bir necha cheksiz katta va cheksiz kichik sonlar ketma-ketliklarini yozing.

7. Ushbu tengliklar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2,\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n}=0,\ \ \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n}=3$$

ning to‘g’riligini sonli ketma-ketlikning limiti, ta’rifidan foydalanib, isbotlang va har biri uchun $\varepsilon > 0$ ni aniqlab qanday raqamdan boshlab tengsizlikning bajarilishini ko‘rsating?

8. Ushbu sonlar ketma-ketliklarining limitlarga ega ekanligi yoki ega emasligi va u nimaga tengligini ko‘rsating?

1) $x_n = \frac{n}{3n+1}$, 2) $x_n = \frac{5n-1}{2n}$, 3) $x_n = \frac{(-1)^n n}{4n+1}$,4) $x_n = \frac{3n+1}{n^2}$,

5) $x_n = \frac{n}{4n-3}$,6) $x_n = \frac{(-1)^n n}{3n-1}$,7) $x_n = \frac{3n^2}{n+1}$, 8) $x_n = \frac{2n+5}{n^3}$.

3.2-§. Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar va ularning iqtisodiy jarayonlardagi o‘rni. Kobb-Duglas funksiyasi

Funksiya tushunchasi va uning ustida amallar.

Qaralayotgan jarayonda bir xil son qiymatlarini qabul qiladigan miqdorlarga ***o‘zgarmas miqdorlar*** deyiladi. Masalan, qanday radiusli aylana olmaylik, uning uzunligining deametriga nisbati bir xil π sondan iborat bo‘ladi. Bu holda nisbat o‘zgarmas miqdordir.

Qaralayotgan jarayonda har xil son qiymatlari qabul qiladigan miqdorlarga ***o‘zgaruvchi miqdorlar*** deyiladi. Masalan, havo harorati (temperaturasi), vaqt, harakatning tezligi o‘zgaruvchi miqdorlardir. Bunday misollarni ko‘plab keltirish mumkin. Hamma o‘zgaruvchi miqdorlarni birdaniga o‘rganib bo‘lmaydi. Endi ikkita o‘zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog‘lanishni ko‘rib chiqamiz.

Funksiyaning berilish usullari Funksiya tushunchasi matematikaning eng asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, uning yordamida tabiat va jamiyatdagi ko‘p jarayon va hodisalar modellashtiriladi.

Matematik tahlilda elementlari haqiqiy sonlardan iborat, bo‘lgan to‘plamlarni qaraymiz. X va Y lar haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lsin. $x \in X$ to‘plamda, $y \in Y$ to‘plamda o‘zgarsin.

Ta’rif. $x \in X$ har bir x ga biror qoida yoki qonun bo‘yicha $y \in Y$ dan bitta y mos qo‘yilsa, X to‘plamda ***funksiya berilgan*** **(aniqlangan)** deb ataladi va u

$$y = f(x)$$

simvol bilan belgilanadi. Ayrim hollarda $y = xf$ ham deb belgilanadiki, bunda kompyuterda oldin x qiymati olinib, keyin

hisoblanadigan simvol olinadi. Bunda X to‘plamga funksiyaning **aniqlanish sohasi,** Y to‘plamga o‘zgarish sohasi yoki ***qiymatlar to‘plami*** deyiladi. Odatda funksiya aniqlanish sohasini D, qiymatlar to‘plamini E bilan belgilanadi.

Demak, har bir element $x \in X$ ga bitta va faqat bitta $y \in Y$ moslik o‘rnatilgan bo‘lsa, bu moslikka X to‘plamda funksiya aniqlangan deyiladi. x ga **erkli o‘zgaruvchi** yoki **argument,** y ga esa **erksiz o‘zgaruvchi** yoki x **ning funksiyasi** deyiladi.

Shunday qilib, funksiya berilgan bo‘lishi uchun: 1) X to‘plam berilishi kerak (ko‘p hollarda uni x bilan y o‘zgaruvchilarning bog‘lanishiga ko‘ra topiladi); 2) x o‘zgaruvchining X to‘plamdan olingan har bir qiymatiga unga mos qo‘yiladigan y ni aniqlaydigan qoida yoki qonun berilishi kerak. (ta’rifda uni f simvol bilan belgiladik).

Masalan: 1) f $X = (-\infty, +\infty)$ to‘plamga tegishli bo‘lgan har bir songa uning o‘zini o‘ziga ko‘paytirib, ya’ni kvadratga ko‘tarib mos qo‘yuvchi qoida bo‘lsin. Bu holda $y = x^2$ funksiya hosil bo‘ladi. Bu funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan; 2) f har bir $x \in [0, +\infty)$ songa shu sondan olingan kvadrat ildizni mos qo‘ysin. Bu $y = \sqrt{x}$ funksiyani ifodalaydi. Uning aniqlanish sohasi $[0, +\infty)$bo‘ladi.

1-misol. $y = \sqrt{x-3} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Ma’lumki, funksiyaning aniqlanish sohasi x ning shunday qiymatlari to‘plamiki, bunda y funksiya haqiqiy son qiymatlarga ega bo‘lishi kerak. Berilgan funksiyada

$$x-3 \geq 0,\ \ 4-x > 0$$

bo‘lgandagina x ning har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati haqiqiy bo‘ladi. Bu tengsizliklar sistemasidan, $x \geq 3,\ \ x < 4$ bиlib, ya’ni $3 \leq x < 4$ bo‘lishini topamiz. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $[3, 4)$ bo‘ladi.

Funksiya ta’rifida keltirilgan x o‘zgaruvchining har bir qiymatiga mos qo‘yiladigan y ni aniqlovchi qoida yoki qonun turlicha bo‘lishi mumkin. Demak, funksiyaning berilishi ham turlichadir. Funksiya ***analitik, jadval*** **va** ***grafik*** **hamda kompyuter** usullari yordamida berilishi mumkin:

1) funksiyaning ***analitik usul*** bilan berilishida, x o‘zgaruvchining har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati, x argument ustida algebraik amallarning bajarilishi natijasida, ya’ni formulalar yordamida beriladi. Masalan,

$$y = x^3 + 1, \quad y^2 = \frac{x+5}{x^2-3}, \quad y = 3^{x+1}, \quad y = \log_2(x+3);$$

1) o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish **jadval** ko‘rinishida berilishi mumkin.

Masalan, kuzatish natijasida sutni yopiq idishda qizdirilganda P_1 bosim ostida uning qaynash temperaturasi t_1, P_2 bosim ostida qaynash temperaturasi t_2 va h.k. bo‘lishini topganda qo‘yidagi jadval kelib chiqadi.

2)

Bosim P	P_1	P_2	…	P_n
Temperatura t	t_1	t_2	…	t_n

Bundan ko‘rinadiki P bosim bilan t temperatura orasida bog‘lanish bo‘lib, P argument, t funksiya bo‘ladi. Funksiyaning bunday berilishiga ***jadval usulda*** berilgan deyiladi. Bunday usul ko‘proq tajribalarda ishlatiladi.

3) Funksiyaning ***grafik usulida*** berilishida, x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish tekislikdagi biror chiziq yordamida beriladi. Bunda X va Y to‘plamlar orasidagi moslik grafik bilan beriladi. XOY tekis-likda l chiziq berilgan bo‘lsin. x ning qiymatiga mos kelgan y ning qiymatini, topish uchun x nuqtadan OX o‘qiga perpendikulyar o‘tkazamiz. U l chiziqni bitta A nuqtada kesib o‘tadi. A nuqtadan OY o‘qiga perpendikulyar o‘tkazamiz, bu perpendikulyarning OY o‘qi bilan kesishish nuqtasi, y ning x ga mos qiymati bo‘ladi. Ma’lumki,

bunday moslik l chiziq yordamida bajariladi. Funksiyaning bunday berilishi, **grafik usulda ifodalash** deyiladi. Funksiyaning grafik usulida berilishidan, uni analitik usul bilan ifodalash qiyin bo‘lgan hollarda va funksiyaning sifat o‘zgarishi grafik usulda yaxshi ko‘rinadigan hollarda foydalaniladi. Masalan, fizikaviy tajribalar jarayonida ossillografdan olinadigan grafik.

4) *algoritmik yoki kompyuter usuli*. Funksiyaning bunday usulda berilishida x ning har bir qiymati uchun, $y = f(x)$ funksiyaning qiymatini hisoblaydigan algoritim yoki programma berilgan bo‘ladi. Bunday programma EHMga qo‘yilgan bo‘lib funksiyaning qiymati avtomatik hisoblanadi.

Funksiyaning berilishi.

1. Aniq va yashirin funksiyalar. Funksiya $y = f(x)$ ko‘rinishda, ya’ni y ga nisbatan yechilgan bo‘lsa, unga ***oshkor funksiya*** deyiladi. Funksiya $F(x,\ y) = 0$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, ya’ni y ga nisbatan yechilmagan bo‘lsa, ***oshkormas funksiya*** ko‘rinishda berilgan deyiladi. Masalan, $y = 3x^2 + 5,\ \ y = \sin x,\ \ y = 4^x$ funksiyalar oshkor ko‘rinishda; $2x - 3y + 6 = 0,\ \ x^2 + e^{xy} + 3 = 0$ funksiyalar oshkormas ko‘rinishda berilgan. Shuni ta’kidlaymizki hamma $F(x,\ y) = 0$ ko‘rinishdagi tenglik ham funksiyani ifodalay bermaydi. Masalan, $x^2 + y^2 + 4 = 0$ tenglama funksiyani ifodalamaydi, chunki x ning har bir qiymatiga y ning haqiqiy son qiymatini mos qo‘yish mumkin emas.

2. Murakkab funksiya. $y = f(u)$ bo‘lib, $u = \varphi(x)$ funksiya berilgan bo‘lsa, y funksiyaga $\varphi(x)$ **funksiyaning funksiyasi** yoki y ga x ning ***murakkab funksiyasi*** deyiladi. Masalan, $y = \lg(x^2 + 1)$ funksiyada $u = x^2 + 1$ bo‘lib. y x ning murakkab funksiyasi bo‘ladi. Bundan tashqari $y = \sin(x^2 + 1),\ \ y = 3^{x+5},\ \ y = \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}$ va h.k. lar ham, murakkab funksiyaga misol bo‘laoladi.

3. *Teskari funksiya*. $y = f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. y funksiyaning qiymatlar to‘plamidagi har bir qiymatiga x argumentning aniqlanish sohasidan bitta qiymati mos qo‘yilgan bo‘lsa, berilgan

funksiyaga ***teskari*** $x = d(y)$ ***funksiya*** berilgan bo‘ladi va $D(f) = E(d)$ va $E(f) = D(d)$ har bir $x_0 \in D(f) = E(d)$ va $y_0 = E(f) = D(d)$ bo‘lib. $y_0 = f(x_0)$ faqat $x_0 = d(y_0)$ uchun bajariladi. Masalan $y = 2x - 3$ funksiyaga teskari funksiya $2x = y + 3$, $x = (y + 3)/2$ bo‘ladi. $y = x^3$ funksiya $x = \sqrt[3]{y}$ teskari funksiyaga ega bo‘ladi. O‘zaro teskari bo‘lgan funksiyalarning grafiklari $y = x$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘ladi.

Foydalilik funksiyasi. Kobb-Duglas funksiyasi.

Iqtisodiy nazariya va amaliyotda funksiya keng qo‘llaniladi. Iqtisodda uchraydigan funksiyalar turlari rang barangdir, chiziqli funksiyadan tortib to maxsus funksiya deb nomlanuvchi funksiyalargacha qo‘llaniladi.

Yuqorida keltirilgan elementar funksiyalar deb nomlangan funksiyalarning deyarli barchasi iqtisodda qo‘llaniladi.

Iqtisodda tez-tez uchraydigan va o‘zining iqtisodiy nomiga ega bo‘lgan funksiyalar qatoriga quyidagilarni keltirish mumkin:

1. Foydalilik funksiyasi. Bu funksiya foydalilikni ma’lum bir faktorlar ta’siriga, bog‘liqligini aniqlaydi.

2. Ishlab chiqarish funksiyasi. Bu funksiya ishlab chiqarish faoliyati natijasini, shu faoliyatni aniqlovchi faktorlarga bog‘liqligini aniqlaydi.

3. Mahsulot hajmi funksiyasi. Bu funksiya ishlab chiqarishda mahsulot hajmining hom-ashyo zaxirasi va iste’molchiga bog‘liqligini aniqlaydi.

4. Sarf-xarajat funksiyasi. Bu funksiya ishlab chiqarishda sarf-xarajatlarni mahsulot hajmi bilan bog‘liqligini aniqlaydi.

5. Talab, iste’mol va taklif funksiyalari. Bu funksiyalar mahsulotga bo‘lgan talab, iste’mol va taklif hajmlarining turli faktorlarga (masalan, narxnavo, daromad va boshqa) bog‘liqligini aniqlaydi.

Ma’lum iqtisodiy jarayonlar ko‘p faktorlar ta’siri natijasida yuzaga kelgani uchun yuzaga keladigan funksiyalar ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar bo‘ladi.

Bu bo'limda ishlab chiqarish funksiyalari berilgan. Bu "Kobb-Duglas" funksiyalari deyiladi. Ikkita xom-ashyo K va L da ishlab chiqarish funksiyasi

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

bu yerda A, α va β - parametrlar. (α –yunoncha harf " alfa ", β- «Beta» deyiladi). Ko'p yillar oldin, ikki iqtisodchilar Cobb va Duglas bu ko'rinishdagi funksiyani aniqlashgan . Berilgan statistik ma'lumotlarga qarab Ishlab chiqarish va xom ashyo orasidagi bog'lanish o'rnatishgan. Iqtisodchilar ishlab chiqarish funksiyalarini yanada murakkab turlarini ishlab chiqgan bo'lsalar-da, Cobb – Duglas funksiyasi bu asosiy ishlab chiqarish funktsiyasi bo'lib, talablar, narxlar, ishlab chiqariash darajasi, iste'mol bilan kompaniyaning munosabatlarni tekshirishda boshlang'ich nuqta hisoblanadi .

Cobb - Duglas ishlab chiqarish funktsiyasi matematikaning bir jinsli funktsiyalari turkumiga kiradi. Umuman olganda, funksiya m darajali bir jinsli funksiya deyiladi, agar $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ da $y\lambda^m = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$ bo'lsa, λ musbat son (λ – unon harfi " lyambda " dir). Birinchi tartibli bir jinsli ishlab chiqarish funksiyasi sifatida $Q = 20K^{0,5}L^{0,5}$ ni olishimiz mumkin.

Kobb - Duglas funksiyasi ishlab chiqarish darajasi va xarajatlarning darajasi o'rtasidagi mavjud munosabatlarni aniqlaydi .

Faraz qilaylik, iste'molning dastlabki hajmlari K_1 va L_1 bo'lsin, u holda ishlab chiqarish darajasi $Q = 20K_1^{0,5}L_1^{0,5}$ bo'ladi.

Agar hajmlar ikki barobar ko'paysa (ya'ni , λ = 2) , yangi hajm quydagiga teng

$$K_2 = 2K_1 \ , \ L_2 = 2L_1$$

va bu ishlab chiqarishning yangi darajasini beradi

$$Q_2 = 20K_2^{0,5}L_2^{0,5} \qquad (1)$$

Buni boshlang'ich ishlab chiqarish darajasi bilan solishtirish mumkin , K_2 ning o'rniga $2K_1$ va L_2 ning o'rniga $2L_1$ qo'iyb solishtirsak

$$Q_2 = 20(2K_1)^{0,5}(2L_1)^{0,5} = 20\left(2^{0,5}K_1^{0,5}2^{0,5}L_1^{0,5}\right) = 2Q_1$$

Binobarin, iste'mol ikkilanganda ishlab chiqarish ikki barobarga ko'payadi , shuning uchun bu ishlab chiqarish funktsiyasi xarajatlarini doimiy bog'liqligini ko'rsatadi.

Cobb - Duglas ishlab chiqarish funktsiyasi indeks darajasi o'zgaruvchilar xarajatlari bilan oson aniqlanadi. Buni ikki xarajatlar funktsiyalari uchun ko'rsatish mumkin

$$Q_2 = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

Agar biz xarajatlarni boshlang'ich miqdorini K_1 va L_1 deb belgilasak, unda $Q_1 = AK_1^{\alpha}L_1^{\beta}$.

Agar barcha xarajatlarni o'zgarmas λ ga ko'paytirsak, yangi miqdorlar

$$K_2 = \lambda K_1 \text{ va } L_2 = \lambda L_1$$

bo'ladi.

U holda yangi ishlab chiqarish darajasi

$$Q_2 = AK_2^{\alpha}L_2^{\beta} = A(\lambda K_1)^{\alpha}(\lambda L_1)^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}AK_1^{\alpha}L_1^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta}Q_1$$

λ, α va β –musbat sonlar , bu natija bizga α va β va uch toifa xarajatlari orasidagi o'zaro bog'liqlikni ko'rsatadi.

1. Agar α + β = 1 bo'lsa $\lambda^{\alpha+\beta} = \lambda$ shuning uchun $Q_2 = \lambda Q_1$, yani masshtab kattaligiga nisbatan o'zgarmas.

2. Agar α + β > 1 bo'lsa $\lambda^{\alpha+\beta} > \lambda$, shuning uchun $Q_2 > \lambda Q_1$ va masshtab kattaligiga nisbatan o'suvchi.

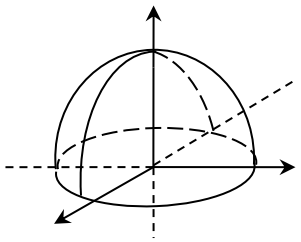
3. Agar α + β < 1 bo'lsa $\lambda^{\alpha+\beta} < \lambda$ bo'lsa $Q_2 < \lambda Q_1$ va masshtab kattaligiga nisbatan kamayuvchi .

Ta'rif*. Agar biror f - qoida va qonunga ko'ra* X *to'plamning har bir* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *elementiga Y to'plamning aniq bir* y *qiymati mos qo'yilsa, ko'p o'zgaruvchili (n-o'zgaruvchili)* $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *funksiya berilgan deyiladi.*

Masalan, $f(x,y) = x^2 + y^2$ - ikki o'zgaruvchili, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ esa *n* o'zgaruvchili funksiyaga misol bo'ladi.

X to'plam *f* funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va D(*f*) kabi, Y to'plam esa qiymatlari yoki o'zgarish sohasi deyiladi va E(*f*) kabi belgilanadi.

1 misol. $Z=\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2}$



Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D(z)=\{(x_1;x_2):x_1^2+x_2^2\le R^2\}$to‘plamdan iborat. Bu to‘plam markazi koordinata boshida, radiusi R $(R>0)$ bo‘lgan doiradir.

Iqtisodda uchraydigan asosiy tushunchalardan biri, bu foydalilik funksiyasidir. Ko‘p o‘zgaruvchili foydalilik funksiyasiga misol tariqasida quyidagini funksiyani keltirish mumkin: $Z=\sum_{i=1}^{n}a_i\ell n(x_i-c_i)$, bu yerda $a_i>0\ va\ x_i>c_i\ge 0$. Funksiyaning aniqlanish sohasi $D(Z)=\{x:\ x_i>c_i,\ i=1,n\}$ to’plamdan iborat. Bu funksiya o‘zgarmas egiluvchanlik funksiyasi deyiladi.

$Z=b_0x_1^{b_1}x_2^{b_2}$. Bu funksiya Kobba-Duglas funksiyasi deyiladi. Bu yerda x_1- mehnat xarajatlari, x_2- ishlab chiqarish fondlari hajmini bildiruvchi o‘zgaruvchilardir.

$b_0,b_1\ ва\ b_2$ ishlab chiqarish texnologiyasi orqali aniqlanadigan parametrlardir.

$Z=a_0\left(a_1x_1^{-\beta}+a_2x_2^{-\beta}\right)^{-\frac{h}{\beta}}$. Bu funksiya almashtirishning o‘zgarmas egiluvchanlik funksiyasi deyiladi.

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$ va $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in R^n$ bo‘lsin. Bu nuqtalar orasidagi masofa $d(x,y)$ deb quyidagi tenglik orqali aniqlangan songa aytilishini eslatib o‘tamiz.

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

Ta’rif*. Markazi* $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *nuqtada, radiusi* $R>0$ *ga teng ochiq shar* $-S(x,R)$ *deb, quyidagi to‘plamga aytiladi.*

$$S(x,R)=\{y:d(x,y)<R\}$$

Izoh. $\varepsilon>0$ son uchun $S(x,\varepsilon)$ - x nuqtaning, «ε -atrofi» ham deyiladi. $\overline{S}(x,R)=\{y:d(x,y)\le R\}$ to‘plam esa yopiq shar deyiladi.

Tayanch iboralar va tushunchalar

O‘zgarmas va o‘zgaruvchi miqdorlar, funksiya tushunchasi, funksiya aniqlanish sohasi, qiymatlar to‘plami, analitik usul, grafik

usul, jadval usul, oshkor va oshkormas funksiyalar, funksiyaning algoritmik berilishi, murakkab funksiya, teskari funksiya.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday miqdorlar o‘zgaruvchi deb ataladi?
2. Qanday holda funksiya aniqlangan deyiladi?
3. Funksional bog’lanish qanday belgilanadi?
4. Funksiyaning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning qiymatlar to‘plami nima?
6. Qanday moslik funksiyani ifodalashi mumkin?
7. Funksiya qanday o‘zgaruvchi?
8. Argument qanday o‘zgaruvchi?
9. Funksiya qanday usullarda berilishi mumkin?
10. Oshkor va oshkormas funksiyalar qanday?
11. Funksiyaning funksiyasi yoki murakkab funksiya deb nimaga aytiladi?
12. Teskari funksiya qanday funksiya?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. $f(x)=x^2+1$ funksiya berilgan: 1) $f(4)$; 2) $f(\sqrt{2})$; 3) $f(a+1)$;
4) $f(2a)$ larni hisoblang.

2. Quyidagi funksiyalarning $D(f)$ aniqlanish sohasini va $E(f)$ qiymatlar to‘plamini toping:

1) $f(x)=\ln(x+3)$; 2) $f(x)=\sqrt{5-2x}$; 3) $f(x)=\sqrt{1-|x|}$.

3. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1) $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$; 2) $f(x)=(a+x)/(a-x)$;

3) $f(x)=\lg(5x-x^2-6)$; 4) $f(x)=2^{\arccos(1-x)}$.

4. Hajmi $v=1$ birlikka teng bo‘lgan silindr asosining radiusi r va balandligi h orasidagi funksional bog’lanishni toping.

5. 1) $f(u)=1-u,\ u=x^2$; 2) $f(u)=1/(1-u),\ u(x)=x-1/x$;

3) $f(u)=u^2,\ u(x)=4x$

funksiyalardan x ning murakkab funksiyalarini tuzing.

6. Quyidagi funksiyalarga teskari funksiyalarni toping va topilgan funksiyalarning aniqlanish va o‘zgarish sohalarini aniqlang:

1) $f(x)=x^2-1,\ x\in[0,+\infty)$;

2) $f(x)=2x+3,\ x\in(-\infty,+\infty)$;

3) $f(x)=(x-1)^3,\ x\in(-\infty,+\infty)$; 4) $f(x)=x^2-1,\ x\in(-\infty,0]$.

7. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping va ularning grafiklarini yasang.

1) $y=\frac{1}{x}$; 2) $y=-\frac{3}{x}$; 3) $y=2-\frac{1}{x}$; 4) $y=\frac{2}{x-1}$.

3.3-§. Funksiya limiti va uzluksizligi

Funksiya limitining koshi va geyne ta’riflari.

Misol. $F(x)=\frac{e^x-1}{x}$ formula bilan berilgan funksiyani tekshiring.

Agar $x=0$ bo’lsa, $e^0=1$ bo’lgani uchun, bu funksiya $x=0$ nuqtada “0/0” tipidagi aniqmaslikni ifodalaydi. $x=0$ nuqtada F(x) funksiya aniqlanmagani uchun bu funksiyaning x argument 0 ga yaqinlashgandagi holatini bilish muhim hisoblanadi. Hisoblash yordamida (x=0 holdan boshqa holler uchun) bu funksiya uchun quyidagi jadvaldagi keltirilgan qiymatlarni hosil qilamiz.

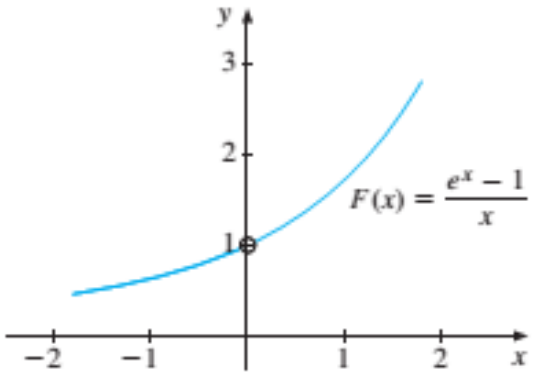
x	−1	−0.1	−0.001	−0.0001	0.0	0.0001	0.001	0.1	1
$F(x)$	0.632	0.956	0.999	1.000	∗	1.000	1.001	1.052	1.718

∗ aniqlanmagan.

Jadvaldan ko’rinib turibdiki, x 0 ga qancha yaqinlashsa, $F(x)$ funksiya qiymatlari 1 ga shuncha yaqinlashmoqda. Shuning uchun x miqdor 0 ga intilganda $F(x)$ funksiya 1 ga intiladi deyishga haqlimiz. Bu mulohazani quyidagicha yozamiz

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \text{ yoki } \ x\to 0 \text{ da } \frac{e^x-1}{x}\to 1$$

$F(x)$ funsiya x=0 nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda aniqlangan va $\lim_{x\to 0}F(x)=1$. (Chizmada kichik aylana yordamida (0,1) nuqtaning mos kichik atrofi tasvirlangan).



Ta'rif. *Agar* $f(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib (*x_0 *nuqtada aniqlangan bo'lishi shart emas) istalgan* $\varepsilon > 0$ *son uchun shunday* $\delta > 0$ *son mavjud bo'lsaki,* $o < |x - x_0| < \delta$ *tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha* x *lar (ya'ni istalgan* $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$*) uchun* $|f(x) - a| < \varepsilon$ *tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda* x *argument* x_0 *ga intilganda* $f(x)$ *funksiyaning limiti* a *ga teng deyiladi, (bu hol* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ *shaklda ifoda etiladi.)*

Misol. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h+1} - 1}{h}$ limitni hisoblash yordamida hisoblang.

Yechish. *h* ning 0 ga yaqin qiymatlarida quyidagi jadvalga ega bo'lamiz:

h	-0.5	-0.2	-0.1	-0.01	0.0	0.01	0.1	0.2	0.5
F(h)	0.586	0.528	0.513	0.501	*	0.499	0.488	0.477	0.449

Bundan ko'rinib turibdiki, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{h+1} - 1}{h} = 0.5.$

Ta'rif. *Agar* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ *bo'lgan istalgan* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ketma-ketlik uchun* $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = a$ *tenglik o'rinli bo'lsa, u holda* x *argument* x_0 *ga intilganda* $f(x)$ *funksiyaning limiti* a *ga teng deyiladi.*

Ta'rif. *Agar* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ $\left(\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0\right)$ *bo'lsa, u holda* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ *da* $f(x)$ *funksiya cheksiz kichik miqdor deyiladi.*

Ta'rif. *Agar* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ $\left(\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty\right)$ *bo'lsa, u holda* $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ *da* $f(x)$ *funksiya cheksiz katta miqdor deyiladi.*

Funksiyaning limiti va uning asosiy xossalari

Ta'rif. $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'lsaki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A chekli son $y = f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deb ataladi va quyidagicha yoziladi

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad yoki \quad x \to a \quad da \quad f(x) \to A \text{ bo'ladi.} \qquad (1)$$

Funksiya limitining ta'rifidan kelib chiqadiki $x - a = \alpha$ cheksiz kichik bo'lganda $f(x) - A$ ham cheksiz kichik bo'ladi.

Ta'rif. $y = f(x)$ funksiya, x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo'lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday, $N > 0$ mavjud bo'lsaki, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o'zgarmas A son, $y = f(x)$ funksiyaning $x \to \infty$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \qquad (2)$$

bilan belgilanadi.

1-ta'rifda faqat $x < a$ yoki $x > a$ bo'lgan qiymatlar qaralsa, funksiyaning ***chap yoki o'ng limit*** tushunchasi kelib chiqadi va

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to a+0} f(x)$$

(3)

bilan begilanadi.

Ta'rif. Limiti $A = 0$ bo'lgan funksiyaga **cheksiz kichik funksiya (ch. kich. f.)** deyiladi.

Ta'rif. Limiti $A = +\infty$ yoki $A = -\infty$ bo'lgan funksiyalarga **cheksiz katta funksiya (ch. kat. f.)** deyiladi va

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \ \lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad (4)$$

simvollar bilan belgilanadi.

Limitning ta'rifidan kelib chiqadiki $y = C$ o'zgarmas miqdorning limiti o'ziga teng.

Funksiya *limitining* asosiy xossalari:

1) *yig'indining limiti.* Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining limiti, qo'shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalarning $x \to a$ dagi limitlari mavjud bo'lsa,

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \qquad (5)$$

2) chekli sondagi funksiyalar *ko'paytmasining limiti* funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x) \qquad (6)$$

Natija: O'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni,

$$\lim_{x\to a}\left[cf_1(x)\right] = c\lim_{x\to a} f_1(x) \qquad (7)$$

3) Ikkita funksiya *nisbatining limiti,* maxrajning limiti no'ldan farqli bo'lsa, bu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng, ya'ni

$$\lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0$$

bo'lsa,

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)} \qquad (8)$$

bo'ladi.

Limitlarni hisoblashda quyidagi limitlardan foydalaniladi:

$$\lim_{x\to a} \frac{\sin x}{x} = 1; \qquad (9)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e, \qquad e = 2{,}71828\ldots \qquad (10)$$

Bu limitlarga mos ravishda ***birinchi*** **va** ***ikkinchi*** **ajoyib** limitlar deyiladi.

Aniqmasliklar va ularni ochish

1.Aniqmasliklar. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ limitni hisoblashda $f(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar ch.kich.f. lar bo'lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x \to a$ da **(0/0)**

ko‘rinishdagi aniqmaslik deyiladi. $f(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar ch.kat.f. lar bo‘lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x \to a$ da (∞/∞) ***ko‘rinishidagi aniqmaslik*** *deyiladi*. Xuddi shunga o‘xshash $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0 aniqmasliklar

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) - \varphi(x)], \quad \lim_{x\to a}[f(x) \cdot \varphi(x)] \quad \text{ва} \quad \lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$$

limitlarni hisoblashda kelib chiqadi. Bunday hollarda limitlarni hisoblashga **aniqmasliklarni ochish** deyiladi.

$(0/0)$ va (∞/∞) ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochishda quyidagi xossadan foydalaniladi: $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtaning biror atrofidagi hamma nuqtalarda o‘zaro teng bo‘lsa, ularning $x \to a$ dagi limiti ham teng bo‘ladi.

Masalan, $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2(x-3)}$ va $\varphi(x) = \dfrac{x+3}{2}$ funksiyalar x ning $x = 3$ dan boshqa hamma qiymatlari uchun teng, chunki

$$\frac{x^2 - 9}{2(x-3)} = \frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)} = \frac{x+3}{2}$$

Yuqoridagi xossaga asosan,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \varphi(x)$$

bo‘ladi, ya’ni

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{2(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

natijaga ega bo‘lamiz.

Funksiyalarning limitini topishga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x+6}{6x} = \frac{5}{6}$$

ekanligini funksiya limitining ta’rifidan foydalanib isbotlang.

Yechish. Buni isbotlash uchun $f(x) = (5x+6)/6x$ o‘zgaruvchi miqdor va $A = 5/6$ o‘zgarmas miqdor orasidagi farq $x \to \infty$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini ko‘rsatish kifoya. Demak,

$$\frac{5x+6}{6x} - \frac{5}{6} = \frac{5x+6-5x}{6x} = \frac{6}{6x} = \frac{1}{x}$$

$1/x$ o‘zgaruvchi miqdor $x \to \infty$ da cheksiz kichik funksiyadan iborat. Shunday qilib,

$$\lim_{x\to\infty}(5x+6)/6x = 5/6..$$

2-misol.

$$\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4) = 7$$

ekanligini isbotlang hamda x va $(2x^2-5x+4)$ larning qiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

Yechish. $x \to 3$ bo‘lganligi uchun $x-3=\alpha$ cheksiz kichik miqdordir.

$x = 3+\alpha$ ni $(2x^2-5x+4)-7$ ayirmaga qo‘yib,

$$2(3+\alpha)^2-5(3+\alpha)+4-7 = 2(9+6\alpha+\alpha^2)-15-5\alpha+4-7 =$$

$$= 18+12\alpha+2\alpha^2-15-5\alpha+4-7 = 2\alpha^2+7\alpha$$

natijaga ega bo‘lamiz.

α cheksiz kichik funksiya bo‘lganligi uchun $2\alpha^2+7\alpha$ ham cheksiz kichik bo‘ladi. Shunday qilib, $\lim_{x\to 3}(2x^2-5x+4)=7$ isbot bo‘ldi.

Endi yuqoridagi holatni x argument, $2x^2-5x+4$ funksiya qiymatlari jadvali bilan ko‘rsataylik. Ma’lumki $x \to 3$ intiladi.

x	2	2,5	2,8	2,9	2,99	2,999	$\to 3$
$2x^2-5x+4$	2	4	5,68	6,32	6,9302	6,993002	$\to 7$

Bu jadvaldan ko‘rinadiki, argumentning 3 ga yaqinlashib boruvchi qiymatlari uchun, funksiyaning mos qiymatlari 7 ga yaqinlashib boradi, ya’ni $x-3$ cheksiz kichik miqdorga $2x^2-5x+4-7$ ayirmaning ham cheksiz kichik miqdori to‘g’ri keladi. Yuqoridagi jadvalda $x<3$ bo‘lib, $x \to 3$ holni qaradik. $x>3$ bo‘lib, $x \to 3$ holni o‘quvchiga mustaqil ko‘rsatishni tavsiya qilamiz.

3-misol.

$\lim_{x\to 2}(4x^2-6x+3)$ limitni hisoblang.

Yechish. Algebraik yig'indining limiti, (3.5) formula, o'zgarmas ko'paytuvchini limit ishorasidan chiqarish (73.) formulalarga asosan:

$$\lim_{x\to 2}(4x^2-6x+3)=\lim_{x\to 2}4x^2-\lim_{x\to 2}6x+\lim\lim_{x\to 2}3=4\lim_{x\to 2}x^2-6\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}3=$$

$$=4(\lim_{x\to 2}x)^2-6\lim_{x\to 2}x+3=4\cdot 2^2-6\cdot 2+3=7$$

hosil bo'ladi.

Yuqoridagi misolda, limitlarning xossalariga asosan, argument x ning o'rniga uning limitik qiymatini qo'yishga olib keldi.

4-misol.

$\lim_{x\to 1}(3x^2-4x+7)/(2x^2-5x+6)$ limitni hisoblang.

Yechish. Ikkita funksiya nisbatining limiti (3.8) formula hamda oldingi misolda foydalanilgan limitlarning xossalarini qo'llasak,

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}=\frac{\lim_{x\to 1}\left(3x^2-4x+7\right)}{\lim_{x\to 1}\left(2x^2-5x+6\right)}=\frac{\lim_{x\to 1}3x^2-\lim_{x\to 1}4x+\lim_{x\to 1}7}{\lim_{x\to 1}2x^2-\lim_{x\to 1}5x+\lim_{x\to 1}6}=$$

$$=\frac{3\left(\lim_{x\to 1}x\right)^2-4\left(\lim_{x\to 1}x\right)+7}{2\left(\lim_{x\to 1}\right)^2-5\lim_{x\to 1}x+6}=\frac{3\cdot 1^2-4\cdot 1+7}{2\cdot 1^2-5\cdot 1+6}=\frac{6}{3}=2$$

bo'ladi.

Rasional funksiyaing limitini hisoblash shu funksiyaning argument x ning limitik qiymatidagi, qiymatini hisoblashga keltirildi.

Eslatma. $f(x)$ elementar funksiyalarning $x\to a$ intilgandagi limiti (a aniqlanish sohasiga tegishli) funksiyaning $x=a$ nuqtadagi qiymatiga teng bo'ladi. Masalan,

$$\lim_{t\to 1}\left\lfloor\lg\left(t+\sqrt{t^2+80}\right)+\sqrt{t^2+8}\right\rfloor=\lg(1+\sqrt{t^2+80})+\sqrt{1+8}=\lg 10+3=1+3=4.$$

5-misol. $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x=1$ da surat ham, maxraj ham nolga aylanib $(0/0)$ ko'rinish-dagi aniqmaslik hosil bo'ladi.

Surat va maxrajni $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ formula yordamida chiziqli ko'paytuvchilarga ajratamiz. Bunda x_1 va x_2 lar $ax^2+ba+c=0$ kvadrat tenglamaning ildizlari. Demak,

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(x+2/3)}{4(x-1)(x-1/4)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{3(x+2/3)}{4(x-1/4)} = \frac{3(1+2/3)}{4(1-1/4)} = 5/3$$

bo‘ladi.

6-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x\to\infty$ da (∞/∞) ko‘rinishdagi aniqmas ifodaga ega bo‘lamiz. Bunday aniqmaslikni ochish uchun kasrning surat va maxrajini x ning eng yuqori darajalisiga, ya’ni x^2 ga bo‘lamiz, hamda limitlarning xossalaridan foydalansak

$$\lim_{x\leftarrow\infty}\frac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{6+5/x+4/x^2}{3+7/x-2/x^2} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(6+5/x+4/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(3+7/x-2/x^2)} = \frac{6+0+0}{3+0+0} = 2$$

bo‘ladi. Bunda $5/x$, $4/x^2$ $7/x$, $2/x^2$ lar $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiyalardir.

7-misol. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x=3$ da surat va maxraj 0 ga teng bo‘ladi. Maxrajda $\sqrt{x+1}$ irrasional ifoda mavjud, uni suratga o‘tkazamiz, buning uchun kasrning surat va maxrajini $\sqrt{x+1}+2$ ga ko‘paytiramiz.

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-9)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{(x+1)^2}-2^2} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}(x+3)\cdot(\sqrt{x+1}+2) = (3+3)(\sqrt{x+1}+2) = 6\cdot 4 = 24.$$

8-misol. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ bo‘lganligi uchun

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x-\sin^2 x}=$$

$$=-\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=-\lim_{x\to\pi/4}\frac{1}{\cos x+\sin x}=$$

$$=-\frac{1}{\cos\pi/4+\sin\pi/4}=-\frac{1}{\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

natijani olamiz.

9-misol. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ limitni birinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $5x=\alpha$, deb almashtirsak, bundan $x=\alpha/5$, $x\to 0$ $\alpha\to 0$ bo‘ladi.

Shuning uchun,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha/5}=5\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=5\cdot 1=5,$$

chunki

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

10-misol. $\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x$ limitni ikkinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $x\to\infty$ da limitga o‘tsak, 1^∞ ko‘rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. $3/x=\alpha$ bilan almashtirsak, bu yerdan $x=3/\alpha$ hamda $x\to\infty$ da $\alpha\to 0$ bo‘ladi..Demak,

$$\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{3/\alpha}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^3=e^3$$

kelib chiqadi.

Shundayqilib, $\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x=e^3$.

11-misol. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$ limitni hisoblang.

Yechish: $x\to 1$da $1/(x-1)\to\infty$ va $2/(x^2-1)\to\infty$ bo‘lib, $(\infty-\infty)$ ko‘rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. Oydinki,

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x+1-2}{x^2-1}=\frac{x-1}{x^2-1}.$$

Oxirgi ifoda $x \to 1$ da $(0/0)$ aniqmas ifoda bo‘ladi. Shunday qilib,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

12-misol. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$ limitni hisoblang.

Yechish. $x \to +\infty$ da $(\infty-\infty)$ ko‘rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. Quyidagi shakl almashtirishni bajaramiz:

$$\sqrt{x^2+3x}-x=\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{(\sqrt{x^2+3x})^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$=\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}.$$

Oxirgi ifoda $x \to \infty$ da (∞/∞) ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘lib, 11-misoldagidek x ning yuqori darajalisiga surat va maxrajini bo‘lib,

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x/x}{\sqrt{x^2/x^2+3x/x^2}+x/x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}=1{,}5;$$

bunda $x \to +\infty$ da $3/x \to 0$ bo‘ladi.

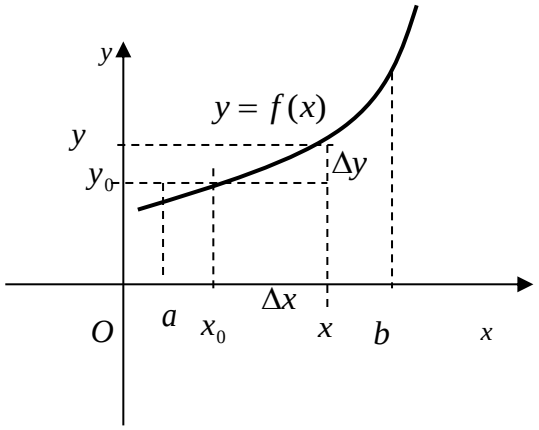
Funksiyaning uzluksizligi va uzilishi

1. Funksiya orttirmasi. *Uzluksizlik* matematik tahlilning asosiy tushunchalaridan biridir. Matematika uzluksiz funksiya tushunchasiga birinchi navbatda turli harakat qonunlarini o‘rganish natijasida keldi. Fazo va vaqt uzluksiz, masalan: harakatdagi nuqtaning bosib o‘tgan yo‘li s ning t vaqtga bog’lanishini ifodalovchi $s = f(t)$ qonun uzluksiz funksiyaga misol bo‘ladi. Qattiq jismlar, suyuqlik va gazlardagi holatlar hamda jarayonlar uzluksiz funksiyalar yordamida tavsiflanadi. Bunday uzluksiz jarayonlar iqtisodiyot modellarida ham mavjud. Bunday jarayonlar mexanika fizika va bir qancha maxsus fanlarda muayyan holda o‘rganiladi.

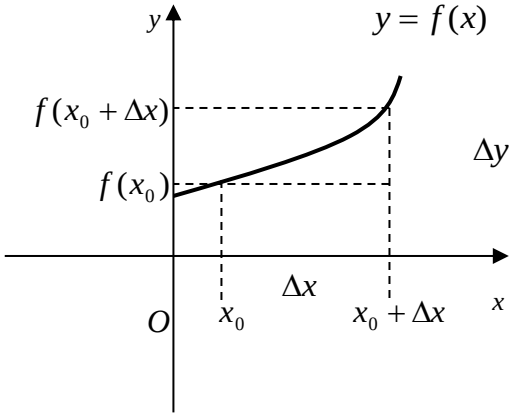
Matematikada uzluksiz jarayonni umumiy holda o‘rganamiz.

Funksiya orttirmasi. $y = f(x)$ funksiya biror $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan va x_0 shu kesmadagi biror nuqta bo‘lsin. x argumentning

keyingi qiymati bo‘lsa, $x - x_0 = \Delta x$ ga ***argument orttirmasi*** deyiladi (1-chizma).



4.1-chizma



4.2-chizma

$f(x) - f(x_0)$ funksiyaning qiymatlari orasidagi farqqa ***funksiya orttirmasi*** deyiladi va odatda Δy bilan belgilanadi. $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ yoki

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

1-chizmadan ko‘rinadiki $\Delta x \to 0$ da $\Delta y \to 0$ bo‘ladi.

1-misol. $y = f(x) = x^3$ funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtada argument $\Delta x = 0{,}5$ orttirma olgandagi funksiya Δy orttirmasini toping.

Yechish. $f(x_0) = 2^3 = 8$ funksiyaning boshlang’ich nuqtadagi qiymati. $f(x_0 + \Delta x) = f(2 + 0{,}5) = (2 + 0{,}5)^3$ funksiyaning keyingi qiymati, demak, funksiya orttirmasi

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (2 + 0{,}5)^3 - 2^3 =$$
$$= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 2 \cdot 0{,}5^2 + 0{,}5^3 - 8 = 7{,}625$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, $\Delta y = 7{,}625$.

Funksiya uzluksizligi ta’riflari. 1-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo‘lib, argumentning x_0 nuqtadagi cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya’ni

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0$$

bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz deyiladi*** (2-chizma). Bu ta’rifga qo‘yidagi ta’rif ham teng kuchlidir.

Ta’rif. x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan $y = f(x)$ funksiya shu nuqtada chekli limitga ega bo‘lib, bu limit funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya’ni

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi.

Funksiya uzluksizligi ta’riflari quyidagi ***shartlarni*** o‘z ichiga oladi:

1) funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan;

2) funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o‘ng limitlari

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

mavjud;

3) x_0 nuqtada chap va o‘ng limitlar o‘zaro teng, ya’ni

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x);$$

4) chap va o‘ng limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya’ni $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$

2-misol. $y = x^3$ funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtada uzluksizligini tekshiring.

Yechish. Ma’lumki, $y = x^3$ funksiya $x_0 = 2$ nuqtada va uning istalgan atrofida aniqlangan. Uzluksizlikni 1-ta’rifga asosan tekshiramiz. Buning uchun $x_0 = 2$ nuqtadagi funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = (2 + \Delta x)^3 - 2^3 =$$
$$2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \Delta x + 3 \cdot 2 \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - 2^3 = 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3$$

argument orttirmasi $\Delta x \to 0$ ga intilganda limitga o‘tamiz.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (12 \cdot \Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3) = 12 \cdot 0 + 6 \cdot 0^2 + 0^3 = 0.$$

Shunday qilib, $\Delta x \to 0$ da $x_0 = 2$ nuqtada $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, bu esa 1-ta’rifga

asosan funksiya uzluksiz ekanligini bildiradi. Bu misolda x_0 nuqta o‘rniga ixtiyoriy nuqtani olish mumkin(masalan, $x_0 = 3$ uchun uzluksizlikni tekshiring).

Funksiya oraliqning hamma nuqtalarida uzluksiz bo‘lsa, u shu **oraliqda** uzluksiz deyiladi.

2-misolda $y = x^3$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqning hamma nuqtalarida uzluksizligi ravshan. Demak, $y = x^3$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda uzluksiz funksiyadir.

Elementar funksiyalarning hammasi o‘zlarining aniqlanish sohalarida uzluksizdir.

$f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa:

1) $f(x) \pm \varphi(x)$; 2) $f(x) \cdot \varphi(x)$; 3) $f(x) / \varphi(x)$ $(\varphi(x_0) \neq 0$ bo‘lganda) lar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Kesmada uzluksiz funksiyaning xossalari. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u: 1) shu kesmada chegaralangan; 2) shu kesmada eng kichik va eng katta qiymatlarga erishadi; 3) kesmaning uchlarida turli ishorali qiymatlar qabul qilsa, shu kesmaning biror nuqtasida 0 ga teng bo‘ladi; 4) $f(a)$ va $f(b)$ orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi.

$y = f(z)$ va $z = \varphi(x)$ funksiyalar o‘z argumentlarining uzluksiz funksiyalari bo‘lsa, $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya ham uzluksiz bo‘ladi. $y = f(x)$ uzluksiz bo‘lib, $x = \varphi(y)$ teskari funksiya mavjud bo‘lsa, u ham uzluksizdir.

Funksiyaning uzilish va uning turlari

Ta’rif. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan, lekin bu nuqtaning o‘zida uzluksizlik shartlaridan birortasi bajarilmasa, funksiya x_0 nuqtada **uzilishga ega deyiladi.**

$f(x)$ funksiya uchun

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ chekli limitlar mavjud bo‘lsa, chap va o‘ng limitlar hamda $f(x_0)$ sonlar o‘zaro teng bo‘lmasa, x_0 nuqta ***1-tur uzilish*** *nuqtasi* deyiladi.

Xususan, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$ bo‘lsa x_0 ***bartaraf qilinadigan (yo‘qotiladigan) uzilish*** nuqtasi deyiladi.

1-tur uzilish nuqtasi bo‘lmagan uzilish nuqtalariga ***2-tur uzilish nuqtalari*** deyiladi. Bunday nuqtalarda, aqalli bitta tomonli limit qiymati cheksiz yoki mavjud bo‘lmaydi.

1-misol. $f(x) = \dfrac{x-2}{|x-2|}$ funksiya $x_0 = 2$ nuqtada 1-tur uzilishga ega ekanligini isbotlang.

Yechish. funksiya $x_0 = 2$ nuqtada aniqlanmagan. Absolyut qiymat ta’rifidan $x-2<0$ yoki $x<2$ va $x-2>0$ yoki $x>2$ bo‘lganda mos ravishda

$$f(x) = \frac{x-2}{-(x-2)} = -1, \qquad f(x) = \frac{x-2}{x-2} = 1$$

bo‘ladi.

Demak, $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = -1, \qquad \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = 1.$

Shunday qilib, $x_0 = 2$ nuqta 1-tur uzilish nuqtasi bo‘ladi. Bu uzilish nuqtasi **bartaraf** qilib (yo‘qotib) bo‘lmaydigan uzilish nuqtasiga kiradi.

2-misol. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, funksiya $x_0 = 0$ nuqtada aniqlanmagan, lekin $x \neq 0$ hamma nuqtalarda aniqlangan.

Bir tomonli limitlar o‘zaro teng, ya’ni

$$\lim_{x\to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Shunday qilib, berilgan funksiya uchun $x_0 = 0$ nuqta ***bartaraf qilinadigan (yo‘qotiladigan) uzilish*** nuqtasi bo‘ladi.

3-misol. $f(x) = 6/(x-3)^2$ funksiyaning $x = 3$ nuqtada uzilishga ega ekanligini ko‘rsating:

Yechish. Berilgan funksiya $x=3$ nuqtadan boshqa hamma nuqtalarda aniqlangan. $x<3$ bo‘lganda $f(x)>0$ va $x>3$ bo‘lganda ham $f(x)>0$.

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=+\infty \text{ va } \lim_{x\to 3+0} f(x)=+\infty .$$

Bu 2-tur uzilishdir .

Tayanch iboralar va tushunchalar

Funksiya limiti va uning xossalari, ketma-ketlik, cheksiz katta miqdor, chap va o‘ng limitlar, cheksiz kichik funksiya, ko‘paytmaning va bo‘linmaning limiti, birinchi ajoyib limit, aniqmasliklarni ochish, argument orttirmasi, funksiya orttirmasi, funksiya uzluksizligi, funksiyaning uzilishi, oraliqda uzluksiz, ikkita uzluksiz funksiya yig’indisi , ko‘paytmasi va nisbati uzluksizligi, kesmada uzluksiz funksiyalar xossalari, funksiyaning uzilishi, 1-tur uzilish, 2-tur uzilish, bartaraf etiladigan(yo‘qotiladigan) uzilish, elementar funksiyalarning uzuksizligi va uzilishi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning limiti deb nimaga aytiladi va u qanday yoziladi?
2. Chap va o‘ng limitlar nimalar va u qanday yoziladi?
3. Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar qanday miqdorlar?
4. Ikki funksiya algebraik yig’indisining limiti nimaga teng?
5. Chekli sondagi funksiyalar ko‘paytmasining limiti nimaga teng?
6. O‘zgarmas ko‘paytuvchini limit ishorasidan chiqarish mumkinmi?
7. Ikkita funksiya nisbatining limiti nimaga teng?
8. Birinchi ajoyib limit deb nimaga aytiladi?
9. Ikkinchi ajoyib limit nimaga teng?
10. Aniqmasliklarni ochish nimadan iborat?
1. Qanday jarayon uzluksiz bo‘ladi?
2. Funksiya orttirmasi nima?
3. Qanday funksiya uzluksiz deyiladi?
4. Qanday funksiyaga oraliqda uzluksiz deyiladi?

5. Ikkita uzluksiz funksiya yig'indisi, ko'paytmasi va nisbati uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?

6. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalar qanday xossalarga ega?

7. Qanday funksiyaga uzilishga ega deyiladi?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{5x}=\dfrac{4}{5}$, 2) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-7)=5$,

3) $\lim\limits_{x\to -1}(5x+8)=3$, 4) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2)-4x+6=10$

ekanligini funksiya limiti ta'rifidan foydalanib isbotlang xamda x va berilgan funksiyalar kiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

5. Quyidagi limitlarni, limitlarning xossalaridan foydalanib hisoblang:.

1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-7x+6)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^4-5x^3+6x^2-4x+7)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+5}$; 6) $\lim\limits_{t\to 3}\left[2t+\sqrt{t^2-8}+\lg(3t+\sqrt{t^2-8})\right]$.

6. Ushbu $(0/0)$ va (∞/∞) ko'rinishdagi aniqmasliklarni oching:

1) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^4-4x+3}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3-6x^2+7x+5}{8-4x+3x^2-2x^3}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^3+7x^2+8x-9}{3x^5+6x^3+4x^2-2x+11}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+8x^6+5x^4-3x^2-12}{10x^6+7x^5-6x^3-4x-17}$.

7. Quyidagi limitlarni hisoblang:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{tgx}{\sin 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

8. Quyidagi limitlarni birinchi va ikkinchi ajoyib limitlardan foydalanib hisoblang:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x};\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x/3}{x};\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x/2}{x^2};$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x};\quad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{x}+2-\sqrt{2}};\quad 6)\ \lim_{x\to\infty} x\sin 1/x;$$

$$7)\ \lim_{n\to\infty}(1+2/n)^n;\quad 8)\ \lim_{x\to 0}(1-3x)^{1/x};\quad 9)\ \lim_{n\to\infty}(1-5/n)^n;$$

$$10)\ \lim_{n\to\infty}(1-1/3n)^n;\ 11)\ \lim_{n\to\infty}(1+2x)^{1/x};\ 12)\ \lim_{n\to\infty}[n/(n+1)]^n.$$

9. Quyidagi aniqmasliklarni oching:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right);\qquad 2)\ \lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right);$$

$$3)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right);\qquad 4)\ \lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right).$$

10. 1) $y=x^2$ funksiyaning uzluksizligini, $x_0=3,\ x=5$ nuqtalarda, orttirmalar orqali ko‘rsating.

2) $y=3x^3+5x^2-7$, 2) $y=4x^3+3x^2+5$ funksiyalar uzluksizligini $x_0=2;\ x_1=-3$ nuqtalarda, orttirmalar orqali ko‘rsating.

3) $y=\sin x$ va $y=\cos x$ funksiyalarning x ning hamma qiymatlari uchun uzluksiz ekanligini ko‘rsating.

4) Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va ularning turini aniqlang:

$$1)\quad f(x)=\frac{8}{x+4};\quad 2)\quad f(x=\frac{x}{x-4}.$$

5) Ushbu funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va ularning turini aniqlang:

$$1)\ f(x)=\frac{x^2-9}{x-3};\qquad 2)\ f(x)=\frac{x^2-25}{x-5}.$$

3.4-§. Bir o‘zgaruvchili funksiya hosilasi va differensiali

Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida

*Oniy tezlik haqidagi masala***.** Amaliyotda har xil jarayonlarni tekshirishda birinchi navbatda, shu jarayonning kechishi tezligini

aniqlash kerak bo‘ladi. Tezlikni aniqlash haqidagi masala fan va texnikaning eng asosiy masalalaridan biridir.

Ma’lumki, tekis kechadigan jarayonlarda uning kechishi tezligi o‘zgarmasdir. Masalan, tekis harakatda o‘tilgan yo‘lning shu yo‘lni o‘tishga ketgan vaqtga nisbati uning tezligini bildirib u o‘zgarmasdir.

Lekin tabiatdagi yoki jamiyatdagi ko‘pchilik hodisalar notekis kechadigan jarayonlardir. Masalan, og’ir moddiy nuqtaning bo‘shliqda og’irlik kuchi ta’sirida erkin tushushi masalasini qaraylik. Fizikadan ma’lumki, bo‘shliqda moddiy nuqtaning erkin tushishi qonuni

$$S = \frac{g}{2}t^2 \qquad (1)$$

munosabat bilan ifodalanib, bu yerda t erkin tushish boshlanishidan hisoblangan vaqt, S t vaqtda o‘tgan yo‘l, g erkin tushish tezlanishi, $g \approx 9{,}81 м/сек^2$. Bu harakat notekis bo‘lib, uning tezligini topish masalasini qaraymiz.

Vaqtning biror aniq t momenti (oni)ni qaraylik. Bu momentda moddiy nuqta A holatda bo‘lsin. OA yo‘lning miqdori (1) formula bilan topiladi. Vaqt Δt miqdorga ortsin, ya’ni t, Δt orttirma qabul qiladi. $t + \Delta t$ momentda nuqta B holatda bo‘ladi. AB, vaqt Δt orttirma olgandagi yo‘l orttirmasi, uni $AB = \Delta S$ bilan belgilaymiz. (1) formulaga $t + \Delta t$ qo‘yib,

$$S + \Delta S = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2, \quad \text{bundan} \quad \Delta S = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2 - \frac{gt^2}{2}$$

yoki $\Delta S = \frac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2)$.

Oxirgi tenglikni Δt ga bo‘lib,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2t + \Delta t) \qquad (2)$$

natijani olamiz. Oxirgi tenglikdan ma’lumki, $\Delta S / \Delta t$ nisbat t va Δt ga bog’liq. Masalan: $\Delta t = 0{,}1$ sek, $t = 1$ sek bo‘lganda,

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2}(2 \cdot 1 + 0{,}1) = 1{,}05g \text{ bo‘lib, } t = 3 \text{ sek bo‘lganda}$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} - \frac{g}{2}(2 \cdot 3 + 0{,}1) = 3{,}05g \text{ bo‘ladi.}$$

Shuning uchun, notekis harakatning tezligi faqat vaqtning aniq momentiga tegishli bo‘ladi. Shunday qilib, vaqtning har bir momentidagi ***oniy tezlik*** haqida gapirish kerak bo‘ladi.

Oniy tezlik tushunchasini qanday aniqlash kerak?

(2) tenglikdan ma’lumki, t o‘zgarmas bo‘lganda, $\Delta S / \Delta t$ A dan B holatgacha oraliqdagi o‘rtacha tezlik bo‘lib, uni v_{yp} bilan belgilaymiz. Ma’lumki, (2) da Δt qancha kichik bo‘lsa, t momentdagi tezlikni shuncha yaxshiroq ifodalaydi. Bundan shunday xulosaga kelamizki, erkin tushayotgan nuqtaning t momentidagi oniy tezligi v ni v_{yp} o‘rtacha tezlikning $\Delta t \to 0$ dagi limiti kabi aniqlaymiz, ya’ni

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{yp}$$

Shunday qilib, oniy tezlikni hisoblash uchun qo‘yidagi ko‘rinishdagi limitni hisoblash kerak bo‘ladi.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (3)$$

(3) ko‘rinishdagi limitni hisoblashga ko‘p sondagi amaliy masalalarni yechishda to‘g’ri keladi.

Umuman, o‘zgaruvchi miqdor o‘zgarish tezligini topish masalasi, matematika fanining eng ahamiyatli tushunchalaridan biri - hosila tushunchasiga olib keladi.

Shuning uchun (3) ko‘rinishdagi limitlarni hisoblashni umumiy holda qarash zarur bo‘ladi.

Funksiya hosilasi ta’rifi.

Ushbu bobda matematik analizning ba’zi asosiy usullari va ularni iqtisodiy masalalarni tahlil qilishdagi tadbiqlari yoritilgan. Biz bu yerda “differensial hisob” deb nomlanuvchi bo’limni o’rganamiz.

Differensiallash usuli yordamida funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi nishabligini aniqlash mumkin. Bu usul, o’z-o’zidan foydali instrument bo’lishiga qaramasdan, u yana optimizatsiya masalalarini yechishda eng qulay usullardan hisoblanadi hamda bu usul ushbu va bundan keyingi boblarda tushuntiriladi.

Differensiallash usullari misollarda juda qulay va sodda qo’llanilgan. Bir o’zgaruvchili quyidagi funksiyani qaraylik $y = 6x^2$

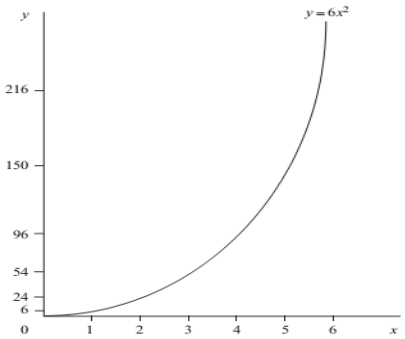
barcha x nuqtalardagi qiymatlarda funksiya burchak koeffisenti ifodasini aniqlash uchun differensiallashning asosiy qoidalari bizdan:

(a) o'ng tomondagi ifodani x darajasidagi songa ko'paytirishni va

(b) x darajasidagi sondan 1 sonini ayirishni talab qiladi

$$2 \times 6x^{2-1} = 12x$$

Bu y dan x bo'yicha hosila bo'lib, u odatda $\frac{dy}{dx}$ kabi belgilanadi va u "dy dan dx" kabi o'qiladi.



3.1- rasm

Biz bu tasdiqni 1-rasmdagi $y = 6x^2$ funksiya grafigiga qarab taxminiy tekshitishimiz mumkin. x ning barcha o'suvchi qiymatlarida x^2 funsiya qiymatlari ham o'sib boradi. Boshqacha aytganda, x ning qiymatlari o'sganda bu funksiya og'ishi ham o'sib boradi. Bu funksiyadan x bo'yicha hosila og'ishi, yuqorida hisobladik, $12x$ bo'ladi. x ning barcha o'suvchi qiymatlarida $12x$ ham tabiiyki o'sadi va shunday qilib bu funksiyaning og'ishi haqiqatdan ham yuqorida keltirib chiqargan formula kabi bo'lmoqda, deb tasdiqlay olamiz.

$y = 6x^2$ funsiyaning berilgan x ning qiymatidagi og'ishini aniqllash uchun, bu qiymatni funksiya differensialidagi formulaga qo'yib hisoblash yetarlidir

Og'ish=$12x$

Agar x=4 da og'ish=48, x=5 da esa og'ish=60 va h.k.

Misol. Agar x miqdor 8 ga teng bo'lsa $y = 4x^2$ funksiya qanday og'ishga ega?

Yechish. y ni differensiallab

Og'ish $= \frac{dy}{dx} = 2 \times 4x^{2-1} = 8x$ ni hosil qilamiz

Agar x=8 bo'lsa burchak koeffisent $=8 \cdot 8 = 64$.

Misol. x ning barcha qiymatlarida $y = 6x^3$ funksiya uchun og'ish formulasini toping.

Yechish. x ning barcha qiymatlarida burchak koeffisent $= \frac{dy}{dx} = 3 \times 6x^{3-1} = 18x^2$

$x - x_0 = \Delta x$ - argument orttirmasi deyiladi. $x \to x_0$ da y $\Delta x \to 0$. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ - funksiya orttirmasi deyilib, $\lim\limits_{x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ tenglikni hosil bo'ladi. Demak, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, argument orttirmasi Δx nolga intilganda, ya'ni Δx cheksiz kichik miqdor bo'lganda, unga mos keluvchi funksiya orttirmasi $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ham cheksiz kichik miqdor bo'lishi kelib chiqadi. Shuni e'tiborga olsak, x_0 nuqtada uzluksiz bo'lgan $y = f(x)$ funksiya uchun,ushbu $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limit $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqlik bo'lishligi kelib chiqadi.

Differensiallash qoidasini quyidagicha ifodalash mumkin.

Agar $y = ax^n$ bo'lsa, u holda

$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$ bo'ladi, bu erda a va n berilgan parametrlar.

Agar funksuya x ning turli yig'indi yoki ayirma funksiyalaridan iborat bo'lsa, u holda bu qoida har bir qo'shilayotgan yoki ayrilayotgani fodalar uchun alohida-alohida qo'llaniladi. (ko'paytma va bo'linma uchun qoidalar keying b'limlarda alohida o'rganiladi.)

Misol. Funktsiyani differensiallang. $y = 3x^2 + 10x^3 - 0,2x^4$

Yechish.

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times 3x^{2-1} + 3 \times 10x^{3-1} = 4 \times 0.2x^{4-1} = 6x + 30x^2 - 0.8x^3$$

Ta'rif*. Agar ushbu limit qiymati* $\lim\limits_{\Delta x \to} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *chekli bo'lsa, u holda* $y = f(x)$ *funksiya* $x = x_0$ *nuqtada hosilaga ega deyiladi.*

Limit qiymati $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi hosilasi deyiladi, va quyidagicha belgilanishi mumkin.

$y'(x_0),\ f'(x_0),\ \dfrac{dy(x_0)}{dx},\ \dfrac{df(x_0)}{dx},\ y'_x(x_0)$

Demak, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

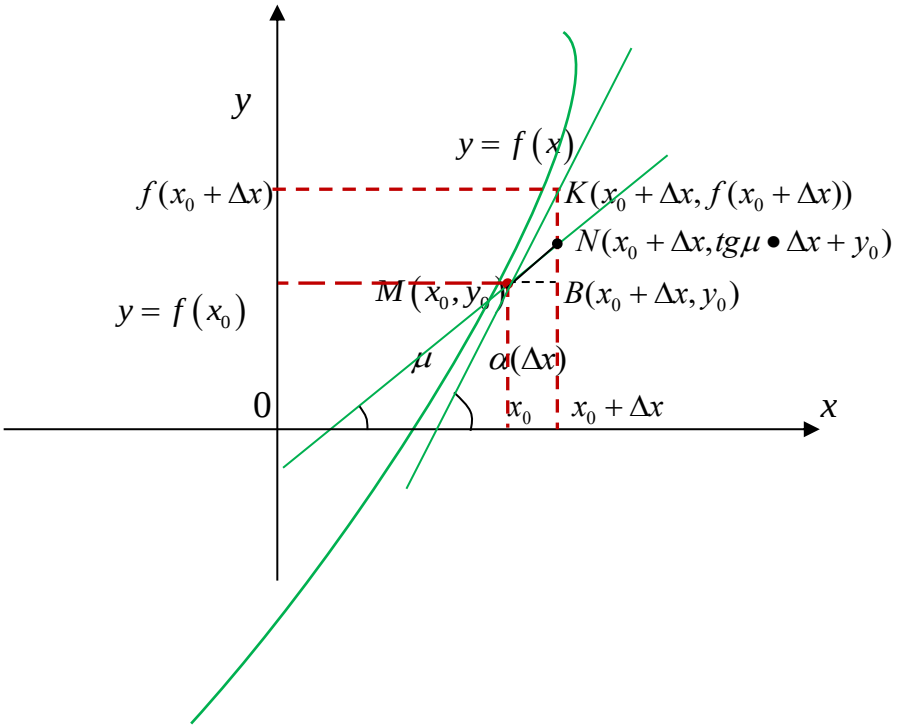
Hosila ta'rifidan, agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqar ekan. Teskari tasdiq doim ham o'rinli emas. Uzluksiz $f(x)=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtada hosilasi mavjud emas. Haqiqatan ham,

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$-limitning mavjud emasligini ko'rsatadi, ya'ni $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas, ammo $f(x)=|x|$ uzluksiz funksiya.

Hosilaning geometrik ma'nosi. Tekislikda berilgan $y=f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0,y_0)$, (bu yerda $y_0=f(x_0)$) nuqtasiga o'tkazilgan urinmani qaraymiz. Bu urinmani hosil qilish uchun quyidagi chizmada, avval *MK* kesuvchi to'g'ri chiziq o'tkazamiz. So'ngra Δx - orttirmani nolga intiltirsak, grafikdagi K-nuqta, M-nuqtaga yaqinlasha borib,



MK to'g'ri chiziq MN-urinma holatini egallaydi. U $\Delta x \to 0$ da MK to'g'ri chiziq OX-o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan $\alpha(\Delta x)$ burchagi, MN-urinma hosil qilgan φ burchakka intiladi. Bu yerda MN to'g'ri chiziq tenglamasi $y - y_0 = tg\varphi \cdot (x - x_0)$ ko'rinishda bo'lib, $x - x_0 = \Delta x$ va $tg\varphi = k$ - MN to'g'ri chiziq OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak koeffitsienti ekanligini e'tiborga olsak, MN to'g'ri chiziq tenglamasi $y = k \cdot \Delta x + y_0$ ko'rinishda bo'ladi. 1- chizmada MKB uchburchak uchun $MB = \Delta x,\ KB = \Delta y$ va $tg\alpha(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ Demak, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\alpha(\Delta x) = tg\varphi = k$ ya'ni $f'(x_0) = k$ tenglikni hosil qilamiz. Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi shu funksiya grafigining $M(x_0, y_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan MN urinmaning burchak koeffitsientiga teng bo'lar ekan. MN-urinmaning $y = k \cdot \Delta x + y_0$ tenglamasida $\Delta x = x - x_0,\ y_0 = f(x_0)$ va $k = f'(x_0)$. U holda $y = f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0, y_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lar ekan. $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Hosilaning mexanik ma'nosi. $S = s(t)$ funksiya harakat qilayotgan jismning t-vaqt davomida bosib o'tgan yo'lini bildirsa, shu jismning $t = t_0$ vaqtdagi oniy tezligi $\vartheta(t_0)$ ni topish masalasini qaraymiz. Buning uchun t-vaqtga Δt orttirma beraylik, u holda mana shu vaqt davomida

jism ma'lum bir masofa $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ ni bosib o'tadi, u holda jismning Δt vaqt davomidagi o'rtacha tezligini $\vartheta_{o'r} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ tenglik orqali topish mumkin. Tabiiyki o'rtacha tezlik, $t = t_0$ vaqtdagi oniy tezlik $\vartheta(t_0)$ ga qandaydir xatolik bilan teng bo'ladi. Biz $|\Delta t|$ vaqt kattalikni qanchalik kichik qilib olsak, $\vartheta_{o'rta}$-o'rtacha tezlik $\vartheta(t_0)$ oniy tezlikka shunchalik yaqin bo'lib, xatolik kam bo'ladi. Shuning uchun, $\vartheta(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \vartheta_{o'rta} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = S'(t_0)$ tenglik o'rinli deya olamiz. Natijada jismning $S = s(t)$ harakat tenglamasida, yo'ldan t-vaqt bo'yicha olingan hosila, shu jismning ayni t-vaqtdagi tezligiga teng bo'lar ekan, ya'ni $S'(t) = \vartheta(t)$.

Hosila jadvali

$1. c' = 0$

$2. x' = 1$

$3. (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

$4. \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$5. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$6. (a^x)' = a^x \cdot \ell n a$

$7. (e^x)' = e^x$

$8. (\ell og_a^x)' = \frac{\ell og_a e}{x} = \frac{1}{x \cdot \ell n a}$

$9. (\ell n x)' = \frac{1}{x}$

$10. (\sin x)' = \cos x$

$11. (\cos x)' = -\sin x$

$12. (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$13. (ctgx)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$14. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$15. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$16. (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

$17. (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Murakkab funksiya hosilasi va hosilalar jadvali

1). Agar $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, ya'ni $y = f[\varphi(x)]$ **murakkab funksiya** bo'lsa, $y = f(u)$ funksiyaning x o'zgaruvchi bo'yicha hosilasi

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

bo'ladi.

Agar $y = f(x)$ va $x = \varphi(y)$ lar o‘zaro teskari funksiyalar bo‘lsa,

$$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

bo‘ladi.

Differensiallash qoidalarini eslatib o‘tamiz:

x erkli o‘zgaruvchi, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ uning differensiallanuvchi funksiyalari bo‘lsin.

1., $C' = 0$ C – o‘zgarmas miqdor.

2. $x' = 1$.

3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

4. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$.

5. $(cu)' = c \cdot u'$.

6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$.

3). **Murakkab funksiya uchun hosilalar jadvali** quyidagicha bo‘ladi:

1) $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u' \quad n \in R, \quad u > 0$;

2) $(a^u)' = a^u \cdot 1na \cdot u'$;

3) $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot 1na} \cdot u'$;

5) $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;

6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

8) $(tg\ u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

9) $(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

10) $(\arcsin\ u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11) $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

12) $(arctg\ u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

13) $(arcctg\ u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

14) $(u^v)' = vu^{м-1} \cdot u' + u^v \cdot 1nu \cdot v'$.

Yuqori tartibli hosilalar. $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi deb, uning hosilasidan olingan hosilaga, ya’ni $(y')'$ ga aytiladi. Ikkinchi tartibli hosila quyidagilarning biri bilan belgilanadi:

$$y'', \quad f''(x), \quad d^2y/dx^2.$$

$y = f(x)$ funksiyaning n-tartibli hosilasi deb uning $(n-1)$ tartibli hosilasidan olingan hosilaga aytiladi va quyidagilarning biri bilan belgilanadi

$y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $d^n y / dx^n$. Ta'rifga ko'ra $y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'$.

1-misol. $y = (2x^2 - 7)^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

Yechish.

$$y' = \left[(2x^2-7)^3\right]' = 3(2x^2-7)^2(2x^2-7)' = 3(2x^2-7)^2 \cdot 4x = 12x(2x^2-7)^2;$$

$$y'' = (y')' = \left[12x(2x^2-7)^2\right]' = 12\{x'(2x^2-7)^2 + x\left[(2x^2-7)^2\right]' =$$

$$= 12\left[(2x^2-7)^2 + 2x(2x^2-7)\cdot 4x\right] = 12(2x^2-7)(2x^2-7+8x^2) =$$

$$= 12(2x^2-7)(10x^2-7).$$

Demak, $y'' = 12(2x^2-7)(10x^2-7)$.

2-misol. $y = x^n$ funksiyaning n – tartibli hosilasini toping.

Yechish. $y' = nx^{n-1}$, $y^n = n(n-1)x^{x-2}$, $y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$,

$y^{(4)} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}$, ... , $y^{(n-1)} =$

$$= n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots \left[n-(n-2)\right]x^{n-(n-1)} = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 2x$$

$$y^{(n)} = n(n-1(n-2)(n-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

($n!$) 1 dan n gacha bo'lgan sonlar ko'paytmasining qisqa yozilishi).

Oshkormas va parametrik berilgan funksiyalarning hosilalari

1). x o'zgaruvchining y funksiyasi ***oshkormas ko'rinishda*** $F(x, y) = 0$ berilgan bo'lsa, y' hosilani topish uchun $F(x, y) = 0$ tenglikni x bo'yicha differensiallab, so'ngra hosil bo'lgan tenglamadan y' ni topamiz. Ikkinchi va undan yuqori tartibli hosilalar ham shu kabi topiladi.

Misol. $x^2 + y^2 = 100$ oshkormas ko'rinishda berilgan, y funksiyaning ikkinchi tartibli hosilani toping.

Yechish. $2x + 2y \cdot y' = 0$; $2yy' = -2x$, $y' = -x / y$; keyingi ifodadan yana hosila olib,

$$(y')' = -\frac{x'y - x(y)'}{y^2} = -\frac{y - xy'}{y^2} \quad .$$

Endi , $y' = -\frac{x}{y}$ ni xisobga olsak,

$$y'' = -\frac{y - x(-x/y)}{y^2}$$

yoki

$$y'' = -\frac{x^2 + y^2}{y^3};\ y'' = -\frac{100}{y^3}$$

bo‘ladi, chunki, $x^2 + y^2 = 100$ edi.

Funksional bog’lanish parametrik

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, dy/dx, d^2y/dx^2 hosilalar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \qquad (1)$$

formula bilan topiladi.

Misol.

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

parametrik ko‘rinishda berilgan, y funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t,\ \frac{d^2x}{dt^2} = -a\cos t,\ \frac{dy}{dt} = a\cos t,\ \frac{d^2y}{dt^2} = -a\sin t$$

(1) formulaga asosan,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-a\sin t\cdot(-a\sin t) - (-a\cos t)\cdot a\cos t}{(-a\sin t)^3} = \frac{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}{-a^3\sin^3 t} =$$

$$= -\frac{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)}{a^3\sin^3 t} = -\frac{1}{a\sin^3 t} \ .$$

Demak, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a\sin^3 t}$

bo‘ladi.

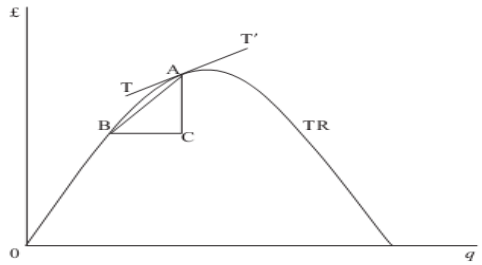
Hosilani iqtisodga qo’llanilishi.

Shuni ta’kidlash lozimki, hosilaning iqtisodiy ma’nosi ko’p qirrali bo’lib, muayyan ob’ektga yo’naltirilgan maqsaddan kelib chiqadi. Biz shu masalalardan birini keltiramiz. $U = U(t)$ funksiya t-vaqt davomida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi o’zgarishini bildirsin. Ishlab chiqarishning $t = t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligini topish masalasini ko’raylik. Buning uchun t-vaqtga Δt- orttirma beramiz, u holda mana shu vaqt davomida ma’lum miqdordagi $\Delta U = U(t_0 + \Delta t) - U(t_0)$ mahsulot ishlab chiqariladi, o’rtacha mehnat unumdorlik $Z_{o'rta} = \dfrac{\Delta U}{\Delta t}$ tenglik orqali topiladi. Yuqoridagi mulohazalarga o’xshash $t = t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligi uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz: $Z(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} Z_{o'rta} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta U}{\Delta t} = U'(t_0)$

Demak, mahsulot hajmini vaqt bilan bog’lovchi $U(t)$ funksiyaning vaqt bo’yicha $U'(t)$ hosilasi, ishlab chiqarishning $Z(t)$ unumdorligini berar ekan, ya’ni $U'(t) = Z(t)$.

Marginal daromad va umumiy daromad

Odatda, ba’zan iqtisodiyotda MR (MR- marginal revenue) chegaraviy daromad savdodagi sotuv hajmining 1 birlikka ortgandagi TR (TR - total revenue) umumiy daromadning qancha miqdorga ortishini ifodalaydi. Bu chegaraviy daromadning taxminiy qiymatini ifodalab va u o’lchov birligi o’zgarganda o’zgaradi. Chegaraviy daromadni yanada aniqroq ta’riflash uchun ishlab chiqarish hajmining umumiy daromadga nisbatan o’zgarish tezligi deb hisoblanash aniqlaydi.



$\frac{\Delta TR}{\Delta Q} = \frac{AC}{BC} =$ AB chiziqning og'ishini anglatib, shu oraliqdagi chegaraviy daromadning taqribiy qiymatini ifodalaydi.

B nuqta *TR* chiziq bo'ylab *A* tomonga yaqinlashsa, og'ish burchagi *A* nuqtada o'tkazilgan TT' urinmaning burchak koeffisentiga yaqinlashadi. Ishlab chiqarish hajmining kichik o'zgarishida, *MR A* nuqtadagi *TR* ning og'ish burchagiga teng bo'ladi. Agar o'zgarish yetarli kichik bo'lsa, u holda MR deyarli *TR* ning *A* nuqtadagi og'ishiga teng bo'ladi. Demak, har qanday berilgan vaqtdagi ishlab chiqarishda *MR TR* funksiyaning shu vaqtdagi og'ishiga teng bo'ladi. Ma'lumki, funksiya og'ishini differensiallash yordamida topish mumkin va u

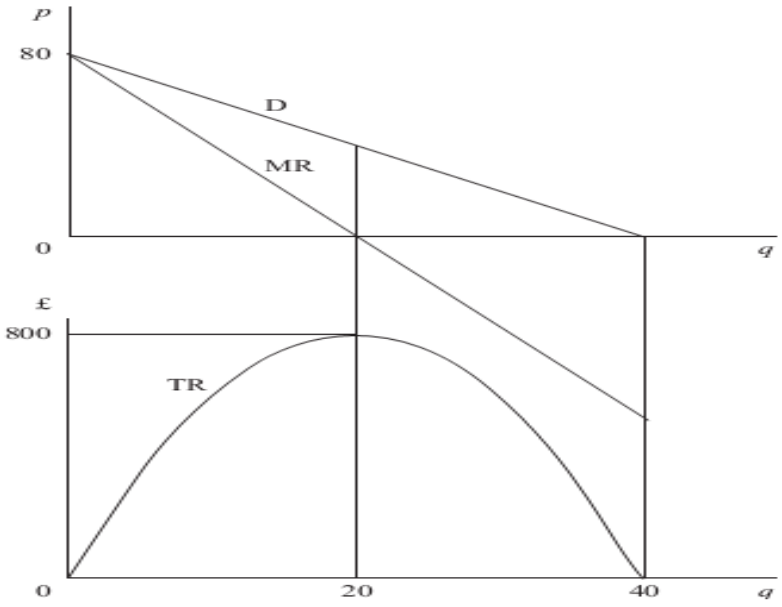
$$MR = \frac{dTR}{dq}$$

munosabat orqali ifodalanadi.

Misol. $TR = 80q - 2q^2$ funksiya berilgan bo'lsa, MR uchun funnksiyani aniqlang.

Yechish. $MR = \frac{dTR}{dq} = 80 - 4q$. Bu natija TR va MR o'rtasidagi ba'zi munosabatlar xususiyatlari tushuntirishga yordam beradi.

Talabning $p = 80 - 2q$ chiziqli D grafigi quyidagi rasmda ko'rsanilgan



Ma’lumki, $TR = pq$. Demak, $TR = (80 - 2q)q = 80q - 2q^2$.Bu TR funksiya rasmning quyidagi qismida joylashgan va MR funksiya esa shu rasmning yuqori qismida tasvirlangan.

Chizmadan ko’rinib turibdiki, TR o’sganda kutilganidek MR musbat va TR kamaysa MR manfiy. TR o’zining maksimumiga erishsa, MR nolga teng bo’ladi.

MR funksiya yordamida TR funksining maksimum qiymatini topish oson.TR maksimal nuqtasida gorizontal va og’ish burchagi nolga teng, shuning uchu MR ham nolga teng bo’ladi. Demak, TR maksimumga erishganda

$$MR = 80 - 4q = 0, \qquad 80 = 4q, \qquad 20 = q$$

Rasmda MR funksiyaning vertical o’qda talab funksiyasi bilan bir nuqtada kesishishini va ikki marta katta og’sh burchagiga egaligini ko’rish mumkin. Bu natijani har qanday chiziqli funksiya uchun ham o’rinliligini ko’rsatish mumkin.

Tayanch ibora va tushunchalar

Oniy tezlik, hosila, egri chiziqqa urinma, yuqori tartibli hosila, differensiallash, murakkab funksiya, oshkormas va parametrik funksiyalar hosilalari.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Jarayonning kechishi tezligi nima?
2. Oniy tezlik nima bilan xarakterlanadi?
3. Funksiyaning hosilasi deb nimaga aytiladi?
4. Hosilaning geometrik ma’nosi nima?
5. Ikkinchi tartibli hosila nima?
6. Differensiallash qoidalari va formulalarini yoddan bilasizmi?
7. Qanday hosilaga n-tartibli hosila deyiladi?
8. Oshkormas va parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyalar hosilalari qanday topiladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

1) $y = x\ln x$; 2) $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$; 3) $y = \lg(5x)$.

4) $y = \ln x - \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x^2}$; 5) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$; 6) $y = \ln(x^2 + 2x)$.

7) $y = \ln(1+\cos x)$; 8) $y = \ln\sin x - \dfrac{1}{2}\sin^2 x$.

9) $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$; 10) $y = \ln\dfrac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$; 11) $y = \lg(5x+3)$.

12) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$; 13) $y = \ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-ax}}$; 14) $y = \ln(tgx)$.

2. Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

1) $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$; 2) $y = \arcsin\sqrt{1-4x}$.

3) $y = x - arctgx$; 4) $y = \arcsin\dfrac{x}{a}$.

5) $y = arctg\dfrac{x}{a}$; 6) $y = \arccos(1-2x)$.

7) $y = x\sqrt{1-x^2} + \arccos x$; 8) $y = \arcsin(e^{3x})$.

9) $y = xarctgx + \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; 10) $y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

11) $y = \arcsin\sqrt{x}$; 12) $y = arctg\sqrt{6x-1}$.

13). $y = x\arccos(1-x^2)$; 14) $y = arctgx - \dfrac{1}{x}$.

15) $y = \arccos\sqrt{1-3x} + \sqrt{2x-4x^2}$;

3. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = tgx$; 3) $y = \sqrt{1+x^2}$ funksiyalarning 2-tartibli hosilalari topilsin.

4. 1) $y = \cos^2 x$; 2) $y = \dfrac{1}{x^2}$; 3) $y = x\sin x$ funksiyalarning 3-tartibli hosilalari topilsin.

5. 1) $y = x\ln x$; 2) $y = te^{-t}$; 3) $y = arctg\dfrac{x}{a}$ funksiyalarning 3-tartibli hosilalari topilsin.

6. 1) $y = \ln x$; 2) $y = e^{-\frac{x}{a}}$; 3) $y = \sqrt{x}$ funksiyalarning n- tartibli hosilalari topilsin.

7. 1) $y = x^n$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = \cos^2 x$ funksiyalarning n- tartibli hosilalari topilsin.

3.5-§. Differensiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremalar. Hosilaning ba'zi tatbiqlari

Funksiyaning differensiali va uning taqribiy hisoblashdagi tatbiqi

1. Funksiyaning differensiali. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi, ya'ni hosilaga ega bo'lsa, ya'ni

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y', \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha, \quad \Delta x \to 0 \quad \partial a \quad \alpha \to 0$$

bo'lib, bunda α cheksiz kichik funksiya bo'ladi. Demak,

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\,\Delta x \qquad (1)$$

bo'ladi. (1) formulaga **funksiya orttirmasi uchun formula** deyiladi.

Ta'rif. Funksiya orttirmasining $y'\Delta x$ bosh qismiga ***funksiya differensiali*** deyiladi va dy bilan belgilanadi.

Ta'rifga asosan,

$$dy = y'\Delta x \qquad (2)$$

(2) formulada $y = x$ bo'lsa, $dx = x'\Delta x$ yoki $dx = \Delta x$ bo'lib, funksiya differensiali

$$dy = y'dx$$

ko'rinishda bo'ladi.

Elementar funksiyalarning differensiali jadvalini keltiramiz.

1. $d(x^n) = nx^{n-1}dx \ \ (x > 0)$;
2. $d(a^x) = a^x \ln a\,dx \ \ (a > 0, a \neq 1)$;

3. $d(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e\, dx \quad (x>0, a>0, a\neq 1)$;

4. $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$;

5. $d(\sin x) = \cos x dx$;

6. $d(\cos x) = -\sin x dx$;

7. $d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x}dx$;

8. $d(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx$;

9. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

10. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

11. $d(arctgx) = \frac{1}{1+x^2}dx$;

12. $d(arcctgx) = -\frac{1}{1+x^2}dx$

Funksiyaning differensialining taqribiy hisoblashga tatbiqi.

(1) formuladan $\Delta y \approx dy$ **taqribiy tenglik kelib chiqadi**, ya'ni Δx yetarlicha kichik bo'lganda, funksiya orttirmasi uning differensialiga taqriban teng deyish mumkin. Bunda $\Delta y \approx dy$ bo'lib, ya'ni $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$ yoki

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \qquad (3)$$

(3) formuladan ***funksiya qiymatini taqribiy hisoblashlarda*** foydalaniladi.

Ta'rif. $y = f(x)$ funksiyaning ***ikkinchi tartibli differensiali*** deb funksiya differensialidan olingan differensialga aytiladi va

$$d^2 y = d(dy) = d(y'dx) = y''dx^2$$

bilan belgilanadi.

Xuddi shunday, $d^3 y = y'''dx^3$, ... , $d^n y = y^{(n)}dx^n$ differensiallar ham aniqlanadi.

1-misol. $y=\sqrt{1+x^2}$ funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli differensiallarini toping.

Yechish. Oldin birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$y'=(\sqrt{1+x^2})'=\frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$y''=\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{x'\sqrt{1+x^2}-x(\sqrt{1+x^2})'}{(\sqrt{1+x^2})^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}-x\cdot x/\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}=\frac{1+x^{\,2}-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

Shunday qilib,

$$dy=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \text{ va } \; d^2y=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx^2$$

bo‘ladi.

2-misol. $f(x)=3x^2-7$ funksiyaning, argument 2 dan 2,001 gacha o‘zgargandagi orttirmasini taqriban toping.

Yechish. (3) formuladan foydalanamiz. $x_0=2$, $\Delta x=0.001$. $f'(x)=6x,\quad f'(x_0)=6\cdot 2=12$, $\Delta f(x_0)\approx df(x_0)=f'(x_0)\;\Delta x=12\cdot 0.001=$ $=0.012$.

Funksiya orttirmasi o‘rniga uning differensialini olib qancha xatoga yo‘l qo‘yilganini baholaymiz: buning uchun haqiqiy orttirmani topamiz,

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=3(x_0+\Delta x)^2-7-(3x_0^2-7)=$$
$$=3x_0^2+6x_0\Delta x+3(\Delta x)^2-7-3x_0^2+7=$$
$$=6x_0\Delta x+3(\Delta x)^2=6\cdot 2\cdot 0.001+3\cdot 0.000001=0.012003.$$

Demak, absalyut xato

$$|\Delta y-dy|=|0.012003-0.012|=0.000003.$$

Nisbiy xato

$$\frac{|\Delta y-dy|}{dy}=\frac{0.000003}{0.012}=0.00025 \qquad \text{yoki} \qquad 0{,}025\%.$$

Taqribiy hisoblash xatosi ancha kichik, bu esa yuqoridagi taqribiy tenglikdan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkinligini ko‘rsatadi.

Differensial hisobning asosiy teoremalari

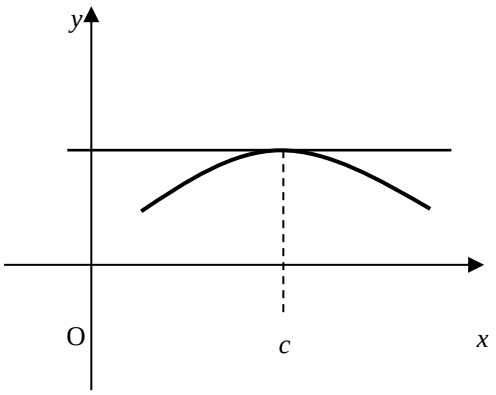
Biror funksiyaning hosilasini bilish funksional bog’lanish haqida xulosa chiqarishga imkoniyat yaratadi. Hosila tushunchasining har xil tatbiqlari, xususan iqtisodga qo‘llanilishida sodda lekin muhim bo‘lgan teoremalar va formulalar yotadi. Bu teoremalardan ayrimlarini isbotsiz keltiramiz.

Ferma teoremasi. (1602-1665y. - atoqli fransuz matematigi). $f(x)$ funksiya birorta X oraliqda aniqlangan va bu oraliqning ichki c nuqtasida eng katta (eng kichik) qiymatga ega bo‘lib, hamda bu nuqtada chekli $f'(c)$ hosila mavjud bo‘lsa,

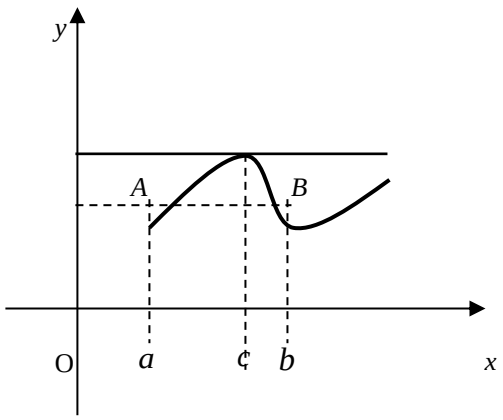
$$f'(c) = 0$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi zarur.

Ferma teoremasi sodda geometrik ma’noga ega. Teorema shartlari bajarilganda X oraliqda shunday c nuqta mavjud bo‘ladiki, bu nuqtadan funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma OX o‘qiga parallel bo‘ladi (3.2-chizma).



3.2-chizma



3.3-chizma

Roll teoremasi. (Mishel Roll (1652-1719) fransuz matematigi). 1) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz; 2) aqalli (a,b) oraliqda $f'(x)$ chekli hosila mavjud; 3) oraliqning chetki nuqtalarida funksiya teng $f(a) = f(b)$ qiymatlarni qabul qilsa, a va b orasida shunday c nuqta topiladiki,

$$\hat{f}'(c) = 0$$

tenglik bajariladi $(a < c < b)$.

Geometrik nuqtasi nazardan Roll teoremasi quyidagini bildiradi: $y = f(x)$ funksiyaning chetki ordinatalari teng bo‘lsa, egri chiziqda shunday nuqta topiladiki, undan egri chiziqqa o‘tkazilgan o‘rinma, OX o‘qiga parallel bo‘ladi (2-chizma).

Lagranj teoremasi. (1736-1813y. mashhur fransuz matematigi va mexanigi). 1) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz; 2) aqalli (a,b) ochiq oraliqda chekli $f(x)$ hosila mavjud bo‘lsa, a va b orasida kamida bitta $c\,(a < c < b)$ nuqta topiladiki

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Lagranj teoremasini geometrik tomondan quyidagicha ifodalash mumkin (3-chizma): teorema shartlarida

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{CB}{AC}$$

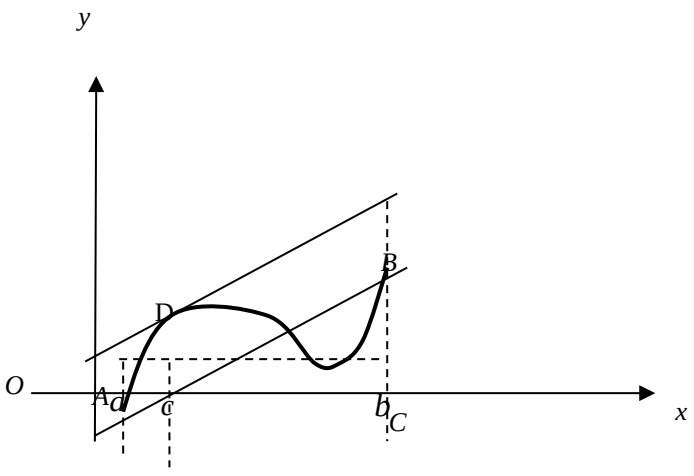
nisbat AB kesuvchining burchak koeffisiyenti ekanini, $f'(c)$ esa $y = f(x)$ egri chiziqqa $x = c$ abssissali nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffisiyenti ekanini payqaymiz.

Shunday qilib, Lagranj teoremasining tasdig’i AB yoyda hyech bo‘lmaganda bitta shunday D nuqta topiladiki, bu nuqtadan o‘tkazilgan urinma, AB kesuvchiga parallel bo‘ladi.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ yoki } \quad f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

formulaga Lagranj formulasi yoki chekli orttirmalar formulasi deyiladi.

3.4-chizma



Teylor teoremasi ((1685-1731y., ingliz matematigi). $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtani o‘z ichiga olgan biror oraliqda $(n+1)$ tartibgacha barcha hosillarga ega bo‘lsa,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ...+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

formula o‘rinli bo‘ladi, bunda θ, $0 < \theta < 1$ bo‘lgan son. Bu formulaga qoldiq hadi, Langranj formasida

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}x-a)^{n+1}$$

bo‘lgan, ***Teylor formulasi*** deyiladi. Teylor formulasida $a = 0$ bo‘lsa,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

formula hosil bo‘ladi. Bunga ***Makloren formulasi*** deyiladi.
Teylor va Makloren formulalari funksiyalrni x ning darajalari bo‘yicha yoyishda va taqribiy hisoblashlarda katta ahamiyatga ega.

M*isol.* Ushbu $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-1$ funksiya $(-1;1)$ intervalning ichki $x=0$ nuqtasida o‘zining eng kichik qiymatiga erishsa ham, bu funksiya uchun Ferma teoremasining xulosasi o‘rinli emas. Shuni ko‘rsating.

Yechish. Berilgan funksiya $x=0$ nuqtada o‘zining eng kichik qiymatiga erishadi. Biroq funksiya shu $x=0$ nuqtada chekli hosilaga ega emas. Bu ushbu

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$$

nisbatning $\Delta x \to 0$ da chekli limitga ega emasligidan kelib chikadi.

Demak, Ferma teoremasining sharti bajarilmaydi. Binobarin, teoremaning xulosasi o‘rinli emas.

Misol. Ushbu $f(x)=x^2+3$ funksiya [-1; 2] segmentda Lagranj teoremasining shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. Ravshanki, berilgan funksiya [-1; 2] segmentda uzluksiz va $(-1;2)$ intervalda $f'(x)=2x$ xosilaga ega.

Demak, $f(x)=x^3+3$ funksiya [-1; 2] segmentda Lagranj teoremasiga ko‘ra shunday *s* nuqta (-1 < *c* < 2) topiladiki,

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-(-1)}=f'(c)=2c$$

bo‘ladi. Keyingi tenglikdan $c=\frac{1}{2}$ ekanini topamiz.

Differensial hisob yordamida funksiya dinamikasini tekshirish

Ma’lumki, tabiat va iqtisodning ko‘p qonunlari funksiya yordamida modellashtiriladi. Bunday funksiyalrni bilish ularning qaysi oraliqda o‘suvchi yoki kamayuvchi hamda ular qanday nuqtalarda eng katta va eng kichik qiymatlarga erishishini aniqlash imkonini yaratadi. Bunga o‘xshash tekshirishlar *funksiya dinamikasini* anglashga olib keladi.

Funksiyaning monotonligi mezonlari (kriteriyasi).

Ta’rif. (a,b) oraliqning $x_2 > x_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ikkita nuqtalari uchun, $f(x_2) > f(x_1)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda o‘suvchi deyiladi.

Ta’rif. (a,b) oraliqning $x_2 > x_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ikkita nuqtalarsi uchun $f(x_2) < f(x_1)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda kamayuvchi deyiladi.

Oraliqda o‘suvchi yoki kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deyiladi.

Monotonlikning zaruriy va yetarli shartlari:

1) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya musbat hosilaga ega, ya’ni $f'(x) > 0,$ bo‘lsa, funksiya shu oraliqda *o‘suvchi* bo‘ladi;

2) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya manfiy hosilaga ega, ya'ni $f'(x)<0,$ bo'lsa, funksiya shu oraliqda *kamayuvchi* bo'ladi.

1-misol. $y=f(x)=x^3-3/2\cdot x^2-6x+4$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

Yechish. Birinchi tartibli hosilani topamiz:

$y'=f'(x)=3x^2-3x-6=3(x^2-x-2),\ x^2-x-2=0,$

bundan $x_1=-1,\ x_2=2$ kritik nuqtalar bo'lib, ular funksiyaning aniqlanish sohasini $(-\infty;-1),(-1;2),(2;+\infty)$ oraliqlarga ajratadi.

Bu oraliqlarning har birida hosilaning ishorasini tekshiramiz. $(-\infty;-1)$ oraliqdan ixtiyoriy nuqta olib, masalan, $x=-2$ bo'lsa, $f'(-2)=(-2\ )^2-(-2)-2=4+2-2=4>0$ bo'ladi. Bunday tengsizlik oraliqning istalgan nuqtasi uchun bajariladi (buni tekshirib ko'ring). Demak, $(-\infty;-1)$ oraliqda funksiya o'suvchi (o'suvchi funksiyaning yetarli shartiga asosan).

$(-1;2)$ oraliqning $x=0$ nuqtasida $f'(0)=-2<0,$ bo'lib, bu oraliqning istalgan nuqtasi uchun, $f'(x)<0$ tengsizlik bajariladi. Kamayuvchi funksiyaning yetarli shartiga asosan, $(-1;2)$ oraliqda funksiya kamayuvchi bo'ladi.

$(2;+\infty)$ oraliqning $x=3$ nuљtasi uchun, $f'(3)=3^2-3-2=9-5=4>0,$ bo'lib, bu tengsizlik ham oraliqning istalgan nuqtasi uchun bajariladi, demak, funksiya $(2;+\infty)$ oraliqda o'suvchi.

Funksiyaning ekstremumi. Funksiyaning birinchi tartibli hosilasi no'lga teng yoki uzilishga ega bo'ladigan nuqtalari *kritik* nuqtalar deyiladi.

Ta'rif. x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofning har qanday $x\neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x\ )<f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *maksimumga* ega deyiladi.

Ta'rif. x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofning har qanday $x\neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x\ )>f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada *minimumga* ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum yoki minimum nuqtalariga *ekstremum* nuqtalari deyiladi.

Ekstremumga ega bo‘lshishinig zaruriy sharti. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo‘lsa, $y' = f'(x_0)$ no‘lga teng yoki u mavjud bo‘lmaydi.

Eslatma. Har qanday kritik nuqta ham ekstremum nuqtasi bo‘lavermaydi.

Ekstremumning yetarli shartlari. Birinchi qoida. x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo‘lib, funksiya hosilasi ishorasi bu nuqtadan o‘tishda ishorasini o‘zgartirsa, x_0 nuљta, funksiyaning ekstremum nuqtasi, va:

1) x_0 nuqtadan chapdan o‘ngga o‘tishda $f'(x)$ o‘z ishorasini musbatdan manfiyga o‘zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya *maksimumga;*

2) x_0 nuqtadan chapdan o‘ngga o‘tishda $f'(x)$ o‘z ishorasini manfiydan musbatga o‘zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya *minimumga* ega bo‘ladi.

Ikkinchi qoida. x_0 nuqtada birinchi hosila no‘lga teng, ikkinchi hosila no‘ldan farqli bo‘lsa, x_0 nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi va :

1) $f''(x_0) < 0$ bo‘lsa, *maksimum* nuqtasi;

2) $f''(x_0) > 0$bo‘lsa, *minimum* nuqtasi bo‘ladi.

Shunday qilib, monotonlik oraliqlarini, funksiya ekstremumini topish uchun, oldin funksiyaning aniqlanish sohasini kritik nuqtalar yordamida monotonlik oraliqlariga bo‘lish va ularda hosila ishorasini tekshirish kerak. Keyin monotonlik va ekstremumning yetarlilik shartlaridan foydalanib, o‘sish va kamayish oraliqlarini, maksimum va minimum nuqtalarini aniqlaymiz.

2-misol. $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 - 6x + 2\frac{2}{3}$ funksiyaninshg ekstremumini birinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish. Kritik nuqtalarni topamiz:

$f'(x)=x^2-x-6,\ x^2-x-6=0,$ bunda $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 6}}{2}=\dfrac{1\pm 5}{2};$

bo‘lib, $x_1=-2,\ x_2=3$ bo‘ladi.

Endi argumentning kritik nuqtalaridan o‘tishda funksiya hosilasining ishoralarini tekshiramiz:

$f'(x)=x^2-x-6=(x+2)(x-3),\ x<-2$ bo‘lsa, $x+2<0,\ x-3<0$ bo‘lib,

$(x+2)(x-3)>0,$ bo‘ladi, ya’ni ishora musbat $(+)$. $x>-2$ bo‘lsa, $x+2>0;\ x-3<0,\ (x+2)(x-3)<0,$ ya’ni ishora manfiy(-). Demak, $x_1=-2$ nuqtadan o‘tishda funksiya hosilasining ishorasi musbatdan manfiyga o‘zgaradi. Birinchi qoidaga asosan $x_1=-2$ nuqtada berilgan funksiya maksimumga ega bo‘ladi.

$$y_{\max}=\frac{1}{3}(-2)^3-\frac{1}{2}(-2)^2-6(-2)+8/3=10\ .$$

Endi -2<x<3 bo‘lsa, $(x+2)>0;\ (x-3)<0$ bo‘lib, $(x+2)(x-3)<0,$ hosilaning ishorasi manfiy $(-), x>3$ bo‘lsa, $(x+2)>0;\ (x-3)>0$ bo‘lib, $(x+2)(x-3)>0,$ musbat (+) bo‘ladi. Demak, $x_2=3$ nuqtadan o‘tishda funksiya hosilasi ishorasini manfiydan musbatga o‘zgartiradi, birinchi qoidaga asosan funksiya $x_2=3$ nuqtada minimumga ega bo‘ladi.

$$y_{\min}=1/3\cdot 3^3-1/2\cdot 3^2-6\cdot 3+8/3=-65/6.$$

3-misol. $f(x)=1/4\cdot x^4-2x^3+11/2\cdot x^2-6x+9/4$ funksiya ekstremumini ikkinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$f'(x)=x^3-6x^2+11x-6,\qquad f''(x)=3x^2-12x+11\ .$$

endi kritik nuqtalarni topaylik:

$$x^3-6x^2+11x-6=x^3-x^2-5x^2+5x+6x-6=$$
$$=x^2(x-1)-5x(x-1)+6(x-1)=$$
$$=(x-1)(x^2-5x+6),\qquad x^2-5x+6=0,\ x-1=0$$

bundan, $x=1$ va

$$x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2};\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$$

bo‘ladi. Demak, kritik nuqtalar: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ bo‘ladi. Endi ikkinchi tartibli hosilaning kritik nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f''(1) = 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 11 = 2 > 0,$$
$$f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 11 = -1 < 0,$$
$$f''(3) = 3 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3 + 11 = 2 > 0.$$

Shunday qilib, ekstremumga ega bo‘lishning ikkinchi qoidasiga asosan, $x_1 = 1$, $x_3 = 3$ nuqtalarda minimum, $x_2 = 2$ nuqtada funksiya maksimumga ega bo‘ladi. $\min f(1) = 0$; $\max f(2) = 0.25$; $\min f(3) = 0$.

Funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlari. $y = f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini topish uchun:

1) kritik nuqtalarni topamiz;

2) funksiyaning bu kritik nuqtalardagi va kesmaning chetlaridagi qiymatlarini hisoblaymiz;

3) bu topilgan qiymatlardan eng kichigi funksiyaning berilgan kesmadagi eng kichik qiymati, eng kattasi bu kesmadagi eng katta qiymati bo‘ladi.

4-misol. $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ funksiyaning $[-2;3]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini toping.

Yechish. Berilgan funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz.

$y' = 4x^3 - 4x$, $4x^3 - 4x = 0$, $4x(x^2 - 1) = 0$,

bundan , $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ kritik nuqtalar bo‘ladi. Funksiyaning berilgan kesmaning chetki nuqtalaridagi hamda kritik nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + 5 = 16 - 8 + 5 = 13,$$
$$f(-1) = 4;\ f(0) = 5;\ f(1) = 4 \text{ ва } f(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^2 + 5 =$$
$$= 81 - 18 + 5 = 68.$$

Bu topilganlarni solishtirib, funksiyaning $[-2;3]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari, mos ravishda $y_{эким} = 4,\ y_{экат} = 68$ bo‘ladi.

Shuni eslatamizki, funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatini topish katta amaliy ahamiyatga ega.

5-misol. Perimetri $2p(p > 0)$ bo‘lgan to‘g’ri to‘rtburchaklar orasida eng katta yuzaga ega bo‘lgan to‘g’ri to‘rtburchak topilsin.

Yechish: Bunday to‘g’ri to‘rtburchakning asosi x bo‘lsin. Bu holda to‘g’ri to‘rtburchakning balandligi $p - x$ ga, yuzi esa,

$$S = S(x) = x(p - x),\ (0 < x < p)$$

bo‘ladi.

$S(x)$ funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz:

$S'(x) = p - 2x,\ p - 2x = 0,\quad x = \frac{p}{2}$

kritik nuqta bo‘ladi. $S''(x) = -2;\quad S''(p/2) = -2 < 0.$

Demak, $S(x)$ funksiya, $x = \frac{p}{2}$ nuqtada maksimumga ega bo‘ladi.

$$S_{\max} = \frac{p}{2}(p - \frac{p}{2}) = \frac{p^2}{4}.$$

Shunday qilib, eng katta yuzaga ega bo‘lgan to‘g’ri to‘rtburchak tomoni $\frac{p}{2}$ bo‘lgan kvadratdan iborat ekan.

Funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini hosila yordamida tekshirish.

Funksiya grafigining asimptotalari.

Ta’rif. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi (a,b) oraliqning istalgan nuqtasidan unga o‘tkazilgan urinmadan pastda yotsa, funksiya grafigi shu oraliqda *qavariq* deyiladi.

Ta’rif. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi (a,b) oraliqning istalgan nuqtasidan unga o‘tkazilgan urinmadan yuqorida yotsa, funksiya grafigi shu oraliqda *botiq* deyiladi.

Ta'rif. Funksiya grafigining qavariq qismini, botiq qismidan ajratuvchi $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqta *egilish* nuqtasi deyiladi.

Funksiya grafigining qavariq yoki botiq bo'lishining yetarli shartlari:

1) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi manfiy, ya'ni $f''(x) < 0$ bo'lsa, bu oraliqda funksiya grafigi qavariq bo'ladi;

2) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi musbat, ya'ni $f''(x) > 0$ bo'lsa, bu oraliqda funksiya grafigi botiq bo'ladi.

$f''(x) = 0$ va $f''(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarga 2-tur kritik nuqtalar deyiladi.

Egilish nuqtalari mavjud bo'lishining yetarli sharti. x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiya uchun ikkinchi tur kritik nuqta bo'lsa va $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosila bu nuqtadan o'tishda ishorasni o'zgartirsa, x_0 abssissali nuqta egilish nuqtasi bo'ladi.

Shunday qilib, funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik oraliqlarini, egilish nuqtalarini topish uchun, oldin funksiya aniqlanish sohasini ikkinchi tur kritik nuqtalar bilan oraliqlarga bo'lish va bu oraliqlarda ikkinchi tartibli hosila ishorasini tekshirish kerak. Keyin yetarli shartlardan foydalanib, qavariqlik, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalari aniqlanadi.

Funksiya grafigining asimptotalari.

Ta'rif. $y = f(x)$ funksiya grafigidagi nuqta shu grafik bo'ylab cheksiz uzoqlashganda, undan biror to'g'ri chiziqqacha masofa no'lga intilsa, bu to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining *asimptotasi* deyiladi.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ bo'lsa, $x = a$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotasi bo'ladi.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad va \quad b = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - kx \right]$$

yoki

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ va } b = \lim_{x\to-\infty} \left[f(x) - kx\right]$$

limitlar mavjud bo‘lsa, $y = kx + b$ to‘g’ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining og’ma asimptotasi bo‘ladi. $k = 0$ bo‘lsa, $y = b$ gorizantal asimptota bo‘ladi.

6-misol. Gauss egri chizig’i deb ataluvchi $y = e^{-x^2}$ funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlang.

Yechish. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$y' = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2},\ y'' = -2\left[x'e^{-x^2} + (-2xe^{-x^2})x\right] = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

Ikkinchi tartibli hosilani nolga tenglashtirib, ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz:

$$(4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0,\ e^{-x^2} \neq 0,\ 4x^2 - 2 = 0,\ x^2 = \frac{1}{2};\ x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}};\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bular ikkinchi tur kritik nuqtalar bo‘lib, sonlar o‘qini

$$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ va } (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$$

oraliqlarga ajratadi.

$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ oraliqlarda $y'' > 0$ bo‘lib, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ oraliqda $y'' < 0$ bo‘ladi.

Demak,

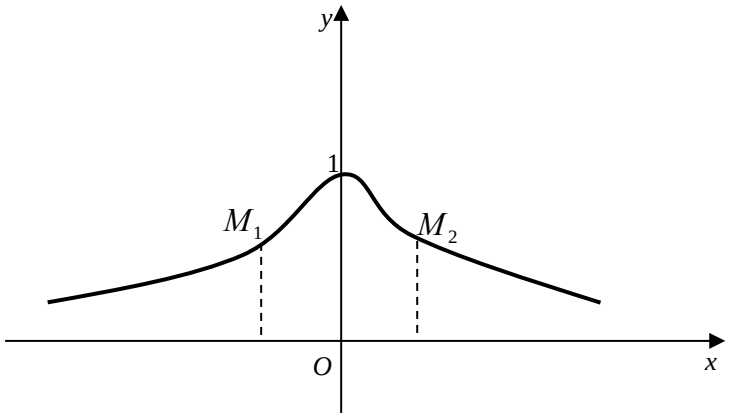
$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ va $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi botiq,

$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ oraliqda funksiya grafigi qavariq bo‘lib, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtadan o‘tishda $f''(x)$ o‘z ishorasini musbatdan manfiyga, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtadan o‘tishda manfiydan musbatga o‘zgartiradi. Bu ikkala holda ham egilish bo‘ladi:

$f_{эгл} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$; $M_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}})$. $f_{эгл}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ $M_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$

.

Yuqoridagilarga asosan funksiya grafigini yasaymiz.



3.5-chizma

6). Funksiyani tekshirishning umumiy rejasi. Funksiyani hosila yordamida tekshirishni hisobga olib, funksiyani tekshirishning quyidagi umumiy rejasini tavsiya etamiz:

1) funksiyaning aniqlanish sohasini topish hamda argumentning aniqlanish sohasi chetlariga intilganda funksiya o‘zgarishini tekshirish;

2) funksiyaning juft-toqligini tekshirish;

3) funksiyaning davriyligini aniqlash;

4) funksiyaning uzluksizligi, uzilishini tekshirish;

5) funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlash;

6) funksiyaning monotonlik oraliqlarini va ekstremumini tekshirish;

7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topish;

8) funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlash;

9) funksiya grafigining asimtotalarini tekshirish;

10) imkoniyati bo‘lsa funksiya grafigining koordinat o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlash;

11) yuqoridagi aniqlangan xususiyatlarni hisobga olib, funksiya grafigini yasash.

7-misol. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ funksiyani tekshiring.

Yechish. Funksiyani tekshirishning umumiy rejasidan foydalanamiz:

1) funksiya maxraji no‘lga aylanadigan nuqtalardan boshqa hamma nuqtalarda aniqlangan. Maxraj $x_1=-2, x_2=2$ nuqtalarda no‘lga teng, demak, funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty,-2)$, $(-2;+2)$, $(2,+\infty)$ oraliqlardan iborat. Aniqlanish oraliqlarining chetlarida funksiyaning o‘zgarishini tekshiramiz:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to-\infty}x=-\infty,\quad \lim_{x\to-2-0}\lim\frac{x^3}{x^2-4}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-2+0}\lim\frac{x^3}{x^2-4}=\infty,\quad \lim_{x\to2-0}\frac{x^3}{x^2-4}=-\infty,\quad \lim_{x\to2+0}\frac{x^3}{x^2-4}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty$$

2) $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=-\dfrac{x^3}{x^2-4}=-f(x)$

bo‘lganligi uchun toq funksiya;

3) funksiya $f(x+T)=f(x)$ tenglikni qanoatlantirmaydi, demak, davriy emas;

4) funksiya $x=\pm2$ nuqtalarda uzilishga ega;

5) kritik nuqtalarni topamiz:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-4)-x^3 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2},\quad f'(x)=0,\ x=0,\ x=\pm2\sqrt{3}.$$

.

Bundan tashqari $f'(x),\ x=\pm2$ nuqtalarda mavjud emas. Demak, kritik nuqtalar: $x_1=-2\sqrt{3},\ x_2=-2,\ x_3=0,\ x_4=2,\ x_5=2\sqrt{3}$

bo‘ladi;

6) $(-\infty,-2\sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3},-2),(-2,0)$, $(0,2),(2,2\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3},+\infty)$

oraliqlarning har birida $f'(x)$ ning ishorasini tekshiramiz;

$(-\infty,-2\sqrt{3})$ *va* $(-2\sqrt{3},+\infty)$ oraliqlarda $f'(x)$ funksiya hosilasi musbat, ya'ni funksiya bu oraliqlarda o'suvchi; $(-2\sqrt{3},-2),(-2,0),\ (0,2),(2,2\sqrt{3})$ oraliqlarda $f'(x)<0,$ ya'ni kamayuvchi $x_1=-2\sqrt{3}$ nuqtada funksiya maksimumga, $x_5=2\sqrt{3}$ nuqtada minimumga ega bo'ladi. $x=0$ kritik nuqtadan o'tishda $f'(x)$ ishorasi o'zgarmaydi, demak bu nuqtada ekstremum yo'q.

$$\max f(x)=f(-2\sqrt{3})=-3\sqrt{3};\ \min f(x)=f(2\sqrt{3})=3\sqrt{3};$$

7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz:

$$f''(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2-x^2(x^2-12)\cdot 2\cdot(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=$$

$$=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)-4x^3(x^2-12)}{(x^2-4)^3}=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}\ .$$

$$f''(x)=0,\quad 8x(x^2+12)=0,\quad x=0,\quad x=\pm 2$$

nuqtalarda ikkinchi tartibli hosila mavjud emas. Demak ikkinchi tur kritik nuqtalar

$$x_1=-2;\ \ x_2=0;\ \ x_3=2$$

bo'ladi ;

8) $(-\infty,-2),(-2,0),\ (0,2),\ (2,+\infty)$ oraliqlarda $f''(x)$ ning ishorasini tekshiramiz: $x=-3$ bo'lsin.

$$f''(-3)=\frac{8(-3)\left[(-3)^2+12\right]}{\left[(-3)^2-4\right]}=\frac{-24\cdot 21}{5^3}=-\frac{504}{125}<0,$$

xuddi shunday

$f''(-1)>0,\ \ f''(1)<0,\ \ f''(3)>0$ bo'lib, $(-\infty,-2)$ *va* $(0,2)$ oraliqlarda funksiya grafigi qavariq, $(-2,0)$ *va* $(2,+\infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi botiq bo'ladi. Ikkinchi tartibli hosila har bir ikkinchi tur kritik nuqtada ishorasini o'zgartiradi, lekin $x=\pm 2$ da funksiya uzilishga ega. Shuning uchun faqat $x=0$ nuqtada funksiya grafigi egilishga ega bo'ladi $f(0)_{эгл}=0;$

9) funksiya grafigining asimptotalarini topamiz:

$$\lim_{x\to 2\pm 0}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty\quad va\quad \lim_{x\to -2\pm 0}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty\ .$$

Demak, $x=-2,\ x=2$ funksiya grafigining vertikal asimgtotalari bo‘ladi.

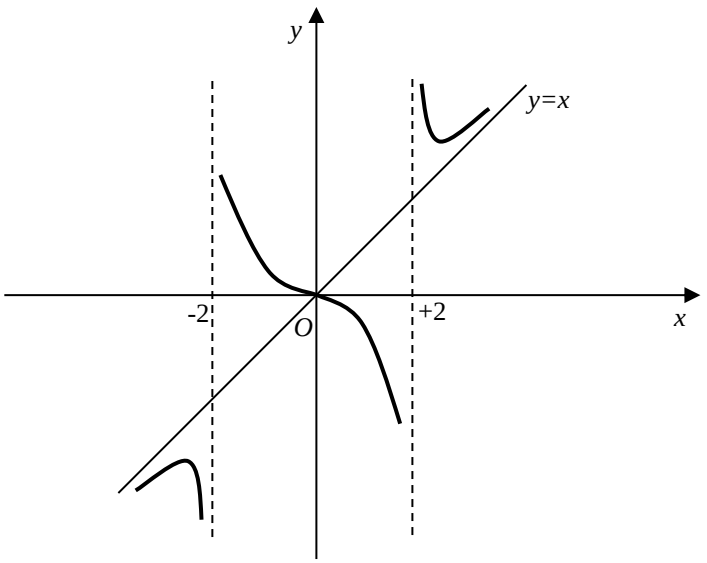
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-4)}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4/x}{1-4/x}=\frac{0}{1}=0.$$

Shunday qilib, $y=x$ og’ma asimptota bo‘ladi;

10) $x=0$ bo‘lganda $y=0$ bo‘lib, funksiya grafigi koordinatalar boshidan o‘tadi;

11) yuqoridagi tekshirishga asosan, funksiya grafigini yasaymiz. (3.6-chizma)



3.6-chizma

2. Hosila yordamida aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidasi. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda berilgan bo‘lsin.

1. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a}g(x)=0$

bo‘lsa, $x\to a$ da $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\dfrac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi.

2. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$

bo‘lsa, $x\to a$ da $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\dfrac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi.

Berilgan funksiyalar hosilalarga ega bo‘lsa, ulardan foydalanib, aniqmaslikni ochish mumkin.

Lopital qoidasi

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ bo‘lib,

$\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo‘lsa, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

$x \to \infty$ da ham Lopital qoidasi o‘rinli.

$(0\cdot\infty)$ yoki $(\infty - \infty)$ ko‘rinishdagi aniqmasliklar algebraik almashtirishlar orqali $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmasliklarga keltirilib, keyin Lopital qoidasidan foydalaniladi.

1-misol. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$ ni hisoblang.

Yechish. Bu limit $x \to 0$ da $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘lib, Lopital qoidasini qo‘llab,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{2x}$$

natijaga ega bo‘lamiz. Oxirgi limit $x \to 0$ da yana $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslik , demak, Lopital qoidasini yana qo‘llash mumkin:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{x'} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{0 - \sin x}{1} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

Shunday qilib, ketma-ket Lopital qoidasini qo‘llash bilan berilgan limitning 0 ga tengligini ko‘rsatdik.

Differensial hisobning iqtisodda qo‘llanilishi haqida.

1. *Hosilaning iqtisodiy ma’nosi haqida.* Hosilaning iqtisodiy ma’nosini quyidagi misolda qaraymiz. Biror xil mahsulot ishlab chiqarilganda ishlabchiqarish xarajatlari ishlab chiqarilgan mahsulotning miqdoriga bog’liq. Mahsulot miqdorini x bilan, *ishlab chiqarish xarajatlarini* y bilan belgilasak

$$y = f(x)$$

funksional bog'lanish kelib chiqadi. Mahsulot ishlab chiqarishni Δx ga ko'paytirilsa $x+\Delta x$ mahsulotga mos keluvchi xarajat

$$f(x+\Delta x)$$

bo'ladi. Demak, mahsulot miqdorining Δx orttirmasiga, *mahsulot ishlab chiqarish xarajatining orttirmasi*

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

mos keladi.

Ta'rif. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatga mahsulot ishlab chiqarish xarajatining o'rtacha orttirmasi deyiladi.

Ta'rif.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

ga *ishlab chiqarish limitik xarajati* deb ataladi.

Yuqoridagiga o'xshash $\varphi(x)$ bilan x mahsulotni sotishdan olingan jami savdo pul mablag'i bo'lsa, quyidagi limit

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x)$$

ga *savdo limitik pul mablag'i* deyiladi.

1-misol. Mahsulot ishlab chiqarish xarajati va mahsulot hajmi x orasida

$$y = 100x - \frac{1}{30}x^3$$

bog'lanish bo'lsin. Ishlab chiqarish hajmi, 5 birlik va 10 birlik bo'lganda limitik xarajatni toping.

Yechish. Masala shartiga asosan, $x=5,\ x=10.$ Funksional bog'lanish hosilasi

$$y' = 100 - \frac{1}{10}x^2$$

bo'lib,

$$f'(5) = 100 - \frac{1}{10}5^2 = 97.5, \quad f'(10) = 90$$

bo'ladi.

Bularning iqtisodiy ma’nosi, mahsulot ishlab chiqarish hajmi 5 birlik bo‘lganda, mahsulot ishlab chiqarish xarajati kelgusi mahsulotni ishlab chiqarishga o‘tishda 97,5 ni tashkil etadi; ishlab chiqarish hajmi 10 birlik bo‘lganda, esa u 90 ni tashkil etadi.

Ayrim iqtisodiy tushunchalarning ta’riflari .

Ta’rif. Tovar va xizmatlarning ma’lum turiga, iste’molchining ma’lum vaqtda, narxlarning mavjud darajasida, sotib olishga qodir bo‘lgan ehtiyoji talab deyiladi.

Talab miqdorining o‘zgarishiga bir qancha omillar ta’sir qiladi. Ularning ichida eng ko‘p ta’sir qiladigan omil narx omilidir.

2-misol. Biror mahsulotga talab va mahsulot narxi orasida bog’lanish

$$p = 20 - 3x$$

formula bilan ifodalansin, bunda x mahsulotga talab, p mahsulotning narxi.

Mahsulotni sotishdan olingan savdo puli

$U = xp$ ёки $U = x(20-3x) = 20x - 3x^2$

bo‘ladi. Bundan hosila

$U' = 20 - 6x$

bo‘ladi. $x = 2$ bo‘lsa, $U'(2) = 8$. Buning ma’nosi, talab 2 dan 3 birlikka ortsa, savdo puli 8 birlikka oshishini bildiradi.

Funksiyaning egiluvchanligi (elastikligi). Hosila yordamida erkli o‘zgaruvchi (argument) orttirmasiga mos erksiz o‘zgaruvchi (funksiya) orttirmasini hisoblash mumkin. Ko‘p iqtisodiy masalalarni hal etishda *nisbiy orttirma***,** ya’ni argumentning o‘sish foiziga mos, funksiyaning o‘sish foizini hisoblashga to‘g’ri keladi. Bu funksiyaning egiluvchanligi yoki nisbiy hosila tushunchasiga olib keladi.

Ta’rif. $\frac{\Delta x}{x}, \frac{\Delta y}{y}$ nisbatlarga, mos ravishda, argument va *funksiya nisbiy orttirmalari* deyiladi. Funksiya nisbiy orttirmasining argument nisbiy orttirmasiga nisbati

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}$$

ni qaraymiz. Bu nisbatni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y} \qquad (1)$$

$y=f(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo‘lsa,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}=\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} \qquad (2)$$

kelib chiqadi.

Ta’rif. (2) munosabatga $y=f(x)$ *funksiyaning* x *ga nisbatan egiluvchanligi deyiladi*, va $E_x(y)$ bilan belgilanadi. Ta’rifga asosan:

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

bo‘ladi.

x ga nisbatan egiluvchanlik argumentning orttirmasi 1% ga oshganda unga mos funksiya orttirmasining foizlarda hisoblangan o‘sishi (yoki kamayishi)ni taqriban ifodalaydi.

Funksiya egiluvchanligini topishga bir necha misollar qaraymiz.

3-misol. $y=3x-6$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish Egiluvchanlik ta’rifiga asosan:

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{x}{3x-6}\cdot 3=\frac{3x}{3x-6}=\frac{x}{x-2}.$$

Masalan, $x=10$ bo‘lsa, funksiya egiluvchanligi

$$\frac{10}{10-2}=\frac{5}{4}$$

bo‘ladi, ya’ni x 1% oshganda, y $\frac{5}{4}$% ga oshadi.

4-misol. $y=1+6x^2-4x^3$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish. Ta’rifga asosan:

$$E_x(y)=\frac{x}{1+6x^2-4x^3}(12x-12x^2)=\frac{12x^2-12x^3}{1+6x^2-4x^3}$$

Masalan, $x=1$ bo‘lganda, $\frac{(12-12)}{7}=0.$ Bu argument 1% ga ya’ni 1 dan 1,01 ga oshganda, funksiya qiymati taqriban o‘zgarmaydi.

Endi funksiya egiluvchanligini hisoblashda qo‘llaniladigan ayrim qoidalarni eslatamiz.

Teorema. Ikkita funksiya ko‘patmasining egiluvchanligi shu funksiyalar egiluvchanliklari yig’indisiga teng.

Isbot. Ikkita funksiya ko‘paytmasining hosilasi formulasiga asosan.

$$E_x(u\cdot v)=\frac{x}{uv}(u\cdot v)'=\frac{x}{uv}(u'v+uv')=$$

$$=\frac{x}{u}u'+\frac{x}{v}v'=E_x(u)+E_x(v),\ \textit{яъни}\ \ E_x(u\cdot v)=E_x(u)+E_x(v). \qquad (3)$$

Bu teoremaning isbotidir.

5-misol. $y=x^2\cdot e^{2x}$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish. $u=x^2,\ v=e^{2x}$ ni olish mumkin. Demak, (3) formulaga asosan:

$$E_x(y)=\frac{x}{x^2}(x^2)'+\frac{x}{e^{2x}}(e^{2x})'=2+2x,\ E_x=(y)=2(1+x)$$

bo‘ladi.

Teorema. Ikkita funksiya nisbatining egiluvchanligi bo‘linuvchi va bo‘luvchi egiluvchanliklarining ayirmasiga teng, ya’ni

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v) \qquad (4)$$

bo‘ladi (bu tasdiqning isbotini o‘quvchiga havola etamiz).

6-misol. $y=\dfrac{x^3+5}{e^{3x}}$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish. $u=x^3+5,\ \ v=e^{3x}$ ekanligini hisobga olib (4) formulaga asosan:

$$E_x(y)=E_x(x^3+5)-E_x(e^{3x})=\frac{x}{x^3+5}\cdot 3x^2-\frac{x}{e^{3x}}\cdot 3e^{3x}=\frac{3x^3}{x^3+5}-3x,\ \textit{yani}$$

$$E_x(y)=\frac{3x^3}{x^3+5}-3x$$

bo‘ladi.

Talab va taklif egiluvchanligi. Aniq bir mahsulotga talab va uning narxi orasidagi funksional bog'liqlikni (boshqa tovar narxi, inste'molchining daromadi va ehtiyoji o'zgarmas bo'lgan shartlarda) talabga mos narxni aniqlash mumkin. Lekin ko'p iqtisodiy tekshirishlarda talabning miqdori emas, mahsulot narxining o'zgarishi bilan unga talabning qanday o'zgarishi muhimdir. Boshqacha aytganda, talabning narxga nisbatan egiluvchanligini hisoblash katta ahamiyatga ega.

Talab y, narx x ning funksiyasi bo'lsin, ya'ni

$$y = f(x).$$

Δx narx orttirmasi, Δy unga mos talab orttirmasi bo'lsa, narxning nisbiy o'zgarishi $\Delta x / x$, talabning nisbiy o'zgarishi $\Delta y / y$ bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}$$

nisbat narx 1% oshganda unga mos talabni nisbiy o'zgarishi, ya'ni *talabning narxga nisbatan egiluvchanligi* qo'yidagi limitga teng:

$$E_x(y) = E_T = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) \qquad (5)$$

Demak, $E_T = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Shunday qilib, *talabning narxga nisbatan egiluvchanligi*, narx 1% ga oshganda, biror tovarga bo'lgan talabning qanday o'zgarishini taqriban ifodalaydi.

Ma'lumki, talab funksiyasi narxga nisbatan kamayuvchi funksiyadir, ya'ni $\frac{dy}{dx} < 0$ bo'ladi. Shuning uchun amalda manfiy sonlarni ishlatmaslik uchun

$$E_T = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}. \qquad (6)$$

qilib olinadi.

$E_T > 1$ bo'lsa, narxning 1%ga o'sishi, talabning taxminan 1% dan ko'p pasayishini ifodalaydi va talab egiluvchan deyiladi.

$E_T = 1$ bo‘lsa, narxning 1% ga o‘sishi, talabning taxminan 1% ga pasayishini bildirib, talab neytral deyiladi.

$0 < E_T < 1$ bo‘lsa, narxning 1% ortishi unga mos talabning 1% dan kam bo‘lishini ifodalab, talab egiluvchan emas deyiladi.

7-misol. Talab funksiyasi $y = 10 - x$ bo‘lsa uning egiluvchanligini toping.

Yechish. (6) formulaga asosan:

$$E_T = -\frac{x}{y}y' = -\frac{x}{10-x}(-1) = \frac{x}{10-x} \qquad x = 2 \ bo'lsa, \quad E_T = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

bo‘ladi. Buning ma’nosi narx 2 bo‘lganda uni 1% orttirish, talabning $\left(\frac{1}{4}\right)\%$ ga kamayishini ko‘rsatadi.

Talabning daromad (kirim, unum, tushum)ga nisbatan elastikligini qaraymiz. x iste’molchining daromadi bo‘lsin. Talab funksiyasi y desak,

$$y = f(x)$$

bog’lanish kelib chiqadi. Bunda *daromadga nisbatan egiluvchanlik*

$$E_d(y) = \frac{x}{y}y'$$

bo‘ladi.

8-misol. Tadbirkor biror mahsulotga talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi 0,2 ekanligini bilgan holda, uning narxini 10% oshirmoqchi bo‘lsa uning oladigan daromadini hisoblang?

Yechish. Talabning egiluvchanligi 0,2 bo‘lganligi uchun unga talab 2% ga kamayadi. Natijada tadbirkorning daromadi 8% tashkil etadi.

Taklif deganda biror mahsulotning vaqt birligida sotishga chiqarilgan hajmini tushuniladi. Ma’lumki, biror mahsulotning taklifi biror davrda, narxning o‘suvchi funksiyasidir. Taklif funksiyasining ham egiluvchanligini talab egiluvchanligiga o‘xshash topish mumkin.

$$y = f(x)$$

taklif funksiyasi bo‘lsin bunda x narx, y taklif funksiyasi, demak

$$E_x(y) = \frac{x}{y} y'$$

bo‘ladi. ***Taklif funksiyasining egiluvchanligi*** *narx 1% ga oshganda* taklif funksiyasining foizlarda o‘sishini taxminan ifodalaydi.

*To‘la va o‘rtacha xarajatlar egiluvchanligi***.** Korxona biror mahsulotdan x birlik miqdorda ishlab chiqarsa va $k(x)$ to‘la xarajat funksiyasi aniqlangan bo‘lsa, to‘la xarajat egiluvchanligi

$$E_x(K) = E_k = \frac{x}{K} \cdot \frac{dK}{dx} = \frac{dK}{dx} : \frac{K}{x}, \qquad (7)$$

bo‘ladi, demak, *to‘la xarajat egiluvchanligi limitik xarajatning* o‘rtacha xarajatga nisbatini ifodalaydi..

O‘rtacha xarajat $\Pi = \frac{K}{x}$ bo‘lsa, uning egiluvchanligi,

$$E_x(\Pi) = \frac{x}{\Pi} \cdot \frac{d\Pi}{dx} = \frac{x}{K/x} \cdot \frac{x(dK/dx) - K}{x^2} = \frac{x^2}{K} \cdot \frac{xdK/dx - K}{x^2} =$$

$$= \frac{x}{K} \cdot \frac{dK}{dx} - 1 = E_x(K) - 1, \qquad (8)$$

bo‘ladi, demak, o‘rtacha xarajat egiluvchanligi to‘la xarajat egiluvchanligidan 1 ga kam ekan.

$E_T = 1$ bo‘lsa, o‘rtacha xarajat egiluvchanligi 0 ga teng, ya’ni $E_x(\Pi) = 0$ bo‘lib, o‘rtacha xarajat o‘zgarmasligini bildiradi. Bundan

$$x\frac{dk}{dx} - K = 0 \quad yoki \quad \frac{dK}{dx} = \frac{K}{x} \ . \qquad (9)$$

Shunday qilib, *to‘la xarajat egiluvchanligi* 1 ga teng bo‘lsa, to‘la limitik xarajat o‘rtacha xarajatga teng bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Funksiya differensiali, ikkinchi tartibli differensial, differensial yordamida taqribiy hisoblash, cheksiz kichik funksiya, funksiya orttirmasi uchun formula. Ferma teoremasi, Roll teoremasi, Lagranj teoremasi, Chekli orttirmalar formulasi, Teylor va Makloren formulalari, qoldiq had formulasi. Funksiya dinamikasi, funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik qismlari, egilish nuqtasi, funksiyani tekshirish, asiptota, Lopital qoidasi, ishlab chiqarish xarajatlari,

mahsulot ishlab chiqarish orttirmasi, ishlab chiqarish xarajatlari orttirmasi, ishlab chiqarish xarajati o‘rtacha orttirmasi, ishlab chiqarish limitik xarajati, savdo limitik pul mablag’i, funksiya egiluvchanligi, argument va funksiyaning nisbiy orttirmalari, nisbiy hosila, nisbiy egiluvchanlik, ikkita funksiya ko‘paytmasi va nisbati egiluvchanliklari, talabning narxga nisbtan egiluvchanligi, talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi, taklifning narxga nisbatan egiluvchanligi, to‘la va o‘rtacha xarajatlar egiluvchanliklari.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning differensiali deb nimaga aytiladi?
2. Funksiya orttirmasi va differensiali o‘rtasida qanday bog’liqlik bor?
3. Differensialdan fodalanib taqribiy hisoblash mumkinmi?
4. Ikkinchi tartibli differensial nima?
5. Hisoblash xatosi nima?
6. Ferma teoremasining shartlari nimalardan iborat?
7. Ferma teoremasi tasdiqi qanday bo‘ladi?
8. Roll teoremasining nechta sharti bor va ularni sanang?
9. Roll teoremasi shartlarida, uning tasdiqi nimadan iborat?
10. Geometrik tomondan Roll teoremasining tasdiqi nimani ifodalaydi?
11. Ferma teoremasi geometrik nuqtai nazardan nimani anglatadi?
12. Lagranj teoremasi shartlarini sanab ko‘ring, ular nimalardan iborat?
13. Lagranj teoremasining tasdiqi nima?
14. Lagranj teoremasi tasdiqi geometrik tomondan nimani bildiradi?
15. Lagranj yoki chekli orttirmalar formulasini yozing?
16. Chekli orttirmalar deyilishini tushinasizmi?
17. Teylor formulasi nimadan iborat?
18. Makloren formulasi qanday olinadi?
19. Funksiyaning monotonligi nima?
20. Funksiyaning ekstremumi nima?

21. Funksiya ekstremumga ega bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlari nimalardan iborat?

22. Hosila yordamida ekstremumni tekshirishning ikkinchi qoidasi qanday?

23. Funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik qismlari va uning egilish nuqtasi hosila yordamida qanday aniqlanadi?

24. Funksiya grafigining asimptotalari qanday topiladi?

25. Funksiyani umumiy tekshirish nimalardan iborat?

26. Aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi nimadan iborat?

27. Funksiya hosilasini bilgan holda funksional bog’lanish haqida nima deyish mumkin?

28. Ishlab chiqarish xarajatlari, ishlab chiqarilgan mahsulot miqdoriga bog’liqmi?

29. Ishlab chiqarish xarajatlari o‘rtacha orttirmasi deb nimaga aytiladi?

30. Ishlab chiqarishning limitik xarajati qanday aniqlanadi?

31. Jami savdoning pul mablag’i nima?

32. Savdoning limitik pul mablag’i qanday aniqlanadi?

33. Biror mahsulotga talab va uning narxi orasida bog’lanish bormi?

34. Nisbiy orttirma nima?

35. Funksiyaning egiluvchanligi qanday aniqlanadi?

36. Funksiya egiluvchanligi $E_x(y)$ nimaga teng?

37. Argument x ga nisbatan funksiya y ning egiluvchanligi foizlarda nimani ifodalaydi?

38. Ikkita funksiya ko‘paytmasining egiluvchanligi nimaga teng?

39. Ikkita funksiya nisbatining egiluvchanligi qanday aniqlanadi?

40. Talabning narxga nisbtan egiluvchanligi nimani ifodalaydi.

41. Talabning narxga nisbatan egiluvchanligi $E_x(y)$ qanday topiladi?

42. Talab egiluvchan degani nima?

43. Talab neytral degani nimani ifodalaydi?

44. Talab egiluvchan emas deb nimaga aytiladi?

45. Talab daromadga bog’liqmi?

46. Talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi qanday hisoblanadi?

47. Taklif nima?

48. Taklif va narx orasida bog'lanish bormi?

49. Taklifning narxga nisbatan egiluvchanligi $E_x(y)$ qanday aniqlanadi.

50. Taklif funksiyasining egiluvchanligi nimani ifodalaydi?

51. To'la xarajatlarning mahsulot hajmiga nisbatan egiluvchanligi $E_x(K)$qanday aniqlanadi?

52. O'rtacha xarajt egiluvchanligi $E_x(\Pi)$ qanday aniqlanadi?

53. To'la xarajat egiluvchanligining 1 ga teng bo'lishi nimani ifodalaydi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1-8 misollarda funksiyalarning differensiallari topilsin.

1. 1) $y = x^n$; 2) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$.

2. 1) $y = \sqrt{1+x^2}$; 2) $s = \frac{gt^2}{2}$.

3. 1) $r = 2\varphi - \sin 2\varphi$; 2) $x = \frac{1}{t^2}$.

4. 1) $d(\sin^2 t)$; 2) $d(1-\cos u)$.

5. 1) $d\left(\frac{a}{x} + arctg\frac{x}{a}\right)$; 2) $d(\alpha + \ln\alpha)$;

6. 1) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; 2) $r = \sin(a - b\varphi)$; 3) $s = \sqrt{1-t^2}$.

7. 1) $y = \ln\cos x$; 2) $z = arctg\sqrt{4u-1}$; 2) $s = e^{-2t}$.

8. 1) $d(\sqrt{x}+1)$; 2) $d(tg\alpha - \alpha)$; 3) $d(bt - e^{-bt})$.

9. Ushbu $f(x) = \sin x$ funksiya uchun $[0; 2\pi]$ segmentda Roll teoremasining shartlari bajariladimi?

10.Ushbu $f(x)=e^x$, $g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ funksiyalar $[0;\,2\pi]$ segmentda Koshi teoremasining shartlarini kanoatlantiradimi?

11.Ushbu $f(x)=x(x^2-1)$ funksiya uchun $[0;\,2\pi]$ va $[0,1]$ segmentlarda Roll teoremasining shartlarini tekshiring.

12. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{агар} \quad x\neq 0 \quad \text{булса} \\ 0, & \text{агар} \quad x=0 \quad \text{булса} \end{cases}$ funksiya uchun [-1; 1] oralikda Lagranj teoremasi o‘rinlimi?

13. $f(x)=x^2-4x+3$ funksiya ildizlari orasida uning xosilasining xam ildizi bor ekani tekshirilsin.

14.Roll teoremasini $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ funksiyaga [-1; 1] segmentda tatbiq qilish mumkinmi?

15. $y=x^2$ parabolaning qaysi nuqtasida o‘tkazilgan urinma $A(-1;1)$ va $B(3;9)$ nuktalarni birlashtiruvchi vatarga parallel bo‘ladi?

16. $[a,b]$ segmentda $f(x)=x^2$ funksiya uchun Lagranj formulasi yozilsin va *s* topilsin. Grafik usul bilan tushuntirlsin.

17.$[1;4]$ segmentda $f(x)=\sqrt{x}$ funksiya uchun Lagranj formulasi yozilsin va *s* topilsin.

18. $f(x)=x^3$ va $g(x)=x^2$ funksiyalar uchun Koshining $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ formula yozilsin hamda *s* topilsin.

19. $f(x)=x^3$ funksiya uchun Lagranjning $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ formulasi yozilsin va *s* topilsin.

1. Quyidagi funksiyalarning o‘sishi va kamayishi oraliqlari tekshirilsin.

1) $y=x^2$;
2) $y=x^3$;
3) $y=\dfrac{1}{x}$;
4) $y=\ln x$;
5) $y=tg\,x$;
6) $y=e^x$;
7) $y=4x-x^2$;
8) $y=4x+x^3$

2. Quyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin va ularning grafiklari yasalsin.

1) $y = x^2 + 4x + 5;$

2) $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x;$

3) $y = \frac{x^4}{4} - x^3;$

4) $y = \sqrt[3]{x^2} - 1;$

5) $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4};$

6) $y = 4x - \frac{x^3}{3};$

7) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x};$

8) $y = \frac{1}{1 + x^2}$

9) $y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3};$

10) $y = x^2(1 - x);$

11) $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^2};$

12) $y = 4x - tg\, x \quad \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ oralikda

13) $y = xe^{-\frac{x}{2}};$

14) $y = x \ln x.$

3. Quyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin va jadvallari tuzilsin.

1. $y = 4x - x^2;$

2. $y = x^2 + 2x + 3;$

3. $y = \frac{x^3}{3} + x^2;$

4. $y = \frac{x^2}{x - 2}$

5. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2;$

6. $y = x^3 + 6x^2 + 9x;$

7. $y = x^3 + \frac{x^4}{4};$

8. $y = x - 2 \ln x;$

9. $y = \sin 2x - x, \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ oralikda.

10) $y = 4x - x^3$

4. Quyidagi funksiyalarning qavariqlik va botiqlik oraliqlarini toping:

1) $f(x) = x^\alpha, \ \alpha > 1, \ x > 0;$

2) $f(x) = e^x;$

3) $f(x) = \ln x;$

4) $f(x)=x^5-10x^2+3x$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$;

6) $y=x^5+5x-6$;

7) $y=(x-4)^5+4x+4$;

8) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$;

9) $y=2+\dfrac{12}{x^2-4}$.

5. Quyidagi funksiyalar grafiklarining egilish nuqtalarini toping:

1) $y=x^5+5x-6$;

2) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$;

3) $y=xe^{1-x}$;

4) $y=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$;

5) $y=\cos x$;

6) $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$.

6. Quyidagi funksiyalarning asimptotalarini toping.

1) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$;

2) $y=\dfrac{x^2}{x-2}$;

3) $y=x-\ln x$;

4) $y=\dfrac{e^x}{x}$;

5) $y=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}+2x$.

7. Quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang:

1) $y=3x-x^3$;

2) $y=-x^3+4x-3$;

3) $y=-4x+x^3$;

4) $y = x^5 - \frac{5}{3}x^3$;

5) $y = x(x-1)^3$.

8. Quyidagi limitlar Lopital qoidasiga asosan topilsin.

.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$	10.	$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$
.	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{x^n-a^n}$	11.	$\lim\limits_{x\to 0} x^x$
.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$	12.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$
.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}$	13.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$
.	$\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)tg\frac{x}{2}$	14.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-7x^2+4x+}{x^3-5x+4}$
.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}$	15.	$\lim\limits_{x\to 0} tg\,x\cdot\ln x$
.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot ctg\,x-1}{x^2}$	16.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$
.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x-\sin x}{x-\sin x}$	17.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$
.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$	18.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

9. To‘la xarajatlar chizig’i tenglamasi $K = 6\lg(1+3x)$ bo‘lsa, limitik xarajat chizig’i tenglamasini yozing?

10. $E_x(f(x))$ $f(x)$ funksiyaning egiluvchanligi bo‘lsa, $xf(x)$ funksiya egiluvchanligi $E_x(f(x))+1$ bo‘lishini isbotlang.

11. $y = x^3 - 1$ funksiya egiluvchanligini hisoblang. $x = 1$ *ва* $x = 5$ bo‘lganda egiluvchanligi ko‘rsatkichini toping.

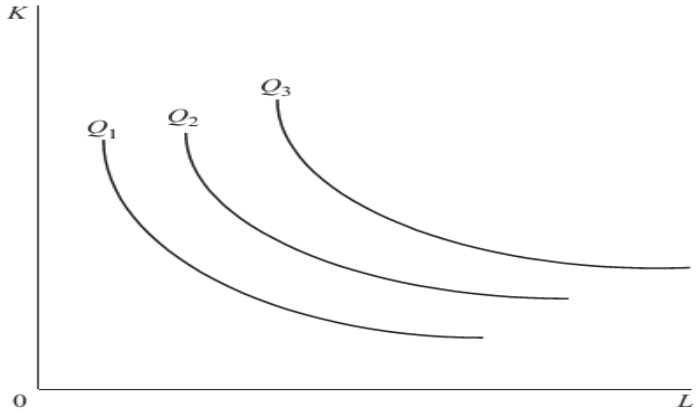
12. $y = e^{6x}$ funksiya egiluvchanligini toping?

$x = 1,\ x = 0,\ x = 2$ bo‘lganda egiluvchanlik ko‘rsatkichini toping?

3.6 -§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya differensiali. Xususiy hosila va yuqori tartibli differensiallar

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar. Karrali va takroriy limitlar

Ikki o’lchovli tekislikda bittadan ortiq oz’garuvchili funksiyani tasvirlay olmaymiz, chunki bunga ikki o’qdan ko’progi kerak (ikkita erkli o’zgaruvchi va bitta ularga bog’liq o’zgaruvchi). Lekin iqtisodiyotda bizga ikki va undan ko’p o’zgaruvchilardan foydalaniladi. Agar erkli o’zgaruvchilar birdan ortiq bo’lsa, ularni tasvirlash ham murakkab (matematik analizdan foydalanish kerak). Lekin ikki o’zgaruvchili bo’lsa ‘kontur chiziq’lardan foydalanib tasvirlasa bo’ladi. $Q = f(K,L)$ ishlab chiqarish funksiyasini qaraymiz.



3.1 -jadval

K	L	$K^{0.5}$	$L^{0.5}$	Q
64	4	8	2	320
16	16	4	4	320
4	64	2	8	320
256	1	16	1	320
1	256	1	16	320

Faraz qilaylik, Q funksiya K va L ga bog’liq bo’lsin. Iqtisodiyotda maxsulot ishlab chiqarishning ‘o’sishi’ geografiya fanidagi kontur chiziqlardan foydalanish orqali tasvirlanadi. Kartada baland cho’qqilar to’q kontur chiziqlar bilan tasvirlangan. Ishlab

chiqarish nazariyasida kontur chiziq bu *Q* bir xil qiymat qabul qiladigan turli *K* va *L* larni birlashtiruvchi chiziq. Bu chiziq Natijaviy foydalanilganda ‘izokvanta’ chizig’i deyiladi. 4.18 - rasmda ‘izokvanta kartasi’ tasvirlangan. Izokvantalar xom ashyo ishlab chiqarishiga bog’liq. Izokvantalar bir biridan uzoq bo’lsa, ishlab chiqarish rivojlanish sekinlashadi va izokvantalar bir biriga yaqin bo’lsa rivojlanish tezlashadi. Izokvantani joylashishini ishlab chiqarish funksiasidan bilsa bo’ladi. Ba’zi masalalarda faqat grafik orqali ham aniqlasa bo’ladi. *K* va *L* ning kombinasiyasida *Q* funksiyaning qiymati 320 bo’lsia, ishlab chiqarish funksiyasi $Q = 20K^{0,5}L^{0,5}$ 4.7-jadvalda ko’rsatilgan. Hususiy holda simmetrik chiziq “To’g’ri burchakli giperbola” xosil bo’ladi. Izokvantani shaklini aniqlashning eng oson yoli ikki o’zgaruvchili funksiyaga almashtirishdir.

Misol. Ishlab chiqarish funktsiyasi $Q = 20K^{0,5}L^{0,5}$ uchun $Q = 100$ da ikki o’zgaruvchili funksiya $K = f(L)$ izokvantini aniqlang?

Yechish. $20K^{0,5}L^{0,5} = Q = 100$ shunday qilib $K^{0,5}L^{0,5} = 5$ $K^{0,5} = \frac{5}{L^{0,5}}$ har ikki tomonni kvadratga ko’tarib izlanayotgan funksiyani topamiz $K = \frac{25}{L} = 25L^{-1}$

Bo’lim 4.7 dan bilamiz *K* ning qiymati nolga yaqinlashganda *L* ning qiymati o’sadi va funksiya qavariq ko’rinishda bo’lib, egri chiziqni beradi

Iqtisodiyot kursida byudjet cheklashlar , ishlab chiqarish funksiyalari va izokvant kartasidan foydalanib, kompaniya uchun eng ma’qul usullarni topamiz. Bu tushunchalarga 8 va 11 bo’limda qaytamiz. Optimal masalalarni xisoblashda matematik yechimlardan foydalanamiz.[1]

$X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots x_n \in A_n\}$, $A_i \subset R$, $i = \overline{1,n}$ va $Y \subset R$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

Ta'rif. *Agar biror f - qoida va qonunga ko‘ra* X *to‘plamning har bir* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *elementiga Y to‘plamning aniq bir* y *qiymati mos*

[1] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

qo‘yilsa, ko‘p o‘zgaruvchili (n-o‘zgaruvchili) $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *funksiya berilgan deyiladi.*

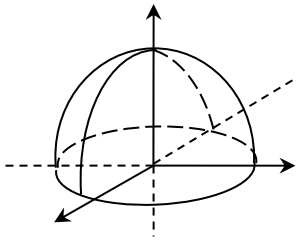
Masalan, $f(x,y) = x^2 + y^2$ - ikki o'zgaruvchili, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ esa *n* o‘zgaruvchili funksiyaga misol bo‘ladi.

X to‘plam *f* funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va D(*f*) kabi, Y to‘plam esa qiymatlari yoki o’zgarish sohasi deyiladi va E(*f*) kabi belgilanadi.

1 misol. $Z = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D(z) = \{(x_1; x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le R^2\}$ to‘plamdan iborat.

Bu to‘plam markazi koordinata boshida, radiusi R $(R > 0)$ bo‘lgan doiradir.



Iqtisodda uchraydigan asosiy tushunchalardan biri, bu foydalilik funksiyasidir. Ko‘p o‘zgaruvchili foydalilik funksiyasiga misol tariqasida quyidagini funksiyani keltirish mumkin: $Z = \sum_{i=1}^{n} a_i \ell n(x_i - c_i)$, bu yerda $a_i > 0 \; va \; x_i > c_i \ge 0$. Funksiyaning aniqlanish sohasi $D(Z) = \{x : \; x_i > c_i, \; i = 1, n\}$ to’plamdan iborat. Bu funksiya o‘zgarmas egiluvchanlik funksiyasi deyiladi.

$Z = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}$. Bu funksiya Kobba-Duglas funksiyasi deyiladi. Bu yerda x_1 - mehnat xarajatlari, x_2 - ishlab chiqarish fondlari hajmini bildiruvchi o‘zgaruvchilardir.

$b_0, b_1 \; в a \; b_2$ ishlab chiqarish texnologiyasi orqali aniqlanadigan parametrlardir.

$Z = a_0 \left(a_1 x_1^{-\beta} + a_2 x_2^{-\beta}\right)^{-\frac{h}{\beta}}$. Bu funksiya almashtirishning o‘zgarmas egiluvchanlik funksiyasi deyiladi.

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ va $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$ bo‘lsin. Bu nuqtalar orasidagi masofa $d(x,y)$ deb quyidagi tenglik orqali aniqlangan songa aytilishini eslatib o‘tamiz.

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

***Ta'rif**. Markazi* $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *nuqtada, radiusi* $R>0$ *ga teng ochiq shar* $-S(x,R)$ *deb, quyidagi to'plamga aytiladi.*

$$S(x,R)=\{y: d(x,y)<R\}$$

Izoh. $\varepsilon>0$ son uchun $S(x,\varepsilon)$ - x nuqtaning, «ε -atrofi» ham deyiladi. $\bar{S}(x,R)=\{y: d(x,y)\le R\}$ to'plam esa yopiq shar deyiladi.

***Ta'rif**. Agar* $\lim\limits_{d(x,x_0)\to 0} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a$ *tenglik o'rinli bo'lsa, u holda* a *son* $Z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *funksiyaning,* $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *nuqta* $x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$ *ga intilgandagi limiti deyiladi. Bu hol quyidagicha yoziladi*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a$$

1- misol.

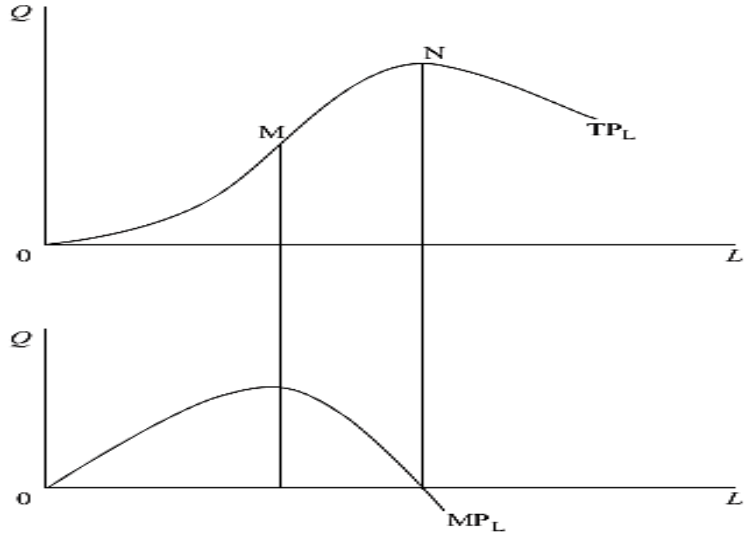
$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\frac{x_1^2+x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}-1}=\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\frac{\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}+1\right)}{x_1^2+x_2^2+1-1}=\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}+1\right)=2.$$

Xususiy hosilalar

Ikki L va K erkli o'zgaruvchili $Q=f(K,L)$ ishlab chiqarish funktsiyasining o'zgarishida bir o'zgaruvchi o'ssa boshqasi o'zgarmas bo'ladi. Agar K o'zgarmasdan L o'ssa, u holda umumiy mahsulot ishlab chiqarish uchun mehnatga taqsimot (TP_L) o'zgarishini kuzatamiz (TP_L xuddi Q ishlab chiqarish elementi kabi). Bu qoida, rasmdagi shakl ko'rinishida bo'ladi. Mikroekonomikada L(MP_L) marjinal mahsulot, L ning bir birlik orttirmasi, K ning biror berilgan qiymati shartida aniqlanadi. Yana ham aniqroq ta'rif, bu MP_L L bo'yicha TP_L ning o'zgarish tezligidir . Shunday qilib 10.1- rasmda M nuqtada MP_L taklif funktsiya o'zining maksimumiga erishadi va TP_L funktsiya o'zining maksimumiga N nuqtada erishsa, u holda MP_L taklif funktsiya nolga teng bo'ladi.

Xususiy hosilani hisoblash, bu funktsiya, bir o'zgaruvchi bo'yicha o'zgarganda, boshqa argumentlari o'zgarmasdan qolganda, funktsiyaning o'zgaruvchan argument bo'yicha tezligini topish usulidir. Shuning uchun, $Q=f(K,L)$ ishlab chiqarish funktsiyasining L bo'yicha xususiy hosilasi hisoblanganda, K ni o'zgarmas deb, umumiy

mahsulotdagi L ning o'zgarish tezligini hosil qilamiz, boshqacha aytganda *MPL*.



Xususiy hosilaning asosiy qoidasi, funktsiyadan bir o'zgaruvchi bo'yicha hosila olinsa, boshqalari o'zgarmas deb hisoblanadi. ∂ belgi xususiy hosilalarda, 'd' belgisi esa bir o'zgaruvchili funktsiyalardan olingan hosilalarda qo'llaniladi. Masalan, Q ishlab chiqarish funktsiyasidan L bo'yicha olingan xususiy hosila quyidagicha $\partial Q/\partial L$ yoziladi.

Misol. Agar $y = 14x + 3z^2$ bo'lsa, bu funktsiyadan x va z bo'yicha hususiy hosilalarni toping.

Yechish. y dan x bo'yicha olingan xususiy hosila $\frac{\partial y}{\partial x} = 14$

($3z^2$ o'zgarmas deb olinadi va faqat x bo'yicha differentsiallanadi). Shu kabi, y dan z bo'yicha olingan xususiy hosila

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 6z$$

($14x$ o'zgarmas hisoblanib yo'qoladi. $3z^2$ ifoda faqat z bo'yicha differentsiallanadi).

Misol. Ishlab chiqarish funktsiyasi uchun $Q = 20K^{0.5}L^{0.5}$

1) Funktsiyani keltirib chiqaring;
2) MP_L ning kamayishini ko'rsating.

Yechish.

1) Ishlab chiqarish $Q = 20K^{0.5}L^{0.5}$ funktsiyasidan, L bo'yicha xususiy hosila olib MP_L ni topamiz. Demak

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 10K^{0.5}L^{-0.5} = \frac{10K^{0.5}}{L^{0.5}}$$

MP_L funktsiyaga e'tibor bersak, bu funktsiya 10.1 rasmdagi funktsiyadan farq qilib, uzluksiz pastga qarab ketadi.

2) Agar MP_L funktsiyani maxraji va suratini $2L^{0.5}$ga ko'paytirsak, quyidagini hosil qilamiz

$$MP_L = \left(\frac{2L^{0.5}}{2L^{0.5}}\right)\left(\frac{10K^{0.5}}{L^{0.5}}\right) = \frac{20K^{0,5}L^{0.5}}{2L} = \frac{Q}{2L} \qquad (1)$$

K va L larning kombinatsiyasi bitta chiqish signalini beradi. Demak, agar Q o'zgarmas qolib, L o'ssa, u holda (1) funktsiya kamayadi.

Endi biz Kobba-Duglas funktsiyasini $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$ formatda, ixtiyoriy $0 < \alpha, \beta < 1$ larda, limitik ishlab chiqarish kamaюovchi ekanligini ko'ramiz. Agar K fiksirlangan bo'lib, L o'zgaruvchi miqdor bo'lsa, limitik mahsulot L xususiy hosila yordamida topiladi. Demak

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = \beta AK^{\alpha}L^{\beta-1} = \frac{\beta AK^{\alpha}}{L^{1-\beta}}$$

Agar K o'zgarmas deb olinsa, shuningdek α, β, A berilgan bo'lsa, βAK^{α} surat ham o'zgarmas bo'lib qoladi. Maxrajdagi L o'ssa, $L^{1-\beta}$ ham kattalashadi va funktsiya MP_L kamayadi, ya'ni, limitik mahsulot *L* kamayadi.

Shuningdek, L o'zgarmas deb olinib K o'suvchi bo'lsa,

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta} = \frac{\alpha AK^{\beta}}{K^{1-\alpha}}$$

kamayadi.

Ishlab chiqarish funktsiyasida o'zgaruvchilar soni ikkitadan ko'p bo'lsa ham shu printsip takrorlanadi.

Masalan, agar $Q = AX_1^{a}X_2^{b}X_3^{c}X_4^{d}$

bu yerda X_1, X_2, X_3 va X_4 ko'rsatkichlar, u holda X_3 ko'rsatkichning marjinal ishlab chiqarish darajasi

$$\frac{\partial Q}{\partial X_3} = cAX_1^{a}X_2^{b}X_3^{c-1}X_4^{d} = \frac{cAX_1^{a}X_2^{b}X_4^{d}}{X_3^{c-1}}$$

bo’lib, X_3 kamaygan sari o’sadi. Bunda X_1, X_2, X_3 va X_4 kiruvchi o’zgaruvchilar bo’lsa, u holda X_3 o’zgaruvchi bo’yicha marjinal mahsulot quyidagicha bo’lib

$$\frac{\partial Q}{\partial X_3} = cAX_1^a X_2^b X_3^{c-1} X_4^d = \frac{cAX_1^a X_2^b X_4^d}{X_3^{c-1}}$$

bo’lib X_3 kamaygan sari, u o’sadi.

Kobba-Duglas ishlab chiqarish funktsiyasining marjinal mahsuloti uzluksiz nolgacha kamayib, Lning chekli qiymatlarida “eng kichik limitik” qiymatga ega bo’lmaydi; ya’ni, ular hech qachon minimal nuqtaga erishmaydi. Agar, masalan,

$$Q = 25K^{0.4}L^{0.5}$$

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 12.5K^{0.4}L^{-0.5}$$

Minimumning birinchi tartibli sharti

$$\frac{12.5K^{0.4}}{L^{0.5}} = 0$$

Q=0, faqat *K=0* bo’lsagina o’rinlidir yoki *L* cheksiz katta bo’lsa, o’rinli. SHuningdek, *L* ning chekli qiymatlari uchun *L* qancha katta bo’lmasin MP_L musbatligicha qolaveradi, bu shuni bildiradiki izokvanta chizig’i bo’yicha ikki o’zgaruvchili Kobba-Duglas ishlab chiqarish funktsiyalari hech qachon orqaga qayrilmaydi, ya’ni u noiqtisodiy sohadir.

Ishlab chiqarish funktsiyasining boshqa mumkin bo’lgan ko’rinishlari. Masalan, agar

$$Q = 4.6K^2 + 3.5L^2 - 0.012K^3L^3$$

Bo’lsa, avval MP_L o’sib, keyin kamayadi

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 7L - 0.036K^3L^2$$

L ning o’sishi bilan, MP_L funktsiyaning bukilishi, musbatdan manfiy qiymatga qarab o’zgaradi

$$\text{bukilish} = \frac{\partial MP_L}{\partial L} = 7L - 0.072K^3L$$

MP_L funktsiyaning qiymati va ko’rinishi K ga bog’liq bo’lib qoladi

Misol. Agar $q = 20x^{0.6}y^{0.2}x^{0.3}$ bo'lsa, q ning x, y, z bo'yicha o'zgarish tezligini (hosilasini) toping.

Yechish. Bunda hozir uchta bog'liq bo'lmagan o'zgaruvchi qatnashyapti, lekin bunda ham юqoridagi qoidalarga amal qilinadi, ya'ni, ikkita o'zgaruvchi o'zgarmas deb qaraladi. Shuning uchun y va z o'zgarmas bo'lsin

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 12x^{-0.4}y^{0.2}x^{0.3}$$

Shu kabi, x va z o'zgarmas bo'lsin

$$\frac{\partial q}{\partial y} = 4x^{0.6}y^{-0.8}z^{0.3}$$

va x va y o'zgarmas bo'lsin

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 6x^{0.6}y^{0.2}z^{-0.7}$$

Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalardan xususiy hosila olayotganda xato qilmaslik uchun, o'zgarmaydigan o'zgaruvchilarni birinchi bo'lib yozib olib, so'ng differentsiallash kerak. Masalan x bo'yicha differentsiallashda $y^{0.2}z^{0.3}$ ni yozib olib, y va z o'zgarmas deb olindi.

Agar funktsiya juda ko'p o'zgaruvchilardan tashkil topsa, xususiy hosilani belgilash quyidagi kabi bo'ladi. Masalan, $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funktsiya uchun $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ning o'rniga $f_1$ni, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ ning o'rniga $f_2$ni va hokazolarni yozish mumkin.

Misol. f_j ni toping bunda j ishlab chiqarish funktsiyasining kirish nomerlari

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} 6x_i^{0.5}$$

Yechish. Bu funktsiya qo'shiluvchilar yig'indisidan iborat. Faqat bitta j chi had uchun x_j mavjud. Agar x_j bo'yicha differentsiallasak, qolgan hadlar o'zgarmas bo'ladi va yo'qoladi. Shuning uchun, $6x_j^{0.5}$ hadni x_j bo'yicha differentsiallash quyidagicha bo'ladi $f_j = 3x_j^{-0.5}$

Bu qisqa belgi ikkinchi tartibli xususiy hosilalarda ham qo'llaniladi. Masalan,

$$f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$$

Ikkincha tartibli xususiy hosila funktsiyaning birincha tartibli xususiy hosilasini differentsiallash yo'li bilan topiladi. Agar funktsiya ikkita bog'liq bo'lmagan o'zgaruvchidan iborat bo'lsa, to'rtta ikkincha tartibli xususiy hosila hosil bo'ladi. Misol tariqasida,

$$Q = 25K^{0.4}L^{0.3}$$

Ikkita birincha tartibli xususiy hosila mavjud

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 10K^{-0.6}L^{0.3} \qquad \frac{\partial Q}{\partial L} = 7.5K^{0.4}L^{-0.7}$$

Ular K va L ga bog'liq bo'lgan limitik mahsulot funktsiyasidan iborat. Bu funktsiyalarni ikki marta differentsiallab quyidagini hosil qilamiz

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -6K^{-1.6}L^{0.3} \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -5.25K^{0.4}L^{-0.7}$$

Bu ikkincha tartibli xususiy hosila, limitik mahsulot funktsiyasining o'zgarish tezligini ifodalaydi. Bu misoldan ko'rinadiki, MR_L (ya'ni $\partial^2 Q / \partial L^2$) ning og'ishi doimo manfiy bo'ladi (K va L musbat qiymatlar qabul qilsa), L ning o'sishi bilan, boshqa bir teng shartlarda, bu og'ishning absolюt qiymati kamayadi.

Undan tashqari biz $\partial Q / \partial K$ o'zgarish tezligini L bo'yicha o'zgaruvchilar, hamda $\partial Q / \partial L$ o'zgarish tezligini K bo'yicha o'zgaruvchilar tezligi yordamida aniqlashimiz mumkin. SHunda ular:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} = 3K^{-0.6}L^{0.7} \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} = 3K^{-0.6}L^{-0.7}$$

kabi ifodalanadi va kesishuvchi xususiy hosilalar deyiladi.

Bular shuni ko'rsatadiki, Qning biror kirim bo'yicha o'zgarish tezligi, boshqa kirim bo'yicha ham o'zgarar ekan. Bu misoldan quyidagini hosil qilamiz

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} = \frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K}$$

Aslida kesishuvchi xususiy hosilalar har doim mos ravishda bir biriga teng bo'ladi.

Demak, ixtiyoriy ikkita bog'liq bo'lmagan o'zgaruvchidan iborat bo'lgan funktsiya uchun, to'rtta ikkincha tartibli xususiy hosila mavjud bo'lar ekan:

(1) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (2) $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ (3) $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$ (4) $\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}$

(3) va (4) xususiy hosilalar doimo bir-biriga teng, ya'ni

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}$$

Misol. Ishlab chiqarish funktsiyasi uchun, to'rtta ikkinchi tartibli xususiy hosilani keltirib chiqaring

$$Q = 6K + 0.3K^2L + 1.2L^2$$

va ular qiymatini interpretatsiya qiling.

Yechish.

Ikkita birinchi tartibli xususiy hosila

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 6 + 0.6KL \quad \frac{\partial Q}{\partial K} = 0.3K^2 + 2.4L$$

va ular mahsulotlarning limitik MP_K va MP_L funktsiyalaridan iborat.

To'rtta ikkinchi tartibli xususiy hosila quyidagidan iborat:

(1) $\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = 0.6L$

Bu MP_K funktsiyaning og'ishidan iborat. Bu shundan iboratki, ixtiyoriy berilgan L ning qiymatlari uchun, funktsiya grafigi doimo og'ishdan iborat, agar L o'ssa bu funktsiya o'sadi.

(2) $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = 2.4$

Bu funktsyaning og'ishini bildiradi va to'g'ri chiziqning og'ishi 2,4 ga tengdir. Bu og'ish K ning qiymatiga bog'liq emas.

(3) $\frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} = 0.6K$

Bular shuni ko'rsatadiki, agar L o'ssa, MP_K o'sadi. L ning o'sishi bilan MP_K ning o'sishi Kning miqdoriga bog'liq.

(4) $\frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} = 0.6K$

Bu shundan iboratki, agar K o'ssa MP_L ham o'sadi, bu esa Kning miqdoriga bog'liq. Shuning uchun, grafikning og'ishi 2,4 ga teng bo'lsa ham uning holati Kning miqdoriga bog'liqlir. Ikkinchi tartibli xususiy hosila tadbiqining boshqa ko'rinishlari quyida keltirilgan.[2]

[2] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning barcha x_i argumentlariga Δx_i orttirma beramiz, u holda funksiya quyidagi Δz orttirmani

$$\Delta z = f(x_1 + \Delta x_1,\ x_2 + \Delta x_2, \cdots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

hosil qiladi. Bu orttirma funksiyaning to‘liq orttirmasi deyiladi. Agar $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ funksiyaning faqat i- argumenti bo‘lgan x_i o‘zgaruvchiga Δx_i orttirma berib, qolgan o‘zgaruvchilarni o‘zgarmas deb qarasak, u holda funksiya hosil qilgan orttirma $\Delta_{x_i} z$ quyidagicha aniqlanib,

$$\Delta_{x_i} z = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

bu orttirma funksiyaning xususiy orttirmasi deyiladi.

Masalan, $z = xy$ funksiyaning to‘liq va xususiy orttirmalarini topaylik:

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$$
$$\Delta_x z = (x + \Delta x) \cdot y - xy = y \cdot \Delta x,$$
$$\Delta_y z = x \cdot (y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y$$

Ta’rif. *$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning x_i o‘zgaruvchisi bo‘yicha xususiy hosilasi deb, x_i o‘zgaruvchidan boshqa o‘zgaruvchilarni o‘zgarmas deb qaraganda hosil bo‘lgan bir o‘zgaruvchili, ya’ni x_i-o‘zgaruvchili funksiyaning, x_i-o‘zgaruvchi bo‘yicha olingan hosilaga aytilib, $\frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i}$ yoki f'_{x_i} shaklda belgilanadi, ya’ni xususiy hosila quyidagi limit orqali topiladi:*

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i}$$

Masalan. $z = x \cdot y$ funksiya uchun uning xususiy hosilalari xossalari quyidagicha bo‘ladi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

$z = arctg \frac{x}{y}$ funksiya uchun esa,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2+x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2+x^2}.$$

$z = x^y$ funksiya uchun esa

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \cdot \ln x.$$

$\frac{\partial z}{\partial x_i}$ xususiy hosila, o‘z navbatida, yana ko‘p o‘zgaruvchili funksiya bo‘lgani uchun, uning yana xususiy hosilalarini topish mumkin. Bu xususiy hosilalar ikkinchi tartibli xususiy hosilalar deyiladi. Xuddi shunga o‘xshash uchinchi va h.k. tartibli xususiy hosilalarni kiritish mumkin.

Bu hosilalar quyidagicha belgilanadi.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) - \textit{ikkinchi tartibli xususiy hosila};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_i^2 \, \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}\right) - \textit{uchinchi tartibli xususiy hosila};$$

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_{i_1}^{k_1} \, \partial x_{i_2}^{k_2} \ldots \partial x_{i_m}^{k_m}}, \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n \qquad n - \textit{tartibli xususiy hosila}.$$

Umuman, aralash hosilalarda tartibning ahamiyati yo‘q, ya’ni masalan, quyidagi tenglik o‘rinlidir,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i},$$

bu aralash hosilalarni uzluksiz deb qarash kerak.

To’la differensial

Agar, x va y o’zgaruvchilardagi o’zgarish cheksiz kichik bo’lsa, unda ushbu chiziqsiz funktsiya

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x$$

“differentsial” deb hisoblanadi. Agar, *y* funktsiyada birdan ortiq o’zgaruvchi bo’lsa, misol uchun $y = f(x,z)$ va barcha o’zgaruvchilardagi o’zgarish cheksiz kichik bo’lsa, unda to’la differentsial

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial y}{\partial z}\Delta z$$

ko’rinishida bo’ladi.

Bu “to’la differentsial” deyiladi, chunki u *y* ning umumiy ta’sirini barcha erkli o’zgaruvchilarda aks ettiradi.

Cheksiz kichik o’zgaruvchlarni odatda $\Delta y, \Delta x, \Delta z$ larning o’rniga, dy, dx, dz deb yozamiz, chunki $\Delta y, \Delta x, \Delta z$ larar bilan odatda cheklangan o’zgaruvchilarni belgilashadi, shunday qilib quyidagini hosil qilamiz:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial z}dz$$

Misol. To’la differentsialni aniqlang $y = 6x^2 + 8z - 0,3xz$?

Yechish. To’la differentsial

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial z}dz =$$
$$= (12x - 0,3z)dx + (16z - 0,3x)dz$$

Endi to’la differentsial tushunchasini iqtisodiyotda qo’llanishiga oid misollarni ko’rib chiqishimiz mumkin.

Ishlab chiqrish nazariyasida izokvantaning qiyaligi ikki o’zgaruvchi orasidagi texnikaviy almashtirishning marjinal tezligi (TAMT) ni ko’rsatib beradi. To’la differentsialni qo’llash TAMT nini ikki o’zgaruvchi marjinal mahsulotlarining nisbatiga teng bo’lishini ko’rsatib berishga yordam beradi

Iqtisodiyotga kirishda *K* ning *L* ga bo’lgan TAMT (odatda $TAMT_{KL}$ deb beriladi) odatda *K* ning miqdori deb belgilanadi, bu *L* ning yo’qotgan birligini qoplash uchun kerak, natijada ishlab chiqarish hajmi o’zgarmaydi. Bu shunchaki taxminiy o’lchov, $TAMT_{Kl}$ izokvanta nuqtasida aniqlansa, u aniqroq natijaga erishishi mumkin. *K* va *L* dagi cheksiz kichik o’zgarishlar uchun $TAMT_{KL}$ *K* ning *L* ga almashtirish kerak bo’lgan tezlikni o’lchaydi, chiqimni o’zgarishsiz saqlab qolish uchun, ya’ni *K* va *L* larning belgilangan qiymatlari izokvanta

og'masini manfiy kattaligiga teng, qachonki K vertikal o'q va L gorizontal o'q bo'yicha o'lchansa.

Har qanday berilgan chiqim darajasi uchun K – bu L ning samarali funktsiyasidir (va aksincha) va shu sababli izokvanta bo'ylab harakat qiladi

$$MRTS_{KL} = -\frac{dK}{dL} \qquad (1)$$

$Q = f(K, L)$ ishlab chiqarish funktsiyasi uchun, to'la differentsial quyidagicha bo'ladi

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL$$

Agar biz izokvanta bo'ylab xuddi shu harakatga ko'z tashlasak, chiqim o'zgarishsiz bo'ladi, demak dQ va shunday qilib

$$\frac{\partial Q}{\partial K} dK + \frac{\partial Q}{\partial L} dL = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} dK = -\frac{\partial Q}{\partial L} dL \qquad -\frac{\partial K}{\partial L} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} \qquad (2)$$

Biz allaqachon $dQ/\partial L$ va $dQ/\partial K$ larni K va L larning marjinal mahsulotlarni aniqlashini bilamiz. SHu sababli, (1) va (2) lardan

$$MRTS_{KL} = -\frac{MP_L}{MP_K}$$

kelib chiqadi.[3]

Ta'rif. *$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differentsiali deb, dZ - shaklda belgilanib quyidagicha aniqlangan ifodaga aytiladi:*

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial Z}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial Z}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Bu yerda $dx_i = \Delta x_i$ - tenglikni e'tiborga olsak, dZ - differentsial uchun quyidagi tenglikni yoza olamiz.

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial Z}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial Z}{\partial x_n} dx_n$$

Ta'rif. *Agarda $x-$ nuqtaning yetarli kichik atrofida, uning to'liq orttirmasi ΔZ ni quyidagicha ifodalash mumkin bo'lsa,*

$$\Delta Z = dZ + 0\left(\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \cdots + \Delta x_n^2}\right),$$

[3] Mike Rosser. Basic Mathematics for Economists. - London and New York, Taylor & Francis Group, 2003 y

u holda $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ko'p o'zgaruvchili funksiya* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi.*

Shuni ta'kidlash lozimki, ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun uning berilgan nuqtada barcha birinchi tartibli xususiy hosilalarining mavjudligidan, shu nuqtada funksiyaning differentsiallanuvchi ekanligi kelib chiqmaydi. Quyidagi teorema ko'p o'zgaruvchili funksiyani differentsiallanuvchi bo'lishligining yetarli shartini ifoda etadi.

***Teorema**. Agar* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *ko'p o'zgaruvchili funksiyaning* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *nuqtaning biron–bir atrofida barcha birinchi tartibli* $\frac{\partial z}{\partial x_i}, i = 1,2,\ldots,n$, *xususiy hosilalari mavjud bo'lib, bu xususiy hosilalar* x *nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *funksiya shu nuqtada differentsiallanuvchi bo'ladi.*

Biz bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz. Shuni ta'kidlash lozimki, xuddi bir o'zgaruvchili funksiyalardagi kabi, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham yuqori tartibli differentsial tushunchasini kiritish mumkin.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Tayanch ibora va tushunchalar

Ko'p o'zgaruvchili funksiya, ikki o'zgaruvchili funksiya, ikki o'zgaruvchili funksiya aniqlanish va o'zgarish sohalari, berilish usullari, geometrik tasviri, limiti, uzluksizligi va uzilishi. Xususiy orttirma, xususiy hosila, to'la differensial, ikkinchi tartibli xususiy hosila, ikkinchi tartibli to'la differensial, taqribiy hisoblash.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning xususiy orttirmasi deb nimaga aytiladi?

2. Ikki argumentli funksiyaning xususiy xosilasi deb nimaga aytiladi?

3. Ikki o‘zgaruvchili(argumentli) funksiyaning xususiy hosilalari nechta bo‘ladi?

4. Ikki o‘zgaruvchili(argumentli) funksiyaning to‘la differensiali deb nimaga aytiladi?

5. Funksiyaning to‘liq orttirmasi va to‘la differensiali orasida bog’lanish bormi?

6. To‘la differensialdan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkinmi?

7. Ikkinchi tartibli xususiy hosila qanday topiladi?

8. Ikki o‘zgaruvchili(argumentli) funksiyaning ikkinchi tartibli to‘la differensiali nimaga teng?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning xususiy hosilalarini toping:

1) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$; 2) $z = \frac{xy}{x-y}$; 3) $u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$;

4) $z = \sqrt{1 - \left(\frac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin\frac{x+y}{y}$.

2. Quyidagi funksiyalarning to‘la differensiallarini toping:

1) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)$; 2) $u = x^{y^2z}$;3) $u = \sqrt{x^2 - 2y^2 + 3z^2}$;

4) $s = x\ln t$.

3. $z = xy$ funksiya uchun $P_0(5;4)$ nuqtada $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = -0{,}2$ bo‘lganda dz *va* Δz larni hisoblang.

4. 1) $(1{,}04)^{2{,}02}$; 2) $\sin 32^0 \cdot \cos 59^0$ larni taqribiy hisoblang.

5. $z = x^3y + y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

6. $s = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right)$ funksiya uchun, $\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$ yekanligini tekshiring.

7. $u = arctg(2x - t)$ bo‘lsa, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = 0$ bajarilishini tekshiring.

8. $z=(x^2+y^2)^2$ ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

9. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ funksiya $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

10. $u=x^4y^2$ ikkinchi tartibli to‘la differensialini toping.

11. $z=\sin x\cos y$ ikkinchi tartibli to‘la differensialini toping.

12 1) $u=\dfrac{y^2}{x^2}$; 2) $u=x\ln\dfrac{y}{x}$ ikkinchi tartibli to‘la differensiallarini toping.

3.7-§. Aniqmas va aniq integral

Boshlang’ich funksiya.

Ma’lumki matematikada amallar juft-juft bo‘lib uchrab keladi. Jumladan, qo‘shish va ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish, darajaga ko‘tarish va ildiz chiqarish va boshqalar. Funksiya hosilasini topishga yoki differensialash amaliga teskari amal bormikan degan tabiiy savol tug’iladi.

Differensial hisobda funksiya berilgan bo‘lsa, uning hosilasini topishni qaradik. Haqiqatda ham fan va texnikaning bir qancha masalalarini hal etishda teskari masalani yechishga to‘g’ri keladiki, berilgan $f(x)$ funksiya uchun shunday, $F(x)$ funksiyani topish kerakki, uning hosilasi berilgan $f(x)$ funksiyaga teng bo‘lsin. Ma’lumki, bunday $F(x)$ funksiyaga berilgan $f(x)$ funksiyaning ***boshlang’ich*** **(dastlabki)** ***funksiyasi*** deyiladi.

Masalan, $y=f(x)=x^4$ funksiyaning boshlanғich funksiyasi, $F(x)=\dfrac{x^5}{5}$ bo‘ladi, chunki $F'(x)=(\dfrac{x^5}{5})'=x^4=f(x)$ bo‘ladi.

Aniqmas *integral va uning xossalari.* Ta’rif. $F(x)$ funksiya biror oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang’ich funksiyasi bo‘lsa, $F(x)+C$ (bunda C ixtiyoriy o‘zgarmas) funksiyalar to‘plami shu oraliqda $f(x)$ ***funksiyaning aniqmas integrali*** deyiladi va

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

bilan belgilanadi. Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, x integrallash o‘zgaruvchisi, $\int$ integral belgisi deyiladi.

Demak, $\int f(x)dx$ simvol, $f(x)$ funksiyaning hamma boshlang’ich funksiyalari to‘plamini belgilaydi.

Berilgan funksiyaning aniqmas integralini topish amaliga integrallash deyiladi.

Aniqmas *integralning xossalari*:

1) aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga, differensiali esa integral ostidagi ifodaga teng, ya’ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad \textit{ва} \qquad d\int F(x)dx = F(x)dx;$$

2) biror funksiyaning hosilasidan hamda differensialidan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o‘zgarmasning yig’indisiga teng, ya’ni

$$\int f'(x)dx = f(x) + C \quad \textit{ва} \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

Bu xossalar aniqmas integralning ta’rifidan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan, 1-xossadan $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = F'(x) + 0 = f(x)$ bo‘ladi. (Qolganlarini keltirib chiqarish o‘quvchiga havola etiladi).

Bu xossalardan differensiallash va integrallash amallari o‘zaro teskari amallar ekanligini payqash mumkin.

3) o‘zgarmas ko‘paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya’ni $K = const \neq 0$ bo‘lsa,

$$\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx;$$

4) chekli sondagi funksiyalar algebraik yig’indisining aniqmas integrali, shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig’indisiga teng, ya’ni

$$\int\left[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)\,dx.$$

Asosiy integrallar jadvali. Berilgan funksiyaga asosan uning boshlang’ichini topish, berilgan funksiyani differensiallashga nisbatan ancha murakkabroq masaladir. Differensial hisobda asosiy elementar funksiyalarning, yig’indining, ko‘paytmaning, bo‘linmaning hamda

murakkab funksiyalarning hosilasini topishni o‘rgandik. Bu qoidalar istalgan elementar funksiyalarning hosilasini topishga imkon berdi. Elementar funksiyalarni integrallashda esa differensiallashdagidek umumiy qoidalar yo‘q. masalan, ikkita elementar funksiyalar boshlang’ichlarining ma’lum bo‘lishiga qaramasdan, ular ko‘paytmasining, bo‘linmasining boshlang’ichini topishda aniq bir qoida yo‘q.

Integrallashda integral ostidagi ifodaning muayyan berilishiga qarab, unga mos individual usullardan foydalanishga to‘g’ri keladi. Boshqacha aytganda, integrallashda ancha kengroq fikr yuritish kerak bo‘ladi. Funksiyani integrallash ya’ni boshlang’ich funksiyani topish metodlari bir qancha shunday usullarni ko‘rsatadiki, ular yordamida ko‘p hollarda maqsadga erishiladi.

Integrallashda maqsadga erishish uchun quyidagi **asosiy integrallar jadvalini** yoddan bilish zarur.

$$1)\ \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1;\quad 2)\ \int dx = x + C;\quad 3)\ \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$4)\ \int \sin x dx = -\cos x + C;\qquad 5)\ \int \cos x dx = \sin x + C;\quad 6)\ \int e^x dx = e^x + C;$$

$$7)\int\ a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ (0 < a \neq 1);\quad 8)\ \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$$

$$9)\ \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;\quad 10)\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C;$$

$$11)\ \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C;\quad 12)\ \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x - a}{x + a} + C,\ a \neq 0;$$

Bu formulalarning to‘g’riligini, tekshirish tengliklarning o‘ng tomonidagi ifodalar differensiali integral ostidagi ifodaga teng ekanligini ko‘rsatishdan iboratdir. Masalan,

$$d\left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right) = \left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C\right)' dx = \frac{(n+1)x^n}{n+1} dx = x^n dx.$$

Integrallashga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralning 4 va 3 xossalariga asosan,

$$\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx = \int x^3\, dx + 5\int \sin x\, dx - 9\int dx$$

bo‘ladi. Asosiy integrallar jadvalidagi 1), 2), 4) formulalarga asosan,

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C_1,\ \ 5\int \sin x dx = 5(-\cos x + C_2),\ \ -9\int dx = -9(x + C_3).$$

Demak,

$$\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx = \frac{x^4}{4} - 5\cos x - 9x + (C_1 + 5C_2 - 9C_3)\,.$$

Yuqoridagi integralni hisoblashda har bir uchta integralda o‘zining ixtiyoriy o‘zgarmasini qo‘shdik, lekin oxirgi natijada bitta ixtiyoriy o‘zgarmasni qo‘shamiz, chunki C_1, C_2, C_3 ixtiyoriy o‘zgarmaslar bo‘lsa, $C = C_1 + 5C_2 - 9C_3$ ham ixtiyoriy o‘zgarmas bo‘ladi, shuning uchun, oxirgi natijani quyidagicha yozamiz:

$$\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx = \frac{x^4}{4} - 5\cos x - 9x + C\,.$$

Integralning to‘g’ri hisoblanganligini tekshirish uchun oxirgi tenglikning o‘ng tomonini differensiallash bilan ko‘rsatish mumkin(buni bajarishni o‘quvchiga havola etamiz).

2-misol. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right) dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Manfiy daraja xossasidan, hamda 4) xossadan foydalanib, jadvaldagi 1) formulaga asosan,

$$\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \right) dx = \int \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} \right) dx = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{3}\int x^{\frac{2}{3}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{3}} + C = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + C$$

bo‘ladi.

3-misol. $\int \frac{3\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ayniyatdan hamda integralning 3) va 4) hossalaridan foydalanib hisoblaymiz:

$$\int \frac{3dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 3\int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = 3\int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + 3$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = 3\int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 3\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 3(tgx - ctgx) + C.$$

4-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. Jadvaldagi 9) formulaga asosan,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Aniqmas integralda integrallash usullari

1. O‘zgaruvchini almashtirish. Ko‘p hollarda yangi o‘zgaruvchi kiritish bilan integralni hisoblash, jadval integraliga keltiriladi. Bunda $\varphi(x) = t$ almashtirish olinib, bunda t yangi o‘zgaruvchi bo‘lib, o‘zgaruvchini almashtirish formulasi

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

O‘zgaruvchini almashtirish usuliga bir necha misollar qaraymiz

1-misol. $\int (3x+1)^7 dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $3x + 1 = t$ deb $3dx = dt$ yoki $dx = \frac{dt}{3}$ ekanligini hisoblasak,

$$\int (3x+1)^7 dx = \int t^7 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{t^8}{24} + C = \frac{(3x+1)^8}{24} + C$$

bo‘ladi.

2-misol. $\int \sqrt[3]{1 + x^2}\, x\, dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $1+x^2=t$ o‘zgaruvchi bilan almashtiramiz. Bu holda $2xdx=dt$ yoki $xdx=\frac{dt}{2}$ bo‘lib,

$$\int\sqrt[3]{1+x^2}\cdot xdx=\int\sqrt[3]{t}\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{8}t\sqrt[3]{t}+C=\frac{3}{8}(1+x^2)\sqrt[3]{1+x^2}+C$$

bo‘ladi.

3-misol. $\int\cos mxdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bunda $dx=\frac{1}{m}d(mx)$ o‘zgartirish olib,

$$\int\cos mxdx=\frac{1}{m}\int\cos mxd(mx)=\frac{1}{m}\sin mx+C$$

natijaga ega bo‘lamiz. Bunday integrallashga ***bevosita integrallash*** deb ataladi. Chunki $mx=t$ bilan o‘zgaruvchini almashtirib ham shu natijaga kelish mumkin edi. Yuqoridagi integralda o‘zgaruvchini almashtirib o‘tirmasdan uni fikrda bajardik.

4-misol. $\int(\ln x)^3\frac{dx}{x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\ln x=t$ bilan yangi o‘zgaruvchini almashtirib, $\frac{dx}{x}=dt$ ekanligini hisobga olsak,

$$\int(\ln x)^3\frac{dx}{x}=\int t^3\cdot dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{(\ln x)^4}{4}+C$$

bo‘ladi.

5-misol. $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $x=t^2$ bilan yangi o‘zgaruvchi kiritamiz oxirgi tenglikdan differensial topib, $dx=2tdt$ bo‘lganligi uchun,

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{\sin t}{t}2tdt=2\int\sin tdt=-2\cos t+C=-2\cos\sqrt{x}+C$$

bo‘ladi. —

6-misol. $\int e^{\sin x}\cdot\cos xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\cos x dx = d(\sin x)$ ni hisobga olib,

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$$

natijaga kelamiz.

Shunday qilib, oddiy hollarda

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2), \quad \cos x dx = d(\sin x), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x), \quad dx = \frac{1}{a}(ax + b), \ldots.$$

tengliklardan foydalanib, o‘zgaruvchini almashtirishni fikrda bajarib, bevosita integrallash ham mumkin.

Bo‘laklab integrallash. Bo‘laklab integrallash usuli differensial hisobning ikkita funksiya ko‘paytmasi differensiali formulasiga asoslangan.

Ma’lumki, $d(uv) = udv + vdu,$ bundan $udv = d(uv) - vdu.$ Oxirgi tenglikni integrallab,

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv - \int vdu$$

natijaga ega bo‘lamiz. Shunday qilib,

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1)$$

formulani hosil qildik. (1) formulaga ***bo‘laklab integrallash*** formulasi deyiladi.

Bu formula yordamida berilgan $\int udv$ integraldan ikkinchi $\int vdu$ integralga o‘tiladi. Demak, bo‘laklab integrallashni qo‘llash natijasida hosil bo‘lgan ikkinchi integral, berilgan integralga nisbatan soddaroq yoki jadval integrali bo‘lgandagina bu usulni qo‘llash maqsadga muvofiqdir. Bu maqsadga integral ostidagi ifodani u va dv ko‘paytuvchilarga qulay bo‘laklab olish natijasida erishish mukmin. Berilgan integral ostidagi ifodaning bir qismini u va qolgan qismini dv deb olgandan keyin (1) formuladan foydalanish uchun v va du larni aniqlash kerak bo‘ladi. du ni topish uchun u ning differensiali topilib, v ni topish uchun esa dv ifodani integralaymiz, bunda integral ixtiyoriy o‘zgarmas C ga bog’liq bo‘lib, uning istalgan bir qiymatini xususiy holda $C = 0$ ni olish mumkin.

Shunday qilib, integral ostidagi ifodaning bir qismini u deb olishda u differensiallash bilan soddalashadigan, qolgan qismi dv bo‘lib, qiyinchiliksiz integrallanadigan bo‘lishi kerak.

Bo‘laklab integrallash formulasi ko‘proq:

1) $\int p(x)e^{ax}dx,\ \int p(x)\sin mxdx,\ \int p(x)\cos axdx$ *va*

2) $\int p(x)\ln xdx, \int p(x)\arcsin xdx, \int p(x)\arccos xdx, \int p(x)arctgxdx,\ \int p(x)arcctgxdx$

(bularda $p(x)$ biror darajali ko‘phad) ko‘rinishdagi integrallarni hisoblashda ishlatiladi. Bu integrallarni hisoblashda 1) guruh integrallarda u uchun $p(x)$ ko‘phad, qolgan qismi dv uchun olinib, 2) guruh integrallarda u uchun mos ravishda $\ln x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ arctgx,\ arcctgx$ lar, qolgan qismi dv uchun olinadi.

Bo‘laklab integrallashga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int x\cos xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi ifodani $u = x,\ dv = \cos xdx$ deb bo‘laklasak, $du = dx,\ v = \int \cos xdx = \sin x$ bo‘lib, (1) formulaga asosan,

$$\int x\cos xdx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$$
$$u\quad dv \qquad u\ \ v \qquad v\quad du$$

natijaga ega bo‘lamiz.

Bu integralda (1) formuladan foydalanish natijasida ikkinchi integral $\int \sin x\,dx$ hosil bo‘ldi, bu jadval integrali bo‘lganligi uchun osongina topildi.

2-misol. $\int x^2e^{3x}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqorida eslatilganidek $u = x^2,\ dv = e^{3x}dx$ ko‘rinishda bo‘laklab olsak,

$$du = 2xdx,\ \ v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x}$$

hosil bo‘ladi. (1) formulaga asosan

$$\int x^2e^{3x}dx = x^2\,\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}2xdx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx$$

bo‘ladi. Oxirgi hosil bo‘lgan integral berilgan integralga nisbatan soddalashdi (berilgan integralda x ning 2- darajasi, ikkinchisida buning darajasi bittaga kamaydi). Keyingi integralda yana (1) formulani qo‘laymiz.

$$\int xe^{3x}dx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{3x}, & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| =$$

$$= x\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + C_1 = \frac{1}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + C_1.$$

Shunday qilib, natijada

$$\int x^2e^{3x}dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) + C_1\right] =$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}\right) + C$$

hosil bo‘ladi.

3-misol. $J = \int e^x \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bo‘laklab integrallasak

$$J = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = \cos x, & du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx,$$

hosil bo‘ladi.

Keyingi integral, berilgan integral bilan o‘xshashdek tuyuladi, lekin oxirgi integralda bo‘laklab integrallash formulasini ikkinchi marta qo‘llash bilan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = \sin x, & du = \cos x dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx$$

Shunday qilib,

$$J = e^x \cos x + e^x \sin x - J$$

J hisoblanishi kerak bo‘lgan integralga nisbatan oddiy chiziqli tenglamaga keldik. Oxirgi tenglamadan

$$2J = e^x \cos x + e^x \sin x \quad \text{ёки} \quad J = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$$

natijaga ega bo‘lamiz.

Rasional va irrasional funksiyalarni integrallash

*1. Rasional kasr funksiyalarni integrallash. 1). To‘g’ri va noto‘g’ri kasr rasional funksiyalar haqida***.** Yuqorida ko‘rsatilgan integrallash usullari yordamida hamma integrallarni hisoblash mumkin deb bo‘lmaydi.

Shunday funksiyalar sinflari borki, ular uchun muayyan usullardan foydalanib ularni jadval integrallariga yoki integrallash usullaridan foydalanish uchun qulay holga keltirish mumkin, shunday funksiya sinflaridan ayrimlarini qaraymiz.

Ma’lumki, har qanday rasional funksiyani ushbu ko‘rinishida ifodalash mumkin, ya’ni

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...a_n}.$$

Curatdagi ko‘phadning darajasi maxrajdagi ko‘phad darajasidan kichik, ya’ni $m<n$ bo‘lsa, berilgan kasrga ***to‘g’ri kasr rasional*** funksiya deyiladi. Suratdagi ko‘phadning darajasi $m\geq n$ bo‘lsa, ***noto‘g’ri kasr rasional funksiya*** deyiladi. Kasr noto‘g’ri kasr rasional funksiya bo‘lsa, suratni maxrajga, ko‘phadni ko‘phadga bo‘lish qoidasiga asosan bo‘lib, uning butun qismini ajratib, uni butun va to‘g’ri kasr rasional funksiyaga keltirish mumkin. Masalan, $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-x}$ noto‘g’ri kasr rasional funksiyani, x^3+3x^2+3x+1 ko‘p ќadni x^2-x ko‘p ќadga bo‘lib,

$$\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-x}=x+4+\frac{7x+1}{x^2-x}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Umumiy holda, $\frac{Q(x)}{P(x)}$ noto‘g’ri kasr rasional funksiya bo‘lsa, uni

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=T(x)+\frac{R(x)}{P(x)}$$

shaklda ifodalash mumkin, bu yerda $T(x)$ butun rasional funksiya, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to‘g’ri rasional kasr funksiyadan iborat. $T(x)$ funksiyani osongina integrallash mumkin.

Shunday qilib, noto‘g’ri kasr rasional funksiyani integrallashni, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to‘g’ri kasr rasional funksiyani integrallashga keltiriladi.

To‘g’ri kasr rasional funsiyalarni sodda kasrlar ko‘rinishida ifodalash va ularni integrallash

1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k>1$ *бутун сон*); 3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; ($\frac{p^2}{4}-q<0$ ya’ni, kvadrat uch had haqiqiy ildizga ega emas);

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ ($n>1$ butun son, $\frac{p^2}{4}-q<0$) rasional to‘g’ri kasrlarga ***sodda kasr rasional funksiyalar*** deyiladi. (A, B, p, q, a - haqiqiy sonlar).

Birinchi ikki xildagi funksiyalarni osongina integrallash mumkin, ya’ni,

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C,$

2) $\int \frac{A}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C$

bo‘ladi. Endi ushbu

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$

integralni ќisoblaymiz.

Oldin xususiy hol $\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$ integralni qaraylik. x^2+px+q dan to‘la kvadrat ajratib, $x+\frac{p}{2}=t$ almashtirishdan keyin quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}dx = \left| \begin{matrix} x+\frac{p}{2}=t \\ dx=dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)},$$ bu yerda

$a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Oxirgi integralda 8) jadval integralidan foydalanib,

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \frac{1}{a}arctg\,\frac{t}{a}+C = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C \qquad (2)$$

natijani hosil qilamiz.

Endi $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ integralni hisoblaymiz.

$$Ax+B = (2x+p)\frac{A}{2}-\frac{Ap}{2}+B$$

shakl o‘zgartirishdan foydalanib, integralni quyidagicha yozamiz.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{(2x+p)\frac{A}{2}-\frac{Ap}{2}+B}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}dx.$$

Oxirgi tenglikning o‘ng tomonidagi birinchi integral

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln\left|x^2+px+q\right|+C_1$$

bo‘lib, ikkinchi integral (2) formulaga asosan,

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C_2\,.$$

Shunday qilib,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

natijaga ega bo‘lamiz.

Bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int \frac{x^4}{x^2+9}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya noto‘g’ri kasr rasional funksiyadan iborat. Uning butun qismini ajratamiz:

$$\begin{array}{r|l} -\ x^4 & x^2+9 \\ \hline x^4+9x^2 & x^2-9 \\ \hline -9x^2 & \\ -9x^2-81 & \\ \hline 81 & \end{array}$$

Demak, $\dfrac{x^4}{x^2+9}=x^2-9+\dfrac{81}{x^2+9}$

bo‘ladi.

Shunday qilib,

$$\int \frac{x^4}{x^2+9}dx=$$

$$=\int\left(x^2-9+\frac{81}{x^2+9}\right)dx=\frac{x^3}{3}-9x+81\frac{1}{3}arctg\,\frac{x}{3}+C=\frac{x^3}{3}-9x+27arctg\,\frac{x}{3}+C.$$

2-misol. $\int\dfrac{x+3}{x^2-8x+25}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Maxrajdagi kvadrat uch haddan to‘la kvadrat ajratamiz:

$x^2-8x+25=x^2-8x+16-16+25=(x-4)^2+9,$ hamda

$x-4=t,\ dx=dt$ almashtirish kiritib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int\frac{x+3}{x^2-8x+25}dx=\int\frac{t+4+3}{t^2+9}dt=\int\frac{tdt}{t^2+9}+7\int\frac{dt}{t^2+9}=\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+9}+7\int\frac{dt}{t^2+3^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+9\right|+\frac{7}{3}arctg\,\frac{t}{3}+C=\frac{1}{2}\ln(x^2-8x+25)+\frac{7}{3}arctg\,\frac{x-4}{3}+C.$$

To‘g’ri kasr rasional funsiyalarni sodda kasrlar ko‘rinishida ifodalash.

$\dfrac{R(x)}{P(x)}$ to‘g’ri kasr rasional funksiyaning maxrajini

$P(x)=(x-a)^r\cdot(x-b)^s.....(x^2+2px+q)^t\cdot(x^2+2kx+\ell)^m.....,$

ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lsa, bu funksiyani yagona

$$\frac{R(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_r}{(x-a)^r}+\frac{B_1}{(x-b)}+...+\frac{B_s}{(x-b)^s}+...+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q}+...+$$
$$+\frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t}+\frac{F_1x+E_1}{\left(x^2+2kx+\ell\right)}+...+\frac{F_mx+E_m}{\left(x^2+2kx+\ell\right)^m}+... \quad (1)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bunda $r,s,....t,m,$ musbat butun sonlar, $a,\ b,\ p,\ q,\ k,\ \ell$, haqiqiy sonlar.

$A_1,\ A_2,....\ A_r,\ B_1,...,B_s,\ M_1,\ N_1,.....,\ M_t,\ N_t,....$ lar ayrim haqiqiy sonlar. (1) tenglikka to‘g’ri rasional funksiyaning ***sodda kasrlar orqali yoyilmasi*** deyiladi.

(1) y oyilmadagi $A_1,\ A_2,....\ A_r,\ M_1,\ N_1,.....,\ M_t,\ N_t,....$koeffisiyentlarni topish uchun uni $P(x)$ ga ko‘paytiramiz. $R(x)$ ko‘phad bilan (1) yoyilmaning o‘ng tomonida hosil bo‘lgan ko‘phad o‘zaro teng bo‘lishi uchun bir xil darajali x lar koeffisiyentlari o‘zaro teng bo‘lishi kerak. Bir xil darajali x lar koeffisiyentlarini tenglashtirib $A_1,\ A_2,....\ A_r,\ .....,\ M_1,\ N_1,....,$ noma’lum koeffisentlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu tenglamalar sistemasini yechib aniqmas koeffisiyentlarni topamiz.

Rasional funkiya yoyilmasidagi noma’lum koeffisiyentlarni bunday usul bilan topishga ***noma’lum koeffisiyentlar usuli*** deyiladi.

Bu usulni bir necha misollarda qaraymiz.

1-misol. $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ rasional funksiyani sodda kasrlar yoyilmasi ko‘rinishida yozing.

Yechish. Maxrajni $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$ chiziqli ko‘paytuvchilarga ajratib, (1) formulaga asosan, qo‘yidagicha yozamiz:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{x-2}.$$

Oxirgi tenglikni x^2-5x+6 ga ko‘paytirib $2x-1=A_1(x-2)+A_2(x-3)$ yoki $2x-1=(A_1+A_2)x-2A_1-A_2$ tenglikni hosil qilamiz. Bir xil darajali x lar koeffisiyentlarini tenglashtirib

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2, \\ -2A_1 - 3A_2 = -1 \end{cases}$$

A_1 va A_2 noma'lumlarga nisbatan, chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bundan $A_1 = 5,\ A_2 = -3$ bo'ladi. Shunday qilib,

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x-2}$$

hosil bo'ldi.

2-misol. $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ rasional kasrni, sodda kasrlar yig'indisi ko'rinishida yozing.

Yechish. (1) formulaga asosan, quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Oxirgi tenglikni $x(x^2+1)^2$ ga ko'paytirib quyidagini hosil qilamiz:

$$x^2-1 = A_1(x^2+)^2 + (M_1x+N_1)x(x^2+1) + (M_2x+N_2)x \quad \textit{ёки}$$

$$x^2-1 = (A_1+M_1)x^4 + N_1x^3 + (2A_1+M_1+M_2)x^2 + (N_1+N_2)x + A_1$$

x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 larning koeffisiyentlarini tenglashtirib

$$x^4 \div 2A_1 + M_1 = 0,$$
$$x^3 \div N_1 = 0,$$
$$x^2 \div 2A_1 + M_1 + M_2 = 1,$$
$$x^1 \div N_1 + N_2 = 0,$$
$$x^0 \div A_1 = -1$$

chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemadan $N_1 = 0,\ N_2 = 0,\ A_1 = -1,\ M_1 = 1,\ M_2 = 2$ bo'ladi. Shuning uchun yoyilma quyidagicha

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

bo'ladi.

Endi bir necha integrallarni hisoblaymiz.

3-misol. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{1}{(x-2)(x-3)}$ funksiyani $\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)$ ikkita sodda kasrning ayirmasi ko‘rinishda yozish mumkin. Shuning uchun,

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}dx = -\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right)dx = -\ln|x-2|+\ln|x-3|+C =$$
$$= \ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)+C$$

bo‘ladi.

4-misol. $\int \frac{x-2}{x^3+2x^2}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{x-2}{x^2(x+2)}$ integral ostidagi to‘g’ri rasional funksiyani sodda kasrlar yig’indisi shaklida yozamiz:

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+2}$$

oxirgi tenglikni $x^2(x+2)$ ga ko‘paytirib,

$x-2 = Ax(x+2)+B(x+2)+Cx^2$ *yoki* $x-2 = (A+C)x^2+(2A+B)x+2B$

tenglikka ega bo‘lamiz.

Endi x ning bir xil darajalilari koeffisiyentlarini tenglashtirsak, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi.

$$\begin{array}{l|ll} x^2 & A+C=0 & A+C=0 \\ x^1 & 2A+B=1 \quad \text{bundan} & 2A+B=1 \\ x^0 & 2B=-2 & B=-1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} A=1 \\ C=-1 \end{array}$$

bo‘ladi. Shunday qilib,

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{-1}{x+2}$$

Natijada

$$\int \frac{x-2}{x^3+2x^2}dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \ln|x|+\frac{1}{x}-\ln|x+2|+C = \frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$$

bo‘ladi.

Ayrim irrasional funksiyalarni integrallash.

Irrasional funksiyalarni integrallash ko‘p hollarda o‘zgaruvchini almashtirish bilan rasional funksiyalarni integrallashga keltiriladi. Bunday irrasional funksiyalarning ayrimlarini ьaraymiz.

1. $\int x^m(a+bx^n)^p$ ko‘rinishdagi integralni hisoblash talab etilsin, bunda m, n, p rasional sonlar, a va b lar no‘ldan farqli o‘zgarmaslar.

1) p butun son bo‘lsa, Nyuton binomi bo‘yicha yoyish bilan integrallanadi;

2) $\frac{m+1}{n}$ butun bo‘lsa, $a+bx^n=t^s$ almashtirish orqali rasionallashtiriladi, bunda s p kasrning maxraji;

3) $\frac{m+1}{n}+p$ butun bo‘lsa, $ax^{-n}+b=t^s$ almashtirish olinib, rasional funksiyaga keltiriladi.

1-misol. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralni $\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})dx$ ko‘rinishida yozib,

$$m=-\frac{2}{3},\ n=\frac{1}{3},\ p=\frac{1}{2},\ \frac{m+1}{n}=\frac{-2/3+1}{1/3}=\frac{1/3}{1/3}=1$$

bo‘lganligi uchun $(1+x^{1/3})=t^2$ almashtirish olsak,

$$x^{1/3}=t^2-1,\ \frac{1}{3}x^{-2/3}dx=2tdt,\quad x^{-2/3}dx=6tdt$$

bo‘ladi. Bularni berilgan integralga qo‘ysak,

$$\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2}dx=\int t\cdot 6tdt=6\int t^2dt=6\cdot\frac{t^3}{3}+C=2(1+\sqrt[3]{x})^{3/2}+C$$

bo‘ladi.

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ko‘rinishdagi integralni qaraymiz.

Bunday ko‘rinishdagi ifodalarni integrallash kvadrat uch haddan to‘la kvadrat ajratish bilan $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ yoki $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}$ jadval integrallaridan biriga keltiriladi.

3-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $x^2+2x+5=x^2+2x+1+4=(x+1)^2+4$ to‘la kvadrat ajratib, $x+1=u$ desak,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int \frac{du}{\sqrt{u^2+4}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+4}\right|+C=\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$$

bo‘ladi.

3) $\int \frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ko‘rinishdagi integral, $\frac{1}{x+\alpha}=t$ almashtirish orqali **2.** ko‘rinishdagi integralga keltiriladi.

4-misol. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{1}{x+1}=t$ bilan almashtirsak,

$$t(x+1)=1,\ tx+t=1,\ tx=1,\ x=\frac{1-t}{t},\ dx=-\frac{1}{t^2}dt$$

bo‘lib,

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}=\int \frac{t\left(\frac{-1}{t^2}\right)dt}{\sqrt{\left(\frac{1-t}{t}\right)^2+2\frac{1-t}{t}+2}}=-\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1-2t+t^2}{t^2}+\frac{2-2t}{t}+2}}=$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t+t^2+2t}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

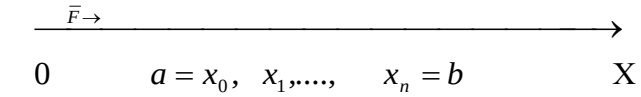
bu jadval integraldir. (Oxirgi integralni mustaqil bajarishni o‘quvchiga havola qilamiz).

Aniq integral va uning asosiy xossalari

Aniq integralga keltiriladigan masalalar haqida. Aniq integral matematik tahlilning eng asosiy amallaridan biridir.Yuzalarni, yoy uzunliklarini, hajmlarni, o‘zgaruvchan kuchning bajargan ishini hamda iqtisodning bir qancha masalalari aniq integralga keltiriladi.

O‘zgaruvchan kuchning bajargan ishi masalasi. Material nuqta F o‘zgaruvchan kuch ta’sirida OX o‘qi bo‘yicha harakatlanayotgan bo‘lsin. F kuch ta’sirida material nuqta *a* nuqtadan *v* nuqtaga o‘tganda bajarilgan ishni hisoblang. F kuch x ning funksiyasi bo‘ladi. $F(x)$ $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsin.

Yechish: $[a,b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ nuqtalar orqali $\lfloor x_{i-1}, x_i \rfloor$ šismiy kesmalarga ajratamiz.



1-chizma.

Mexanikadan ma’lumki kuch o‘zgarmas bo‘lsa, bajarilgan ish $A = F \cdot 1$, bunda F kuch miqdori, l - siljish uzunligi. Har bir qismiy kesmada bittadan nuqta tanlaymiz. Bu nuqtalardagi kuchning qiymatini $F(c_i)$larni hisoblaymiz $(i = 1, n)$. Bunda har bir qismiy kesmada bajarilgan ish

$$A_i = F(c_i)\Delta x_i$$

bo‘ladi. $[a,b]$ kesmada bajarilgan ish taqriban

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i$$

bo‘ladi.

$\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i = \lambda$ deb belgilasak, bajarilgan ishning aniq qiymati

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(c_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, *F o‘zgaruvchan kuchning bajargan ishini hisoblash* uchun (1) ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p sondagi cheksiz

kichiklar yig'indisining limitini hisoblash kerak ekan. Bunday limitni hisoblashga juda ko'p sondagi geometrik, texnik, texnologik va iqtisodiy jarayonlardagi masalalar keltiriladi.

Aniq integralning ta'rifi va uning geometrik ma'nosi.

Yuqoridagi masalani umumiy holda qaraymiz. kesmada uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin. $[a,b]$ kesmani $\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ i=1,\ n$ qismiy kesmalarga ajratamiz, har bir qismiy kesmada bittadan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nuqtalar tanlaymiz. Bu nuqtalarda $f(c_i)$ funksiya qiymatlarini hisoblab $f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n$ yig'indini tuzamiz? bu yig'indiga $y = f(x)$ fugksiya uchun $[a,b]$ kesmadagi integral yig'indi deyiladi.

$\max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i = \lambda$ belgilash kiritamiz.

Ta'rif. $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ integral yig'indining $[a,b]$ kesmaning $[x_{i-1},\ x_i](i=1,2,3,\ldots,n)$ qismiy kesmalarga bo'linish usuliga va ularda $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan $\lambda \to 0$ dagi chekli limiti mavjud bo'lsa, bu limitga $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi ***aniq integrali*** deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

simvol bilan belgilanadi.

Ta'rifga asosan

$$\int_a^b f(x) = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

bo'lib, $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u *integrallanuvchi* ya'ni bunday funksiyaning *aniq integrali* mavjuddir.

Aniq integralning asosiy xossalari

Aniq integral quyidagi asosiy xossalarga ega:

1) chekli sondagi integrallanuvchi funksiyalar algebraik yig'indisining aniq integrali qo'shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx;$$

2) o'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx;$$

3) $[a,b]$ kesmada $f(x) \geq 0$ bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

bo'ladi;

4) $[a,b]$ kesmada $f(x) \leq g(x)$ tengsizlik bajarilsa,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi;

5) c $[a,b]$ kesmadagi biror nuqta bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi;

6) m va M sonlar $y = f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi mos ravishda eng kichik va eng katta qiymatlari bo'lsa,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi;

7) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$

8) $\int_a^a f(x)dx = 0;$

9) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(n)dn$

bo‘ladi;

10) $y = f(x)$ $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, bu kesmada shunday bir c nuqta topiladiki

$$\int_a^b f(x)dx = f'(c)(b-a)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bunga o‘rta qiymat haqidagi teorema deb ham aytiladi.

Aniq integralni hisoblash. N’yuton-Leybnis formulasi.

Aniq integralning ta’rifiga asosan, ya’ni cheksiz ko‘p sondagi cheksiz kichiklar yig’indisining limitini hisoblash ancha qiyinchilikka olib keladi. Shuning uchun aniq integralni hisoblash uchun, boshqa aniqmas integral bilan aniq integral orasidagi bog’lanishga asoslangan usuldan foydalaniladi.

$F(x),[a,b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning boshlang’ich funksiyalaridan biri bo‘lsa

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a) \qquad (2)$$

formula o‘rinli bo‘lib, bunga *N’yuton-Leybnis formulasi* deyiladi. Bundan foydalanib *aniq integralning kattaligi* hisoblanadi.

Shunday qo‘yilib, aniq integralni hisoblash uchun ham, aniqmas integraldagidek, boshlang’ich funksiyani topish kerak ekan. Bunday masala bilan aniqmas integralni hisoblashda to‘laroq shug’ullandik. Demak, aniqmas integralni hisoblashdagi hamma formula va usullar o‘z kuchida qolib, undan aniq integralni hisoblashda ham foydalanamiz.

1-misol. $\int_1^4 x^2 dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int_1^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21.$

Eslatma: $y = x^2$ funksiyaning $\frac{x^3}{3}$ boshlang'ich funksiyasini oldik, buning o'rniga ixtiyoriy $\frac{x^3}{3} + C$ boshlang'ich funksiyasini olganda ham natija bir xil bo'ladi. Haqiqatan, ham

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)\Big|_1^4 = \frac{4^3}{3} + C - \left(\frac{1^3}{3} + C\right) = \frac{64}{3} + C - \frac{1}{3} - C = \frac{63}{3} = 21$$

bo'ladi. Shuning uchun bundan keyin $C = 0$ bo'lgan boshlang'ich funksiyani olamiz.

2-misol. $\int_0^5 x\sqrt{x+4}\,dx$ integralni hisoblang:

Yechish; $\sqrt{x+4} = t$ almashtirish olamiz, $x = t^2 - 4,\ dx = 2tdt$ bo'lib,

$x = 0$ bo'lganda, $\sqrt{0+4} = t,\ t = 2,\ \sqrt{5+4} = t,\ t = 3$ bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\int_0^5 x\sqrt{x+4}dx = \int_2^3 (t2-4)t2tdt = \int_2^3 (2t^4 - 8t^2)dt = 2\int_2^3 t^4dt - 8\int_2^3 t^2dt = 2\frac{t^5}{5}\Big|_2^3 - 8\frac{t^3}{3}\Big|_2^3 =$$

$$= \frac{2}{3}(3^5 - 2^5) - \frac{8}{3}(3^3 - 2^3) = \frac{2}{5}\cdot 211 - \frac{8}{3}\cdot 19 = \frac{506}{15} = 33\frac{11}{15}.$$

Demak, *aniq integralda o'zgaruvchini almashtirilganda* o'zgaruvchilar bo'yicha uning integrallash chegaralarini ham almashtirib olinsa, aniqmas integraldagidek oldingi o'zgaruvchiga qaytish kerak emas.

3-misol. $\int_0^\pi x\sin x dx$ integralni hisoblang.

Yechish: *Bo'laklab integrallash*

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b udv$$

formulasidan foydalanamiz:

$$\int_0^{\pi} x\sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi(\cos\pi + \sin x\pi) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\pi(-1) + \sin\pi - \sin 0 = \pi.$$

Aniq integralni taqribiy hisoblash

Hisoblash amaliyotida ko‘pincha boshlang’ich funksiyalari elementar bo‘lmagan, ya’ni chekli ko‘rinishda ifodalab bo‘lmaydigan funksiyalardan olingan integrallar bilan, shuningdek, jadval yoki grafik usulda berilgan funksiyalardan olingan integrallar bilan ish ko‘rishga to‘g’ri keladi. Bunday hollarda Nyuton - Leybnis formulasini qo‘llab bo‘lmaydi va integral taqribiy usullar yordamida hisoblanadi.

Hisoblash mashinalarining jadal taraqqiy etib borishi natijasida aniq integrallarni hisoblashning taqribiy usullari keng tatbiq qilinmoqda.

Integral ostidagi funksiya elementar boshlang’ich funksiyaga ega bo‘lsada, biroq, uni Nyuton - Leybnis formulasi bo‘yicha hisoblash murakkab va katta hajmdagi hisoblash ishlarini talab etadigan hollarda ham taqribiy hisoblash usullari afzal bo‘ladi.

Aniq integralni taqribiy hisoblashning bir necha usullari mavjud bo‘lib ulardan ko‘proq ishlatiladiganlari trapesiyalar va Simpson usullaridir.

Trapesiyalar formulasi

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integralni hisoblash talab etilsin $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz $[a,b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$ nuqtalar orqali n ta teng qismiy kesmalarga ajratamiz. Funksiyaning x_i nuqtalaridagi $y_i = f(x_i)$ qiymatlarini hisoblaymiz $(i = 1, n)$. $[x_{i-1}, x_i]$ qismiy

kesmalarning uzunligi $\frac{(b-a)}{n}$ kattalik integrallash qadami deyiladi. Bo‘linish nuqtalaridan $y_0,\ y_1,\ y_2, ...,\ y_n$ ordinatlarni o‘tkazamiz. Ordinatlar oxirlarini to‘g’ri chiziqlar bilan tutashtirib trapesiyalar hosil qilamiz.

Aniq integralning taqribiy qiymati uchun, hosil bo‘lgan trapesiyalar yuzlarining yig’indisini olamiz. Bu holda

$$S=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\cdot\frac{b-a}{n}+\frac{y_1+y_2}{2}\cdot\frac{b-a}{n}+$$

$$+\frac{y_2+y_3}{2}\cdot\frac{b-a}{n}+.....+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$$

Shunday qilib, natijada

$$S=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+y_3+....y_{n-1}\right] \qquad (1)$$

formulani olamiz. (1) formulaga ***trapesiyalar formulasi*** deb ataladi. Bu formulada egri chiziqli trapesiyalarning yuzlarini to‘g’ri chiziqli trapesiyalar yuzlari bilan taqriban almashtirdik. n o‘sib borishi bilan to‘g’ri chiziqli trapesiyalarning yuzi egri chiziqli trapesiyalar yuzlariga cheksiz yaqinlashib boradi.

Bu taqribiy hisoblashda yo‘l qo‘yilgan ***absolyut xato*** .

$$M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

ifodadan katta emasligini ko‘rsatish mumkin, bunda M_2, $|f''(x)|$ ning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

Simpson formulasi. $[a,b]$ kesmani $n=2m$ ta juft miqdordagi teng qismlarga bo‘lamiz. Uchta $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ nuqtalar olib ulardan parabola o‘tkazamiz. Bu parabola bilan $y=f(x)$ funksiyaning $[x_0,x_2]$ kesmadagi grafigini almashtiramiz. Xuddi shunga o‘xshash $y=f(x)$ funksiyaning grafigini $[x_2,x_4]$, $[x_4,x_6]$ va boshqa kesmalarda ham almashtiramiz.

Shunday qilib, bu usulda berilgan $y=f(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan trapesiyaning yuzini $[x_0,x_2]$, $[x_2,x_4]$, $[x_4,x_6]$,.....

kesmalarda parabolalar bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiyalar yuzlarining yig'indisi bilan almashtiriladi. Bunday egri chiziqli trapesiya ***parabolik trapesiya*** deyiladi.

Parabolik trapesiyalar yuzlarini qo'shib,

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})\right]$$

(2)

Bu formula ***Simpson (parabolalar) formulasi*** deyiladi. Simpson formulasining ***absolyut xatosi*** $M_4 \frac{(b-a)^5}{2880\,n^4}$ dan katta bo'lmaydi, bunda M_4, $\left|f^5(x)\right|$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati. Xatolarni baholash ifodalaridan ma'lumki n^4 kattalik n^2 kattalikka nisbatan tezroq o'sgani uchun Simpson formulasining xatoligi trapesiyalar formulasi xatosiga nisbatan ancha tez kamayadi.

1-misol. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ aniq integral trapesiyalar va Simpson formulalaridan foydalanib taqribiy hisoblansin.

Yechish. $[0,1]$kesmani $x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,$ $x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1$ nuqtalar yordamida 5 ta teng bo'lakka bo'lamiz. Keyin $f(x) = e^{-x^2}$ funksiyaning shu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz.

$f(x_0) = f(0) = e^0 = 1,$ $f(x_1) = f(0.2) \approx 0.96079,$

$f(x_2) = f(0.4) \approx 0.85214,$ $f(x_3) = f(0.6) \approx 0.69768,$

$f(x_4) = f(0.8) \approx 0.52729,$ $f(x_5) = f(2) \approx 0.36788.$

Trapesiyalar formulasi bo'yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{5}\left[\frac{1+0.36788}{2} + 0.96079 + 0.85214 + 0.69769 + 0.52729\right] = 0.74805.$$

Simpson formulasi bo‘yicha, hisoblash uchun $[0,1]$ kesmani $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1$ nuqtalar orqali 4 ta teng bo‘laklarga ajratamiz va bu nuqtalarda funksiyaning qiymatlari

$$y_0 = 1, \quad y_1 = (0.25) \approx 0.9394, \quad y_2 = (0.5) \approx 0.7788,$$

$$y_3 = (0.75) \approx 0.5698, \quad y_4 = (1) \approx 0.3679$$

bo‘ladi.

Simpson formulasiga asosan:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{12}\left[1 + 0.3679 + 4(0.9394 + 0.5698) + 2 \cdot 0.7788\right] \approx 0.7469$$

bo‘ladi.

Aniq integralning tatbiqlari

Aniq integral yordamida yassi figuralar yuzlarini hisoblash

$y = f(x)$ funksiya grafigi, $x = a,\ x = b$ ikkita to‘g’ri chiziqlar va OX o‘qi bilan chegaralangan figuraga ***egri chiziqli trapesiya*** deyiladi. Bunday egri chiziqli trapesiyaning yuzi

$$S = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x)dx \quad (1)$$

formula bilan hisoblanadi (1-chizma)

Umumiy hol, ya’ni $y_1 = f_1(x),\ y_2 = f_2(x),\ f_2(x) \geq f_1(x)$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx \quad (2)$$

aniq integralga teng bo‘ladi .

$x = \varphi(y),\ y = c,\ y = d,\ x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza

$$S_2 = \int_c^d x\,dy = \int_c^d \varphi(y)\,dy \quad (3)$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Egri chiziq parametrik

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

tenglama bilan berilgan bo‘lsa, yuza

$$S = \int_{t_2}^{t_2} y(t)x(t)dt \quad (4)$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

4-misol. $xy = 8,\ x = 1,\ x = e,\ y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani hisoblang

Yechish. $y = 8/x$ bo‘lib, (3) formulaga asosan,

$$S_1 = \int y dx = \int \frac{8}{x} dx = 8\ln x = 8(\ln e - \ln 1) = 8.$$

5-misol. $y = x^2, y^2 = x$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani toping.

Yechish: $\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x \end{cases}$

tenglamalar sistemasidan $x^4 = x, x^4 - x = 0,\ x_1 = 0; x_2 = 1$ kesishish nuqtalarining abssissalari bo‘lib, bu yuza

$$S = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right]dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{3}$$

bo‘ladi.

6-misol. Ellipsning

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

parametrik tenglamasidan foydalanib uning yuzini toping.

Yechish. Ellips koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrikligidan foydalanib, hamda $x = 3\cos t$ tenglamada $x = o, x = 3$ bo‘lganda

$t_1 = \pi/2 \quad , t_2 = 0$ bo‘lganligini hisobgaolib,

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y dx = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t(-3\sin t)dt = 24\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 24\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt =$$

$$= 12t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{12}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} 12\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - 6(\sin\pi - \sin 0) = 6\pi.$$

Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash. To‘g’ri burchakli koordinatlar sistemasida $y = f(x)$ $[a,b]$ kesmada silliq (ya’ni $y = f(x)$ hosila uzluksiz) bo‘lsa, bu egri chiziq yoyining uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \quad (5)$$

formula yordamida hisoblanadi.

Egri chiziq parametrik tenglama

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

bilan berilgan bo‘lsa, yoy uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Silliq egri chiziq qutb koordinatalarida $r = r(\varphi),\ (\alpha \le \varphi \le \beta)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, yoy uzunligi

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi \quad (6)$$

formula bilan hisoblanadi.

7-misol. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

astroida yoyining uzunligini toping.

Yechish: Astroida koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lganligi uchun 1/4 yoy uzunligini topamiz.

Oshkormas funksiya hosilasiga asosan

$\frac{2}{3x^{-\frac{1}{3}}} + \frac{2}{3y^{-\frac{1}{3}}} y' = 0$ bundan, $y' = -\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$. Yoy uzunligi formulasiga asosan,

$$l = 4\int_0^a \sqrt{1+(y')^2}\,dx = 4\int_0^a \sqrt{1+\left(\sqrt[3]{y}/\sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx =$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx = 4\int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx = 4\sqrt[3]{a}\int_0^a x^{-\frac{1}{3}}dx = 4\sqrt[3]{a}\,\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_0^a = 4\frac{3}{2}\sqrt[3]{a}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}-0\right) = 6a.$$

Aylanma jism hajmini hisoblash

$y = f(x),\ x = a,\ x = b,\ y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmi

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx \quad (7)$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

$x = \varphi(y),\ y = c,\ y = d,\ x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmi

$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy \quad (8)$$

formula bilan hisoblanadi.

8-misol. $y^2 = 2x$ parabola, $x = 3$ to‘g’ri chiziq va OX o‘qi bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmini hisoblang.

Yechish. Masala shartiga ko‘ra x o dan 3 gacha o‘zgaradi. Demak,

$$V_x = \pi\int_0^3 y^2 dx = \pi\int_0^3 2xdx = \pi x^2\Big|_0^3 = \pi(3^2 - 0^2) = 9\pi\ .$$

9-misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

Yechish. Bunday jismga aylanma ellipsoid deyiladi. Ellips tenglamasidan

$x^2 = a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$ bo‘lib, integralning chegaralari $c=-b,\ d=b$ bo‘ladi. (8) formulaga asosan,

$$V_y = \pi\int_{-b}^{b} a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy = \pi a^2\int_{-b}^{b} dy - \frac{\pi a^2}{b^2}\int_{-b}^{b} y^2 dy = \pi a^2 y\Big|_{-b}^{b} - \pi\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{-b}^{b} =$$

$$= \pi a^2\left[b-(-b)\right] - \pi\frac{a^2}{3b^2}\left[b^3-(-b)^3\right] = 2\pi a^2 b - \frac{2}{3}\pi a^2 b = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Demak, $V_y = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

$a=b=R$ bo‘lsa, shar hosil bo‘lib $V_{uu} = \frac{4}{3}\pi R^3$ bo‘ladi.

Aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlari

Endi aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlarini qaraymiz.

1). Ma’lumki, ***mehnat unumdorligi*** ish kuni mobaynida o‘zgaruvchi miqdordir. Mehnat unumdorligi $y=f(x)$ funksiya bilan ifodalansin, bunda x ish kunining boshlanishidan hisoblangan vaqt oralig’i, $f(x)$ esa vaqtning shu onidagi (momentidagi) ***mehnat unumdorligini*** bildiradi. Mehnat unumdorligining ish kunining 4-soatidagi hajmini hisoblash masalasi qo‘yilgan bo‘lsin.

Vaqtning (3,4) oralig’ini eng kattasining uzunligi Δx bo‘lgan oraliqlarga bo‘lamiz va $f(x)$ funksiya bu kichik oraliqlarda o‘zgarmas desak ishlab chiqarish mehnt unumdorligini $f(x)\,\Delta x$ ko‘paytmaga teng bo‘ladi. Shunday qilib, ish kunining 4-soatidagi ishlab chiqarish mehnat unumdorligi

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{3}^{4} f(x)\,\Delta x = \int_{3}^{4} f(x)dx$$

tenglik bilan ifodalanadi.

2). Mahsulotlar omboriga vaqt birligida keltiriladigan ***mahsulot miqdorini*** $f(x)$ va mahsulot omborga kelib tushushidan boshlangan vaqt birligi x bo‘lsa, x dan $x+\Delta x$ vaqt oralig’idagi omborga $f(x)\,\Delta x$

birlik mahsulot keladi. Demak, omborga mahsulot uzluksiz kelib tursa, undagi ***tovarning zahirasi***

$$\int_0^x f(x)dx$$

bilan ifodalanadi.

3). Mashinasozlik sanoati biror xildagi stanoklarni ishlab chiqaradi va yillik ishlab chiqarishi o‘zgarmas a ga teng bo‘lib, x shu stanoklar ishlab chiqarilgan yillar bo‘lsin.

Vaqtning t onidagi (momentidagi) stanoklar soni (ular ishdan chiqmagan deb olinadi).

$$\int_0^t adx = [ax]_0^t = at$$

bo‘ladi. Agar ***mahsulot ishlab chiqarish hajmi*** arifmetik progressiya bo‘yicha o‘suvchi ya’ni

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

bo‘lsa, stanoklar soni

$$\int_0^t (a_0 + a_1 x)dx = \left[a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} \right]_0^t = a_0 t + \frac{a_1 t^2}{2}$$

tashkil etadi.

4). Yillik *daromad t vaqtning funksiyasi* $D = f(x)$ *bo‘lsin*. Prosent (foiz) me’yori ulushi i bo‘lib, foizlar ustiga qo‘shib uzluksiz hisoblanadi. Daromadning t yilga hisoblangan diskontli hajmini toping. Diskont deb oxiri jami mablag’ bilan boshlang’ich mablag’ orasidagi farqqa aytiladi.

Bu miqdorni hisoblash uchun, vaqt oralig’i t ni n ta teng bo‘laklarga ajratamiz. Vaqtning juda ham kichik Δt oralig’ida daromadni o‘zgarmas deb $f(t)\,\Delta t$ ga teng qilib olish mumkin. Uzluksiz ustiga qo‘shib hisoblangan foizlarda diskontli daromad quyidagicha hisoblanadi:

$$\frac{f(t)\Delta t}{e^{it}} = f(t)\Delta t e^{-it}.$$

$(0,t)$ vaqt oralig’idagi diskontli daromad miqdori

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{0}^{t} f(t)e^{-it}\Delta t=\int_{0}^{t} f(t)e^{-it}dt$$

bo‘ladi.

Xususiy holda, yillik daromad o‘zgarmas bo‘lsa, ya’ni $f(x)=a$ bo‘lsa, diskontli daromad

$$d=\int_{0}^{t} ae^{-it}dt=a\int_{0}^{t} fe^{-it}dt=a\left[-\frac{1}{i}e^{-it}\right]_{0}^{t}=\frac{a}{i}\left(1-e^{-it}\right)$$

bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar.

O‘zgaruvchini almashtirish, bevosita integrallash, bo‘laklab integrallash, bo‘laklab integrallashning maqsadga muvofiqligi. Boshlang’ich funksiya, aniqmas integral, integrallash, aniqmas integral xossalari, asosiy integrallar jadvali. Kasr rasional funksiyalar, to‘g’ri va noto‘g’ri kasr rasional funksiyalar, ko‘p hadni ko‘p hadga bo‘lish, sodda kasrlar, rasional funksiya yoyilmasi, noma’lum koeffisiyentlar usuli, irrasional funksiyalar**,** yuzalarni hisoblash, egri chiziqli trapesiya, egri chiziq yoyining aylanma jism hajmi, o‘zgaruvchan kuchning bajargan ishi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Boshlang’ich funksiya qanday funksiya?
2. Boshlang’ich funksiya va aniqmas integral orasida qanday bog’lanish bor?
3. Integrallash amali nima?
4. Aniqmas integral qanday xossalarga ega?
5. Asosiy integrallar jadvali nimalardan iborat?
6. Integrallash to‘g’ri bajarilganligini qanday tekshirish mumkin?
7. Butun rasional funksiya nimadan iborat?
8. Kasr rasional funksiyalar qanday?
9. To‘g’ri va noto‘g’ri kasr rasional funksiyalr deb nimaga aytiladi?
10. Noto‘g’ri kasr rasional funksiyani integrallash, to‘g’ri rasional funksiyani integrallashga qanday qilib keltiriladi?
11. Sodda kasr rasional funksiyalar deb nimaga aytiladi?
12. Sodda kasr rasional funksiyalar qanday integrallanadi?

13. Aniqmas koeffisiyentlar usuli nima?

14. Qanday funksiyalar sinfiga irrasional funksiyalar deyiladi?

15. Irrasional funksiyalar qanday integrallanadi?

16. Qanday masalalar aniq intgralga keltiriladi?

17. Integral yig’indi qanday tuziladi?

18. Aniq integral deb nimaga aytiladi?

19. Aniq integral qanday belgilanadi?

20. Funksiya integrallanuvchi bo‘lishi uchun qanday xossaga ega bo‘lishi kerak?

21. Aniq integralning asosiy xossalari nimalardan iborat?

22. Nyuton-Leybnis formulasini yozing?

23. Aniq integralni bo‘laklab integrallash nimadan iborat?

24. Aniq integral yordamida qanday yuzalarni hisoblash mumkin?

25. Egri chiziq yoyining uzunligi qanday formula yordamida hisoblanadi?

26. Aylanma jism hajmini hisoblash formulasi nimadan iborat?

27. O‘zgaruvchan kuchning bajargan ishi aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?

28. Mehnat unumdorligi funksiyasi nima?

29. Ishlab chiqarish mehnat unumdorligini aniq integral yordamida hisoblash mumkinmi va qanday?

30. Omborga keltirilgan mahsulotlar miqdorini aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?

31. Mahsulot ishlab chiqarish arifmetik progressiya bo‘yicha o‘suvchi bo‘lsa, uning hajmi aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?

32. Yillik daromad funksiyasi nima?

33. Diskontli daromad nima va u aniq integral yordamida qanday hisoblanadi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $\int \frac{5x^8+6}{x^4}dx$; 2. $\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)dx$; 3. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx$

4. $\int \frac{x^2+\sqrt{x}+3dx}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; 5. $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$; 6. $\int\left(5^x+\frac{5^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx$; 7. $\int \frac{5+3tg^2x}{\sin^2 x}dx$;

8. $\int\left(\frac{4}{9+x^2}-\frac{5}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$ 9. $\int \frac{dx}{x^2-49}$; 10. $\int \frac{dx}{x^2+16}$;

11. $\int\left(\frac{5}{\sqrt{9-x^2}}-\frac{3}{\sqrt{x^2+3}}\right)dx$; 12. $\int\left(\frac{7}{x^2+7}-\frac{6}{x^2-3}\right)dx$.

2. Ushbu integral hisoblang.

1. $\int \sin 3xdx$. 2. $\int \frac{2x-7}{x^2-7x+5}dx$.

3. $\int e^{-x^3}x^2dx$. 4. $\int \frac{x^2}{1+x^3}dx$. 5. $\int (e^x+e^{-\frac{x}{2}})dx$. 6. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$.

7. $\int (5-2x)^9 dx$. 8. $\int \sqrt[3]{7-3x}dx$. 9. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{6-x}}dx$. 10. $\int \cos(1-3x)dx$.

11. $\int \sin(5x+7)dx$. 12. $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$. 13. $\int 3^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$. 14. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

15. $\int \frac{1-3\sin x}{\cos^2 x}dx$. 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-5x}}$. 17. $\int x^2 \sin xdx$. 18. $\int x\ln xdx$. 19. $\int arctgxdx$.

20. $\int \arcsin xdx$. 21. $\int x^2e^{2x}dx$. 22. $\int e^x \sin xdx$. 23. $\int (x+3)\sin xdx$.

24. $\int x\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$. 25. $\int xarctgxdx$. 26. $\int \frac{dx}{(3x+1)^3}$. 27. $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+6}dx$.

3. Ushbu rasional funksiyalarni integrallang.

1) $\int \frac{x^3}{x-3}dx$; 2) $\int \frac{x^4}{x^2+25}dx$; 3) $\int \frac{x-5}{(x-2)(x+4)}dx$; 4) $\int \frac{2x+9}{x^2+x+2}dx$;

5) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx$; 6) $\int \frac{5x-1}{2x^2+x-3}dx$; 7) $\int \frac{2x+5}{(x-4)(x+5)}dx$; 8) $\int \frac{6x-7}{x^3-4x^2+4x}dx$.

2. Ushbu irrasional funksiyalarni integrallang.

1) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx$; 2) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx$; 3) $\int \frac{7x-5}{\sqrt{\sqrt{5+2x-x^2}}}dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$; 5) $\int \frac{\sqrt{x}+3}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}dx$.

1. Aniq integralni hisoblang

1. $\int_2^4 (x^3+x)\,dx$. 2. $\int_1^e \frac{1}{x}dx$. 3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos^2 a}$. 4. $\int_4^9 \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

5. $\int_{-5}^{2} \frac{dx}{x^2+4x-21}$. 6. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$. 7. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$. 8. $\int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}}dx$.

9. $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$. 10. $\int_{\pi}^{0} x\cos x\,dx$.

1. Qo‘yidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning yuzlarini hisoblang.

1) $y=x^2-6x+8,\ \ y=0$; 2) $x=4-y^2,\ \ x=0$; 3) $y=\ln x,\ \ x=e,\ \ y=0$;

4) $y=\frac{x^2}{2}$ parabola, $x=1,\ \ x=3$ to‘g’ri chiziqlar va OX o‘qi bilan chegaralangan;

5) $x=2-y^2-y^2,\ \ x=0$; 6) $y=2-x^2,\ \ y=x^2$;

7) $y=x^2+4x,\ y=x+4$; 8) $x=3t^2,\ \ y=^3\ t-t^3$.

2. $xy=4,\ \ x=1,\ \ x=4,\ \ y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

3. 1) $y^2=(x+4)^3$ *va* $x=0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

2) $y=x^3, x=0, y=8$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

IV BOB. BIRINCHI TARTIBLI VA IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

4.1-§. Birinchi tartibli va ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Differensial tenglama haqida tushunchalar

Noma'lum funksiya va uning hosilalarni o'z ichiga olgan tenglama ***differensial tenglama*** *deyiladi. Masalan*

$$\frac{dy}{dt} = 6y + 27$$

Bu differensial tenglamaning yechishdan *t* o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan *y* funksiya topiiadi. Bu esa bizga *t* o'zgaruvchining ixtiyoriy qiymatida *y* ni qiymatini topishga yordam beradi.

Differensial tenglamaga oid juda ko'p tenglamalar mavjud, ammo biz bu yerda faqat birinchi tartibli chiqizli differensial tenglama bilan cheklanamiz. Birinchi tartibli differensial tenglama deb, faqat noma'lumning hadning birinchi tartibli hosilasi bor tenglama tushuniladi. Shunday qilib, birinchi tartibli differensial tenglama d*y/*d*t* shartni o'z ichiga oladi, lekin quyidagicha d^2y/dt^2 hosila bo'lishi kerak emas. Chiziqli differensial tenglama deb *y (*d*y/*d*t)* ko'paytmani o'z ichiga olmaganga aytiladi. Iqtisodiyotdagi matematik masalalarning aksariyati yuqori tartibli va chiziqsiz differensial tenglamalarni o'z ichiga oladi.

Bizga ma'lumki birinchi tartibli hosila qatnashgan birinchi tartibli differensial tenglamada qoida bo'yicha noma'lum funksiyani o'zi ham tenglamada qatnashishi mumkin. Shunday qilib, birinchi tartibli differensial tenglama quyidagicha bo'lishi mumkin:

- *O'zgarmas(bu nolga teng bo'lishi mumkin)*
- *y noma'lum funksiya*
- *dy/dt birinchi tartibli hosila*

Ta'rif*. Differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchi(lar), noma'lum funksiya va bu funksiya hosilalari yoki differenstiallarini bog'lovchi tenglamaga aytiladi.*

Ta'rif. *Agar izlanayotgan funksiya bir o'zgaruvchili bo'lsa, tenglama oddiy differensial tenglama, ko'p o'zgaruvchili bo'lsa-xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.*

Ta'rif. *Differensial tenglamaning tartibi deb unda qatnashayotgan hosilalarning eng yuqori tartibiga aytiladi.*

Umumiy holda n-tartibli oddiy differensial tenglama quyidagicha ifodalanadi: $F\left(x, y, y', \cdots y^{(n)}\right) = 0$

Umumiy, xususiy va maxsus yechim

Ta'rif. *Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning yechimi deb tenglamani ayniyatga aylantiruvchi* $y = \varphi(x)$ *funksiyaga aytiladi.*

Ta'rif. $y' = f(x, y)$ *tenglamaning umumiy yechimi deb* c *o'zgarmasning ixtiyoriy qiymatida bu tenglamani qanoatlantiruvchi* $y = \varphi(x, c)$ *funksiyalar majmuiga aytiladi.*

Ta'rif. $\{\varphi(x, c)\}$ *- differensial tenglamaning umumiy yechimi bo'lsin.* $y' = f(x, y)$ *tenglamaning* D *sohasidagi xususiy yechimi deb* $c = c_0$ *o'zgarmas qiymatda olingan* $y = \varphi(x, c_0)$ *funksiyaga aytiladi.*

Ta'rif. *Umumiy yechimlar oilasidan ajratib bo'lmaydigan yechimga maxsus yechim deyiladi.*

O'zgaruvchisi ajraladigan va unga keltiriladigan differensial tenglamalar

Ko'rsatkichli funksiya differensial tenglama yechimini olishda yordam berishi mumkin. Ko'rsatkichli funksiya quyidagi xossaga ega ekanligi bizga ma'lum

agar $y = e^t$ bo'lsa, unda $\frac{dy}{dt} = e^t$ bo'ladi.

Bunda, differensiallashning ketma-ketlik usuli yordamida ixtiyoriy *b* o'zgarmas uchun quyidagi o'rinli:

agar $y = e^{bt}$ bo'lsa, unda $\frac{dy}{dt} = be^{bt}$ bo'ladi.

Shuning uchun, agar differensial tenglamada o'zgarmas hadi bo'lmasa va quyidagi ko'rinishda bo'lsa

$$\frac{dy}{dt} = by$$

unda bu differensial tenglamaning yechimi quyidagicha bo'lishi mumkin.

$$y = e^{bt}$$

Chunki bu quyidagini berishi mumkin

$$\frac{dy}{dt} = be^{bt} = by$$

Masalan, agar quyidagi differensial tenglamani yechimini topsak,

$$\frac{dy}{dt} = 5y$$

unda bitta quyidagi yechim mos keladi

$$y = e^{5t}$$

chunki quyidagini beradi

$$\frac{dy}{dt} = 5e^{5t} = 5y$$

Shunga qaramasdan, boshqa yechimlari ham mavjud.Masalan,

agar $y = 3e^{5t}$ bo'lsa, unda $\frac{dy}{dt} = 5\left(3e^{5t}\right) = 5y$ bo'ladi

agar $y = 7e^{5t}$ bo'lsa, unda $\frac{dy}{dt} = 5\left(7e^{5t}\right) = 5y$ bo'ladi.

Umuman olganda, agar boshlang'ich yechimga e^{5t} ga ixtiyoriy o'zgarmas parametrni ko'paytirib,hamda uni differensiallasak yana o'sha yechimni olamiz.

Shuning uchun, quyidagi ixtiyoriy differensial tenglama uchun

$$\frac{dy}{dt} = by$$

uning ***umumiy yechimini*** $y = Ae^{bt}$ ko'rinishda olishimiz mumkin, bu yerda *A* ixtiyoriy o'zgarmas.

Bu quyidagicha bo'lishi kerak:

$$\frac{dy}{dt} = bAe^{bt} = by$$

Agar *t* ning aniq bir qiymatida *y* ma'lum bo'lsa, unda *A* qiymatini topish mumkin. Bu esa bizga ***xususiy yechimini*** topishga imkon beradi.

Agar *t=0* da *y* qiymati ma'lum bo'lsa, unda uni aniqlash juda oson bo'ladi. Masalan, quyida berilgan differensial tenglamaning

$$\frac{dy}{dt} = 5y$$

umumiy yechimi

$$y_t = Ae^{5t} \qquad (1)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda agar *t* = 0 bo'lsa, unda $y_0 = 12$ qiymatni qabul qilsin. Topilgan qiymatlarni (1) tenglikka qo'yib quyidagini olamiz

$$y_0 = 12 = Ae^0$$

biz bilamizki $e^0 = 1$ bundan

$$12 = A$$

Topilgan qiymatni (1) differensila tenglamaning umumiy yechimiga qo'yib, biz aniq yechimni olamiz

$$y_t = 12e^{5t}$$

Bu aniq yechimni *t* ixtiyoriy qiymatida y_t qiymatini prognozlashda foydalanishimiz mumkin. Masalan, agar *t* = 3 bo'lsa, unda

$$y_3 = 12e^{5(3)} = 12e^{15} = 12\left(3,269,017.4\right) = 39,228,208$$

bo'ladi.

Misol. d*y*/d*t* = 1.5*y* differensial tenglamani yeching. Hamda differensila tenglama yechimidan foydalanib, *t=0* da *y*= 34 qiymatni qabul qilsa, uning aniq yechimini toping. Aniq yechim yordamida *t* = 7da *y* qiymatini aniqlang.

Yechish. Yuqorida tushuntirilgan usuldan foydalanib, berilgan differensial tenglamaning yechimi quyidagicha

$$y_t = Ae^{1.5t}$$

Agar *t* = 0 bo'lsa, unda

$$y_0 = 34 = Ae^0$$

bo'ladi. Bundan

$$34 = A$$

Deamk aniq yechim quyidagicha bo'ladi:

$$y_0 = 34e^{1.5t}$$

Agar $t = 7$ bo'lsa, unda aniq yechimdan foydalanib, quyidagini olamiz:

$$y_7 = 34e^{1.5(7)} = 34e^{10.5} = 34(36,315.5) = 1,234,727$$

Birinchi tartibli differensial tenglama

Ta'rif. *Birinchi tartibli differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchi, noma'lum funksiya va bu funksiya birinchi tartibli hosilasi yoki differenstialini bog'lovchi tenglamaga aytiladi.*

Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarning umumiy ko'rinishi :

$$F(x, y, y') = 0$$

Hosilaga nisbatan yechilgan oddiy differensial tenglama:

$$y' = f(x, y)$$

Ta'rif. *Ushbu* $y' = f_1(x) f_2(y)$ *ko'rinishdagi tenglamalar o'zgaruvchisi ajralgan differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda* $f_1(x),\ f_2(y)$ *- uzluksiz funksiyalar*

Bu tenglamani yechish uchun «o'zgaruvchini ajratish usuli»ni qo'llaymiz:

y' hosilani uning ekvivalient formasi dy/dx ga almashtirib, tenglikning ikkala tomonini $\frac{dx}{f_2(y)}$ ga ko'paytiriladi : $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$.

Tenglikning ikkala tomonini integrallasak, $\int dy / f_2(y) = \int f_1(x)dx + C$,bu yerda C -o'zgarmas kattalik.

Misol. $y' = \frac{x\left(\sqrt{y^2+1}\right)}{y}$ tenglamaning (0,1) nuqtadan o'tuvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. O'zgaruvchilarni ajratamiz: $ydy / \sqrt{y^2+1} = xdx$.

Bundan, $\int ydy / \sqrt{y^2+1} = \int xdx + C,$ demak, $\sqrt{y^2+1} = \frac{x^2}{2} + c$

$y^2 + 1 = (\frac{x^2}{2} + c)^2 \quad y = \sqrt{(\frac{x^2}{2} + c)^2 - 1}$

(0,1) nuqtadan o'tuvchi yechim I uchun $C = \pm\sqrt{2}$ topiladi.Demak, $y = \sqrt{\left(x^2/2 + \sqrt{2}\right)^2 - 1}$.

Bir jinsli va unga keltiriladigan differensial tenglamalar

Ta'rif. *Agar* $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m f(x,y)$ *ayniyat o`rinli bo`lsa,* $f(x,y)$ *m o'lchovli bir jinsli funksiya deyiladi.*

Ta'rif. *Agar* $P(x,y)$ *va* $Q(x,y)$ *bir xil o'lchovli bir jinsli funksiyalar bo`lsa, u holda* $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ *birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama deyiladi.*

Bu tenglama $y=ux$ alamshtirish yordamida, bu yerda *u* yangi nomalumli funksiya, o`zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

Masalan. Differensili tenglamani yeching . $y' = \frac{x}{y}+\frac{y}{x}$

Yechish: $y=ux$ almashtirishni bajarib $u+xu' = 1/u+u$ *yoki* $xu' = \frac{1}{u}$ ni hosil qilamiz. Bundan $udu = \frac{dx}{x}$ *yoki* $\frac{1}{2}u^2=\ln|Cx|$. Dastlabki o'zgaruvchilarga qaytib $y^2=x^2\ln(C^2x^2)$ yoki $y=\pm x\sqrt{\ln(c^2x^2)}$ hosil bo'ladi.

Ushbu $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$ ko'rinishdagi tenglamalar bir jinsli tenglamaga keltiriladi.

Agar $c_1=c=0$ bo'lsa, u holda $\frac{dy}{dx}=\frac{a+b\frac{y}{x}}{a_1+b_1\frac{y}{x}}$ - bir jinsli tenglama hosil bo'ladi.

Agar $c\neq 0, c_1\neq 0$ bo'lsa, $x=x_1+h$, $y=y_1+k$ deb $\frac{dy}{dx}=\frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1}$ bo'ladi.

H va k ni $\begin{cases}ah+bk+c=0\\a_1h+b_1k+c_1=0\end{cases}$ tenglik o'rinli bo'ladigan qilib tanlaymiz.

U holda $\frac{dy}{dx}=\frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1}$ - bir jinsli tenglamani hosil qilamiz.

Agar $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$ bo'lsa, $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}$.Bu holda z=ax+by deb $\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$.

Chiziqli differensial tenglamalar

Agar o'zgarmas nolga teng bo'lmasa va quyidagi ko'rinishga ega bo'lsa

$$\frac{dy}{dt} = by + c$$

u holda yechim ikki qismdan iborat:
(i) bir jinsli bo'lgan qism yechimi
(ii) xususiy yechim .

Bir jinsli bo'lmagan yechim (CF) yuqorida ko'rsatilgan o'zgarmas koeffitsientli differensial tenglama yechimi bilan bir xil, ya'ni $y_t\big| = Ae^{bt}$

.

Xususiy yechim (PS) to'liq differensial tenglamaning ixtiyoriy aniq yechimi hisoblanadi. Odatda u xususiy integrali deb ham nomlanadi. Ko'pkina iqtisodiy masalalarda noma'lum funksiyaning so'nggi muvozanat qiymatini aniq yechimda foydalanishingiz mumkin.
Shunday qilib, *umumiy yechim* (GS) ikki yechimdan iborat, ya'ni

GS = CF + PS

Bu quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$y_t = Ae^{bt} + PS$$

t biror bir qiymatida biror bir qiymatida biror bir qiymatida *y* aniqlangan bo'lsa, unda ixtiyoriy o'zgarmas *A* qiymatini hisoblash mumkin. Aniqlangan *A* qiymat uchun hosil bo'lgan yechim umumiy yechimning ***aniqlangan yechimi*** deyiladi(DS).

Iqtisodiy modelda bu aniqlangan yechimni quyidagicha yozib olish mumkin

y = {muvozanatdan og'ishni ko'rsatuvchi funksiya} + {muvozanat qiymati}

Quyida berilgan misollar orqali bu usulni qanday qo'llanilganligi ko'rsatilgan.

Ta'rif. *Birinchi tartibli chiziqli tenglama deb* $y' + p(x)y = q(x)$ *ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda* $p(x), q(x)$ *-uzluksiz funksiyalar.*

Bu tenglamani «o'zgarmasni variatsiyalash usuli» bilan yechamiz.

Dastlab, bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi topiladi: $y' + p(x)y = 0$

Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir.Shuning uchun $y \neq 0$ deb $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$, $y = c\,e^{-\int p(x)dx}$ Endi C ni x ning funksiyasi, deb qaraymiz: .

C=C(x), $y = c(x)e^{-\int p(x)dx}$,(«o'zgarmasni variatsiyalash» deb shu jarayon ko'zda tutiladi).

Bu ifodani berilgan tenglamaga qo'yib soddalashtirsak, $c'(x) = q(x)\ e^{\int p(x)dx}$.

Ushbu tenglikning ikkala tomonini integrallasak, $c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1$, C_1 -const.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz: $y(x) = c_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$.

Misol. Differensili tenglamani yeching . $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$.

Yechish: Avval $y' - \frac{2}{x}y = 0$ niyechamiz.

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| \Rightarrow y = cx^2$.

$C = C(x)$, u holda $y = C(x)x^2$ uni berilgan tenglamaga qo`yib, $u(x)$ ni topamiz: $C'x^2 - 2xC - \frac{2}{x}x^2C = 2x^3 \Rightarrow C' = 2x \Rightarrow C = x^2 + C_1$ bundan berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $y = (x^2 + C_1)x^2$.

Bernulli tenglamasi

Ta'rif. $y' + p(x)y = q(x)y^n$, $n = const$ *ko'rinishidagi tenglamaga Bernulli tenglamasi deyiladi.*

Agar $n = 0$ bo'lsa, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan, $n = 1$ da chiziqli, bir jinsli tenglama hosil bo'ladi. Shuning uchun (8) da $n \neq 0,\ n \neq 1$ deb faraz qilinadi. $z = y^{1-n}$, almashtirish Bernulli tenglamasini chiziqli tenglamaga keltiradi, bunda $z' = (1-n)y^{-n}y'$, $z' + (1-n)\,pz = (1-n)\,q$.

Misol. Differensili tenglamani yeching . $y' + xy = xy^3$.

Yechish: Bu tenglama Bernulli tenglamasidir $n=3$. $z=y^{-2}$ almashtirishni bajaramiz. U holda $z'=-2y^{-3}y'$. $z'+(-2)xz=-2x$ .Bu tenglamaning umumiy yechimini topamiz: $z(x)=Cx^2+1$ .Natijada ushbu $y=\pm\left(Cx^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}$ yechimni olamiz.

Yuqori tartibli differensial tenglamalar

Ta'rif*. n- tartibli oddiy differensial tenglama deb,* $F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$ *ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda* x*-erkli o'zgaruvchi,* y*-izlanayotgan funksiya,* $y',y'',...,y^{(n)}$*-birinchi, ikkinchi va h.k n- tartibli hosilalar.*

n- tartibli hosilaga nisbatan yechilgan tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',..,y^{(n-1)}\right)$$

n-tartibli tenglama uchun ham mavjudlik va yagonalik teoremasi o'rinli.

Teorema*. Agar* $y^{(n)}=f\left(x,y,y',..,y^{(n-1)}\right)$ *tenglamada* $f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$ *funksiya va uning* $y,y',...,y^{(n-1)}$ *argumentlari bo'yicha xususiy hosilalari* $x=x_0,y=y_0,y'=y_0',...,y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}$ *qiymatlarni o'z ichiga oluvchi biror sohada uzluksiz funksiyalar bo'lsa,otenglamaning* $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',...,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ *shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagonadir.*

$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',...,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ - boshlang'ich shartlar deyiladi.

Tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlar bilan yechimini qidirish masalasi Koshi masalasi deyiladi.

Ta'rif. *Tenglamaning umumiy yechimi deb shunday* $y=\phi(x,c_1,c_2,...,c_n)$ *funksiyalar to'plamiga aytiladiki, ular* $\tilde{n}_1,\tilde{n}_2,...,c_n$ *o'zgarmaslarning ixtiyoriy qiymatida tenglamani qanoatlantirib, boshlang'ich shartlarga bo'ysunsa.*

Ta'rif. *Tenglamaning xususiy yechimi deb* $\tilde{n}_1,\tilde{n}_2,...,c_n$ *o'zgarmaslarning tayin* $\tilde{n}_{11}^0,\tilde{n}_2^0,...,c_n^0$ *qiymatlaridagi* $y=\phi\left(x,\tilde{n}_1^0,\tilde{n}_2^0,...,c_n^0\right)$ *funksiyasiga aytiladi.*

Tartibi pasayadigan yuqori tartibli differensial tenglamalar

1. $y^{(n)} = f(x)$ ko'rinishidagi tenglamalarni bevosita n marta x bo'yicha integrallash yordamida umumiy integrali topiladi.

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + c_1, y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x}\left(\int_{x_0}^{x} f(x)dx\right)dx + c_1(x-x_0) + c_2, ...,$$

$$y = \int_{x_0}^{x}...\int_{x_0}^{x} f(x)dx..dx + \frac{c_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + ... + c_n.$$

2. $y'' = f(x, y')$ ko'rinishidagi tenglamalarni $y' = p(x)$ deb ,tartibini bittaga pasaytirish mumkin: $p' = f(x, p)$.Bu tenglamani integrallab,p=p(x,c_1) umumiy yechimni topamiz. $y' = p(x)$ munosabatdan esa $y = \int p(x, c_1)dx + c_2$ umumiy integralni hosil qilamiz.

3. $y'' = f(y, y')$ ko'rinishidagi tenglamalarni $y' = p(y)$ deb ,tartibini bittaga pasaytirish mumkin.Lekin, bunda $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx}p$.U holda $p\frac{dp}{dy} = f(x, p)$ tenglamani hosil qilamiz.Bu tenglamani integrallab,p=p(y,c_1) umumiy yechimni topamiz. $y' = p(y)$ munosabatdan esa umumiy integralni hosil qilamiz.

O'zgarmas koeffisentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar

Ta'rif. *Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb* $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ *ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu yerda* y*-izlanayotgan funksiya,* $p(x), q(x), f(x)$*- biror* (a,b) *intervalda aniqlangan, uzluksiz funksiyalar.*

Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda ikkinchi taribli, chiziqli, bir jinsli tenglama deyiladi. Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa, u bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglama deyiladi.

Berilgan tenglamada $p(x)$ va $q(x)$ funksiyalar o'zgarmas bo'lgan holini qaraymiz. Bunday tenglamalar o'zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglamalar deyiladi.

Demak, $y''+py'+qy=f(x)$ ko'rinishdagi tenglamalarni qaraymiz, bu yerda p va q-ixtiyoriy haqiqiy sonlar.Ushbu chiziqli bir jinsli $y''+py'+qy=0$ tenglamani qaraymiz, p va q - haqiqiy sonlar.

Ta'rif. *Agar* $y''+py'+qy=0$ *tenglama* $y_1(x), y_2(x)$ *yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi:* $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ *faqat* $c_1=c_2=0$ *bo'lgan holdagina o'rinli bo'lsa, u holda ular chiziqli erkli, aks holda chiziqli bog'liq deyiladi.*

Teorema. *Agar* $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ $y''+py'+qy=0$ *tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'lsa,u holda* $y(x)=y_1(x)\pm y_2(x)$ *bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.*

Teorema. *Agar* $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ $y''+py'+qy=0$ *tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'lsa,u holda* $y(x)=\tilde{n}_1y_1(x)$ *va* $y(x)=c_2y_2(x)$ *lar ham bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.*

Teorema. *Agar* $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ $y''+py'+qy=0$ *tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'lsa,u holda* $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ *bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.*

n-tartibli chiziqli differensial tenglama deb quyidagi ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi:

$$y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=f(x)$$

bu yerda $f(x),p_0(x),\ldots,p_{n-1}(x)-(a,b)$ da berilgan uzluksiz funksiyalar.

$L[x]=y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y$ deb belgilasak, qisqacha ushbu tenglamani hosil qilamiz: $L[y]=f(x)$.

Unga mos bir jinsli tenglama esa: $L[y]=0$ ko'rinishda bo'ladi.

Teorema. $y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y=f(x)$ *tenglama* (a,b) *kesmada* $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ \ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ *boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yagona yechimga ega.*

Teorema. *Agar* $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ *funksiyalar* $L[y]=0$ *tenglamaning yechimlari bo'lsa, ularning chiziqli kombinatsiyasi* $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_my_m(x)$ *shu tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.*

Ta'rif. $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ *funksiyalar uchun*

$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ *Wronskiy determinant yoki berilgan funksiyalarning Wronskiyani deyiladi.*

Teorema. *Agar* $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ *[a;b] kesmada chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda bu funksiyalarning Wronskiy determinanti nolga teng.*

Teorema. *Agar* $y'' + py' + qy = 0$ *tenglamaning* $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ *yechimlaridan tuzilgan* $W(y_1, y_2)$ *Wronskiy determinanti tenglamaning koeffisentlari uzlusiz bo'lgan [a;b] kesmadagi biror* $x = x_0$ *qiymatida nolga teng bo'lmasa,u holda u bu kesmagi x ning hech bir qiymatida nolga aylanmaydi.*

Teorema. *Agar* $y'' + py' + qy = 0$ *tenglamaning* $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ *yechimlari [a;b] kesmada chiziqli erkli bo'lsa,u holda bu yechimlardan tuzilgan* $W(y_1, y_2)$ *Wronskiy determinanti berilgan kesmaning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.*

Differensial tenglamalar nazariyasining iqtisodiyotdagi tadbiqlari

Faraz qilaylik, qandaydir mahsulot p narx bilan sotiladi, $Q(t)$ funksiya t vaqt mobaynida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori o'zgarishini bildiradi desak, u holda t vaqt davomida $pQ(t)$ ga teng daromad olinadi. Aytaylik olingan daromadning bir qismi mahsulot ishlab chiqarish investitsiyasiga sarf bo'lsin, ya'ni

$$I(t) = mpQ(t) \qquad (1)$$

m - investitsiya normasi, o'zgarmas son va $0 < m < 1$.

Agar bozor yetarlicha ta'minlangan va ishlab chiqarilgan mahsulot to'la sotilgan degan tasavvurdan kelib chiqilsa, ishlab chiqarish tezligining yana oshishiga (akselatorga) olib keladi. Ishlab chiqarish tezligi esa investitsiyaning o'sishiga proporsional, ya'ni

$$Q' = lI(t), \qquad (2)$$

bu yerda $1/l$ -akselator(o'sish) normasi. (1) formulani (2) ga qo'yib

$$Q' = kQ,\ k = lmp \qquad (3)$$

differensial tenglamani olamiz. (3) o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir. Bu tenglama umumiy yechimining ko'rinishi $Q = Ce^{kt}$, bunda C-ixtiyoriy o'zgarmas son.

Faraz qilaylik, boshlang'ich $t = t_0$ momentda mahsulot ishlab chiqarish hajmi Q_0 ma'lum bo'lsin. U holda bu shartdan C o'zgarmasni aniqlash mumkin:

$Q_0 = Ce^{kt_0}$, bundan $C = Q_0 e^{-kt_0}$. Natijada (3) tenglama uchun Koshi masalasining yechimini topamiz:

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \qquad (4)$$

Shunga e'tibor berish kerakki, matematik modellar umumiylik xossasiga ega. Aholining o'sishi dinamikasini, bakteriyalarning ko'payish jarayoni, radioaktiv parchalanish jarayonlari ham (4) formula bilan ifodalanadigan qonuniyatga bo'ysunadi.

Masalan.

1. Agar $Q' = kQ$ tenglamadagi proporsionallik koeffisiyenti 0,1 ga teng bo'lsa, realizasiya qilingan mahsulot miqdori boshlang'ich vaqtdagi bilan solishtirilganda, qancha vaqt o'tgandan keyin ikki marta ko'payadi?

Realizasiya qilingan mahsulot miqdorini ikkilanishiga ketadigan vaqtni 20% ga qisqartirish uchun investitsiya normasini qancha foizga oshirish kerak?

Mahsulot miqdori boshlang'ich vaqtdagi bilan solishtirilganda ikki marta ko'payadigan vaqtni aniqlash uchun (4) bog'lanishda $t_0 = 0, k = 0{,}1, Q = 2Q_0$ deb olish yetarli. U holda $2Q_0 = Q_0 e^{0{,}1t}$ tenglikka kelamiz, bundan $t = 10\ln 2 \approx 6{,}93$ vaqt birligi zarur bo'ladi.

Endi realizasiya qilingan mahsulot miqdorini ikkilanishiga ketadigan vaqtni20% ga qisqartirish uchun investitsiya normasini hisoblaymiz. $t_1 = 0{,}8t,\ k_1 = \dfrac{k}{0{,}8} = 1{,}25k,$

ya'ni investitsiya normasini 25% ga oshirish kerak.

2. Talab va taklif funksiyalari mos ravishda

$$y = 25 - 2p + 3\frac{dp}{dt},\ x = 15 - p + 4\frac{dp}{dt}.$$

Agar boshlang'ich momentida p=9 bo'lsa, muvozanat narxinig vaqtga bog'liqligini topaylik.

Talab va taklifning tengligidan $25-2p+3\frac{dp}{dt}=15-p+4\frac{dp}{dt}$, bundan $\frac{dp}{dt}=10-p$, ya'ni o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani hosil qilamiz.Bu tenglamani yechib, $p=10-Ce^{-t}$ bog'lanishni hosil qilamiz. $p(0)=9$ shartdan, $C=1$

kelib chiqadi, nihoyat $p=10-e^{-t}$ va $\lim\limits_{t\to\infty}p=\lim\limits_{t\to\infty}(10-e^{-t})=10$ bo'lib, narx turg'unlikka ega bo'ladi.

3. $k-$doimiy elastiklikka ega funksiya topilaylik.

Elastiklik ta'rifi va masala shartidan quyidagiga egamiz: $\frac{p}{Q}Q'=k$ ya'ni

$\frac{p}{Q}\cdot\frac{dQ}{dp}=k.$

$p\neq 0$ shartda $\frac{dQ}{Q}=k\cdot\frac{dp}{p}$ munosabatni hosil qilamiz. Bu tenglikni integrallab, $\ln|Q|=k\ln|p|+\ln c$, bundan esa $Q=C\cdot p^k$ yechimni hosil qilamiz.

O‘zgarmas koeffisentli yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

1. *Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar*. Fizika, mexanika, texnika va iqtisodning juda ko‘p masalalarini yechish ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarga keltiriladi.

Differensial tenglamada noma'lum funksiya va uning hosilalari birinchi darajada qatnashsa bunday tenglamaga chiziqli deyiladi. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y''+p(x)y'+g(x)y=f(x) \qquad (1)$$

bu yerda y noma'lum funksiya, $p(x)$, $g(x)$, $f(x)$ lar biror (a,b)oraliqda berilgan uzluksiz funksiyalar, $f(x)=0$ bo‘lsa, (1) tenglamaga **bir jinsli chiziqli differensial tenglama** deyiladi. $f(x)\neq 0$ **bo‘lsa bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglama** deyiladi.

Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar yechimini topishda chiziqli bog’langan va chiziqli bog’lanmagan funksiyalar tushunchasidan foydalaniladi.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar biror $[a,b]$ kesmada berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Shunday α_1, α_2 o‘zgarmas sonlar topilsaki, ulardan hyech bo‘lmaganda bittasi no‘ldan farqli bo‘lganda

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \qquad (2)$$

ayniyat o‘rinli bo‘lsa, $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalarga **chiziqli bog’langan funksiyalar** deyiladi.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli bog’langan bo‘lsa, ular proporsianal bo‘ladi, ya’ni, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ bo‘lib, $\alpha_1 \neq 0$ bo‘lsa,

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \ \ yoki \quad \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{-\alpha_2}{-\alpha_1}, \ \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = const$$

bo‘ladi.

Masalan, $y_1(x) = 4x^2$ *va* $y_2 = x^2$ funksiyalar chiziqli bog’langan, chunki $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{4x^2}{x^2} = 4.$

Ta’rif. (2) tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bo‘lgandagina bajarilsa, $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalarga **chiziqli bog’lanmagan funksiyalar** deyiladi.

Funksiyalarning chiziqli bog’langan yoki chiziqli bog’lanmaganligini

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2{}' - y_2 y_1{}'$$

Vronskiy determinanti yordamida tekshirish mumkin. $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda chiziqli bog’langan bo‘lsa, ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no‘lga teng bo‘ladi. Bu funksiyalar uchun (a,b) oraliqda tuzilgan Vronskiy determinanti no‘ldan farqli bo‘lsa ular chiziqli bog’lanmagan bo‘ladi.

2. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar. Fan va texnika hamda iqtisodning ko‘p

masalalari (1) tenglamada $p(x)$ *va* $g(x)$ funksiyalar o‘zgarmas sonlar bo‘lgan holdagi tenglamalarga keltiriladi. Shuning uchun bu funksiyalar o‘zgarmas koeffisiyentlar bo‘lgan holni alohida qaraymiz. Bu holda bir jinsli tenglama

$$y'' + py' + gy = 0 \qquad (3)$$

ko‘rinishda bo‘lib p, g lar o‘zgarmas koeffisiyentlar. Bunday ko‘rinishdagi tenglamaga ***ikkinchi tartibli, o‘zgarmas koeffisiyentli, chiziqli, bir jinsli differensial tenglama*** deyiladi. (3) ko‘rinishdagi tenglamaning yechimini topish bilan qiziqamiz.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar (3) tenglamaning (a,b) oraliqda chiziqli bog’lanmagan yechimlari bo‘lsa,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \qquad (4)$$

funksiya uning umumiy yechimi bo‘ladi, bu yerda c_1 *va* c_2 ixtiyoriy o‘zgarmaslar. Bu funksiyani (3) tenglamaga bevosita qo‘yib ko‘rsatish mumkin (buni bajarib ko‘ring).

1-misol. $y'' - y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bevosita qo‘yish bilan tekshirib ko‘rish mumkinki, $y_1(x) = e^x$ *va* $y_2(x) = e^{-x}$ berilgan tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Bu yechimlar chiziqli bog’lanmagan yechimlar bo‘ladi, chunki Vronskiy determinanti

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x e^{-x} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

Demak, (4) formulaga asosan, $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ funksiya berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

Shunday qilib, (3) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topish uchun, uning ikkita chiziqli bog’lanmagan xususiy yechimini topish kifoya.

(3) tenglamaning yechimini $y = e^{rx}$, ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda r – noma’lum son. $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$, bo‘lib,(3) tenglamadan

$$r^2 e^{rx} + pre^{rx} + ge^{rx} = 0 \quad yoki \quad r^2 + pr + g = 0, \ (e^{rx} \neq 0) \qquad (5)$$

bo‘ladi. (5) tenglik bajarilsa $y = e^{rx}$ funksiya (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

(5) tenglamaga (3) differensial tenglamaning ***xarakteristik tenglamasi*** deyiladi. Xarakteristik tenglamaning yechimlari

$$r_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - g} \quad va \quad r_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - g}$$

bo‘lib, bunda quyidagi uchta hol bo‘lishi mumkin:

1) $r_1 \quad va \quad r_2$ lar haqiqiy va har xil, ya’ni $r_1 \neq r_2$;

2) $r_1 \quad va \quad r_2$ haqiqiy va teng (karrali), ya’ni $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$;

3) $r_1 \quad va \quad r_2$ kompleks sonlar, ya’ni $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta,$ bunda;

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Har bir holni alohida qaraymiz:

1) bu holda $y_1(x) = e^{r_1 x}$, $y_2(x) = e^{r_2 x}$ funksiyalar chiziqli bog’lanmagan xususiy yechimlar bo‘lib, umumiy yechim

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \qquad (6)$$

bo‘ladi.

2-misol. $y'' - 5y' + 6y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamani tuzamiz:

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

Xarakteristik tenglamaning ildizlari

$$r_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}; \quad r_1 = 2; \qquad r_2 = 3$$

bo‘lib, umumiy yechim (6) formulaga asosan

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

bo‘ladi.

2) Ikkinchi holda, xarakteristik tenglamaning ildizlari teng

$r_1 = r_2$ *va* $y_1(x) = e^{r_1 x}$ bitta xususiy yechim bo‘ladi. Ikkinchi xususiy yechimni $y_2(x) = xe^{r_1 x}$ ko‘rinishda tanlaymiz. Bu funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi, haqiqatan ham

$$y_2(x) = xe^{r_1 x}, \quad y_2' = e^{r_1 x}(1 + r_1 x), \quad y_2''(x) = e^{r_1 x}(r_1^{\,2} + 2r_1)$$

ifodalarni (3) tenglamaga qo‘yib

$$x(r_1^{\,2} + pr_1 + g) + (2r_1 + p) = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. r_1 xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lganligi uchun oxirgi tenglikdagi birinchi qavs aynan no‘lga teng, $r_1 = r_2 = -\dfrac{p}{2}$ bo‘lganligi uchun ikkinchi qavs ham aynan no‘lga teng.

Demak, $y_2(x) = xe^{r_1 x}$ funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi, hamda $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ yechimlar chiziqli bog’lanmagan (tekshirib ko‘ring). Shunday qilib,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} \qquad (7)$$

umumiy yechim bo‘ladi.

3-misol. $y'' + 6y' + 9y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$$r^2 + 6r + 9 = 0$$

bo‘lib, ildizlari $r_1 = r_2 = -3$ bo‘ladi (tenglamani yechib ko‘rsating). Xarakteristik tenglamaning ildizlari o‘zaro teng, (7) formulaga asosan $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$ funksiya berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

3) Xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks, qo‘shma:

$r_1 = \alpha + i\beta, \; r_2 = \alpha - i\beta$ bo‘lganda xususiy yechimlarni

$$y_1(x) = e^{r_1 x} = e^{(\alpha+\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta x}$$

$$y_2(x) = e^{r_2 x} = e^{(\alpha-\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta x}$$

ko‘rinishda olish mumkin. Bu ifodalarga

$$e^{\beta x} = \cos\beta x + i \sin\beta x$$

Eyler formulasini tatbiq etsak,

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

tengliklar hosil bo‘ladi. Ma’lumki, bu funksiyalarning chiziqli kombinasiyasi ham bir jinsli tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Shuning uchun

$$y_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad va \quad y_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

funksiyalar ham (3) tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Bu yechimlar chiziqli bog’lanmagan, chunki ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no‘ldan farqli (tekshirib ko‘ring).

Demak,

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) \qquad (8)$$

(3) tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

4-misol. $y'' + 6y' + 13y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglamaning ildizlari:

$$r_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 13}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2};$$

$r_1 = -3 + 2i, \quad r_2 = -3 - 2i$ bo‘ladi. Bu ildizlar kompleks qo‘shma bo‘lib uchinchi holga mos keladi. $\alpha = -3, \ \beta = 2$ ekanligini hisobga olib (8) formulaga asosan umumiy yechim,

$$y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$$

bo‘ladi.

Endi ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli bir jinsli tenglama uchun berilgan boshlang’ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topishni, ya’ni Koshi masalasini qaraymiz.

5-misol. $y'' - y' - 2y = 0$ differensial tenglamaning $x = 0$ bo‘lganda $y = 8, \quad y' = 7$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli, bir jinsli, chiziqli tenglamadir. Unga mos xarakteristik tenglama

$$r^2 - r - 2 = 0$$

bo‘lib, $r_1 = -1,\ r_2 = 2$ uning ildizlari bo‘ladi. Demak, tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan hosila olsak,

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$$

bo‘lib , $x = 0$ bo‘lganda $y = 8,\ y' = 7$ boshlang’ich shartlarga asosan,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -C_1 + 2C_2 = 7 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglamalar sistemasidan $C_1 = 3,\ C_2 = 5$ larni aniqlaymiz. Shunday qilib, izlanayotgan xususiy yechim

$$y(x) = 3e^{-x} + 5e^{2x}$$

bo‘ladi.

Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar

Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar .

Bunday tenglama

$$y'' + py' + gy = f(x) \qquad (1)$$

ko‘rinishda bo‘lib, bu yerda p, g o‘zgarmas koeffitsiyentlar, $f(x)$ berilgan uzluksiz funksiya.

Chiziqli **bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi,** bunday tenglamaning birorta xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig‘indisidan iborat bo‘ladi, ya’ni $\bar{y}$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi y_1 bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimi bo‘lsa, umumiy yechim

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu fikrga (2) echimni (1) tenglamaga qo‘yib ko‘rish bilan ishonish mumkin (buni bajarib ko‘ring).

Bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimini topish usullari.

(1) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\overline{y(x)}$ ni topishni yuqorida o‘rgandik. Endigi vazifa bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimini topishdan iborat bo‘ladi. (1) tenglamada $f(x)$ funksiya:

1) $f(x)=e^{\alpha x}P(x)$, bu yerda $P_n(x)$ $n-$ darajali ko‘p had;

2) $f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$

ko‘rinishda bo‘lganda xususiy yechimni topish masalasini qaraymiz.

Birinchi holda xususiy yechimni

$$y_1(x)=x^k e^{\alpha x}Q_n(x)$$

ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda k harakteristik tenglama ildizlarining α ga teng bo‘lganlari soni (0,1,2 bo‘lishi mumkin), $Q_n(x)$, $P_n(x)$ bilan bir xil darajali, lekin aniqmas koeffitsiyentli ko‘phad. Bu holga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $y''+2y'-3y=e^{2x}(25x^2-47)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz: bir jinsli tenglama $y''+2y'-3y=0$ bo‘lib, uning harakteristik tenglamasi $r^2+2r-3=0$ bo‘ladi. Uning ildizlari

$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 3}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2},\qquad r_1=-3,\quad r_2=1$$

bo‘lib, birjinsli tenglamaning umumiy yechimi $\overline{y}=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$ bo‘ladi.

Endi berilgan birjinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimini topamiz: Uni e^{2x} funksiya va berilgan ko‘phad darajasi bilan bir xil ko‘phad, lekin aniqmas koeffitsiyentli ko‘phad ko‘paytmasi ko‘rinishida izlaymiz. Shunday qilib, xususiy yechim

$$y_1(x)=e^{2x}(Ax^2+Bx+C)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Endi ***aniqmas*** A,B *va* C ***koeffitsiyentlarni*** topish lozim. Shartga ko‘ra $y_1(x)$ berilgan tenglamani qanoatlantirishi kerak.

Buning uchun

$$y_1(x)=e^{2x}(Ax^2+Bx+C),\quad y_1'(x)=2e^{2x}(Ax^2+Bx+C)+e^{2x}(2Ax+B),$$
$$y''(x)=4e^{2x}(Ax^2+Bx+C)+2e^{2x}(2Ax+B)+e^{2x}\cdot 2A$$

larni berilgan tenglamaga qo‘yib,

$$e^{2x}\left[2A+6(2Ax+B)+5(Ax^2+Bx+C)\right]=e^{2x}(25x^2-47)$$

tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikni e^{2x} ga bo‘lsak,

$$5Ax^2+(12A+5B)x+2A+6B+5C=25x^2-47$$

bo‘ladi.

$y_1(x)=e^{2x}(Ax^2+Bx+C)$ berilgan tenglamaning yechimi bo‘lishi uchun oxirgi tenglamadagi bir xil darajali x lar koeffitsiyentlari o‘zaro teng bo‘lishi kerak, ya’ni

$$\begin{cases}5A=25,\\ 12A+5B=0,\\ 2A+6B+5C=47.\end{cases}$$

Uchta noma’lum koeffitsiyentlarga nisbatan, uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu sistemani yechsak, $A=5,\ B=-12,\ C=3$ bo‘ladi (buni bajarib ko‘ring). Demak, $y_1(x)=e^{2x}(5x^2-12x+3)$ funksiya berilgan tenglamaning xususiy yechimi bo‘ladi.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi (2) formulaga asosan,

$$y=\bar{y}+y_1=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}+e^{2x}(5x^2-12x+3)$$

bo‘ladi.

Yuqoridagidek xususiy yechimni topishga ***aniqmas koeffitsiyentlar usuli*** deyiladi.

2-misol. $y''-4y'=3x^2$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

$r^2-4r=0$ bo‘lib, $r_1=0;\ r_2=4$ uning ildizlari bo‘ladi va bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}(x)=C_1e^{0x}+C^2e^{4x}=C_1+C_2e^{4x}$$

bo‘ladi. Berilgan tenglamaning o‘ng tomoni $3e^{0x}x^2$ bo‘lib, $\alpha=0$ va no‘l harakteristik tenglamaning ildizi bo‘lganligi uchun xususiy yechim

$$y_1(x)=e^{0x}x(Ax^2+Bx+C)=Ax^3+Bx^2+Cx$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

$$y_1'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y''_1 = 6Ax + 2B$$

bularni berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$-12Ax^2 + (6A - 8B)x + 2B - 4C = 3x^2$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bir xil darajali x lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib,

$$\begin{cases} -12A = 3, \\ 6A - 8B = 0, \\ 2B - 4C = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini olamiz. Bundan

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{3}{16}, \quad C = -\frac{3}{32}$$

bo‘ladi. Shunday qilib, xususiy yechim

$$y_1(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{32}x$$

bo‘lib, umumiy yechim

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{4}(x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x)$$

bo‘ladi.

2) $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$ bo‘lganda xususiy yechim $y_1(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)x^k$ ko‘rinishda bo‘lib, k harakteristik tenglama ildizlarining $i\beta$ ga teng bo‘lganlarining soni.

3-misol. $y'' + y = \sin x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Harakteristik tenglama $r^2 + 1 = 0$ bo‘lib, ildizlari $r_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$ bo‘ladi. $\beta = 1; \quad i\beta = i$ bo‘lganligi uchun $k = 1$, ya’ni xususiy yechimni

$$y_1(x) = (A\cos x + B\sin x)x^1$$

ko‘rinishda izlaymiz. A va B aniqmas koeffitsiyentlar. Bu funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topsak,

$y_1'(x) = (A\cos x + B\sin x)x + A\cos x + B\sin x = (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x$

$y_1''(x) = B\cos x - A\sin x - Bx\sin x - A\sin x + B\cos x - Ax\cos x = (2B - Ax)\cos x +$

$+ (-2A - Bx)\sin x$

bo‘ladi, bularni berilgan tenglamaga qo‘ysak

$(2B - Ax)\cos x + (2A - Bx)\sin + Ax\cos x + Bx\sin x = \sin x$ *yoki*

$2B\cos x + (-2A)\sin x = \sin x$

hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan

$$\begin{cases} 2B = 0, \\ -2A = 1 \end{cases}$$

va $B = 0,\ A = -\frac{1}{2}$ bo‘lib, xususiy yechim

$$y_1(x) = -\frac{x}{2}\cos x$$

bo‘ladi.

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$$

bo‘lganligi uchun, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x}{2}\cos x$$

bo‘ladi.

4-misol. $y'' + 4y' + 5y = 2\cos x - \sin x$ differensial tenglamaning $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $y'' + 4y' + 5y = 0$ tenglamaning harakteristik tenglamasi $r^2 + 4r + 5 = 0$ bo‘lib, uning ildizlari $r_1 = -2 - i;\ \ r_2 = -2 + i$ bo‘ladi. Bir jinsli tenglama umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = e^{-2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$$

bo‘ladi.

Endi berilgan tenglamaning biror xususiy yechimini topamiz: uni

$$y_1(x) = A\cos x + B\sin x$$

ko‘rinishda izlaymiz. $y'(x),\ y''(x)$ hosilalarni topib, berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$(4A+4B)\cos x+(4B-4A)\sin x=2\cos x-\sin x$$

bo‘lib, $\cos x$ va $\sin x$ lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib.

$$\begin{cases}4A+4B=2,\\4B-4A=-1\end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan $A=\frac{3}{8},\ B=\frac{1}{8}$ ekanligini aniqlab, xususiy yechimni topamiz.

$$y_1(x)=\frac{3}{8}\cos x+\frac{1}{8}\sin x$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x)=\bar{y}(x)+y_1(x)=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{3}{8}\cos x+\frac{1}{8}\sin x$$

bo‘ladi.

Endi berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni aniqlaymiz, ya’ni boshlang‘ich shartlar berilganda Koshi masalasining yechimini topamiz: umumiy yechimdan hosila

$$y'(x)=-2e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{2x}(-C_1\sin x+C_2\cos x)-\frac{3}{8}\sin x+\frac{1}{8}\cos x$$

bo‘ladi, boshlang‘ich shartlardan foydalanib,

$$1=\frac{3}{8}+C_1,\quad 2=\frac{1}{8}-2C_1+C_2$$

C_1 *va* C_2 noma’lumlarga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan $C_1=\frac{5}{8},\quad C_2=\frac{25}{8}$ bo‘ladi.

Shunday qilib, berilgan tenglamaga qo‘yilgan Koshi masalasining yechimi

$$y(x)=e^{-2x}(\frac{5}{8}\cos x+\frac{25}{8}\sin x)+\frac{3}{8}\cos x+\frac{1}{8}\sin x$$

bo‘ladi.

Differensial tenglamalarning iqtisodiyotga tatbiqlari

Differensial tenglamalarning iqtisodiyotdagi tatbiqlariga bir necha misollar keltiramiz.

Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda (tabiiy) o‘sish modeli. Biror turdagi mahsulot ishlab chiqarilib u tayin (belgilangan) P narxda sotilayotgan bo‘lsin. $Q(t)$ vaqtning t onida (momentida) realizatsiya

qilingan mahsulot miqdori bo‘lsin. Bu holda mahsulotni realizatsiya qilishdan olingan daromad

$$PQ(t)$$

model bilan ifodalanadi. Bu daromadning bir qismi albatta ishlab chiqarish $J(t)$ investitsiyasiga sarflanadi, ya’ni

$$J(t) = mPQ(t) \qquad (1)$$

bo‘lsin, bunda m investitsiya me’yori bo‘lib o‘zgarmas son, hamda $0 < m < 1$.

Ishlab chiqarilayotgan mahsulot to‘liq realizatsiya qilinayotgan bo‘lsa, ishlab chiqarishni kengaytirish natijasida daromadning o‘sishi ta’minlanib, bu daromadning bir qismi yana mahsulot ishlab chiqarishni kengaytirishga sarflanadi. Bu hol ishlab chiqarish tezligining o‘sishi (akseleratsiya)ga olib keladi, hamda ishlab chiqarish tezligi investitsiyaga proporsional bo‘ladi, ya’ni

$$Q'(t) = eJ(t), \qquad (2)$$

bunda $\frac{1}{e}$ akseleratsiya me’yori. (1) va (2) tengliklardan

$$Q'(t) = emPQ \quad yoki \quad Q'(t) = kQ(t) \quad (3)$$

kelib chiqadi, bunda $k = emP$.

(3) differensial tenglama birinchi tartibli, o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo‘lib, uning umumiy yechimi

$$\frac{dQ}{dt} = KQ, \quad \frac{d\theta}{Q} = kdt, \quad \ln Q = kt + \ln C \quad yoki \quad Q = Ce^{kt}$$

bo‘ladi, bunda C ixtiyoriy o‘zgarmas.

Vaqtning $t = t_0$ momentida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Q_0 bo‘lsin.

Bu shartda

$$Q_0 = Ce^{kt_0} \quad yoki \quad C = Q_0 e^{-kt_0}$$

bo‘ladi. (3) tenglama uchun, Koshi masalasining yechimi

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \qquad (4)$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, ishlab chiqarishning tabiiy o‘sishi modeli eksponensial bo‘lar ekan (tabiiy o‘sish deganimizda raqobat yo‘qligi tushuniladi).

Matematik modellar **umumiylik xossasiga ega.** Buning misoli sifatida quyidagi holni keltirish mumkin. Biologik kuzatishlardan ma’lumki bakteriyalarning ko‘payish jarayoni ham (3) differensial tenglama bilan ifodalanadi. Bundan tashqari radioaktiv parchalanish: radioaktiv modda massasining kamayishi jarayoni qonuni ham (4) formulaga mos keladi.

Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o‘sishi modeli. Oldingi misolda ishlab chiqarilayotgan mahsulot to‘liq realizatsiya bo‘ladigan sharoitni qaradik. Endi raqobatli, ya’ni bozorga bu mahsulotni boshqalar ham realizatsiya qiladigan sharoitni qaraymiz. Bunday sharoitda mahsulot ishlab chiqarish miqdorini ko‘paytirish bilan bozorda uning narxi kamayadi. $P = P(Q)$ funksiya (P mahsulot narxi, Q mahsulot miqdori) kamayuvchi bo‘lib,

$$\frac{dP}{dQ} < 0$$

bo‘ladi. Endi (1)-(3) formulalardagidek,

$$Q' = \alpha P(Q)Q \qquad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz, bunda $\alpha = em$. (5) tenglamaning o‘ng tomonidagi ko‘paytuvchilar hammasi musbat ishorali, demak $Q' > 0$ bo‘ladi, ya’ni $Q(t)$ o‘suvchi funksiya ekanligi kelib chiqadi.

Oddiylik uchun $P(Q)$ funksional bog‘lanish chiziqli, ya’ni

$$P(Q) = a - bQ, \quad a >, \ b > 0$$

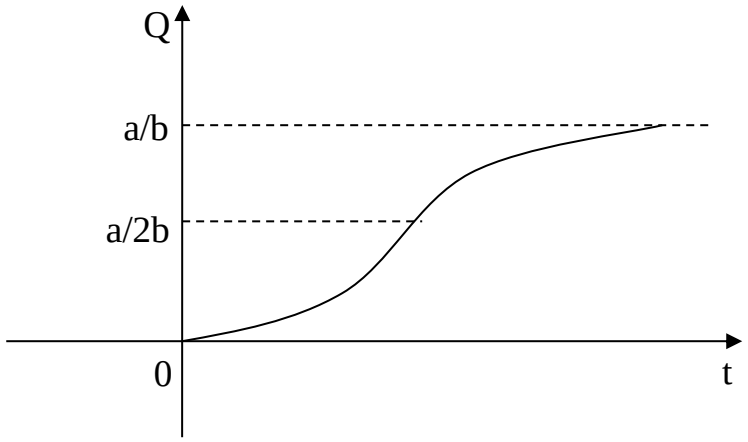
bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda (5) tenglama

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \qquad (6)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. (6) tenglikni differensiallasak,

$$Q'' = (\alpha aQ - \alpha bQ^2)' = \alpha aQ' - 2\alpha bQQ' \ \ yoki \ \ Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ) \quad (7)$$

tenglama hosil bo‘ladi. (6)-(7) tenglamalardan $Q = 0$ *va* $Q = \frac{a}{b}$ bo‘lganda, $Q' = 0$, $Q < \frac{a}{2b}$ bo‘lganda, $Q'' > 0$ hamda $Q > \frac{a}{2b}$ bo‘lsa $Q'' < 0$ kelib chiqadi. Bulardan $\frac{a}{2b}$ nuqtadan o‘tishda Q ishorasini o‘zgartirganligi uchun, bu nuqta $Q = Q(t)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘ladi. Bu funksiya grafigi, ya’ni (6) differensial tenglama integral chiziqlaridan biri, 4.1-chizmada tasvirlangan bo‘lib, bu egri chiziqqa iqtisodda ***logistik chiziq*** deb ataladi.



4.1-chizma.

3. ***Talab va taklifni tahlil qilish*.** Ma’lumki, bozor modelida mahsulotga talab va taklif mavjud holatlarda narxning o‘zgarish sur’ati bilan bog‘liq bo‘ladi. Bunday sur’at t vaqtning $P(t)$ narx funksiyasi birinchi va ikkinchi tartibli hosilasi bilan harakterlanadi.

Quyidagi misolni qaraymiz. Talab D va taklif S P narxning funksiyasi bo‘lib, ushbu tengliklar bilan ifodalansin:

$$D(t) = p'' - 2p' - 6p + 36, \quad S(t) = 2p'' + 4p' + 4p + 6. \qquad (1)$$

Bunday bog‘liqlik haqiqatda mavjud holatlarga mos keladi. Haqiqatan ham, narx sur’ati oshsa, bozorning mahsulotga qiziqishi ortadi, ya’ni $p'' > 0$ bo‘ladi. Narxning tez o‘sishi haridorni cho‘chitib talabning pasayishiga olib keladi. Shuning uchun, p' birinchi tenglikda manfiy ishora bilan ifodalanadi. Ikkinchidan, narx sur’atining ortishi bilan taklif yana kuchayadi, shuning uchun p'' ning koeffitsiyenti talab

funksiyasidagiga nisbatan katta, narxning o‘sishi tezligi taklifning ham o‘sishiga olib keladi, ya’ni p' taklif funksiyasida musbat ishorali bo‘ladi.

Narx funksiyasi va vaqt o‘zgarishi orasidagi bog‘lanishni tahlil qilaylik. Ma’lumki, bozor holati $D = S$ muvozanat bilan ifodalanadi. Bu holda (1) tenglikdan

$$p'' + 6p' + 10 = 30 \qquad (2)$$

ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglama kelib chiqadi.

Bizga ma’lumki, bunday tenglamaning umumiy yechimi bu tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va (2) bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimi yig‘indisidan iborat. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{p}(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

bo‘ladi, bunda C_1 va C_2 lar ixtiyoriy o‘zgarmaslar.

Bir jinsli bo‘lmagan (2) tenglama xususiy yechimi $p_1(t) = A$ o‘zgarmas, hamda buni (3) tenglamaga qo‘yib, $A = 3$ ekanligini aniqlash mumkin. Demak, $p_1(t) = 3$ bo‘ladi.

Shunday qilib (2) bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning umumiy yechimi

$$p(t) = \overline{p(t)} + p_1(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 3 \qquad (3)$$

bo‘ladi.

Bu yechimdan $t \to \infty$ *da* $p(t) \to 3$ bo‘ladi, ya’ni hamma narxlar qaror topgan narxga yaqinlashadi.

Ushbu Koshi masalasini qaraymiz: $t = 0$ bo‘lganda, narx $p(0) = 4$ va o‘sish mayli (tendensiyasi) $p'(0) = 1$ bo‘lsin. $t = 0$ bo‘lganda $p(0) = 4$ bo‘lganligi uchun, (3) dan $C_1 = 1$ kelib chiqadi. (3) tenglikdan hosila olib va t=0 bo‘lganda $p(0) = 1$ shartdan foydalansak, C_2 =4 kelib chiqadi, demak Koshi masalasining yechimi

$$p(t) = 3 + e^{-3t}(\cos t + 4 \sin t)$$

bo‘ladi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Differensial tenglama, oddiy differensial tenglama, xususiy hosilali differensial tenglama, differensial tenglamaning tartibi, differensial tenglama yechimi, integral chiziq, birinchi tartibli differensial tenglama, Koshi masalasi, boshlang'ich shartlar, o‘zgaruvchilari ajralgan, o‘zgaruvchilari ajraladigan, birinchi tartibli bir jinsli, birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar, Bernulli tenglamasi, Rikkati tenglamasi, to‘la differensialli tenglama, integrallovchi ko‘paytuvchi. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar, ikkinchi tartibli bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar, chiziqli bog'langan va chiziqli bog'lanmagan funksiyalar, Vronskiy determinanti, ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar, xarakteristik tenglama, Eyler formulasi. Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi, birorta xususiy yechim, birorta xususiy yechimni tenglamaning o‘ng tomoni ko‘phad bo‘lganda topish, sinus va kosinus funksiyalar yig‘indisi bo‘lganda topish, aniqmas koeffitsiyentlar usuli.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Oddiy differensial tenglama qanday tenglama?
3. Xususiy xosilali differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
4. Differensial tenglamaning tartibi nima?
5. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb nimaga aytiladi?
6. Umumiy va xususiy yechimlar qanday yechimlar?
7. Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalasi nimadan iborat?
8. Boshlan□ich shart deb nimaga aytiladi?
9. Qanday masalaga Koshi masalasi deyiladi?
10. Qanday tenglamaga o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama deyiladi?
11. Birinchi tartibli bir jinsli tenglama deb nimaga aytiladi?
12. Yuqori tartibli differensial tenglamalarning qanday xillari bor?

13. Qanday differensial tenglamalarning tartibini pasaytirish bilan yechish mumkin?

14. Qanday differensial tenglamalarga chiziqli deyiladi?

15. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

16. Xarakteristik tenglama nimadan iborat?

17. Xarakteristik tenglama ildizlariga qarab umumiy yechimni yozish mumkinmi?

18. Xarakteristik tenglama ildizlari kompleks qo‘shma bo‘lganda yechim qanday yoziladi?

19. Xarakteristik tenglama ildizlari karrali, haqiqiy va har xil bo‘lganda umumiy yechim qanday yoziladi?

20. Eyler formulasi qanday bo‘ladi?

21. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalarning umumiy yechimi qanday topiladi?

22. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalarning birorta xususiy yechimi qanday topiladi?

23. Aniqmas koeffisiyentlar usuli nimadan iborat?

24. Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda o‘sish modeli qanday bo‘ladi?

25. Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o‘sishi modeli nima?

26. Logistik chiziq deb nimaga aytiladi?

27. Talab va taklifni differensial tenglama yordamida qanday tahlil qilinadi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1) $(1+y)dy-(1-x)dx=0;$ 2) $(xy^2+x)dx=(y-x^2y)dy;$

3) $x^2dy+(y-1)dx=0;$ 4) $2(xy+y)dx=xdy.$

2. Quyidagi differensial tenglamalarning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini toping:

1) $x^2dx+ydy=0,\ x=0\ da\ y=1;$

2) $(1+x^2)dy-2x(y+3)dx=0,\ x=0\ bo'lganda\ y=-1;$

3) $(1+x)ydx=(y-1)xdy,\ x=1\ da\ y=1.$

3. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

$$1)\frac{dy}{dx}=\frac{(x-y)y}{x^2}\ ;\ \ 2)\ x^2y'=y^2-xy+x^2;$$

$$3)\ (x^2-2xy)dy=(xy-y^2)dx.$$

4. Boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarni toping:

$$1)\ xy^2-y'=x^3+y^3,\quad x=1\quad bo'lganda\quad y=3;$$

$$2)\ (x-y)dx+xdy=0,\quad x=1\quad bo'lganda\quad y=0;$$

$$3)\ y^2dx+(x^2-xy)dy=0,\quad x=1\quad da\quad y=1.$$

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

1) $y'-\frac{y}{x}=-1;$ 2) $y'+y=e^{-x};$ 3) $x^2y'-2xy=3;$ 4) $y'-\frac{2x}{1+x^2}y=1+x^2$;

5) $\left(a^2+x^2\right)y'+xy=1;$ 6) $(2x+1)y'+y=x;$ 7) $y'-ytgx=ctgx$;

8) $y'+y\cos x=\sin 2x.$

2. Quyidagi differensial tenglamalarning xususiy yechimlarini toping:

1) $xy'+y=3,\ x=1\ da\ y=1;$ 2) $(1+x^2)y'-xy=2x,\ x=0\ bo'lganda\ y=0;$

3) $xy'+y=x+1,\ x=2\ bo'lganda\ y=3.$

3. 1) $y'+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning $x=-1$ bo'lganda $y=1$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

2) $y'+\frac{y}{3}=\frac{x+1}{3y^3}$ tenglama uchun $x=1$ bo'lganda $y=-1$ boshlang'ich shart bajariladigan Koshi masalasini yeching.

1. $y''' = \frac{6}{x^3}$ tenglamaning $x = 1$ bo‘lganda $y = 2,\ y' = 1,\ y'' = 1$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

2. Quyidagi tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1) $x^3 y'' + x^2 y' = 1$; 2) $yy'' + y'^2 = 0$; 3) $y'' + 2y(y')^3 = 0$; 4) $y''y^3 = 1$;

5) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$; 6) $y'' + y'tgx = \sin 2x$; 7) $y'' + 2y'^2 = 0$;

8) $xy'' - y'tgx = e^x x^2$; 9) $2yy'' = (y^1)^2$; 10) $t\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + t = 0$.

3.Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

1) $y'' + 3y' - 4y = 0$; 2) $y'' - 2y' - 5y = 0$; 3) $y'' - y = 0$;

4) $4y'' - 12y' + 9y = 0$; 5) $y'' + 2\sqrt{2}y + 2y = 0$; 6) $y'' - 2y' + 50y = 0$;

7) $y'' - 4y' + 7y = 0$; 8) $y'' + 6y' = 0$.

4. $y'' + 10y' + 25y = 0$ tenglamaning $x = 1$ bo‘lganda, $y = e^{-5}$, $y' = 3e^{-5}$bo‘ladigan boshlang’ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

1.Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

1) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$; 2) $y'' + y' + 7y = 8\sin 2x$;

3) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$;

4) $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$; 5) $y'' + 9y = (43 + 10x - 26x^2)e^{2x}$;

6) $y'' + 6y' + 10y = 9\cos x + 27\sin x$; 7) $y'' - 6y' + 9y = 2\sin 2x$

2. $y'' + 16y = \sin 4x$ tenglamaning $x = 0$ bo‘lganda, $y = 1,\ y' = \frac{7}{8}$ bo‘ladigan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Sh.Sharahmetov, O.Qurbanov, Iqtisodchilar uchun matematika, ISBN 978-9943-07-554-2, O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti, 2017.

2. A.Soliyev, S.Nosirova, Ya. Muxtarov, T.Bo‘riyev. Matematika. Iqtisodchilar uchun amaliy mashg’ulotlar. O‘quv qo‘llanma – Samarqand: SamDU nashri 2021-200 bet

3. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 1,2,3 jild. - T: O‘qituvchi, 1992, 1994, 1996

4. Н.Ш.Кремер. Высшая математика для экономистов. Москва “Банки и биржи”, Издательское объединение “ЮНИТИ”. 1998

8. Xashimov A.R., Ochilova N.K., Axmedov M.I, Sotvoldiyev A.I. Iqtisodiy matematika. O‘quv qo‘llanma. T.: “Fan va texnologiya”. 2018. 352 b.

9. Xashimov A.R., Xujaniyazova G.S. Iqtisodchilar uchun matematika (mustaqil ta’lim bo‘yicha praktikum). O‘quv qo‘llanma. T.:“Iqtisod-moliya”. 2019. 400 b.

10. Sharaxmetov Sh., Qurbanov O.T. Iqtisodchilar uchun matematika. Darslik. T.: O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti. 2017. 384 b.

11. Бабаджанов Ш.Ш. Сборник задач по дисциплине «Математика для экономистов». Методическое пособие. Т.: ТФИ. 2017. 296 с.

12. Бабаджанов Ш.Ш. Финансовая математика. Учебное пособие. Т.: Издательство Национального общества философов Узбекистана 2019. 192 с.

13. Mamurov I.N., Abdikarimov R.A. Moliya matematikasi. O‘quv qo‘llanma. T.: “Iqtisod-moliya”. 2018. 188 b.

M U N D A R I J A

KIRISH. 3

I BOB. CHIZIQLI ALGEBRA ASOSLARI VA ULARNING TADBIQLARI 5

1.1-§. Matritsalar va ular ustida amallar 5

1.2-§. Determinantlar nazariyasi 13

1.3-§. Teskari matritsa va matritsa rangi.....22

1.4-§. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning Gauss va Gauss-Jordan usullari..29

1.5-§.Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsalar usuli. Kramer qoidasi 45

1.6-§. Kvadratik formalar.....56

II BOB. ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI HAMDA ULARNING TADBIQLARI 79

2.1-§. Analitik geometriya elementlari 79

III BOB. MATEMATIK ANALIZ ASOSLARI VA UNING TATBIQLARI 101

3.1-§. R^n fazoda nuqtalarning o‘zaro joylashishi. Nuqtalar ketma-ketligi va uning limiti 101

3.2-§. Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar va ularning iqtisodiy jarayonlardagi o‘rni. Kobb-Duglas funksiyasi 109

3.3-§. Funksiya limiti va uzluksizligi.....118

3.4-§. Bir o‘zgaruvchili funksiya hosilasi va differensiali 134

Hosilaga keltiriladigan masalalar haqida 134

3.5-§. Differensiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremalar. Hosilaning ba’zi tatbiqlari.....149

3.6 -§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya differensiali. Xususiy hosila va yuqori tartibli differensiallar 182

3.7-§. Aniqmas va aniq integral 198

IV-BOB. BIRINCHI TARTIBLI VA IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR 234

4.1-§. Birinchi tartibli va ikkinchi tartibli differensial tenglamalar 234

Foydalanilgan adabiyotlar.....267

J.B.Quljanov, U.Z.Raximova,
Sh.B.O‘razaliyev

MATEMATIKA 1

o‘quv qo‘llanma

Muharrir: Z. Meliyev
Musahhih: J. Shodmonov
Texnik muharrir: Z.N. Bobodustov

O‘quv qo‘llanma Samarqand iqtisodiyot va servis instituti Kengashining 2023 – yil 10 - noyabragi 4 - sonli qaroriga muvofiq o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan.

© «FAN BULOG’I» nashriyoti, Samarqand - 2023

ISBN: 978-9910-753-48-0

Nashriyot lisenziyasi:
№ 4341-5160-642c-944b-ab74-5062-3969
Bosishga ruxsat etildi: 10.11.2023 y.
© «FAN BULOG’I» nashriyoti, Samarqand sh.
S.Buhoriy ko’chasi, 1-11 uy.

Qog‘oz bichimi A5, 60x84 1/16, Ofset qog‘ozi.
“Times New Roman” garniturasi.
Nashr bosma tabog`i 16,81
Buyurtma № 0184A/23 Adadi 100 nusxa

Samarqand iqtisodiyot va servis institutining matbaa bo`limida chop etildi.
LICENSE № 025316.
REESTR № X-119112.
Manzil: Samarqand shahar, Shoxrux ko`chasi 60-uy.