O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI

SAMARQAND IQTISODIYOT VA SERVIS INSTITUTI

U.Z.RAXIMOVA, U.R.ISMATOV, E.X.SALIMOV

MATEMATIKA 1

O‘QUV QO‘LLANMA

60310400-Iqtisodiy xavfsizlik va 60411900- Jahon iqtisodiyoti va xalqaro iqtisodiy munosabatlar (mintaqalar va faoliyat turlari bo‘yicha) ta’lim yo‘nalishlari talabalari uchun

SAMARQAND -2023

UO‘K: 512.64(075.8)
R 29
KBK: 22.143ya73

U.Z.Raximova, U.R.Ismatov, E.X.Salimov
“Matematika 1” [Matn]: **o‘quv qo‘llanma** / Samarqand iqtisodiyot va servis instituti – Samarqand.: “FAN BULOG‘I” nashriyoti, 2023 - 252 bet.

Taqrizchilar:

E.Y.Jabborov - SamDU “Algebra va geometriya” kafedrasi mudiri f-m.f.n.
X.Q.Qarshiboyev - SamISI “Oliy matematika” kafedrasi mudiri, dotsent.

Mazkur o‘quv qo‘llanma Samarqand iqtisodiyot va servis institute O‘quv-uslubiy Kengashi tomonidan tasdiqlangan “Matematika 1” fani amaldagi dasturiga mos bo‘lib, u 60310400-Iqtisodiy xavfsizlik va 60411900- Jahon iqtisodiyoti va xalqaro iqtisodiy munosabatlar (mintaqalar va faoliyat turlari bo‘yicha) ta’lim yo‘nalishlari bo‘yicha bilim oladigan talabalar uchun muljallangan bo‘lib, undan boshqa ta’lim yo‘nalishdagi bakalavriatlar ham foydalanishlari mumkin.

Mazkur o‘quv qo‘llanmada chiziqli algebra va analitik geometriya, matematik analizga kirish, qatorlar nazariyasi, differensial tenglamalar nazariyasi bo‘limlari keltirilgan. O‘quv qo‘llanmada oldin fanning nazariy qismlari qisqacha ayrim boblarda esa kengroq berilgan bo‘lib, qulay usullarni qo‘llab misol va masalalar yechilgan. Misol va masalalar yechilgandan so‘ng, tahlil qilingan.

O‘quv qo‘llanma Samarqand iqtisodiyot va servis instituti Kengashining 2023 – yil 10 - noyabragi 4 - sonli qaroriga muvofiq o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan.

ISBN: 978-9910-753-47-3

© U.Z.Raximova va boshq., SamISI. 2023 y.
© “Fan bulog‘i” nashriyoti, 2023 y.

KIRISH

Matematika fani o‘z rivojlanishi tarixida mexanika, fizika, biologiya kabi an’anaviy fanlardan tashqari iqtisodiyot fanlariga ham jadal kirib, rivojlanib bormoqda. Matematika fanini insoniyat taraqqiyotida vujudga kelgan va uning rivojlanishida katta ahamiyatga ega bo‘lgan fanlarning yetakchilaridan desak xato qilmagan bo‘lamiz.

“Matematika 1” fanlarini o‘rganishning bevosita amaliy tatbiqlaridan tashqari yosh mutaxassislarni har taraflama rivojlangan komil inson qilib tarbiyalashda uning alohida o‘ringa egaligini ta’kidlamasdan bo‘lmaydi. Tahliliy mulohaza, mantiqiy mushohada, fazoviy tasavvur, abstrakt tafakkur inson faoliyatining barcha sohasi uchun zarur qobiliyatki, bular matematika fanlarini o‘rganish jarayonida shakllanib, rivoj topadi.

Hozirgi zamon iqtisodiyotida matematika usullari juda keng qo‘llanilmoqda. Shu sababli, yetuk iqtisodchilarni tayyorlashda matematik usullardan foydlanishni o‘qitish bo‘lajak iqtisodchilarni o‘z faoliyatida uchraydigan iqtisodiy masalalarni hal qilishda to‘g‘ri va asosli qarorlar qabul qilishlarida muhim ahamiyatga egadir. Amaliy va nazariy iqtisodiyot masalalari turli-tuman bo‘lib, bunda statisik ma’lumotlarni tahlil qilish usullari, iqtisodiy jarayonning rivojlanish holatini baholash va prognoz qilish masalalari dolzarb hisoblanadi.

Iqtisodiy jarayonlarning noaniqlik va tavakkalchilik bilan bog‘liqligi hamda stoxastik harakterdaligi bu jarayonlarni tadqiq etishda ehtimollar nazariyasi va matematik statistika usullarini qo‘llashni taqazo etadi. Iqtisodiy jarayonlarni modellashtirish bilan birga bu jarayonlarning yechimini optimallashtirish ham muhimdir. Bu esa o‘z navbatida matematik usullarini qo‘llashni talab etadi.

Shuni ta’kidlash lozimki, “Matematika 1” fani iqtisodiy ta’limda asosiy tayanch fan hisoblanib, uning usullari ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, iqtisodiy matematik modellar va usullar, ekonometrika, iqtisodiy tahlil, informatika, makro va mikro iqtisodiyot,

moliyaning miqdoriy metodlari, logistika va boshqa fanlarning asosiy bilimlarini egallashda asosiy qurol sifatida ishlatiladi.

Mazkur o‘quv qo‘llanma matematikaning chiziqli algebra asoslari va ularning tadbiqlari, analitik geometriya va ularning tadbiqlari , matematik analiz asoslari va uning tadbiqlari va differensial tenglamalar bo‘limlarini o‘z ichiga oladi.

O‘quv qo‘llanma 4 bobdan iborat bo‘lib, har bir bobda tegishli mavzular bo‘yicha nazariy qism, tayanch iboralar, nazorat savollari va mustaqil bajarish uchun topshiriqlar berilgan.

Mazkur o‘quv qo‘llanma Samarqand iqtisodiyot va servis instituti O‘quv-uslubiy Kengashi tomonidan tasdiqlangan “Matematika 1” fani amaldagi dasturiga mos bo‘lib, u 60310400-Iqtisodiy xavfsizlik va 60411900- Jahon iqtisodiyoti va xalqaro iqtisodiy munosabatlar (mintaqalar va faoliyat turlari bo‘yicha) ta’lim yo‘nalishlari bo‘yicha bilim oladigan talabalar uchun mo‘ljallangan.

I BOB. CHIZIQLI ALGEBRA ELEMENTLARI

1.1-§. Matritsalar va ular ustida amallar.

Tayanch iboralar:*Matritsa, matritsaning o'lchami, matritsaning determinanti, bosh diagonal, diagonal matritsa, birlik matritsa, transponirlangan matritsa, teng matritsalar, matritsalarning yig'indisi, matritsani songa ko'paytirish, matritsalar ko'paytmasi.*

1.1.1 Matritsalar haqida umumiy tushunchalar

Matritsalarni algebraik nuqtai nazaridan sonlar to‘plami deb qarash mumkin. Har bir belgini, odatda, bir "element" sifatida aniqlanadi. Har bir matritsa to‘g’ri to‘rtburchaklar shaklda bo‘lib, barch satr va ustun elementlar bilan to‘ldirilgan bo‘lishi zarur. Masalan, agar matritsa 5 satr va 3 ustundan iborat bo‘lsa, har bir satrda 5 element va har bir ustunda 3 element bo‘lishi kerak. Ba’zi elementlar nol bo‘lishi mumkin. Matritsaning o‘lchovi uning “tartibi” deb ataladi. Tartibi quyidagicha aniqlanadi:

(qatorlar soni) × (ustunlar soni)

Misol uchun, yuqoridagi aytilganmatritsa 5 satr va 3 ustundan iborat va shuning uchun uning o‘lchovi 5 × 3. Bitta satr yoki ustundan iborat matritsalarodatda vektor deb qabul qilinadi.Misol uchun, avtomobil ijara narxlarini belgilanganda biz 1 × 5 satr-matritsani vektor sifatida

$$p = \begin{bmatrix} 139 & 160 & 205 & 340 & 430 \end{bmatrix}$$

va birinchi hafta uchun zarur avtomobillarni 5 × 1 ustun-matritsani ustun-vektor deb qarash mumkin

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1-ta’rif. m ta satrli va n ta ustunli to’g’ri burchakli $m \cdot n$ ta elementdan tuzilgan jadval

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \ldots. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ o'lchamli matritsa deyiladi. Matritsalar lotin alfavitining bosh harflari bilan belgilanadi, masalan, $A, B, C, \ldots$ kabi. A matritsani qisqacha $A = (a_{ij});\ i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan,

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matritsalar ( ) qavsdan tashqari quyidagi belgilar bilan ham belgilanadi: $\| \|, [\ ]$.

Matritsa yordamida ba'zi iqtisodiy bog'lanishlarni yozish qulay. Masalan, alohida iqtisodiy tarmoqlarga xom ashyolarni taqsimlash jadvali:

Resurslar	Iqtisod tarmoqlari	
	sanoat	qishloq xo'jaligi
Elektroenergiya	5,3	4,1
Mehnat resurslari	2,8	2,1
Suv resurslari	4,8	5,1

tarmoqlar bo'yicha resurslarni taqsimlash matritsa ko'rinishda ixcham yozilishi mumkin:

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 5{,}3 & 4{,}1 \\ 2{,}8 & 2{,}1 \\ 4{,}8 & 5{,}1 \end{pmatrix}.$$

Bu yozuvda, matritsaning $a_{11} = 5{,}3$ element sanoatning elektroenergiya ist'emolini, $a_{22} = 2{,}1$-esa qishloq xo'jaligini ist'emol mehnat resurslarini ko'rsatadi.

Faqat bitta satrdan iborat $(a_{11}\ a_{12}\ a_{13})$matritsaga **satr matritsa** deyiladi. Faqat bitta ustunga ega

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix}$$

matritsaga **ustun matritsa**deb ataladi. Bundan tashqari ba'zida bu matritsalar mos ravishda **satr-vektor** va**ustun-vektor** deb ham ataladi.

Har bir elementi nolga teng bo'lgan, ixtiyoriy o'lchamli matritsaga **nol matritsa** deyiladi va quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\underset{m\times n}{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ $(i=\overline{1m},\ j=\overline{1n})$ matritsalarning mos elementlari $a_{ij}=b_{ij}$ teng bo'lsa, bunday matritsalar **teng matritsalar** deyiladi.

1-misol. Quyidagi matritsaviy tenglikdan x va y noma'lumlarning qiymatlarini toping.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ x+y & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & y \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Yechish: matritsalarning mos elementlarini tenglab quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$x+y=7,\ y=4.$$

Bundan $x=3,\ y=4$ qiymatlarni hosil qilamiz.

Matritsalarda satrlarisoni ustunlari soniga teng bo'lgan $(n\times n)$ o'lchamli matritsaga ***n-tartiblikvadrat matritsa***deb ataladi.

2-misol. A= $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & 8 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ 3-tartibli kvadrat matritsaga misol bo'ladi.

Kvadrat matritsaning bosh diagonali deb, indekslari bir xil bo'lgan elementlarni birlashtirish natijasida hosil bo'lgan to'g'ri chiziqqa aytiladi.

Boshqacha aytganda, a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}elementlarga matritsaning bosh diagonal elementlari deyiladi.

Agar A = (a_{ij}) kvadrat matritsada $i>j$ ($i<j$) munosabat bajarilganda$a_{ij}=0$ bo'lsa, u holda A matritsaga **yuqori (quyi) uchburchakli matritsa** deyiladi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12}\cdots a_{1n} \\ 0\;\;a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\;\;0\;\cdots\;\;a_{nn} \end{pmatrix}$$ (yuqori uchburchakli matritsa)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\;\;0\;\cdots 0 \\ a_{21}\;a_{22}\cdots\;0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\;a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$ (quyi uchburchakli matritsa)

A = (a_{ij}) kvadrat matritsada$i \neq j$bo'lganda, $a_{ij}=0$bo'lsa, u holda Amatritsaga diagonal matritsa deyiladi.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\;0\;\cdots\;\;0 \\ 0\;\;a_{22}\;\cdots\;0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\;\;\;0\;\cdots\;\;a_{nn} \end{pmatrix}$$ (diagonal matritsa)

Agar diagonal matritsaning barcha diagonal elementlari o'zaro teng bo'lsa, u
holda bunday matritsaga skalyar matritsa deyiladi, ya'ni

$$A=\begin{pmatrix} a\;\;0\;\cdots 0 \\ 0\;\;a\;\cdots\;0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0\;\;\;0\;\cdots a \end{pmatrix}$$ (skalyar matritsa)

Agar $n-$chi tartibli diagonal matritsaning barchadiagonal elementlari 1 ga teng bo'lsa, u holda bunday matritsaga $n-$chi tartibli *birlik matritsa* deyiladi va u E harfi orqali belgilanadi.

Masalan, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$-uchinchi tartibli *birlik matritsa*.

A matritsaga quyidagi matritsani mos qo'yish mumkin:

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11}a_{21}\cdots a_{m1} \\ a_{12}a_{22}\cdots a_{m2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bu matritsaning har bir satri A matritsaning unga mos ustunidan iborat. A^T matritsani A matritsaga nisbatan ***transponirlangan*** deyiladi.

TRANSPONIRLASH AMALI XOSSALARI

1. $\left(A^T\right)^T = A,$
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T,$
3. $(A+B)^T = A^T + B^T,$
4. $(AB)^T = B^T A^T.$

Agar A kvadrat matritsada $A=A^T$ munosabat o‘rinli bo‘Isa, u holda bunday
matritsaga **simmetrik matritsa** deyiladi.

1.1.2. Matritsalar ustida amallar.

A matritsaning λ songa ko’paytirish deb, shunday $B = \lambda A$ matritsaga aytiladiki, uning elementlari $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, barcha $i = 1,2,..,m;\ j = 1,2,...,n$ lar uchun topiladi.

Masalan, agar $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ bo’lsa, u holda

$5A = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 0 \\ 20 & -15 & 5 \\ 10 & 40 & 30 \end{pmatrix}$.

Xususiy holda, *A matritsaning 0 soniga ko’paytmasi* nol matritsa **0**hosil bo’ladi, y’ni $0 \cdot A = \mathbf{0}$.

Bir xil $m \times n$ o’lchamli ikkita $A = (a_{ij})$ va $B = (b_{ij})$ *matritsalarning yig’indisi* deb, shunday $C = A + B$ matritsaga aytiladiki, uningelementlari $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n$ lar uchun aniqlanadi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 0\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix},\ C=A+B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 5 & 9 & 11\end{pmatrix}.$$

Ikkita bir xil o'lchamli matritsalarning ayirmasi quyidagi amal orqali oshiriladi: $A-B=A+(-1)\cdot B$.

$A=(a_{ij})$ *matritsani* $B=(b_{ij})$ *matritsaga ko'paytirsh* mumkinki, qachonki birinchi matritsaning ustunlar soni ikkinchi matritsaning satrlar soniga teng bo'lsa. U holda $\underset{m\times k}{A}\cdot\underset{k\times n}{B}$ matritsalar ko'paytmasi shunday $\underset{m\times n}{C}$ matritsaga uning c_{ij} elementi A matritsa i-satri elementlarini B matritsa j-ustunining mos elementlariga ko'paytmalari yig'indisiga teng, ya'ni:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj},\ i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n.$$

1-misol. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 4\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ matritsalar berilgan. $A\cdot B$ ko'paytma matritsani toping.

Yechish.Ko'paytma matritsaning o'lchamini topamiz $\underset{2\times3}{A}\cdot\underset{3\times3}{B}=\underset{2\times3}{C}$. Birinchi matritsaning ustunlar soni, ikkinchi matritsaning satrlar soniga teng, shuning uchun bu matritsalarni ko'paytirish mumkin:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 4\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1(-1)+0\cdot5+2(-2) & 1\cdot0+0\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot4+2\cdot1\\ 3(-1)+1\cdot5+0(-2) & 3\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 3\cdot1+1\cdot4+0\cdot1\end{pmatrix}$$

Shunday qilib, $C=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 7\end{pmatrix}$ matritsani hosil qilamiz.

Matritsalar ustida amallarning quyidagi xossalari o'rinli:

1). $A+B=B+A$

2). $(A+B)+C=A+(B+C)$

3). $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$

4). $A(B+C)=AB+AC$

5). $(A+B)C=AC+BC.$

6). $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B).$

7). $A(BC)=(AB)C.$

Butun musbat darajali A^m $(m>1)$ *kvadrat matritsa deb,* A matritsani o'zini-o'ziga m marta ko'paytirishdan hosil bo'lgan matritsaga aytiladi, y'ni

$$A^m = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{m\ марта}.$$

Ta'rifga ko'ra, $A^0 = E,\ A^1 = A.$ Osonlik bilan ko'rsatish mumkinki, $A^m \cdot A^k = A^{m+k},\ (A^m) = A^{mk}.$

2-misol. A^2 ni toping, bunda $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Yechish. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.

1.1.3. Matritsalar ustida amallarga keladigan iqtisodiy masalalar

Algebra elementlari xususan matritsa tushunchasidan foydalanish ko'plab iqtisodiy masalalarni hal qilishning asosiy yondashuvlaridan biridir. Ushbu yondashuv ma'lumotlar bazasini ishlab chiqish va ulardan foydalanish, iqtisodiy jarayonlarni prognozlash va ko'rsatgichlarni tahlil qilishda ayniqsa dolzarb ahamiyatga ega. Iqtisodiy ko'rsatgichlar deyarli barcha ma'lumotlar matritsa shaklida tasvirlanadi va qayta ishlanadi. Masalan vektor va matritsa tushunchasi yordamida iqtisodiy ko'rsatgichlarni shaklantirish bo'yicha bazi misollarni ko'rib chiqaylik.

1-misol. Korxona har kuni to'rtta turdagi mahsulot ishlab chiqaradi va ularning asosiy ishlab chiqarish iqtisodiy ko'rsatkichlari 1-jadvalda keltirilgan.

1.1-jadval

Mahsulot turi	Mahsulotlar soni	Mahsulotni ishlab Chiqarish uchun xom ashyo sarfi (kg)	Ishlab chiqarish uchun ajratilgan vaqt (soat)	Mahsulot tannarxi (pul birligida)
1	20	5	10	30
2	50	2	5	15
3	30	7	15	45
4	40	4	8	20

Quyidagi kundalik ko'rsatkichlarni aniqlash talab qilinsin: xom ashyo sarfi-S, ishlab chiqarishga sarflangan vaqt-T va korxona ishlab chiqargan mahsulotlarning tannarxi-P.

1-jadvalga ko’ra biz butun ishlab chiqarish siklini tavsiflovchi to'rtta vektorni

tuzalik:

$\vec{q}$ = (20, 50, 30, 40) - assortiment (mahsulotlar soni) vektori;

$\vec{s}$ = (5, 2, 7, 4) - mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarf-xarajatlar vektori;

$\vec{t}$ = (10, 5, 15, 8) - ishlab chiqarish uchun ajratilgan vaqt vektori;

$\vec{p}$ = (30, 15, 45, 20) - tannarx vektori.

Izlanayotgan xom ashyo sarfi-S, ish vaqti uchun xarajatlar-T va korxonaning

ishlab chiqargan mahsulotlari narxi-P hosil qilingan vektorlarning skalyar ko’paytmasiga teng:

$$S=\vec{q}\cdot\vec{s}^{T} = 100+100+210+160 = 570 \text{ kg.}$$

$$T=\vec{q}\cdot\vec{t}^{T} = 1220 \text{ soat.}$$

$$P = \vec{q}\cdot\vec{p}^{T} = 3500 \text{ so’m.}$$

Xom ashyo sarfi

Korxona to'rt turdagi xom ashyolardan foydalanib to'rt turdagi mahsulot ishlab chiqarsin. Har bir mahsulot uchun xom ashyoni iste'mol qilish stavkalari 2-jadvalda keltirilgan.

1.2-jadval.

x.a.turi / mah.turi	Xom ashyo turi			
	1-nav	2-nav	3-nav	4-nav
№1	2	3	4	5
№2	1	2	5	6
№3	7	2	3	2
№4	4	5	6	8

Bu ma’lumotlarni A matritsa elementlari sifatida tasvirlaymiz.

xom ashyo turi

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 5 & 6\\ 7 & 2 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 6 & 8\end{pmatrix}$$ mahsulot turi

Har bir turdagi mahsulot uchun ma'lum bir ishlab chiqarish rejasi bo’yicha har bir turdagi xom ashyo xarajatlarini topish talab qilinadi: masalan 60,50, 35 va 40 birlikda (bu birlik mahsulot turi) bo’lishi mumkin.

Bu birlik uchun ishlab chiqarishga oid B matritsa (reja) tuzamiz:

B = (60, 50, 35, 40).

Har bir turdagi mahsulotni 60,50, 35 va 40 birlikda ishlab chiqarish uchun har bir turdagi xom ashyo xarajatlari B matritsa elementlarini A matritsa elementlariga ko’paytmasiga tengligi malum bo’ladi:

$$B\cdot A=(60,\ 50,\ 35,\ 40)\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 5 & 6\\ 7 & 2 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 6 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}120+50+245+160\\ 180+100+70+200\\ 240+250+105+240\\ 300+300+70+320\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}575\\ 550\\ 835\\ 990\end{pmatrix}$$

Takrorlash uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning o’lchovi nima va u qanday yoziladi?
3. Kvadrat matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
4. Diagonal matritsa deb nimaga aytiladi?
5. Birlik matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
6. Transponirlangan matritsa deb nimaga aytiladi?
7. Qanday matritsalar teng bo’ladi?
8. Matritsalar yig’indisi nima?
9. Matritsani songa ko’paytirish qanday bo’ladi?
10. Qanday Matritsalarni ko’paytirish mumkin?

11. Matritsalar qanday ko’paytiriladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ *va* $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$ bo’lsa

$A\cdot B-2\cdot C=?$

2. $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&3\\4&0&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&7\\3&2\\1&-3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\-1&-4\end{pmatrix}$ matritsalar berilgan.

$AB-2C$ ifoda hisoblansin.

3. $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ bo’lsa, $A\cdot B+\frac{1}{3}C=?$

4. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$ *va* $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$ bo’lsa

$A\cdot B-2\cdot C=?$

1.2-§ Determinantlar Nazariyasi.

Tayanch iboralar: *matritsa,determinant, tartib, uchburchak usuli, yoyilma, minor, algebraic to’ldiruvchi*.

1.2.1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.

2 tartibli (2×2 o‘lchovli) matritsaning determinant deb qarama-qarshi burchakdagi elementlar ko‘paytmasining ayirishdan hosil bo‘lgan songa aytiladi. Odatda determinantlarni matritsalardan farqlash uchun ikki tomonidan vertikal to‘g’ri chiziqlar bilan belgilanadi, matritsa kabi kvadrat qavslar emas.

2×2 o‘lchovli Amatritsa determinant |**A**| kabi belgilanadi.

Shuning uchun

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

Misol.

$A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ matritsa determinanti topilsin.

Yechish. Yuqoridagi formuladan foydalanib hisoblaymiz

$$A=\begin{vmatrix}6 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=6\cdot 5-3\cdot 4=30-12=18$$

Agar matritsa satrlari yoki ustunlari orasida chiziqli bog'lanish mavjud bo'lsa, uning determinant nolga teng bo'ladi va u **xos matritsa** deyiladi.

Masalan, $A=\begin{bmatrix}5 & 8\\ 10 & 16\end{bmatrix}$ matritsa determinanti

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 4 & 9\end{vmatrix}=5\times 16-8\times 10=80-80=0,$$

shunig uchu A matritsa xos matritsadir.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

uchinchi tartibli martisa uchun |**A**| determinant quyidagicha hisoblanadi:

$$|A|=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

Bu birinchi satr elementlarini shu element turgan satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan matritsa determinantiga ko'paytirishdan hosil qilinmoqda. Masalan, 3x3 o'lchovli berilgan matritsa 1 satr va 1 ustunu o'chirilishidan hosil bo'lgan determinant elementga ko'paytirilgan. Agar biz a_{11} belgilashga e'tibor bersak, u holda bu usulni satr bo'yicha qo'llaganda ishora almashadi. Demak, ikkinchi qo'shiluvchi manfiy ishorali bo'ladi.

Misol.

$A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 1\\ 2 & 5 & 2\\ 9 & 0 & 4\end{bmatrix}$ matritsa determinanti topilsin.

Yechish. Yuqoridagi formulaga ko‘ra, birinchi satr elementlari bo‘yicha yoyilma quyidagicha bo‘ladi

$$|A| = 4\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(20-0) - 6(8-18) + (0-45) = 80 + 60 - 45 = 95$$

Ta’rif. *n-tartibli kvadrat* $A = (a_{ij})$ *matritsaning determinanti deb, quyidagitenglik bilan aniqlangan songa aytiladi:*

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \quad A_{1k}$$

Bu ta’rifdan foydalanib 2 va 3 tartibli determinantlarni hisoblash uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

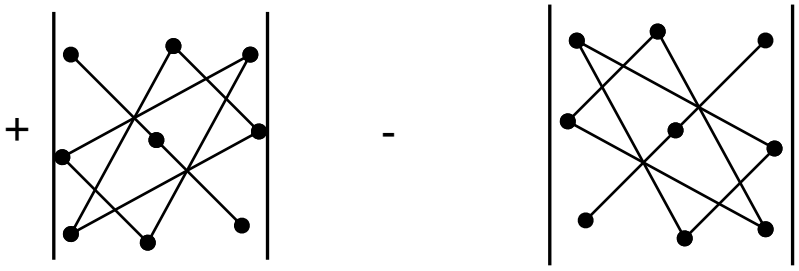
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k} A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

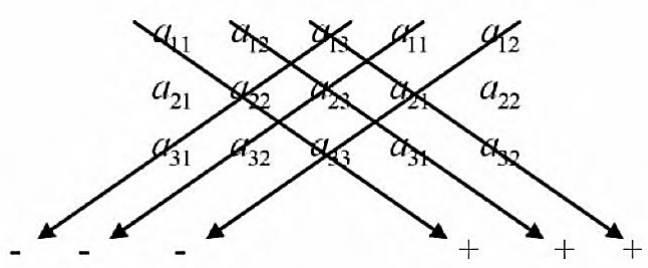
3-tartibli determinantni hisoblash formulasini esda saqlash ***uchun uchburchak qoidasi*** deb ataluvchi quyidagi sxemadan foydalanish mumkin. Elementlarni nuqtalar bilan belgilasak, ushbu sxema hosil bo’ladi :



(+) ishora bilan, (-) ishora bilan olinadi.

Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning **Sarrus qoidasi**. Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning Sarrus qoidasi quyidagicha amalga oshiriladi. Determinant ustunlarining o‘ng yoniga

chapdagi birinchi va ikkinchi ustunlar ko‘chirib yoziladi. Hosil bo’lgan kengaytirilgan jadvalda bosh diagonal o‘nalishida joylashgan elementlar ko‘paytirilib musbat ishora bilan, ikkilamchi diagonal yo‘nalishidagi elementlar ko‘paytirilib manliy ishora bilan olinib yig’indi tuziladi. Bu yig‘indi uchinchi tartibli detemiinantning qiymatidan iborat. Buni sxema ko‘rinishida quyidagicha tasvirlash mumkin:



1.2.2. Determinant xossalari

1-xossa. *Agar* A*-matritsaning biron-bir satridagi (ustunidagi) barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, u holda uning determinanti nolga teng bo ‘ladi.*

2-xossa. *Agar* A*-matritsaning biron-bir satr (ustun) elementi* λ *soniga ko‘paytirilsa, determinant qiymati ham* λ *soniga ko‘payadi, ya’ni* $\lambda \cdot |A|$ *ga teng bo‘ladi.*

3-xossa. A*-matritsa va uning transponirlangani* A' *matritsalarning determinantlari teng bo‘ladi, ya’ni* $|A| = |A'|$ *tenglik o‘rinlidir.*

4-xossa. *Agar* A*- matritsaning ikkita qo‘shni satrlari o‘rnini almashtirsak, hosil bo‘lgan yangi* A_1 *matritsaning determinanti* A*-matritsa determinantining teskari ishora bilan olinganiga teng bo ‘ladi, ya’ni* $|A_1| = -|A|$ *tenglik o‘rinli bo‘ladi.*

5-xossa. *Agar* A*-matritsa bir xil ikki satrga (ustunga) ega bo‘lsa, u holda uning determinanti nolga teng , ya’ni* $|A| = 0$ *bo ‘ladi.*

6-xossa. *Agar* A*-matritsada ikki satrning (ustun) mos elementlari proporsional bo‘lsa, u holda uning determinanti nolga teng, ya’ni* $|A|=0$ *bo ‘ladi.*

7-xossa. *Agar* A *matritsaning biron satr (ustun) elementlarini boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytirib yig’indi hosil qilsak, bunday yig’indi nolga teng bo‘ladi, ya’ni* $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0, \quad i \neq j$ **.**

8- xossa. A *matritsaning biron-bir satri (ustuni) elementlarini bir xil songa ko‘paytirib, boshqasiga qo‘shishdan hosil bo‘lgan* A_1*-matritsaning determinanti* A *matritsa determinantiga teng bo‘ladi, ya’ni* $|A_1|=|A|$ **.**

9-xossa. $b_1,\ b_2,\ldots,b_n$ *sonlarni n-tartibli* A *matritsaning berilgan satr (ustun) mos elementlarining algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmasining yig’indisi,* A *matritsaning berilgan satr (ustun) elementlarining* $b_1,\ b_2,\ldots,b_n$ *sonlari bilan almashtirilgan matritsa determinantiga teng bo ‘ladi.*

10-xossa. *n-tartibli kvadrat* A *va* B *matritsalar uchun* $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$ *tenglik o‘rinli bo‘ladi, ya’ni matritsalar ko‘paytmasining determinanti, ularning determinantlari ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.*

Misol. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = ?$

Yechish. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5+12+21+10-21+6=33.$

1.2.3. Minor va algebraik to‘ldiruvchi

Laplas yoyilmasi yordamida har qanday tartibli determinantni hisoblash mumkin.Lekin buning uchun ba’zi tushunchalar bilan tanishishimiz kerak (ba’zilaridan biz foydalandik ham).

Minorlar. ***A*** matritsa |$\mathbf{M}_{ij}$ | minori deb ***i-*** satr va ***j-*** ustunni o‘chirishdan hosil bo‘lgan determinantga aytiladi.

Masalan,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

matritsa uchun

$$|M_{11}|=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Misol.

$A=\begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ matritsa uchun $|M_{31}|$ minorni hisoblang.

Yechish. Uchinchi satr va birinchi ustunni o‘chirib

$$|M_{31}|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}=8-27=-19$$

minorni hosil qilamiz.

Minor ta’rifidan foydalanib, 3 tartibli determinant hisoblash formulasini quyidagicha yozish mumkin

$$|A|=a_{11}|M_{11}|-a_{12}|M_{12}|+a_{13}|M_{13}|$$

Algebraik to‘ldiruvchi. $(-1)^{i+j}$ ishora aniqlikdagi |**M***ij* | minorga $|C_{ij}|$ algebraik to‘ldiruvchi deyiladi. $|C_{ij}|$ algebraik to‘ldiruvchi ishorasi $(-1)^{i+j}$. Shunday qilib, satr va ustun nomerlari yig’indisi toq bo‘lsa,u holda ishora manfiy bo‘ladi. Masalan, 3 tartibli **A**matritsada $|C_{12}|$ algebraik to‘ldiruvchini topish uchun 1 satr va 2 ustunni o‘chiramiz, $i+j=3$ bo‘lgani uchun hosil bo‘lgan determinantni $(-1)^3$ ga ko‘paytiramiz. Demak,

$$|C_{12}|=(-1)^3\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Misol.

$A=\begin{bmatrix}8 & 2 & 3\\ 1 & 9 & 4\\ 4 & 3 & 6\end{bmatrix}$ matritsa uchun $|C_{22}|$ algebraik to‘ldiruvchini toping.

Yechish. $i + j = 4$ bo‘lgani uchun

$$|C_{22}|=(-1)^4\begin{vmatrix}8 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=(+1)(48-12)=36$$

Algebraik to‘ldiruvchi ta’rifidan foydalanib, 3 tartibli determinant hisoblash formulasini quyidagicha yozish mumkin

$$|A|=a_{11}|C_{11}|+a_{12}|C_{12}|+a_{13}|C_{13}|(1)$$

Bu munosabat xuddi A determinantni hisoblash formulasidek ko‘ringani bilan, shuni ta’kidlash kerakki, bu yerdagi ikkinchisi element ishorasi musbatligiga qaramasdan unga mos algebraik to‘ldiruvchilardan manfiydir.

1.2.4. Yuqori tartibli detirminantlarni hisoblash

Laplas yoyilmasi. Har qanday *n* tartibli matritsa determinantini Laplas yoyilmasidan foydalanib hisoblash mumkin

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}|C_{ij}|\ ,\quad j=1,2,3,...,n$$

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}|C_{ij}|\ ,\ i=1,2,3,...,n$$

bunda yig’indi 1 dan n gacha ustun bo‘yicha ham (j) yoki satr bo‘yicha ham (i) bo‘lishi mumkin. Agar siz (1) 3 tartibli determinant hisoblash formulasiga e’tibor bersangiz, u Laplas yoyilmasini ifodalaganini anglaysiz. Agar berilgan matritsa 4 yoki yuqori tartibli bo‘lsa, u holda algebraik to‘ldiruvchilar 3 tartibli yoki yuqori tartibli bo‘ladi. shunday qilib, Laplas yoilmasi tarbni pasytirish orqali hisoblashdir, ya’ni berilgan determinantning tartibi bittaga pasayadi. Har qanday yuqori tartibli determinantni Laplas yoyilmasidan foydalanib hisoblaganda unu tartibini ikkinchi tartibgacha tushirib hishoblash qulay.

Determinant tartibi yetarli katta bo‘lganda ko‘p hisoblashlar bajarishga to‘g’ri keladi va shuning uchun tezroq hisoblash usullari zarur bo‘ladi.

Oldin bu usulda hisoblashga misol ko‘raylik.

Misol. Laplas yoyilmasidan foydalanib, quyidagi matritsa determinantni hisoblang

$$A=\begin{bmatrix} 8 & 10 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 & 10 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Yechish. Matritsa determinantini hisoblash uchun uni birinchi ustun elementlari bo‘yicha yoyamiz(bu ustonda nol elementi bo‘lgani uchun hisoblashda bitta kam uchinchi tartibli determinant hisoblash qulaylik tug’diradi)

$$|A|=8\begin{vmatrix} 5 & 7 & 10 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Endi uchinchi tartibli har bir determinantni yana birinchi ustun elementlari bo‘yicha yoyamiz:

$$|A|=8\left(5\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\right)+2\left(10\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}-5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}\right)-$$

$$-3\left(10\begin{vmatrix} 7 & 10 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}-5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{vmatrix}\right)=$$

$$=8\left[5(-16)-2(-40)+4(18)\right]+2\left[10(-40)-5(-12)+4(-1)\right]-$$

$$-3\left[10(18)-5(5)+2(-1)\right]=$$

$$=8[-80+80+72]+2[-400+60-4]-3[180-25-2]=$$

$$=8(72)+2(-344)-3(153)=$$

$$=576-688-459=-571$$

Ta’rif. *n-tartibli kvadrat $A=(a_{ij})$ matritsa a_{ij} elementining M_{ij}-minori deb, A-matritsaning i-satri va j-ustunini o‘chirishdan keyin hosil bo‘lgan $(n-1)$ tartibli matritsa determinantiga aytiladi.*

Ta'rif. *n-tartibli* $A=(a_{ij})$ *matritsa* a_{ij}*-elementining algebraik to'ldiruvchisi* A_{ij} *- deb quyidagi songa aytiladi* $A_{ij}=(-1)^{i+j}\ M_{ij}$**.**

Yig'indi $\sum_{s=1}^{n} a_{is}\ A_{is}$ *–* i*-satr bo'yicha yoyilma,* $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ A_{kj}$ *yig'indi esa, j-ustun bo'yicha yoyilma deb ataladi.*

Ta'rif. *n-tartibli kvadrat* $A=(a_{ij})$ *matritsaning determinanti deb, quyidagi tenglik bilan aniqlangan songa aytiladi:*

$$|A|=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\ A_{1k}$$

Teorema (Laplas teoremasi). *Istalgan* i *va* j *lar uchun*

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}\ A_{is}=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ A_{kj}=|A| \quad i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,n}$$

tenglik o'rinli bo 'ladi.

Misol. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ determinant hisoblansin.

I usul. Dastlab, to'rtinchi satr elementlari bo'yicha yoyib hisoblaymiz

$$|A|=a_{41}A_{41}+a_{42}A_{42}+a_{43}A_{43}+a_{44}A_{44}=-a_{41}M_{41}+a_{42}M_{42}-a_{43}M_{43}+a_{44}M_{44}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix}=546.$$

II usul. Endi, determinantning xossalaridan foydalanib, uchinchi ustun elementlarini nolga aylantiramiz va shu ustun bo'yicha yoyib hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 17 & -10 & 0 & 6 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ -19 & 17 & 0 & -6 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -19 & 17 & -6 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 17 & -10 & 6 \\ -3 & -2 & 4 \\ -2 & 7 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=2\begin{vmatrix} -10 & 6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}+7\begin{vmatrix} 17 & 6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=2(-40+12)+7(68+18)=546.$$

Bu usulni “*determinantni tartibini pasaytirib hisoblash usuli*” deb ham yuritiladi.

Nazorat savollari.

1. Laplas yoyilmasini tushuntiring?

2. Minor deb nimaga aytiladi?

3. Algebraik to‘ldiruvchi deb nimaga aytiladi?

4. Determinantning xossalarini keltiring?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi determinantlarni hisoblang:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -9 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 3 & 9 & -4 \\ 1 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 8 & -4 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

6. . $\begin{vmatrix} 6 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 2-x & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$

8. $\begin{vmatrix} 2+x & 0 & 3+x \\ 3 & 8 & -4 \\ 1 & -1 & 8-x \end{vmatrix} = 0$

1.3-§ Matritsa rangi va teskari matritsa

Tayanch iboralar: Matritsa rangi, minor, elementar almashtirishlar, teskari matritsa.

1.3.1. Matritsaning rangi va uni hisoblash.

A $m\times n$ o'lchovli matritsada k satr va k ta ustunini ajratamiz, bunda, k,m va n sonlardan kichik yoki ularning kichigiga teng bo'lishi mumkin. Ajratilgan satr va ustunlarning kesishuvida hosil bo'lgan k-tartibli determinantga *A matritsaning k-tartibli minori deyiladi.*

Ta'rif. A matritsaning 0 dan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga *A matritsaning rangi* deyiladi. A matritsaning rangi $rangA$ yoki $r(A)$ bilan belgilanadi.

Matritsarangini bevosita hisoblashda ko'p sondagi determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Quyidagi keltirilgan matritsa rangi xossalaridan foydalanib matritsarangini hisoblash qulayroq. Matritsada :

1)faqat 0 lardan iborat satri (ustuni)ni o'chirishdan;

2) ikkita satr (ustun)ning o'rinlarini almashtirishdan;

3) biror satr (ustun)ning elementlarini biror $\lambda\neq 0$ songa ko'paytirib, boshqa satr (ustun) mos elementlariga qo'shishdan;

4) matritsani transponirlashdan, uning rangi o'zgarmaydi.

Bu amallarga odatda *elementar almashtirishlar* deyiladi.

Matritsa rangini aniqlashning ta'rif asosida «**minorlar ajratib hisoblash**» usuli va hollar yig'ib hisoblashga asoslangan «**Gauss algoritmi**» usullari mavjud. Matritsa rangi «Gauss algoritmi» yoki nollar yig'ish usuli asosida quyidagicha aniqianadi: dastlabki ko'rinishdagi matritsa yuqorida sanab o'tilgan elementar almashtirishlar yordamida bosh diagonaldan pastdagi (yoki yuqoridagi) elementlari nollarga keltiriladi. Bunda diagonal elementlari iloji boricha noldan farqli bo'lishiga e'tibor qaratilishi zarur. Matritsaning

rangi hosil bo'lgan matritsaning noldan farqli bosh diagonal elementlari soniga teng.

1-misol. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 1\\ 6 & 4 & 1 & 0\\ 6 & 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$

matritsaning rangini hisoblang.

Yechish. A matritsaning rangini hisoblash uchun elementar almashtirishlardan foydalanamiz. Birinchi satr elementlarini (–2) ga ko'paytirib, uchinchi satr elementlariga qo'shib quyidagi matritsani hosil qilamiz:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & 1\\ 6 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}=2-0=2\neq 0$$

bo'lib, uchinchi tartibli minorlar 0 ga teng. Shunday qilib, berilgan matritsaning rangi 2 ga teng.

1.3.2. Teskari matritsava uni topish.

A kvadrat matritsa uchun $AB=BA=E$ birlik matritsa bo'lsa, B kvadrat matritsa A matritsaga *teskari matritsa* deyiladi. Odatda, A matritsaga teskari matritsa A^{-1} bilan belgilanadi.

Teorema. A kvadrat matritsateskari matritsaga ega bo'lishi uchun A matritsaning determinanti 0 dan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir. A kvadrat matritsa uchun $\det A\neq 0$ bo'lsa , unga teskari bo'lgan yagona matritsa A^{-1} mavjud.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ ---------\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}$$

matritsaga teskari A^{-1} matritsa

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}\cdots A_{n2} \\ ---------- \\ A_{1n} & A_{2n}\cdots A_{nn} \end{pmatrix}$$

formula bilan topiladi. Bunda A_{ij} mos ravishda a_{ij} elementlarning algebraik to'ldiruvchilari va $\Delta=\det A$.

Teskari matritsani topishga misol qaraymiz.

2-misol. Ushbu

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari matritsani toping.

Yechish. Oldin A matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=-4\neq 0.$$

Yuqoridagi teoremaga asosan teskari matritsa mavjud, chunki $\Delta=-4\neq 0$ ya'ni, berilgan matritsa maxsusmas matritsadir. A^{-1} ni topish uchun A matritsa hamma elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=4,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=-8,\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=-7,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=9,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-5,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=-6,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=10,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=-6.$$

Teskari matritsani tuzamiz:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

formulaga asosan

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & 9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$ tenglikning bajarilishini tekshirish mumkin.

Takrorlash uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Matritsani songa ko'paytirish qanday bo'ladi?
3. Matritsaning rangi nima?
4. Elementar almashtirishlar deb qanday amallarga aytiladi?
5. Teskari matritsa qanday topiladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & 10 & -4 & -6 \end{pmatrix}$ matrisa rangi topilsin.

2. Quyidagi matrisalardan qaysilariga teskari matrisa mavjud emas?

(a) $\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (e)

$$\begin{bmatrix} 5 & 11 & 0 \\ -2 & 4 & 0.2 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Berilgan matrisaga teskari matrisa topilsin. $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ -1 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

1.4-§. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning gauss va gauss-jordan usullari.

Tayanch iboralar: *noma'lum, yechim, matritsa, determinant , birgalikdagi sistema, aniqmas sistema, aniq sistema, birgalikda bo'lmagan sistema.*

1.4.1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi haqida asosiy tushunchalar

Ma'lumki bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, ularga tenglamalar sistemasi deyiladi.

Tenglamalar sistemasidagi barcha noma'lumlarning darajasi birga teng bo'lsa, bunday tenglamalar sistemasiga chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

ko'rinishdagi sistema n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini ifodalaydi.

Bu sistemaning har bir tenglamasidagi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma'lumlar o'rniga mos ravishda $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sonlarni qo'yilganda (1) dagi barcha tenglamalar ayniyatga aylansa, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sonlar (1) sistemaning yechimi deyiladi.

Ta'rif*. Agarda tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lsa, u birgalikda deyiladi, aks holda birgalikda emas deyiladi.*

Ta'rif*. Birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasi yagona (cheksiz ko'p) yechimga ega bo'lsa, u aniq (noaniq) deyiladi.*

Bizga tenglamalar sistemasidan tashqari, quyidagi

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + ... + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ .....\\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + ... + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi ham berilgan bo‘lsin.

Ta'rif. *Agar tenglamalar sistemalarining yechimlar to‘plami ustma-ust tushsa, u holda ular teng kuchli (ekvivalent) deyiladi.*

Bizga n noma’lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo’lsin

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

(1)

Agar chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlarga ega bo‘lsa, sistema birgalikda deyiladi.

(1) sistemaning birgalikda bo‘lish-bo‘lmasligi shartini aniqlaymiz. Agar birgalikda bo‘lgan sistema bitta yechimga ega bo‘lsa, u aniq sistema, bittadan ortiq yechimga ega bo‘lsa, aniqmas sistema deb ataladi. (1) sistema koeffitsiyentlaridan ushbu A matritsani

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ..... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Berilgan sistema noma’lumlari koeffisiyentlaridan A matrisani hamda bu matrisaga ozod hadlardan tuzilgan ustunni birlashtirib, ikkinchi V matrisani tuzamiz, ya’ni bular ushbu ko’rinishshda bo’ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ - - - - - - - - \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & b_2 \\ - - - - - - - - - - - \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

A matrisaga (1) sistemaning matrisasi, B matrisaga sistemaning kengaytirilgan matrisasi deyiladi. Quyidagi teorema o'rinli.

1- teorema. (Kroneker-Kapelli teoremasi). Chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikda bo'lishi uchun sistema matrisasi A ning rangi sistema kengaytirilgan B matrisasining rangiga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zarurligi. (1) sistema birgalikda bo'lsin. $k_1, k_2, \ldots, k_s$ uning yechimlaridan biri bo'lsin. Bu sonlarni sistemadagi noma'lumlar o'rniga qo'yib, s ta ayniyat hosil qilamiz. Bu ayniyatlar B matrisaning oxirgi ustuni qolgan barcha ustunlarining mos ravishda koeffisiyetlar bilan ko'paytmasidan olingan yig'indisi ekanligini ko'rsatadi. B matrisaning har qanday boshqa ustuni A matrisaga ham kiradi va shuning uchun u matrisaning barcha ustunlari orqali chiziqli ifodalanadi. Aksincha, A matrisaning har qanday ustuni B matrisani ham ustuni bo'ladi, ya'ni bu matrisaning ustunlari orqali chiziqli ifodalanadi. Bundan A va B matrisalarning ustunlari sistemasi o'zaro ekvivalent ekanligi kelib chiqadi, shuning uchun bu matrisalarning rangi bir xil bo'ladi, ya'ni $r(A) = r(B)$ kelib chiqadi.

Yetarliligi. A va B matrisalar bir xil rangga ega bo'lsin. Bundan A matrisa ustunlarining istalgan maksimal chiziqli erkli sistemasi B matrisada ham maksimal chiziqli erkli sistema bo'lib qolishligi kelib chiqadi. Shunda qilib A matrisa ustunlari sistemasi orqali B matrisaning oxirgi ustuni chiziqli ifodalanadi. Demak, shunday $k_1, k_2, \ldots, k_s$ sonlar majmui mavjud bo'ladiki, A matrisaning bu sonlar bilan ko'paytirishdan olingan ustunlari yig'indisi ozod hadlardan iborat ustunga teng, ya'ni $k_1, k_2, \ldots, k_s$ sonlar (1) sistemaning yechimi bo'ladi, shunday qilib, A va B matrisalar ranglarining bir xilda bo'lishidan (1) sistemaning birgalikda bo'lishi kelib chiqadi. Teorema to'liq isbotlandi.

1.4.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish

Bizga n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_{nn}. \end{cases} \quad (1)$$

n noma 'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish ikki bosqichda (dastlab chapdan o'ngga, so'ngra o'ngdan chapga qarab) amalga oshiriladi.

1 - bosqich. (1) sistemani uchburchak ko'rinishga keltirishdan iborat. Buning uchun, $a_{11} \neq 0$ deb (agar $a=0$ bo'lsa, 1- tenglamani $a_{i1} \neq 0$ bo'lgan i-tenglama bilan o'rin almashtiriladi) birinchi tenglamaning chap va o'ng tomoni a_{11} ga bo'linadi. So'ngra, 1 tenglama a_{i1}/a_{11} ga ko'paytirilib, i - tenglamaga qo'shiladi.

Bunda, sistemaning 2-tenglamasidan boshlab x_1 noma'lum yo'qotiladi. Bu jarayonni $n - 1$ marotaba takrorlab quyidagi uchburchaksimon sistema hosil qilinadi:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mn}x_n = b_n. \end{cases}$$

2-bosqich. Oxirgi sistemani yechishdan iborat. Bunda, dastlab sistemaning oxirgi tenglamasidan x_n topilib, undan oldingi tenglamaga qo'yiladi va undan x_{n-1} topiladi. Shu jarayon davom ettirilib, nihoyat 1-tenglamadan x_1 topiladi. Sistema Gauss usuli bilan

yechilganda uchburchaksimon shaklga kelsa u yagona yechimga ega bo'ladi. Agar sistema trapetsiyasimon shaklga kelsa u cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi yoki yechimga ega bo'lmaydi. Tenglamalar sistemasining yechishning Gauss usuli noma'lumlarni birin ketin yo'qotish usuli deb ham ataladi. Bu jarayonni kattaroq teglamalar sistemasiga qo'llash mumkin, chunki bu juda samarali, kompyuter dasturi uchun boshlanish nuqtasi.

Misol. Sistemani Gauss usuli bilan yeching.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}.$$

Yechish. Sistemani Gauss usuli bilan yechamiz. Sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozib: $a_{11} = 1$ hisoblashlar uchun qulaydir. Shuning uchun birinchi va to'rtinchi satrlarning or'nini almashtiramiz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 17 \\ -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 20 \end{array}\right)$$

-5 3 -2 + + +

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 13 \\ 0 & 4 & -18 & 9 & 37 \\ 0 & 3 & -9 & 7 & 28 \end{array}\right)$$

4 3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 24 & -5 & -5 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 4 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 26 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{13} & \frac{19}{13} \end{array}\right).$$

Kengaytirilgan matritsa zinapoya ko'rinishiga keltirildi. Unga mos keluvchi sistemaning ko'rinishi quyidagicha:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \\ -x_2 - 11x_3 - 4x_4 = -11 \\ 26x_3 - 7x_4 = -7 \\ \frac{19}{13}x_4 = \frac{19}{13} \end{cases}$$

oxirgi tenglamadan $x_4 = 1$, uchinchidan $x_3 = \frac{-7+7x_4}{26} = 0$, ikkinchidan $x_2 = 11 + 11x_3 - 4x_4 = 7$ va birinchidan $x_1 = -4 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5$ yechimlarni olamiz.

1.4.3.Tenglamalar sistemani Gauss-Jordan usulda yechish.

Tenglamalar sistemasini yechishda Gauss - Jordan usulining (Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi) mazmun-mohiyati quyidagidan iborat: dastlabki normal ko‘rinishda berilgan sistemaning kengaytirilgan (A/B) matritsasi quriladi. Yuqorida keltirilgan sistemaning teng kuchliligini saqlovchi elementar almashtirishlar yordamida, kengaytirilgan matritsaning chap qismida birlik matritsa hosil qilinadi.

Bunda birlik matritsadan o‘ngda yechimlar ustuni hosil bo‘ladi. Gauss – Jordan
usulini quyidagicha sxematik ifodalash mumkin:

$$(A|B) \sim (E|X^*).$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish Gauss-Jordan usuli noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotishning Gauss strategiyasi va teskari matritsa qurishning Jordan taktikasiga asoslanadi. Teskari matritsa oshkor shaklda qurilmaydi, balki o‘ng ustunda bir yo‘la teskari matritsaning ozod hadlar ustuniga ko‘paytmasi-yechimlar ustuni quriladi.

1-misol. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss-Jordan usulida yeching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

Yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasi koeffitsiyentlaridan kengaytirilgan matritsa tuzamiz. Tenglamalar ustida bajariladigan almashtirishlar yordamida asosiy matritsani quyidagicha birlik matritsaga keltirib javobni topamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 7 & 11 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 27 & 27 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -17 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

1.4.4. Chiziqli tenglamalar sistemasini iqtisodda qo'llanilishi.

Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisoddagi qo'llanilishi bu har qanday iqtisodiy masalaning matematik modelini tuzish va bu modelning optimal yechimi aynan chiziqli tenglamalar sistemasini yechimi bilan uzviy bog'liq hisoblanadi.

$S_1, S_2, \cdots, S_n$ n-ta mamlakat bo'lib, ularning milliy daromadlari mos ravishda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ larga teng bo'lsin. a_{ij} - S_j-mamlakatning S_i-mamlakatdan sotib olgan tovarlarga sarf qilgan milliy daromadning ulushi bo'lsin. Milliy daromad to'laligicha mamlakat ichida va boshqa mamlakatlardan tovar xaridi uchun sarf bo'ladi deb hisoblaymiz, ya'ni

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak.

Quyidagi matritsani qaraylik $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ - - - - - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$,

bu matritsa savdo-sotiqning strukturaviy matritsasi deb nomlanadi. Istalgan $S_i\,(i=\overline{1,n})$ mamlakat uchun ichki va tashqi savdodan hosil bo'lgan tushumi $P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$ tenglik orqali aniqlanadi. Mamlakat olib borayotgan savdo-sotiqning muvozanatda bo'l'shi uchun har bir mamlakat savdosi kamomadsiz bo'lishi kerak, ya'n' har bir mamlakat savdosidan hosil bo'lgan tushum uning milliy daromadidan kam bo'lmasligi kerak. Ya'ni

$$P_i \geq x_i,\ i=\overline{1,n}$$

Agar $P_i > x_i$ deb faraz qilsak, u holda quyidagini hosil qilamiz:

$$Pi = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k > x_i,\quad i=\overline{1,n}$$

bu yerdan $\sum_{i=1}^{n} P_i > \sum_{i=1}^{n} x_i$,ya'ni

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\right)x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k > \sum_{k=1}^{n} x_i$$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa qarama-qarshilikdir. Demak, $P_i \geq x_i$ tengsizlik o'rniga $P_i = x_i$ tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Iqtisodiy nuqtai nazardan bu tushunarli holatdir, chunki mamlakatlarning barchasi bir paytda foyda ko'rolmaydi. Mamlakatlar milliy daromadi uchun $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektorni kiritsak u holda $P_i = x_i$, ya'ni $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = x_i,\ i=\overline{1,n}$

tengliklardan quyidagi tenglamani hosil qilamiz: $\mathrm{AX} = \mathrm{X}$, ya'ni, qaralayotgan masala A matritsaning $\lambda = 1$ xos soniga mos keladigan xos vektorini topish masalasiga kelar ekan.

Misol 1. To'rtta mamlakat savdosining strukturaviy matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

budjetlar yig'indisi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270$ (shartli pul birligi) bo'lsa, har bir mamlakatning budjeti topilsin.

Dastlab,berilgan strukturaviy matritsaning $\lambda = 1$ xos songa mos keluvchi xos vektorni topish kerak, ya'ni $(A - E)\bar{x} = 0$ tenglamani yechish kerak.

$$\begin{pmatrix} -0,8 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & -0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & -0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bu sistemaning rangi uchga teng bo'lgani uchun, noma'lumlardan bittasi erkli o'zgaruvchi va qolganlari shu erkli o'zgaruvchi orqali ifodalanadi. Sistemani Gauss usuli bilan yechib, x xos vektorning kompanentlarini topamiz

$$x_1 = \frac{140}{121}c, \quad x_2 = \frac{146}{121}c, \quad x_3 = \frac{20}{11}c, \quad x_4 = c.$$

Topilgan qiymatni berilgan budjetlar yig'indisiga qo'yib c kattalikni topamiz:c=1210, bundan defitsitsiz savdoda mamlakatlar budjetining izlanayotgan kattaligini topamiz. $x_1 = 1400$, $x_2 = 1460$, $x_3 = 2200$, $x_4 = 1210$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi yechimlari tushunchasi?

2. Gauss usuli qanday usul?

3. Gauss-Jordan usulini tushuntirib bering?

4. Chiziqli tenglamalar sistemasini iqtisodiyotda qo'llanilishi deganda nimani tushunasiz?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi tenglamalar sistemasini Gauss va Gauss-Jordan usullarida yeching.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x-3y+5z=19 \\ 2y-z=0 \\ 3x+y-2z=6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+3y-z=0 \\ 3x+5y-z=0 \\ 2x+4y-z=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=9 \\ 2x_1+5x_2-3x_3=4 \\ 5x_1+6x_2-2x_3=18 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=8 \\ 2x_1-x_2-3x_3=-4 \\ x_1+5x_2+x_3=0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 8x_1+3x_2-6x_3=2 \\ 4x_1+x_2-3x_3=3 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1-4x_2-2x_3=-3 \\ 3x_1+x_2+x_3=5 \\ 3x_1-5x_2-6x_3=-9 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 7x_1-5x_2=31 \\ 4x_1+11x_3=-43 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=-20 \end{cases}$

1.5-§. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsalar usuli. kramer qoidasi.

Tayanch iboralar: *noma'lum, yechim, matritsa, determinant , birgalikdagi sistema, aniqmas sistema, aniq sistema, birgalikda bo'lmagan sistema, Kramer formulalari.*

1.5.1. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda Kramer qoidasi.

Ma’lumki bir necha tenglamalar birgalikda qaralsa, ularga tenglamalar sistemasi deyiladi.

Tenglamalar sistemasidagi barcha noma’lumlarning darajasi birga teng bo’lsa, bunday tenglamalar sistemasiga chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

ko‘rinishdagi sistema n noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasini ifodalaydi.

Bu sistemaning har bir tenglamasidagi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noma’lumlar o‘rniga mos ravishda $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sonlarni qo‘yilganda (1) dagi barcha tenglamalar ayniyatga aylansa, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sonlar (1) sistemaning yechimi deyiladi. (1) sistemaning yechimi asosan quyidagi determinantga bog‘liqdir

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots . a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots . a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2}$$

(2) determinant (1) tenglamalar sistemasidagi noma’lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan, u (1) sistemaning determinanti deyiladi.

Agar $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, sistema yagona yechimga bo‘ladi va bu yechim

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \ldots; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

formulalar yordamida topiladi.

Bu yerda Δ_1 determinant Δ determinantdan birinchi ustun elementlarini ozod hadlar bilan almashtrishdan hosil bo‘ladi, Δ_2 determinant Δ determinantdan ikkinchi ustun elementlarini ozod

hadlar bilan almashtrishdan hosil bo‘ladi, $\Delta_3,...,\Delta_n$ lar ham shunga o‘xshash hosil qilinadi.

n ta chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning bunday usuli Kramer qoidasi deyiladi.

Ikki va uch noma’lumli shiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer qoidasi

Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimini topishni oldin ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi uchun qaraymiz. Ushbu ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

dan, birinchi tenglamani a_{22} ga, ikkinchi tenglamani $-a_{12}$ ga hadma-had ko’paytiramiz va hosil bo’lgan tenglamalarni qo’shamiz, natijada

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \tag{3}$$

tenglama hosil bo’ladi. Xuddi shunga o’xshash, 1-tenglamani $-a_{21}$ ga, 2- tenglamani a_{11} ga hadma-had ko’paytirib, hosil bo’lgan tenglamalarni qo’shib ushbuni hosil qilamiz:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{11} - b_1a_{21} \tag{4}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

bo’lgani uchun, quyidagi belgilashlarni kiritib

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

(3) va (4) tengliklarni

$$\Delta x = \Delta_1, \quad \Delta y = \Delta_2$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bundan $\Delta \neq 0$ bo'lsa,

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

bo'ladi, yoki determinantlar orqali yozsak

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

bunda Δ_1 yordamchi determinant Δ determinantning birinchi ustunini ozod hadlar bilan, Δ_2 da esa ikkinchi ustun ozod hadlar bilan almashtiriladi. Δ determinantga tenglamalar sistemasining determinanti deyiladi.

Shunday qilib, berilgan chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti 0 dan farqli bo'lsa, sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

Endi uch noma'lumli uchta tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistema noma'lumlari koeffisiyentlaridan tuzilgan determinantni Δ bilan belgilaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

bunga (5) *sistemaning determinanti* yoki aniqlovchisi deyiladi. Yordamchi deteminantlarni tuzamiz

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} a_{13} \\ b_2 a_{22} a_{23} \\ b_3 a_{32} a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 a_{13} \\ a_{21} b_2 a_{23} \\ a_{31} b_3 a_{33} \end{vmatrix}, \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} b_1 \\ a_{21} a_{22} b_2 \\ a_{31} a_{32} b_3 \end{vmatrix}$$

Berilgan sistema x_1, x_2, x_3 yechimga ega bo‘lsa, bu yechimni topish uchun quyidagi formulalarga ega bo‘lamiz

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} \qquad (7)$$

Quyidagi hollar bo‘lishi mumkin

1. $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, bu holda (7) formulalardan (5) sistema bitta yechimga ega ekani kelib chiqadi.

2. $\Delta = 0$ va $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$ determinantlardan aqalli bittasi noldan farqli. Bu holda (5) sistema yechimga ega bo‘lmaydi.

3. $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$.

Bu holda (5) sistema yo cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi, yoki umuman yechimga ega bo‘lmaydi.

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2, \\ 3x - y + 2z = -3, \\ x + y - 3z = 4 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Berilgan sistemaning asosiy determinanti va yordamchi determinantlarini tuzamiz

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 39 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 39, \ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -39$$

Demak, $\Delta \neq 0$ bo‘lgani uchun sistema yagona yechimga ega. Bu yechim

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{0}{39} = 0, \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{39}{39} = 1, \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-39}{39} = -1.$$

2-misol. Berilgan

$$\begin{cases} x-5y+2z=1, \\ 3x-15y+6z=-3, \\ 9x-45y+18z=-3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Bevosita hisoblash orqali $\Delta=\Delta_y=0,\ \Delta_x\neq 0,\ \Delta_z\neq 0$ ekaniga ishonch hosil qilish oson. Bundan ko‘rinadiki sistema yechimga ega emas.

1.5.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini matrisalar yordamida yechish.

Endi matrisalar yordamida chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga o’tamiz.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}\right\} \qquad (8)$$

n noma’lumli, n ta tenglamalar sistemasi berilgan bo’lsin.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ --------- \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

belgilashlarni kiritamiz. Endi (8) sistemani matrisalarni ko’paytirish qoidasidan foydalanib,

$$AX=B \qquad (9)$$

ko’rinishda yozish mumkin. $\det A\neq 0$ bo’lsa, teskari matrisa A^{-1} mavjud va $A^{-1}AX=A^{-1}B$ hosil bo’ladi. Shunday qilib, noma’lum X matrisa $A^{-1}B$ matrisaga teng bo’ladi, ya’ni

$$X = A^{-1}B.$$

Bu (8) tenglamalar sistemasini yechishning *matrisaviy yozuvini* bildiradi.

1-misol. Matrisalar yordamida ushbu tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1,. \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Yechish. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisalar yordamida berilgan tenglamalar sistemasini

$$AX = B \qquad (9^*)$$

ko'rinishda yozamiz. A ga teskari A^{-1} matritsa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

bo'lgani uchun (9^*) tenglikning chap tomondan A^{-1} ga ko'paytiramiz, u holda

$A^{-1}AX = A^{-1}B$ yoki $X = A^{-1}B$ bo'lib, ya'ni

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 49 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Demak, tenglamalar sistemasining yechimi

$$x_1 = -21, x_2 = 49, x_3 = 2.$$

1.5.3. Chiziqli tenlamalar sistemasining yechishning Kramer qoidasi va teskari matritsalar usulining iqtisodiyotda qo'llanilishi.

Chiziqli tenglamalar sistemasining iqtisodiyotda qo’llanilishiga doir misollar keltiramiz.

Masala. A va B mahsulotlami ishlab chiqarish uchun 2 turdagi xom ashyodan foydalaniladi. Bir birlik A mahsulotni ishlab chiqarish uchun 5 birlik 1- tur va 4 birlik 2-tur xom ashyo sarflanadi, bitta B mahsulotni ishlab chiqarish uchun esa, 3 birlik l-tur va 5 birlik 2-tur xom ashyo ishlatiladi. l-tur xom ashyo 62 birlik, 2-tur xom ashyo 73 birlik berilgan bo’lsa, eng katta foyda olinadigan ishlab chiqarishni rejalashtirish uchun xom ashyo sarfi modelini tuzing.

Bu masalaning matematik modelini tuzish maqsadida x_1 bilan ishlab chiqarilishi kerak bo’lgan A mahsulot miqdorini, x_2 bilan esa ishlab chiqarilishi kerak bo’lgan B mahsulot miqdorini belgilaylik. Bu holda $5x_1$ A mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan l-tur xom ashyo miqdorini, $3x_2$ esa B mahsulotni ishlab chiqarish uchun sarflangan l-tur xom ashyo miqdorini ifodalaydi. $5x_1+3x_2$ A va B mahsulotni ishlab ishlab chiqarish uchun sarflanadigan l-tur xom ashyo jami sarfi miqdoriimi ifodalaydi, bu xom ashyo chegaralangan bo’lib, 62 birlikda mavjud, demak $5x_1+3x_2 = 62$ tenglama kelib chiqadi. Xuddi shunday qilib, 2-tur xom ashyo sarfi uchun $4x_1+5x_2 =73$
tenglamani hosil qilamiz. Shunday qilib,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 62 \\ 4x_1 + 5x_2 = 73 \end{cases}$$

ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu tenglamalar

sistemasi berilgan A va B mahsulotlarni ishlab chiqarishda, xom ashyo sarfining

matematik model ini ifodalaydi.

Yechish. Kramer usulidan foydalanib yechimini topamiz.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $\det|A| = 25 - 12 = 13 \neq 0$. Bunda

$\det(A) \neq 0$ bo’lganligi sababli berilgan sistema aniq sistemani tashkil qiladi va u yagona yechimga ega bo'ladi. Bu yechim Kramer formulalari yordamida quyidagicha topiladi:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\det|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 62 & 3 \\ 73 & 5 \end{vmatrix}}{13} = \frac{91}{13} = 7,$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\det|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 62 \\ 4 & 73 \end{vmatrix}}{13} = \frac{117}{13} = 9,$$

Demak, tenglamalar sistemaning yechimi: (x_1, x_2) = (7, 9).

Takrorlash uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi qachon yagona yechimga ega bo’ladi?
2. Kramer formulalari nimadan iborat?
3. Tenglamalar sistemasining matrisali yozuvi qanday bo’ladi?
4. Tenglamalar sistemasi matrisalar yordamida qanday yechiladi?
5. Qanday tenglamalar sistemasiga birgalikda deyiladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasiniteskarimatritsausulibilanyeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

2. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 = 9 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

16. Sistemani Kramer formulasibilanyeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

17. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31 \\ 4x_1 + 11x_3 = -43 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

? Quyidagi masalalarning matematik modelini quring va Kramer, teskari matritsa usullaridan foydalanib yeching:

25. Korxona uch xildagi xom ashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 1-jadvalda berilgan.

1-jadval

Xomashyoturlari	**Mahsulotturlaribo'yichaxomashyosarflari**			**Xomashyozahirasi**
	1	**2**	**3**	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	800
S_3	3	2	2	1600

Berilgan xom ashyo zahirasini ishlatib, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

26. Korxona uch xildagi xom ashyoni ishlatib uch turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Ishlab chiqarish xarakteristikalari 2-jadvalda berilgan.

2-jadval

Xomashyoturlari	**Mahsulotturlaribo'yichaxomashyosarflari**			**Xomashyozahirasi**
	1	2	3	
S_1	1	1	1	1
S_2	1	2	2	2
S_3	2	3	3	3

Berilgan xom ashyo zahirasini ishlatib, mahsulot turlari bo'yicha ishlab chiqarish hajmini aniqlang.

1.6-§. Chiziqli operatorlar va ularning xossalari.

Tayanch iboralar: *to'plam, akslantirish, vektor, chisiqli erkli, chiziqli bog'liq, chiziqli kombinatsiya, fazo o'lchovi, bazis, o'tish matrisasi.*

1.6.1. Chiziqli fazo tushunchasi

Ta'rif. *Agar bo'sh bo'lmagan L-to'plamning istalgan* x, y, z *elementlari va* λ *son uchun qo'shish-* $x+y \in L$, *songa ko'paytirish-* $\lambda x \in L$ *aniqlangan bo'lib, bu amallar uchun quyidagi xossalar o'rinli bo'lsa:*

1. $x+y=y+x$, *2.* $x+(y+z)=(x+y)+z$,

3. L *da shunday 0 (nol) element mavjudki, istalgan* $x \in L$ *uchun* $x+0=x$,

4. Har bir $x \in L$ *uchun,* L *da shunday -* x *elementi mavjudki, uning uchun* $x+(-x)=0$,

5. α *va* β *sonlar va* $x \in L$ *uchun* $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$, *6.* $1 \cdot x = x$,

7. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$, *8.* $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$,

u holda u chiziqli yoki vektor fazo deyiladi.

Yuqoridagi ta'rifda songa ko'paytirish amali deganda ikki holatni farqlash kerak. Agar ta'rifdagi sonlar haqiqiy sonlar to'plami $R=(-\infty,+\infty)$ dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo haqiqiy chiziqli fazo deyiladi, agarda bu sonlar kompleks sonlar to'plami C dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo kompleks chiziqli fazo deyiladi.

Ta'rif. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *sonlar uchun* $x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n$ *tenglik o'rinli bo'lsa, u holda chiziqli fazo elementi* x *vektor* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi.*

1.6.2. Chiziqli bog'liqlik, o'lcham va bazis tushunchalari

Ta'rif. *Agar hammasi ham nolga teng bo'lmagan shunday* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *sonlar topilib, ular uchun*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = 0 \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi deyiladi, aks holda, ya'ni (1) tenglik o'rinli ekanligidan* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ *bo'lsa, ular chiziqli erkli vektorlar sistemasi deyiladi.*

Agar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorlar orasida nol vektor bo'lsa, u holda ular chiziqli bog'liq bo'ladi. Agar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorlardan bir nechtasi chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda ularning o'zi ham chiziqli bog'liq bo'ladi.

Ta'rif*. Agar* L *chiziqli fazoda* n *tasi chiziqli erkli va istalgan* $n+1$ *tasi bog'liq bo'lgan vektorlar mavjud bo'lsa, ya'ni chiziqli erkli vektorlarning maksimal soni* n *ga teng bo'lsa, u holda* L *fazo* n *o'lchovli chiziqli fazo deyiladi.*

Ta'rif*.* n *o'lchovli chiziqli fazodagi istalgan* n *ta chiziqli erkli vektorlar sistemasi chiziqli fazoning bazisi deyiladi.*

Teorema. *Chiziqli fazoning har bir elementini yagona usul bilan bazisning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifoda qilish mumkin.*

1.6.3. Bir bazisdan boshqasiga o'tish

$\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ vektorlar bazis bo'lib, x vektor ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsin, ya'ni $x = x_1 \ell_1 + x_2 \ell_2 + \cdots + x_n \ell_n$, u holda $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sonlar x vektorning $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ bazis bo'yicha koordinatalari deb yuritiladi.

n o'lchovli L chiziqli fazoda ikkita $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ va $\ell_1^*, \ell_2^*, \cdots, \ell_n^*$ bazislar berilgan bo'lsin, u holda $\ell_1^*, \ell_2^*, \cdots, \ell_n^*$ lar uchun

$$\ell_1^* = a_{11} \ell_1 + a_{12} \ell_2 + \cdots + a_{1n} \ell_n$$
$$\ell_2^* = a_{21} \ell_1 + a_{22} \ell_2 + \cdots + a_{2n} \ell_n$$
$$- - - - - - - - - - - - - - - - -$$
$$\ell_n^* = a_{n1} \ell_1 + a_{n2} \ell_2 + \cdots + a_{nn} \ell_n$$

tengliklarni hosil qilamiz, bu yerda

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\cdots a_{2n} \\ ------ \\ a_{n}\ a_{n2}\ \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa $\ell_1, \ell_2,\cdots,\ell_n$ bazisdan $\ell_1^*, \ell_2^*,\cdots,\ell_n^*$ bazisga o'tish matritsasi deyiladi. A matritsa xos bo'lmagan matritsa bo'ladi, shuning uchun unga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'lib, bu matritsa $\ell_1^*, \ell_2^*,\cdots,\ell_n^*$ bazisdan $\ell_1, \ell_2,\cdots,\ell_n$ bazisga o'tish matritsasi bo'ladi.

1.6.4. Chiziqli almashtirish matrisasi

Ta'rif. *Agar* L_1 *chiziqli fazoning har bir elementi* $x\in L_1$ *uchun biron qoida, qonunga asosan* L_2 *chiziqli fazoning aniq elementi mos qo'yilgan bo'lsa,* L_1 *ni* L_2 *ga akslantiruvchi operator berilgan deyiladi. Bu operatorni* A *deb belgilab, akslantirishni* $A: L_1 \to L_2$ *shaklda ifoda etiladi, bu akslantirishda x ning y ga mos kelishi* $Ax = y$ *kabi yoziladi.*

Ta'rif. *Agar istalgan* $x\in L_1,\ y\in L_2$ *va* λ *son uchun*

$$A(x+y)=Ax+Ay$$
$$A(\lambda\ x)=\lambda\, Ax$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $A: L_1 \to L_2$ *operator chiziqli operator deyiladi.*

Agar $A: L \to L$ va $B: L \to L$ chiziqli operatorlar bo'lsa, bunday operatorlar uchun $A+B,\ \lambda\cdot A$ va $A\cdot B$ chiziqli operatorlarni aniqlashimiz mumkin bo'ladi. L chiziqli fazoning o'zini-o'ziga akslantiruvchi barcha chiziqli operatorlar
to'plamini $\Im(L)$ deb belgilaymiz, operatorlarni qo'shish va songa ko'paytirishga nisbatan $\Im(L)$ to'plam chiziqli fazoni tashkil etadi.

Ta'rif. *Agar* $A\in\Im(L)$ *operator uchun shunday* λ *son mavjud bo'lib,*

$Ax=\lambda x,\ x\neq 0$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda x *vector* A *operatorning xos vektori deyiladi.*

$A: R^n \to R^m$ chiziqli operator bo'lsin. Biz A operatorning matritsa ko'rinishini hosil qilamiz. Buning uchun R^n da $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ va R^m da esa $\ell_1^*, \ell_2^*, \ldots, \ell_m^*$ bazislarni olaylik. $x \in R^n, Ax = y \in R^m, A\ell_i \in R^m$ uchun ushbu tengliklarni yoza olamiz:

$$x = x_1\ell_1 + x_2\ell_2 + \cdots + x_n\ell_n$$
$$Ax = y = y_1\ell_1^* + y_2\ell_2^* + \cdots + y_m\ell_m^*$$
$$A\ell_i = a_{1j}\ell_1^* + a_{2j}\ell_2^* + \cdots + a_{mj}\ell_m^*,\ j = 1,2,\ldots,n$$

Bu yerdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A\ell_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ell_i^* = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\ell_i^*, \quad Ax = y = \sum_{i=1}^{m} y_i\ell_i^*$$

demak, $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1,2,\ldots,m$ tengliklar hosil bo'ladi. Agar biz ushbu matritsalarni kiritsak,

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ - - - - - - - \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix},$$

u holda yuqoridagi tengliklarni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$AX = Y$

bu yerda A matritsa qaralayotgan A operatorning berilgan bazislardagi matritsasi deyiladi. $A \in \Im(R^n)$ bo'lsin, u holda bunday operatorga mos keladigan matritsa kvadratik matritsa bo'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ - - - - - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

1.6.5. Xarakteristik ko'phad. Xos son va xos ildiz

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ vektor A chiziqli operatorning λ xos soniga mos keluvchi xos vektor, ya'ni $Ax = \lambda x$ bo'lsin.

Agar $\mathrm{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektor matritsa bo'lsa, u holda ushbu tenglik hosil bo'ladi

$$AX = \lambda \mathrm{X}.$$

Bu yerdan E birlik matritsa uchun, quyidagi $(A-\lambda E)\mathrm{X}=0$ tenglikni yoza olamiz. Bu bir jinsli tenglamalar sistemasi har doim nol $x=0$ yechimga ega. U noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun, ya'ni xos vektorning mavjud bo'lishi uchun $|A-\lambda E|=0$ bo'lishi, ya'ni

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \cdots a_{2n} \\ - - - - - - - - - - - \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ekanligi zarur va yetarlidir. Bu determenant λ ga nisbatan n-tartibli ko'phaddan iborat bo'ladi, uni A operatorning yoki A matritsaning xarakteristik ko'phadi, (1) tenglama A operatorning (matritsaning) xarakteristik tenglamasi deyiladi. Shuni ta'kidlash lozimki, xarakteristik ko'phad qaralayotgan bazisga bog'liq bo'lmaydi.

A operator n ta chiziqli erkli $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ xos vektorlarga ega bo'lib, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ xos sonlari bo'lsin, u holda A operatorning $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ bazisga mos keluvchi A matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ya'ni A matritsa diagonal matritsa bo'lar ekan.

Aksincha, biron-bir bazisda A operator matritsasi dioganal ko'rinishga ega bo'lsa, u holda bu bazis vektorlari A operatorning xos vektorlari bo'lib, matritsa dioganallaridaga sonlar uning xos sonlaridan iborat bo'ladi.

Agar A operator n ta turli xos sonlarga ega bo'lsa, u holda ularga mos keluvchi xos vektorlar chiziqli erkli bo'lib, shu vektorlar hosil qilgan bazisda A operator matritsasi diogonal ko'rinishga ega bo'ladi.

Misol. $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ operatorning matritsasini biror bazisda diagonal ko'rinishga keltiraylik.

Matrisaning xarakteristik tenglamasi tuzib, xos sonlarni topamiz

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0, \quad \text{bundan} \quad \lambda^2-7\lambda+10=0,\ \lambda_1=2,\ \lambda_2=5.$$

Xos vektorlarni topish uchun

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\ \begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2=0\end{cases}$$

ko'rinishdagi bir jinsli tenglamalar sistemasini yechamiz.

$\lambda_1=2$ xos songa mos keluvchi xos vektori $\begin{cases}x_1+2x_2=0\\ x_1+2x_2=0\end{cases}$ sistemaning yechimi bo'lib, $x_1=\begin{pmatrix}-2b\\ b\end{pmatrix}$ bo'ladi.

$\lambda_2=5$ xos songa mos keluvchi xos vektor esa $\begin{cases}-2x_1+2x_2=0\\ x_1-x_2=0\end{cases}$ sistemaning yechimi bo'lib, erkli o'zgaruvchini $x_2 = c$ deb olsak. $x_1=\begin{pmatrix}c\\ c\end{pmatrix}$ bo'ladi. b va c ixtiyoriy sonlar bo'lgani uchun bitta xos songa bir nechta har xil xos vektorlar mos kelishi mumkin. Xususan, $b=c=1$ bo'lsa, bir jinsli sistemaning fundamental yechimlariga mos keluvchi xos vektorlar $x_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ va $x_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi.

Bu xos vektorlardan tuzilgan $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ matrisa $x_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ va $x_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ bazisdagi

$B^{-1}\cdot A\cdot B$ almashtirishda berilgan A matrisani diagonal matritsa ko'rinishiga keltiradi.

$B^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ ekanligini hisobga olib, $B^{-1}\cdot A\cdot B$ almashtirishni hisoblaylik

$$B^{-1}\cdot A\cdot B=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -5 & -10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Demak, qaralayotgan bazisda A operatorning matritsasi dioganal ko‘rinishga ega bo’lib, matritsa diogonalidagi sonlar A operatorning xos sonlaridan iborat bo’lar ekan.

Teorema. *A^2 matritsaning xos sonlari, berilgan A matritsa xos sonlari kvadratiga teng, hamda ikkala matritsaning xos vektorlari bir xildir.* $Aq = \lambda q$.

Teorema. *A^n matritsaning xos sonlari, berilgan A matritsa xos sonlari n-darajaga oshirilganiga teng, ammo ikkala matritsaning xos vektorlari bir xildir.*

Teorema. *A^{-1} matritsaning xos sonlari berilgan A matritsaning xos sonlariga teskari bo’ladi, hamda matritsalarning xos vektorlari bir xil.*

Takrorlash uchun savollar

1. Operator deganda nimani tushunasiz?
2. Chiziqli operatorni qanday tushunasiz?
3. Matritsaning xarakteristik tenglamasi deganda qanday tenglamani
tushunasiz?
4. Operatorning xos soni va xos vektori qanday aniqlanadi?
5. Har qanday matritsaning xos son va hos vektorlari mavjudmi?
6. Xos son va xos vektorning qanday xossalarini bilasiz?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1.Berilgan vektorlar sistemasi chiziqli bog`liq yoki erkli ekanligini aniqlang.

$a_1 = (0, 1, 1, 0),\ a_2 = (1, 1, 3, 1),\ a_3 = (1, 3, 5, 1),\ a_4 = (0, 1, 1, 2).$

2. $\bar{a} = \{-3; 4; 1; 0\},\ \bar{b} = \{-1; 2; -3; 0\},\ \bar{c} = \{1; 1; 2; 3\}, \vec{d} = \{2; -6; 0; 2\}$ vektorlarni bazis hosil qilishini tekshiring.Agar bazis hosil qilishsa ,shu bazisdagi $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{d}$ vektorning koordinatalarini aniqlan

3. $\vec{d} = 2x^4 - 4x^3 + 5$ *bektorni* $\vec{a} = -x^4 + 2x^3$,$\vec{b} = x^2 + x + 1$ *va* $\vec{c} = -1$ vektorlar orqali chiziqli ifodalang.

4. Barcha shunday a sonlarni topingki, bunda b vektor a_1, a_2, a_3 vektorlarning chizqli kombinatsiyasi orqali ifodalansin. $b=(2, a, 3), a_1=(1, 2, 1), a_2=(3, 4, 5), a_3=(4, 5, 7).$

5. Quyidagi almashtirishga teskari almashtirishni toping.
$$\begin{cases} x_1 = 5y_1 + y_2 - y_3 \\ x_2 = 3y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ x_3 = y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

6. Matrisaning xos sonlari va xos vektorini toping. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ matritsaning xos sonlari va xos vektorlarini toping.

8. $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ matritsaning xos sonlari va xos vektorlarini toping.

1.7-§. Kvadratik formalar

Tayanch iboralar: kvadratik formalar, kanonik ko‘rinish, inersiya qonuni, ortogonal almashtirish, xos va xosmas kvadratik formalar, xos va xosmas chiziqli almashtirishlar.

1.7.1.Kvadratik formalar ta’rifi.

Kvadratik formalar nazariyasining manbalari ikkinchi tartibli chiziqlar va sirtlar nazariyasida yotadi. Ma`lumki, markazi koordinata boshida bo‘lgan

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D \qquad (1)$$

egri chiziqda

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases} \qquad (2)$$

almashtirish bajarib, ya`ni koordinata o‘qlarini α burchakka burib, (1) egri chiziq tenglamasini quyidagi

$$A'x'^2 + C'y'^2 = D' \qquad (3)$$

“kanonik” ko‘rinishga keltirish mumkin. (2) almashtirish *xosmas chiziqli almashtirish* deb ataladi, chunki

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1.$$

1-ta’rif. n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ noma`lumlarning $f(x)$ kvadratik formasi deb har bir hadi bu no‘malumlarning kvadrati yoki ikkita noma`lumning ko‘paytmasidan iborat bo‘lgan

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \qquad (4)$$

yig‘ndiga aytiladi.

(4) kvadratik formaning a_{ij} ko‘ffitsiyetlaridan foydalanib

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kvadrat matritsani tuzish mumkin. Bu yerda Amatritsaning barcha xarakteristik ildizlari haqiqiy bo‘lishi uchun $a_{ij} = a_{ji}$ deb faraz qilinadi. A matritsaning rangi (4) kvadratik formaning rangi deyiladi. A matritsa aynimagan bo‘lsa, (4) kvadratik forma xosmas deyiladi.

Kvadratik formaning koeffitsientlari haqiqiy yoki kompleks sonlar bo‘lishiga bo‘g‘liq holda, kvadratik forma haqiqiy yoki kompleks deyiladi.

(4) ni matritsa formada quyidagacha yozish mumkin

$$f = X'AX\,. \qquad (5)$$

Bu yerda X va X' o‘zaro transponirlangan matritsalar bo‘lib,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ikkita no’malumning kvadratik formasi

$$f = X'AX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$f = a_{11}x_1^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,\ (a_{12} = a_{21}),$$

Uchta no'malumning kvadratik formasi esa

$$f = X'AX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 +$$
$$+a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2, \quad (a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32})$$

ko'rinishda bo'ladi.

Simmetrik matritsalar uchun ba`zi xossalarini keltirib o'tamiz:

1. $(AB)' = B'A'$;
2. $A' = A$.

Bu xossalardan foydalanib quyidagi teoremani sxematik isbotlaymiz

1-teorema.

Matritsasi A bo'lgan n ta noma`lumning kvadratik formasi noma`lumlarning matritsasi Q bo'lgan chiziqli almashtirish bajarilgandan so'ng matritsasi $Q'AQ$ bo'lgan yangi n ta noma`lumning kvadratik formasiga aylanadi.

Isbot. (4) formaga nisbatan

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}y_k \text{ , ya`ni } X = QY \qquad (6)$$

chiziqli almashtirishni bajaramiz. U holda 1- xossaga ko'ra

$$X' = Y'Q' \qquad (7)$$

tenglikni hosil qilamiz. (6) va (7) lardan foydalansak, (4) quyidagi

$$f = Y'(Q'AQ)Y \text{ yoki } f = Y'BY.$$

ko'rinishga keladi. B matritsa simmetrik bo'ladi.

1-misol. $f = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$ kvadratik forma berilgan $x_1 = 2y_1 - 3y_2, x_2 = y_1 + y_2,$ almashtirish yordamida hosil bo'lgan kvadratik formani toping.

Yechish. Kvadratik formaganing matritsasi $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$,chiziqli almashtirish matritsasi $C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi.1-teoremaga asosan

$A^{*}=C^{t}AC=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -17\\ -17 & 3\end{pmatrix}$ Bundan quyidagi kvadratik formani hosil qilamiz: $L=13y_1^2-34y_1y_2+3y_1^2$.

Yuqoridagilarga asoslanib quyidagi xulosani chiqarish mumkin.
Chiziqli almashtirish bajarishda kvadratik formaning rangi o‘zgarmaydi.

1.7.2. Kvadratik formalarning kanonik ko‘rinishi.

2-ta'rif. Agar (4) kvadratik formada turli noma`lumlar ko‘paytmalari oldidagi barcha koeffitsiyentlar nolga teng bo‘lsa, u holda bu kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi deb ataladi. Shunday qilib, quyidagi

$$f=b_1y_1^2+b_2y_2^2+....+b_ny_n^2$$

ifoda (4) ning kanonik ko‘rinishi deyiladi.

Shuni alohida ta`kidlash kerakki, (8) kanonik ko‘rinishda noldan farqli koeffitsiyentlar soni (4) kvadratik formaning ranggiga teng bo‘lishi kerak. Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

2-teorema. Har qanday kvadratik forma biror xosmas chiziqli almashtirish orqali kanonik ko‘rinishga keltirilishi mumkin.

Bu teoremani matematik induksiya metodi yordamida isbotlash mumkin. Demak, matematik induksiya metodi yordamida kvadratik formani kanonik ko‘runishga keltirish mumkin.
Berilgan kvadratik forma keltiriladigan kanonik ko‘rinish bir qiymatli aniqlangan emas, ya`ni har qanday kvadratik forma turli usullar bilan turli ko‘rinishdagi kanonik ko‘rinishga keltirilishi mumkin.

2-misol. $f=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_3x_1$ kvadratik formani

$$\text{a)}\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 + 3t_3, \\ x_2 = \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}t_2 - t_3, \\ x_3 = t_3. \end{cases}$$

xosmas chiziqli almashtirish yordamida $f = \frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 + 6t_3^2$ kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin;

$$\text{b)}\begin{cases} x_1 = t_1 + 3t_2 + 2t_3, \\ x_2 = t_1 - t_2 - 2t_3, \\ x_3 = t_2. \end{cases}$$

xosmas chiziqli almashtirish yordamida $f = 2t_1^2 + 6t_2^2 - 8t_3^2$ kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin.

(4) krvadratik formani kanonik ko‘rinishda yozish uchun A matritsaning xarakteristik ildizlarini, ya`ni $|A - \lambda E|$ ko‘phadning ildizlarini topamiz. Bu ildizlar esa kanonik ko‘rinishning koeffitsiyentlari bo‘ladi. ►

3-misol. Quyidagi

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiring.

Yechish. Bu kvadratik formaning matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ko‘rinishga ega. Uning xarakteristik ko‘phadini topamiz:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3).$$

Shunday qilib, A matritsaning uch karrali xarakteristik ildizi: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ va oddiy xarakteristik ildizi: $\lambda_4 = -3$ mavjud.

Demak, bu kvadratik formaning kanonik ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi

$$f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 3y_4^2 .$$

Ba`zi hollarda kanonik ko rinishni faqat kanonik ko‘rinishini emas, balki bu ko‘rinishga keltiruvchi almashtirishni bilish kerak bo‘lib qoladi. Buning uchun berilgan A simmetrik matritsani diagonal ko‘rinishga keltiruvchi Q orthogonal matritsani yoki uning teskari matritsasi Q^{-1} ni toppish va A matritsaning λ_0 xarakteristik ildizlaridan foydalanib tuzilgan

$$(A - \lambda_0 E)X = 0 \qquad (9)$$

sistemaning fundamental yechimlarini ortonormallash kifoya.

Yuqoridagi 2 – misolda buning amalga oshrilish algoritimini ko‘rib chiqamiz.

4-misol. Quyidagi

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 .$$

kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiruvchi xosmas almashtirishni topining.

Yechish. $\lambda_0 = 1$ bo‘lsin. U holda (8) sistema

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu sistemaning rangi 1 ga teng. Demak, uning 3 ta chiziqli erkli yechimini toppish mumkin. Masalan:

$$b_1 = (1,1,0,0),$$
$$b_2 = (1,0,1,0),$$
$$b_3 = (-1,0,0,1)$$

vektorlar sistemaning chiziqli erkli yechimlari bo‘ladi.

Bu vektorlar sistemasini ortogonallab, quyidagi

$$c_1 = b_1 = (1,1,0,0),$$
$$c_2 = -\frac{1}{2}c_1 + b_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right),$$
$$c_3 = \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{3}c_2 + b_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

vektorlar sistemasini hosil qilamiz.

$\lambda_0 = -3$ bo‘lsin. U holda (8) sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu sistemaning rangi 3 ga teng. Uning noldan farqli yechimi $c_4 = (1,-1,-1,1)$ ko‘rinishdabo‘ladi. c_1, c_2, c_3, c_4 vektorlar orthogonal sistemani tashkil etadi. Uni normallab

$$c_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right),$$
$$c_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right),$$
$$c_3' = \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$c_4' = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

ortonormallangan vektorlar sistemasini hosil qilamiz. Shunday qilib, f ni kanonik ko‘rinishga keltiruvchi almashtirishlardan biri

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \\ y_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}x_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}x_3, \\ y_3 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}x_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x_2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}x_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_4, \\ y_4 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

1-misol. Quyidagi

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$$

kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiruvchi xosmas almashtirishni toping.

Agar (7) formada $b_1 = b_2 = ... = b_n = 1$ bo‘lsa, u holda bu formani kvadratik formaning normal ko‘rinishi deyiladi.

Agar haqiqiy kvadratik forma qaralayogan bo‘lsa, uni normal ko‘rinishga keltirish masalasi anchagina murakkab masalalardan biri hisoblanadi. Chunki, buda manfiy sondan kvadrat ildiz chiqarish talab qilinishi mumkin. Ammo, kvadratik formaning normal ko‘rinishi sifatida (7) formaning ba`zi koeffitsientlari uchun $b_i = 1$, ba`zi koeffitsientlariu chun $b_j = -1\,(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}; i \neq j)$ tenglik o‘rinli bo‘lgan holni qarasak, u holda har qanday kvadratik formani haqiqiy koeffitsientli xosmas almashtirish orqali normal ko‘rinishga keltirish mumkin.

Haqiqiy kvadratik formani normal ko‘rinishga turli almashtirishlar orqali keltirilish mumkin, ammo noma`lumlar nomerlanishi aniqligida u faqat birgina normal ko‘rinishga keltiriladi. Buni inertsiya qonuni deb ataluvchi quyidagi teorema tasdiqlaydi.

3-teorema. Berilgan haqiqiy koeffitsientli kvadratik formaning haqiqiy xosmas chiziqli almashtirish yordamida hosil qilingan normal ko‘rinishdagi musbat kvadratlar soni va manfiy kvadratlar soni bu almashtirishning tanlab olinishiga bo‘g‘liq emas.

Berilgan f kvadratik formaning keltirilgan kanonik ko‘rinishidagi musbat ishorali kvadratlar soni bu forma inersiyasining musbat indeksi deb, manfiy ishorali kvadratlar soni esa inersiyaning manfiy indeksi deb, musbat va manfiy indekslar ayirmasi esa f kvadratik formaning signaturasi deb ataladi.

Bu tushunchalardan foydalanib, quyidagi teoremani keltirish mumkin.

4-teorema. n ta noma`lumning haqiqiy koeffitsientli ikkita

kvadratik formai bir xil rangga va bir xil signaturaga ega bo‘lgandagina va faqat shundagina, ular xosmas chiziqli almashtirish orqali bir-biriga o‘tkaziladi.

5-teorema. Agarda (4) kvadratik formada o‘zgaruvchining kvadrati ishtirok etmasa, u holda chiziqli almashtirish yordamida uni xech bo‘lmaganda bir o‘zgaruvchining kvadrati qatnashgan formaga keltirish mumkin.

$$f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \qquad (10)$$

kvadratik formada

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}y_k \text{ , ya`ni } \quad X = QY \qquad (11)$$

chiziqli almashtirish bajarib

$$f = b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + ... + b_ny_n^2 \qquad (12)$$

kanonik formaga keltirilishi mumkin.

Kvadratik formalarni o‘rganishda ularning kanonik ko‘rinishlarini klassifikatsiyaga ajratib o‘rganish kerak bo‘ladi.

Biz quyida ularni bir necha turlarini keltirib o‘tamiz.

3-ta’rif. Agar n ta noma`lumning haqiqiy koeffitsientli f kvadratik formai n ta musbat kvadratdan iborat normal ko‘rinishga keltirilsa bu forma musbat aniqlangan deyiladi.

4-ta’rif. Agar n ta noma`lumning haqiqiy koeffitsientli f kvadratik formai n ta manfiy kvadratdan iborat normal ko‘rinishga keltirilsa bu forma manfiy aniqlangan deyiladi.

5-ta’rif. Agar haqiqiy koeffitsientli f kvadratik formaining normal ko‘rinishida ham musbat, ham manfiy kvadratlardan iborat bo‘lsa bu forma ishorasi aniqlanmagan forma deyiladi.

6-te’rif. Agar haqiqiy koeffitsientli f xos kvadratik formalarning normal ko‘rinishi bir xil ishorali kvadratlardan iborat bo‘lsa bu forma ishorasi yarim aniqlangan formalar deyiladi.

Masalan,

1. $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ kvadratik forma musbat aniqlangan;

2. $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ kvadratik forma manfiy aniqlangan;

3. $\varphi_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ kvadratik formaning ishorasi aniqlanmagan;

4. $\varphi_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ kvadratik formaning ishorasi yarim aniqlangan.

Amaliyotda va iqtisodiyotda eng ko‘p uchraydigan kvadratik formalar ishorasi aniqlangan kvadratik formalar bo‘lganligi sababli biz asosiy e`tiborni ishorasi aniqlangan kvadratik formalarga beramiz.

Quyida keltiriladigan teorema musbat aniqlangan formalarni, ularni normal yoki kanonik formaga keltirmasdan, tavsiflashga imkon beradi.

6-teorema. n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ noma`lumlarning haqiqiy koeffitsiyentli $f(x)$ kvadratik formai hech bo‘maganda bittasi noldan farqli bo‘lgan bu noma`lumlarning har qanday haqiqiy qiymatlarida musbat qiymatlar qabul qilganda va faqat shundagina, bu forma musbat aniqlangan bo‘ladi.

Bu teoremadan musdat aniqlangan kvadratik formalar tatbiq qilinganda foydalaniladi, ammo teorema yordamida koeffitsientlar bo‘yicha formaning musbat aniqlangan ekanligini bilish mumkin emas. Buning uchun boshqa teoremadan foydalanamiz. Shu maqsadda quyidagi tushunchalar kiritamiz.

n ta noma`lumning matritsasi $A = (a_{ij})$ bo‘lgan $f$ kvadratik formai berilgan bo‘lsin. Bu matritsaning yuqori chap burchagiga joylashgan $1, 2, ..., n$ – tartibli minorlari, ya`ni

$$a_{11},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad ...,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

minorlari f kvadratik formaning ($A = (a_{ij})$ matritsaning) bosh minorlari deyiladi.

6-teorema. n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ noma`lumlarning haqiqiy koeffitsiyentli $f(x)$ kvadratik formai uning bosh minorlari qat`iy musbat bo‘lganda va faqat shundagina, musbat aniqlangan bo‘ladi. Bu

teoremani matematik induktsiya metodidan foydalanib isbotlash mumkin.

5-misol. $f = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ kvadratik forma musbat aniqlangan, chunki uning bosh minorlari musbat:

$$5,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,\quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1.$$

6-misol. $f = 3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$ kvadratik forma musbat aniqlangan emas, chunki uning ikkinchi minori manfiy:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Kvadraik formalarning ko‘pdan-ko‘p tadbiqlari mavjud bo‘lib bu tadbiqlaridan biri sifatida ikkinchi tartibli

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (15)$$

tenglama bilan aniqlanuvchi nuqtalarning geometrik o‘rnini ko‘rib chiqamiz.

Buning uchun (15) tenglamaning koeffitsientlaridan quyidagi ikkita:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

determinantni tuzamiz.

Bu yerda Δ – (15) tenglamaning diskriminanti, δ – uning yuqori tartibli hadlarining diskriminanti deyiladi. Δ va δ larning qiymatlariga qarab (9) tenglama quyidagi geometrik formalarni aniqlaydi:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Ellips (haqiqiy yoki mavhum)	Nuqta
$\delta < 0$	Giperbola	Ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziq
$\delta = 0$	Parabola	Ikkita parallel to‘g‘ri chiziq (haqiqiy yoki mavhum)

7-misol. 3) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ tenglamada qaysi turdagi egri chiziq berilgan.

Yechish.

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -26.$$

Demak, $\delta > 0$, $\Delta \neq 0$; uholda bu tenglama ellipsni ifodalaydi.

8-misol. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ tenglama bilan berilgan egri chiziqning qaysi turdagi egri chiziq ekanligini aniqlang.

Yechish. $A = 5, B = 4, C = 5, D = -9, E = -9, F = 3$

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 \\ -9 & 5 & -9 \\ 5 & -9 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demak, $\delta > 0$, $\Delta \neq 0$; uholda bu tenglama ellipsni ifodalaydi.

9-misol. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$ tenglama bilan berilgan egri chiziqning qaysi turdagi egri chiziq ekanligini aniqlang.

Yechish. $A = 3, B = 5, C = 3, D = -1, E = -7, F = -13$

$$\delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -16, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -1 & -7 & -13 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demak, $\delta < 0$, $\Delta \neq 0$; u holda bu tenglama giperbolani ifodalaydi.

10-misol. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$ tenglama bilan berilgan egri chiziqni qaysi turdagi egri chiziq ekanligini aniqlang.

Yechish. $A = 9, B = -12, C = 16, D = -10, E = 55, F = -50$

$$\delta = \begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 9 & -12 & 16 \\ -12 & 3 & 55 \\ 16 & 55 & -50 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$\delta = 0$, $\Delta \neq 0$; u holda bu tenglamani aks etuvchi egri chiziq parabolik tipda bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Kvadratik formalarni matritsaviy ko'rinishda yozing.

1. $f = -3x_1^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2^2 - x_3^2$
2. $f = x_1^2 - 6x_1x_2 - 8x_2x_3 + 14x_2^2 - 5x_3^2$

3. Kvadratik forma $f = 3x_1^2 - 6x_1x_2 - x_2^2$ berilgan. $\begin{cases} x_1 = -y_1 - y_2, \\ x_2 = -3y_1 + 6y_2, \end{cases}$ chiziqli almashtirish orqali hosil bo‘lgan kvadratik formani toping.

4. Kvadratik forma $f(x_1; x_2) = 3x_1^2 - 6x_2^2 + 14x_1x_2$, berilgan. $\begin{cases} x_1 = 2y_1 - 3y_2, \\ x_2 = 5y_1 + 3y_2, \end{cases}$ chiziqli almashtirish orqali hosil bo‘lgan kvadratik formani toping.

Kvadratik formani kanonik ko‘rinishga keltiring:

5. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 13x_1x_2 - 5x_1x_3 + 12x_2^2 - 13x_3^2$
6. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 5x_1x_3 + 3x_2^2 - 13x_3^2$
7. $f(x_1, x_2, x_3) = 15x_1^2 + 9x_1x_2 - 15x_1x_3 + 12x_2^2 - 6x_3^2$
8. $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 12x_1x_2 - 5x_1x_3 + 13x_2^2 - 3x_3^2$
9. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_1x_2 - 5x_1x_3 + 12x_2^2 - 3x_3^2$
10. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 12x_1x_2 - 15x_1x_3 + 3x_2^2 - 13x_3^2$
11. $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 12x_1x_2 - 15x_1x_3 + 3x_2^2 - 13x_3^2$

II-BOB. ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI HAMDA ULARNING TADBIQLARI

2.1-§. Analitik geometriya elementlari

2.1.1.Tekislikda to‘g‘ri chiziqlar

Tayanch iboralar: Dekart koordinata sistemasi, nuqta koordinatalari, to’g’ri chiziqning normal vektori, to’g’richiziqningburchakkoeffitsientli, parametrli, kanonik va normal tenglamalari, to’g’ri chiziqlarning parallelik va perpendikulyarlik shartlari.

Analitik geometriyaga oid ba'zi ma'lumotlar. Fransuz matematigi R.Dekart (1596-1630) tomonidan tekislikda koordinatalar sistemasining kiritilishi bir turkum geometrik masalalarni algebraik usulda yechish imkonini berdi.

Analitik geometriyada har qanday chiziq nuqtalarning geometrik o‘rni sifatida qaraladi. Demak, biror chiziqni nuqtalarning geometrik o‘rni sifatida ta’riflaganda bu ta’rifda shu chiziqning barcha nuqtalariga umumiy bo‘lgan xossa akslanishi lozim.

Dekart koordinatalar sistemasida tekislikdagi har qanday nuqta ikkita haqiqiy son bilan to‘la aniqlanadi, aksincha, har qanday sonlar juftligiga tekislikda faqat bitta nuqta mos keladi.Shuningdek, tekislikdagi har qanday chiziqqa, ikki noma’lumli $F(x,y)=0$ tenglama mos keladi, tenglamadagi x,ynoma’lumlarning har bir jufti shu chiziqda yotuvchi nuqta koordinatalarini aniqlaydi.

Ma’lumki,tekislikdagi $M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$nuqtalar orasidagi masofa

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

formula yordamida topiladi.

AB kesmani $\lambda=\frac{AN}{NB}$ nisbatdabo‘luvchi $N(x;y)$ nuqtaningkoordinatalariesa

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\qquad y=\frac{y_1+\lambda y_1}{1+\lambda} \tag{2}$$

formulalarbilananiqlanadi. Xususiyholdakesmanitengikki, ya'ni $\lambda=\frac{AN}{NB}=1$ nisbatdabo'lganda

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{3}$$

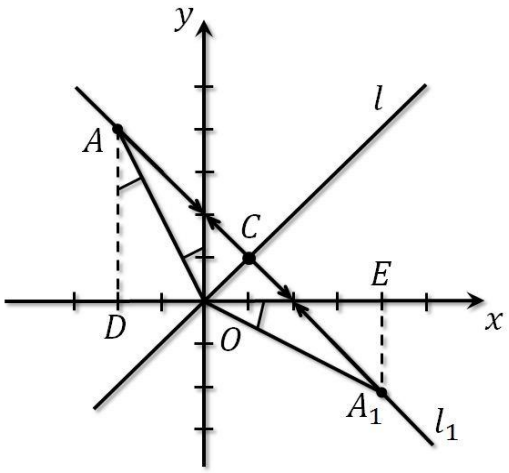
Uchlari $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak yuzi

$$S=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right| \tag{4}$$

yoki

$$S=|\Delta| \text{ bunda } \Delta=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

1-masala. Birinchi chorak bissektrisasiga nisbatan $A(-2;4)$ nuqtaga simmetrik nuqtani toping.



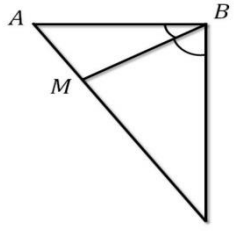
1-rasm

Yechish. A nuqtadan birinchi koordinata o'qibissektrisasiga perpendikulyar l_1 to'g'ri chiziq o'tkazamiz (1-rasm).Aytaylik $l_1 \cap l = C$ bo'lsin. l_1 to'g'ri chiziqda AC kesmaga teng CA_1 kesma ajratamiz. ACO va A_1CO to'g'ri burchakli uchburchaklar o'zaro teng (ikkita kateti bo'yicha).

Bundan $|OA| = |OA_1|$ kelib chiqadi. ADO va OEA_1 uchburchaklar ham o'zaro teng (gipotenuza va o'tkir burchak bo'yicha).

Demak, $|AD| = |OE| = 4$, $|OD| = |EA_1| = 2$, boshqacha aytganda A_1 nuqta $x=4$ va $y=-2$ koordinataga ega, ya'ni $A_1(4;\ -2)$.

2-masala. Uchlari $A(2;3)$, $B(6;3)$ va $C(6;-5)$ nuqtalarda yotgan uchburchakning BM bissektrisasi uzunligini toping.



2-rasm

Yechish. Uchburchaklarning ichki burchakbissektrisasi xossasiga asosan $\left|\frac{CM}{MA}\right|=\left|\frac{BC}{BA}\right|$ (1) formula bo‘yicha ABC uchburchakning BC va BA tomonlari uzunliklarini topamiz (2-rasm):

$$|BC|=\sqrt{(6-6)^2+(-5-3)^2}=8,\ |BA|=\sqrt{(2-6)^2+(3-3)^2}=4$$

Bundan, $\lambda=\frac{CM}{MA}=\frac{8}{4}=2$. (2)formula yordamida M nuqtaning x_M va y_M koordinatalarini topamiz:

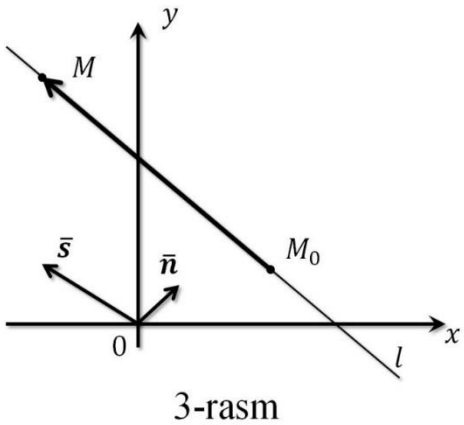
$$x_M=\frac{6+2\cdot 2}{1+2},\ y_M=\frac{-5+2\cdot 3}{1+2},\ \text{bundan}\ x_M=\frac{10}{3},\ y_M=\frac{1}{3}\ ,\ \text{ya’ni}\ M(\frac{10}{3};\frac{1}{3}).$$

BM bissektrisa uzunligini topamiz:

$$BM=\sqrt{(\frac{10}{3}-6)^2+(\frac{1}{3}-3)^2}=\sqrt{\frac{64}{9}+\frac{64}{9}}=\frac{8}{3}\sqrt{2}\ \text{ya’ni}\ BM=\frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

2.1.2. Tekislikda to‘g‘ri chiziq tenglamasining turli ko‘rinishlari.

To‘g‘ri chiziq analitik geometriyaning asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Har qanday to‘g‘ri chiziq Oxy tekislikda ikki noma’lumli birinchi darajali chiziqli tenglama orqali aniqlanadi. Teskarisi ham to‘g‘ri: har qandayikki noma’lumli birinchi darajali chiziqli tenglama tekislikda bitta to‘g‘ri chiziqni ifodalaydi.To‘g‘ri chiziq tenglamasini biror $M_0(x_0;y_0)$ nuqta bilan shu to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan nolmas $\vec{n}(A;B),\ (A^2;B^2\neq 0)$ vektor to‘liq aniqlaydi. Chunki, berilgan nuqtadan berilgan vektorga perpendikulyar bo‘lgan yagona to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. Bu n vektor to‘g‘ri chiziqning **normal** vektori deyiladi (3-rasm).



3-rasm

Bu shartlar asosida to‘g‘ri chiziqtenglamasini tuzish uchun shu to‘g‘richiziqda ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtaniolamiz. Shartga ko'ra $\overline{M_0M}$ vektor, $\vec{n}(A;B)$ vektorga perpendikulyar.

Bundan, $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$ yoki

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \ . \qquad (5)$$

$M(x;y)$ to‘g‘ri chiziqda olingan ixtiyoriy nuqta bo‘lganligi sababli shu to‘g‘ri chiziqda yotuvchi barcha nuqtalarning koordinatalari (5) tenglamaniqanoatlantiradi.

3-masala. $M_0(-3,4)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{n}(2,5)$ vektorga perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish.(5) formulaga asosan,

$$2(x+3)+5(y-4)=0$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu erda ayniy shakl almashtirsak,

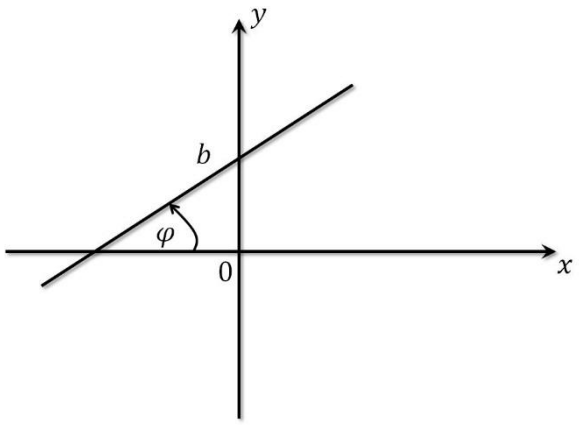
$$2x+5y-14=0$$

ko‘rinishdagi izlangan tenglama hosil bo‘ladi.

Endi (5) tenglamada ayniy shakl almashtirsak, quyidagi

$$Ax+By+C=0 \qquad (6)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. (6) tenglamaga to‘g‘ri chiziqning **umumiy tenglamasi** deyiladi.



5-rasm

To‘g‘ri chiziqning $Ax+By+C=0$ umumiy tenglamasini y ga nisbatan yechib $-\frac{A}{B}=k;\ -\frac{C}{B}=b$ deb belgilasak:

$$y=kx+b \qquad (7)$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bu to‘g‘ri chiziqning **burchak koeffitsientli** tenglamasi deyiladi. $k=tg\phi$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti deyiladi, bu erda ϕ to‘g‘ri chiziqning x o‘qining musbatyo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi (5- rasm), b to‘g‘ri chiziqning Oy o‘qidan kesib ajratgan kesma kattaligi.

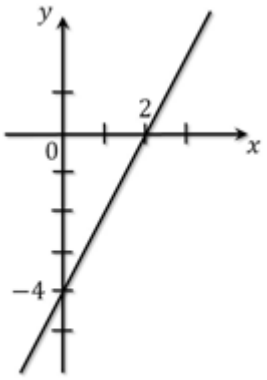
To‘g‘ri chiziqning $Ax+By+C=0$ umumiy tenglamasida $C\neq 0$ (to‘g‘ri chiziq koordinatalar boshidan o‘tmasin) bo‘lsin. Bu tenglamaning har ikkala tomonini $-C$ ga bo'lsak,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (8)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bunda $-\frac{C}{A}=a;\quad -\frac{C}{B}=b$.

(8) ko‘rinishdagi tenglama to‘g‘ri chiziqning **kesmalar bo‘yicha** tenglamasi deyiladi. a va b to‘g‘ri chiziqning mos ravishda Ox va Oy o’qlaridan ajratgan kesmalari kattaligi.

4-masala. Ushbu $2x-y-4=0$ tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziqni yasang.



6-rasm

Yechish. Berilgan tenglamani (8) ko‘rinishga keltiramiz. Buning uchun (-4) ozod hadni tenglamaning o‘ng tarafiga o‘tkazamiz va tenglamani hadma-had 4 ga bo‘lamiz. Natijada $\frac{x}{2}+\frac{y}{-4}=1$ to‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasiga ega bo‘lamiz. Ox o‘qidan o‘ngga 2 birlik (koordinata boshidan), Oy o‘qidan pastga 4 birlik ajratamiz. Koordinata o‘qlarida hosil bo‘lgan ikkita nuqtadan to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz (6-rasm).

Endi to‘g‘ri chiziqning biror $M_0(x_0;y_0)$ nuqtasi bilan shu to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan nolmas $\vec{s}(m;n)$, $(m^2+n^2\neq 0)$ vektor berilgan holni qaraymiz. Bu ikkita shart ham to‘g‘ri chiziq tenglamasini to‘liq aniqlaydi. Chunki, berilgan nuqtadan berilgan vektorga parallel yagona to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin.To‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzish uchun shu to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani olamiz. Shartga ko'ra $\overline{M_0M}(x-x_0;y-y_0)$ va $\vec{s}(m;n)$ vektorlar kollinear (3-rasm). Demak, shunday t haqiqiy son mavjudki, $\overrightarrow{M_0M}=t\cdot\vec{s}$ yoki

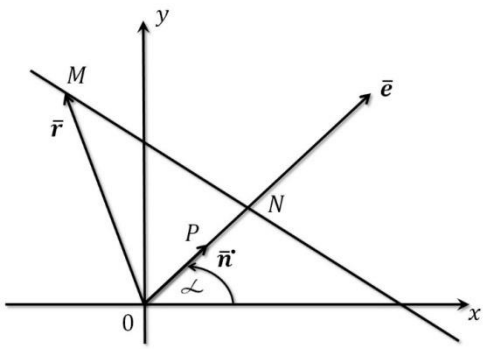
$$\begin{cases} x-x_0=tm \\ y-y_0=tn \end{cases} \qquad (9)$$

(9) tenglamalarga to‘g‘ri chiziqning **parametrli** tenglamalarideyiladi. Bunda t parametrning har bir qiymatiga to'g'ri chiziqdagi bitta nuqta mos keladi.

Agar (9) tenglamalarda t parameter yo‘qotilsa, to‘g‘ri chiziqning quyidagi **kanonik** tenglamasi

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$

hosil bo‘ladi.



8-rasm

$\bar{n}(\cos\alpha,\sin\alpha)$ to‘g‘ri chiziqning birlik normal vektori va $\vec{r}(x,y)$ esa shu to‘g‘ri chiziqdagi ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtaning radius vektori hamda koordinata boshidan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa p ga teng bo'lsin. U holda $\vec{r}$ vektorning $\vec{n}$ dagi proeksiyasi ham p ga teng, ya’ni $\Pr_{\vec{n}}\bar{r}=p$ (8-rasm).

U holda $\bar{r}\cdot\bar{n}=p$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.Oxirgitenglamada $\bar{r}(x,y)$ va $\bar{n}(\cos\alpha,\sin\alpha)$ ekanligini hisobga olsak,

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \qquad (11)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz.

(11) tenglamaga to‘g‘ri chiziqning ***normal tenglamasi*** deb ataladi. Bu yerda α koordinata boshidan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi.

To‘g‘ri chiziqning $Ax+By+C=0$ umumiy tenglamasini normallashtirish uchun uning ikkala tomonini $\mu=\pm\sqrt{A^2+B^2}$ ga bo‘lish kerak. Bunda: agar $C<0$ bo‘lsa ishora “+” va agar $C>0$ bo‘lsa “–“ olinadi.

$$\pm\frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}}\pm\frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}}\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

Endi, berilgan bitta va ikkita nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamalari, to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak, to‘g‘ri chiziqlarning

parallellik va perpendikulyarlik shartlari hamda berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha masofani topish formulalarini qaraymiz.

2.1.3. To‘g‘richiziqlarning o'zaro joylashuvi.

Elementar matematika kursidan ma'lumki, $y=k_1x+b_1$, va $y=k_2x+b_2$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi θ burchak

$$tg\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

formula yordamida topiladi. Bundan $k_2=k_1$ bo'lsa, to‘g‘ri chiziqlar parallelik $k_1k_2=-1$ bo'lsa, to‘g‘ri chiziqlarperpendikulyar ekanligi kelib chiqadi.

Umumiy tenglamalari $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak, ularning normal $\bar{n}_1(A_1,B_1)$ va $\bar{n}_2(A_2,B_2)$ vektorlari orasidagi burchakka teng. Shuning uchun

$$\cos\theta=\frac{\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

formula o‘rinli. Bundan ikkita to‘g‘ri chiziqning $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ **parallellik** va $A_1A_2+B_1B_2=0$ **perpendikulyarlik** shartlari kelib chiqadi.

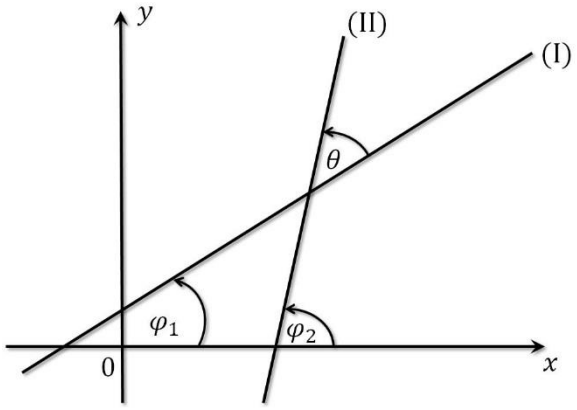
5-masala. Quyidagi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchaklarni toping:

1) $y=2x-3$ va $y=\frac{1}{2}x+5$;

2) $2x-3y+10=0$ va $5x-y+4=0$;

3) $y=\frac{3}{4}x-2$ va $8x+6y+5=0$;

4) $y=5x+1$ va $y=5x-2$.



10-rasm

Yechish. 1) Unga $k_1=2$ va $k_2=\frac{1}{2}$ qiymatlarni qo‘yib $tg\alpha=\left|\frac{\frac{1}{2}-2}{1+2\cdot\frac{1}{2}}\right|=\frac{\left|-\frac{3}{2}\right|}{2}=\frac{3}{4}$, $\varphi=arctg\frac{3}{4}$ $(\varphi\approx37^\circ)$ ni topamiz;

2) Yuqoridagi formulaga asosan

$$\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=\frac{2\cdot5+(-3)\cdot(-1)}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{25+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \theta=\frac{\pi}{4};$$

3) Bunda $k_1=\frac{3}{4}$ ekanligi ma'lum, k_2 topamiz. Buni uchun $6y=-8x-5$ tenglikdan unga ekvivalent $y=-\frac{4}{3}x-\frac{5}{6}$ tenglikka o'tamiz. Demak, $k_2=-\frac{4}{3}$. $k_1\cdot k_2=-1$ bo'lganligi sababli, bu to'g'ri chiziqlar perpendikulyar.

4) $k_1=k_2=5$ bo'lganligi sababli, to'g'ri chiziqlar parallel.

6-masala. $3x-2y+5=0$ va $x+2y-9=0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan o'tuvchi va $2x+y+6=0$ to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish.Avvalo berilgan to'g'ri chiziqlarning M kesishish nuqtasini topamiz. Buning uchun tenglamalar sistemasini yechamiz

$$\begin{cases}3x-2y+5=0\\x+2y-9=0\end{cases}$$

Bundan $4x=4$ so'ngra, $x=1,\ y=4,$ ya'ni $M(1;4).\ 2x+y-6=0$ to'g'ri chiziqning burchak koefitsienti $k_1=-2$. Bu to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning burchak koefitsienti $k=-2.$ To'g'ri chiziq yo'nalishi $(k=-2)$bo'yicha va unga tegishli $M(1;4)$ nuqta orqali izlangan to'g'ri chiziqtenglamasini tuzamiz $y-4=-2(x-1),$ ya'ni $2x+y-6=0.$

Faraz qilamiz $M(x_0,y_0)$ nuqta va $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Elementrar matematika kursidan ma'lumki, M nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa

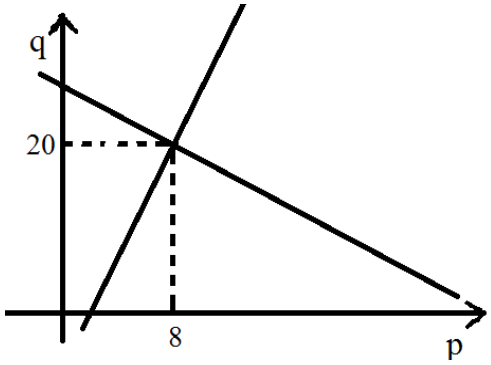
$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

formula yordamida topiladi.

2.1.4. Iqtisodiyotda to'g'ri chiziqlarning qo'llanishiga misollar.

Iqtisodiyotdagi muhm tushunchalardan biri bu talab va taklif funksiyalaridir.

Odatda bunday funksiyalarda mahsulot narxi p va shu narxda sotiladigan mahsulot miqdori q orasidagi munosabatni ifodalaydi. Ba'zi bir cheklovlar ostida bu funksiyalarni chiziqli funksiyalar deb olishimiz mumkin.



Talab va taklif miqdori teng bo'ladigan p narxga muvozanat narxi deyiladi.

7-masala. Talab va taklif funksiyalari quyidagi chiziqli funksiyalar bilan ifodalangan bo'lsin $q=-2p+36$, $q=4p-12$. Bu misolda x va y o'zgaruvchilar o'rniga narxni ifodalovchi p o'zgaruvchi va miqdorni ifodalovchi q o'zgaruvchi ishtirok qilmoqda. Talab funksiyasining burchak koeffisienti -2 ga teng bo'lib, narxga nisbatan kamayish tezligini (koeffitsientini) ifodalaydi. Taklif funksiyasining burchak koeffitsienti 4 ga teng bo'lib, narxga nisbatan taklifning o'sish koeffitsientini ifodalaydi. Talab va taklifning muvozanat holatini topish uchun bu ikkita tenklikni birgalikda yechamiz, ya'ni mos to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topamiz.

$$\begin{cases} q=-2p+36, \\ q=4p-12. \end{cases} \Leftrightarrow -2p+36=4p-12 \Leftrightarrow p=8,\ q=20.$$

Demak, talab va taklif bir xil bo'ladigan muvozanat narxi $p=8$ ga teng bo'lib, bunda talab va taklif miqdori $q=20$ ga teng.

Iqtisodiy jarayonlarni modellashtirishda imkoiyatlardan kelib chiqadigan chiziqli tengsizlik shaklidagi cheklovlardan foydalaniladi. Bu cheklovlar odatda resurslar zahirasidan ortiq miqdorda resursdan foydalana olmasligimizni yoki mablag' sarfiga cheklovni ifodalaydi.

Faraz qilaylik, ikki xil turdagi tovar sotib olish talab qilinsin. Bu tovarlarning bir birliklarining narxlari mos ravishda p_1 va p_2 bo'lsin. $P=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ narx vektori deb ataladi. Sotib olingan tovarlar miqdori mos

ravishda x_1 va x_2 bo'lsin. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vektor tovarlar vektori deb ataladi. Bu tovarlar vektorining umumiy narxi $(P, X) = P^T X = p_1 x_1 + p_2 x_2$ ga teng.

Bir xil narxli ikkita X va Y tovarlar vektorlari ekvivalent deyiladi va $X \sim Y$ kabi belgilanadi.

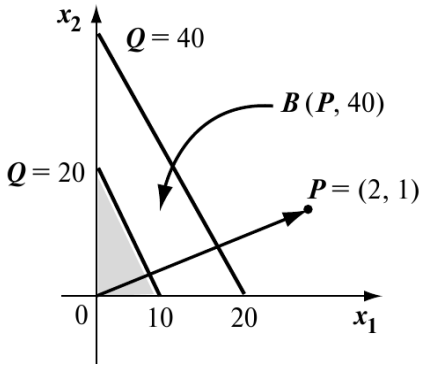
Izoh. *Umuman olganda biz bu yerda ixtiyoriy n sondagi tovarlarni qarashimiz mumkin. Bunda narx va tovarlar vektorlari n o'lchovli arifmetik vektorlardan iborat bo'ladi. Aynan ikki tovarning qaralishi ikki o'lchovli arifmetik vektorning tekislikdagi vektor bilan ekvivalentligidir.*

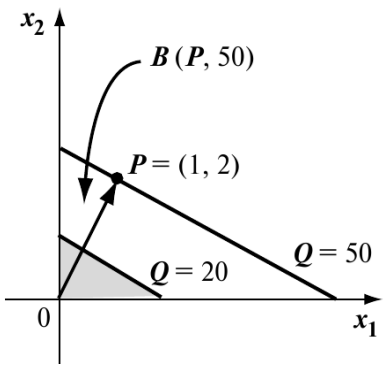
Bir xil c narxdagi X tovar vektorlari to'plami Ox_1x_2 tekislikda $p_1 x_1 + p_2 x_2 = c$ to'g'ri chiziqni ifodalaydi.

Q miqdordagi mablag' berilgan bo'lsin. Narxi Q dan oshmaydigan tovar vektorlari to'plami byudjet to'plami deyiladi. Byudjet to'plami $p_1 x_1 + p_2 x_2 \le Q$ tengsizlik bilan ifodalanadi va $B(P,Q) \equiv B(p_1, p_2, Q) = \{(x_1, x_2) : p_1 x_1 + p_2 x_2 \le Q\}$ kabi belgilanadi.

Q narxdagi tovar vektorlari to'plami $B(p_1, p_2, Q)$ byudjet to'plam chegarasi deyiladi va $p_1 x_1 + p_2 x_2 = Q$ tenglama bilan ifodalanadi.

Quyidagi rasmda byudjet to'plamiga misollar keltirilgan. Tovarlar vektori komponentalari musbat bo'lganligi sababli, byudjet to'plami katetlari koordinata o'qlarida yotgan I chorakda joylashgan to'g'ri burchakli uchburchakdan iborat.





To'g'ri chziqning xossalaridan kelib chiqadigan bo'lsak, byudjet to'plam chegarasini ifodalovchi to'g'ri chiziqning normali P narx vektoridan iborat. Yuqoridagi rasmdan byudjet to'plami chegarasini ifodalovchi to'g'ri chiziq narx vektori (normal vektor) yo'nalishida parallel ko'chirilsa, sarflanadigan Q mablag' miqdori ortadi.

Byudjet to'plami tushunchasida narxni bir birlik tovar ishlab chiqarishdagi ma'lum bir resurs sarfi, Q ni resurs zahirasi deb olishimiz mumkin. Bu holatda byudjet to'plami ma'lum resurs sarfi shu resurs zahirasidan ortmasligi zarurligini bildiradi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Geometriya qachon paydo bo‘lgan va qanday tarixga ega?
2. Geometrik bilimlarning kelib chiqishi nima bilan bog’liq?
3. Geometriya tabiatshunoslikning boshqa bo‘limlari bilan qanday bog’langan?
4. Geometriyaning rivojida katta hissa qo‘shgan Markaziy Osiyolik olimlardan kimlarni bilasiz?
5. Koordinatlar usuli nima?
6. Analitik geometriya nimani o‘rganadi?
7. Berilgan ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?
8. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish qanday bajariladi?

Chiziqning tenglamasi deganda nima tushuniladi?

9. To‘g’ri chiziqning burchak koeffisiyentli tenglamasi qanday yoziladi?
10. To‘g’ri chiziqning burchak koeffisiyenti deb nimaga aytiladi?
11. Berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday?
12. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g’ri chiziq tenglamasi qanday?
13. To‘g’ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy xollari nimalardan iborat?
14. To‘g’ri chiziqning koordinat o‘qlaridan ajratgan kesmalariga nisbatan tenglamasi qanday yoziladi?
15. To‘g’ri chiziqning normal tenglamasi qanday?

16. Normalning uzunligi nima?

17. To‘g’ri chiziqning umumiy tenglamasini normal tenglamaga qanday qilib keltiriladi?

18. To‘g’ri chiziqning tenglamasi normal ko‘rinishdaligini qanday tekshiriladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $4x+3y-36=0$ to‘g‘ri chiziq, koordinata o‘qlari bilan hosil qilgan uchburchakning yuzini toping.
2. Agar to‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlaridan teng kesmalar ajratsa va to‘g‘ri chiziqni koordinata o‘qlari orasidagi kesmasi $5\sqrt{2}$ ga teng bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.
3. Koordinata boshidan va $A(-2;-3)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.
4. $A(-1;3)$ va $B(4;-2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

To’g’i chiziqlar orasidagi burchakni toping(5-7).

5. $\begin{cases} y=2x-3 \\ y=\frac{1}{2}x+1 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 5x-\ y+7=0 \\ 2x-3y+1=0 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 2x+y=0 \\ y=3x-4 \end{cases}$
8. $M(-3;-4)$ nuqtadan o‘tuvchi koordinata o‘qlariga parallel to‘g‘ri chiziqlar tenglamasini yozing.
9. $A(2;5)$ nuqtadan o’tuvchi va ordinata o’qida $b=7$ kesma ajratuvchi to’g’ri chiziq tenglamasini yozing.
10. $2x+2y-5=0$ to‘g‘ri chiziq Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan qanday burchak hosil qiladi?
11. To‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlaridan teng kesmalar ajratadi. Agar to‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlari bilan hosil qilgan uchburchak yuzi 8 kv.birl. bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

12. $y=-2,\ y=4$ to‘g‘ri chiziqlar $3x-4y-5=0$ to‘g‘ri chiziqni A va B nuqtalarda kesib o‘tadi. $\overline{AB}$ vektorni uzunligi va uni koordinata o‘qlaridagi proyektsiyalarini toping.

13. Agar to‘g‘ri chiziq koordinata o‘qlari bilan hosil qilgan uchburchak yuzi 6 kv.b. bo‘lsa va to‘g‘ri chiziq $(-4;6)$ nuqtadan o‘tsa, uning tenglamasini yozing.

14. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping:

a) $\begin{cases}3x+2y=0\\6x+4y+9=0\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x-4y=0\\8x+6y=11\end{cases}$

15. $A(2;3)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasini yozing. Bu dastadan Ox o‘qi bilan 1) $45°$, 2) $60°$, 3) $135°$, 4) $0°$ burchaklar tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqni toping.

16. $A(-2;5)$ nuqta va $2x-y=0$ to‘g‘ri chiziqni yasang. A nuqtadan o‘tuvchi va

1) berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel

2) berilgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

17. $3x-2y+7=0, 6x-4y-9=0,\ \ 6x+4y-5=0,\ 2x+3y-6=0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidan parallel va perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarni aniqlang.

18. $2x-5y-10=0$ to‘g‘ri chiziqni koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalariga perpendikulyar qo‘yilgan. Ularning tenglamasini yozing.

19. Uchlari $A(-2;0)$, $B(4;-2)$ va $C(4;2)$ bo‘lgan uchburchakka BD balandlik va BE mediana o‘tkazilgan. AC tomon, BE mediana va BD balandlik tenglamalarini yozing.

20. Uchburchak tomonlari quyidagi tenglamalar bilan berilgan: $x+3y=0$, $x=3$, $x-2y+3=0$. Uchburchakni burchaklari va uchlarini toping.

21. Uchlari $A(-2;0)$, $B(2;4)$ va $C(4;0)$ bo‘lgan uchburchak berilgan. Uchburchak tomonlari, AE medianasi, BD balandlik tenglamalarini, AE mediana uzunligini toping.

22. Tomonlari $x+y=4$, $3x-y=0$, $x-3y-8=0$ tenglamalar bilan berilgan uchburchakni burchaklari, uchlari va uchburchakni yuzini toping.

23. To‘g‘ri chiziqlarni normal ko‘rinishiga keltiring:
1) $3x-4y-20=0$, 2) $x+y-3=0$.

24. Agar to‘g‘ri chiziqli normali $p=2$ bo‘lib, bu normalning Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil qilgan burchagi:
1) $45°$, 2) $135°$, 3) $225°$, 4) $315°$
bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

25. $A(4;3)$, $B(2;1)$, $C(1;0)$ nuqtalardan $3x+4y-10=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofalarni toping.

26. $2x-3y=6$ va $4x-6y=25$ to‘g‘ri chiziqlarni parallelligini ko‘rsating va ular orasidagi masofani toping.

27. Agar $y=kx+5$ to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan $d=\sqrt{5}$ masofa uzoqlikda bo‘lsa, k ni toping.

28. $8x-15y=0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan va $A(4;2)$ nuqtadan to‘rt birlik masofa uzoqlikda bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

29. $y=4-2x$ to‘g‘ri chiziqqa qaraganda $y=2x-4$ to‘g‘ri chiziqdan uch barobar uzoqlikda harakatlanayotgan $M(x;y)$ nuqtaning izi tenglamasini yozing.

30. $N(1;-2)$ nuqtadan va $2x+y+6=0$, $3x+5y-15=0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi M nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

31. $x+3y=0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel va $5x-y+10=0$, $8x+4y+9=0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi M nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

32. $2x+3y=12$ va $3x+2y=12$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchaklar bissektrisalarining tenglamalari yozilsin.
33. $3x+4y=12$ va $y=0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchaklar bissektrisalarinig tenglamalari yozilsin.
34. Kvadrat tomonlaridan birining tenglamasi $x+3y-7=0$ va diogonallari kesishgan nuqta $P(0;-1)$ berilgan. Kvadratning qolgan uchta tomon tenglamalarini yozing.
35. Romb tomonlaridan birining tenglamasi $5x+2y-9=0$. Agar romb diogonallari $O(0;0)$ da kesishgan bo‘lib, ulardan birining tenglamasi $y=2x$ bo‘lsa, pombning qolgan uchta tomon tenglamasini yozing.
36. Uchburchak tomonlarining o‘rtalari berilgan $P(1;2)$ – AB tomonining o‘rtasi, $R(-4;3)$ – BC tomonining o‘rtasi, $Q(5;-1)$ – AC tomonining o‘rtasi, CF balandlik va AR mediana kesishgan nuqta topilsin.
37. Rombning ikki qarama-qarshi uchlarining koordinatalari berilgan, $A(1;-4)$, $C(-1;3)$. Romb diogonallarining tenglamasini yozing.
38. Agar $A(-5;5)$ va $B(3;1)$ uchburchakning uchlari, $D(2;5)$ esa balandliklari kesishgan nuqta bo‘lsa, uchburchak tomonlarining tenglamasini yozing.
39. $O(0;0)$ va $A(-3;0)$ nuqtalar berilgan OA kesmada parallelogramm yasalgan, uning diogonallari $B(0;2)$ nuqtada kesishadi. Parallelogramm tomonlari va diogonallari tenglamasini yozing.
40. Asos tomonlari 8 sm va 2 sm bo‘lgan teng yonli trapetsiyaning o‘tkir burchagi $45°$. Trapetsiyaning katta asosi Ox o‘qida yotsa, Oy o‘qi esa trapetsiyaning simmetriya o‘qi bo‘lsa, trapetsiyaning tomonlari tenglamasini yozing.

41. Koordinatalar boshidan $2x+y=a$ to‘g‘ri chiziq bilan teng yonli uchburchak hosil qiluvchi ikki o‘zaro perpendikulyar to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Shu uchburchakning yuzini toping.

42. Uchburchak AB tomonining tenglamasi $x-3y+3=0$ va AC tomonining tenglamasi $x+3y+3=0$ hamda AD balandligining asosi $D(-1;3)$ berilgan bo‘lsa, uchburchakning ichki burchaklari topilsin.

43. Romb ikki tomonining tenglamalari $x+2y=4$ va $x+2y=10$ hamda diogonallaridan birining tenglamasi $y=x+2$ ma’lum bo‘lsa, romb uchlarining koordinatalari hisoblansin.

44. $\frac{x+2\sqrt{5}}{4}+\frac{y-2\sqrt{5}}{2}=0$ to‘g‘ri chiziq berilgan. To‘g‘ri chiziqning
a) umumiy tenglamasi,
b) burchak koeffisiyentli tenglamasi,
c) kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing.

2.2-§. Tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Tayanch iboralar: aylana ellips, giperbola, parabola va ularning tenglamalari, giperbola va parabola direktrisalari, ellips va giperbola eksentrisiteti

2.2.1. Ikki noma’lumli ikkinchi darajali tenglamaning geometrik ma’nosi.

Biz bu darsda muhim ikkinchi tartibli egri chiziqlar bilan tanishamiz. Bunday egri chiziqlarni ba'zida konus kesimlari deb ham atashadi. Bunday atalishiga sabab bu egri chiziqlar konusni tekislik bilan kesish natijasida hosil qilinishi mumkin. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar iqtisodiy modellarda ko'p uchraydi. Bunday modellar bilan siz keyingi kurslarda o'tiladigan iqtisodiy matematika va ekonometrika fanlarida tanishasiz.

Ikki noma’lumli ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

Bu tenglamadagi koeffitsientlarning qiymatilariga qarab nuqta, kesishuvchi to'g'ri chiziqlar, parallel to'g'ri chiziqlar, aylana, ellips, giperbola, parabola yoki bu tenglama bilan ifodalanadigan nuqtalar to'plami bo'sh to'plamdan iborat bo'lishi mumkin.

Masalan, $x^2 - y^2 = 0$ ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqni, $(x+y)^2 = 1$ ikkita parallel to'g'ri chiziqlarni, $x^2 + y^2 = 0$ bitta nuqtani ifodalaydi. $x^2 + y^2 = -1$ tenglama bilan aniqlangan nuqtalar to'plami bo'sh top'lamdir.

Agar $A = C,\ B = 0\ (A > 0)$ va $D^2 + E^2 - 4F \geq 0$ bo‘lsa aylana tenglamasi hosil bo‘ladi.

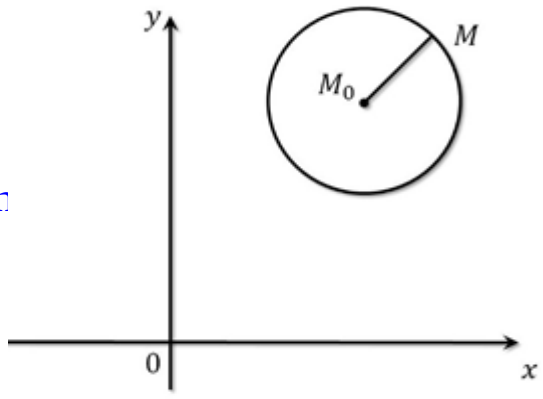
(1) tenglamada A, B va C koeffitsientlardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lishi kerak, aks holda birinchi darajali tenglama (to‘g‘ri chiziq tenglamasi) hosil bo‘ladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarni alohida –alohida ko‘rib chiqamiz.

2.2.2. Aylana tenglamasi.

1-ta’rif. Markaz deb ataluvchi $M_0(a,b)$ nuqtadan radius R ga teng bo‘lgan bir xil masofada yotgan nuqtalar geometrik o‘rniga **aylana** deyiladi.

$M(x,y)$ aylanadagi o‘rganuvchan nuqta bo‘lsin (1-rasm). Ta’rifga ko‘ra $|M_0M| = R$ yoki $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$,



$(x-a)^2 + (y-a)^2 = R^2$ (aylananing kan

(2)

Agar aylana markazi koordinatalar boshi $O(0,0)$ nuqtada bo‘lsa, uning tenglamasi $x^2 + y^2 = R^2$ ko‘rinishni oladi.

1-masala. $x^2+y^2-6x-7=0$ tenglama bilan berilgan aylananing markazi koordinatalari va radiusini toping.

Yechish. Tenglamada x va y ga nisbatan to‘la kvadrat ajratamiz: $(x-3)^2+y^2=7+9=16=4^2$. Bundan $R=4$ va aylana markazi $M_0(3,0)$ ni topamiz.

2-masala. $M(0;3)$ nuqtadan $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ aylanaga o‘tkazilgan urinma tenglamasini yozing.

Yechish. Urinma tenglamasini $y=kx+3$ burchak koeffitsientli to‘g‘ri chiziq ko‘rinishida izlaymiz. Aylana tenglamasini (2) kanonik ko‘rinishga keltiramiz:

$(x-3)^2+(y+2)^2-9-4-12=0$, ya’ni $(x-3)^2+(y+2)^2=25$.

Aylana va to‘g‘ri chiziqning umumiy nuqtasini topish uchun quyidagi sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} y=kx+3 \\ (x+3)^2+(y+2)^2=25 \end{cases}$$

Sistemada shakl almashtirish bajarsak $(x+3)^2+(kx+3+2)^2=25$ yoki $(k^2+1)x^2+(10k-6)x+9=0$ hosil bo‘ladi. To‘g‘ri chiziq aylanaga uringani uchun tenglama yagona yechimga ega bo‘ladi. Tenglama yagona yechimga ega bo‘lishi uchun uning diskriminanti nolga teng, ya’ni

$(5k-3)^2-9(k^2+1)=0$ yoki $16k^2-30k=0$ bo‘lishi lozim.

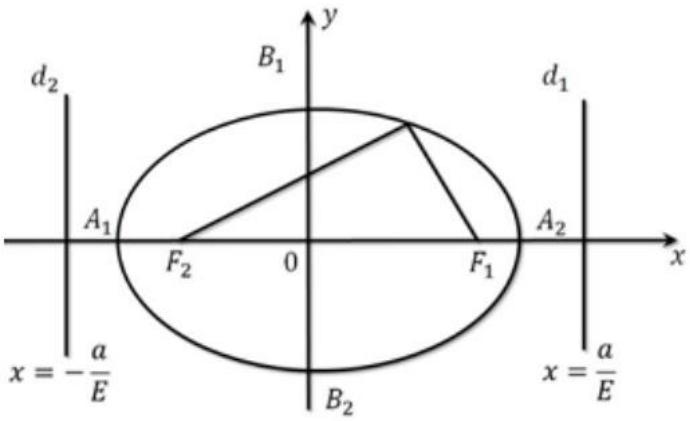
Bundan $k_1=0$, $k_2=\frac{15}{8}$ kelib chiqadi. Demak, izlangan urinma tenglamalari:

$$y=3 \text{ va } y=\frac{15}{8}x+3.$$

2.2.3. Ellips va uning kanonik tenglamasi

2-ta’rif. Har bir nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi F_1 va F_2 nuqtalargacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi o‘zgarmas miqdorga teng bo‘lgan geometrik nuqtalar o‘rniga **ellips** deb ataladi.

$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ bo'lsin.



Ta’rifga ko‘ra ellipsning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasidan F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalar yig'indisi o'zgarmas. $|F_1M|+|F_2M|=2a$ $(a>c)$ bo‘lsin. Bundan,

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

Bu tenglamani

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Oxirgi ifodani kvadratga oshirib quyidagini hosil qilamiz:

$$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2$$

yoki

$$xc+a^2=a\cdot\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad (3)$$

Bundan fokal masofalar deb ataluvchi

$$|MF_2|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}\cdot x \quad \text{va} \quad |MF_1|=2a-|MF_2|=a-\frac{c}{a}\cdot x$$

masofalarni topamiz. (3) tenglikni kvadratga oshirsak

$$c^2x^2+2cxa^2+a^4=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$

yoki

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

hosil bo‘ladi.

$c<a$ bo‘lganligi sababli $a^2-c^2=b^2$ musbat hamda $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ ega bo‘lamiz. Oxirgi tenglikda shakl almashtirish bajaramiz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \textbf{(ellipsning kanonik tenglamasi)} \qquad (4)$$

(4) tenglamada noma'lumlarning faqat kvadratlari qatnashgani uchun, uning grafigi Ox va Oy o'qlariga nisbatan simmetrik joylashgan. Koordinatalar boshi uning simmetriya markazi bo'lib, koordinata o'qlari simmetriya o'qlari bo'ladi. Fokuslar joylashgan o'q ellipsning fokus (fokal) o'qi deyiladi.

Ellipsni koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalari uning **uchlari** deyiladi. (4) tenglamadan $y=0$ deb $A_1(a,0), A_2(-a,0)$ uchlarni, $x=0$ deb $B_1(0,b), B_2(0,-b)$ uchlarni topamiz, $|A_2A_1|=2a$ $|B_2B_1|=2b$ kesmalar ellipsning mos ravishda katta (fokal) o'qi va kichiko'qi deyiladi a va b kesmalar katta yarim o'q va kichik yarim o'q deyiladi.Ellips rasmini chizish uchun uni $x\geq 0$ va $y\geq 0$ bo'lganda(simmetrik bo'lgani uchun) tekshirish yetarli. Agar x o'zgaruvchi 0 dan a gacha o'sib borsa, y o'zgaruvchi b dan 0 gacha kamayadi.(4) tenglamada $b=a$ bo'lsa,tenglama $x^2+y^2=a^2$ ko'rinishni oladi, ya'ni aylana tenglamasiga ega bo'lamiz. Demak, aylana ellipsning xususiy holidir. (ellips fokuslari birlashsa, $c=0$ holat).

O'qlari koordinata o'qlariga parallel bo'lgan ellipsning tenglamasi

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$

ko'rinishda bo'ladi va (x_0,y_0) ellips markazining koordinatasini ifodalaydi.

Ellips fokuslari orasidagi $2c$ masofani katta o'q $2a$ ga nisbati uning **eksentrisiteti** deyiladi va ε bilan belgilanadi:

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a} \text{ yoki } \varepsilon=\frac{c}{a} \qquad (6)$$

Har qanday ellips uchun $\varepsilon<1a$ bo'lib, ε ellipsning cho'zinchoqligini yoki siqilganligini bildiradi. Ellipsning fokal radiuslari $r_1=a+\varepsilon x$ va $r_2=a-\varepsilon x$ $(r_1+r_2=2a)$ formula bilan aniqlanadi.

Ellipsning direktrisasi deb, ellipsni kichik o'qiga parallel va undan $\frac{a}{\varepsilon}$ masofada yotgan l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlarga aytiladi. Direktrisaning tenglamasi (2-rasm):

$$x=\frac{a}{\varepsilon} \text{ va } x=-\frac{a}{\varepsilon} \qquad (7)$$

3-masala. $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$ tenglama ellips ekanligini aniqlang va uning markazini koordinatalari va ekssentrisitetini toping.

Yechish. Egri chiziq tenglamasida shakl almashtiramiz.

$$4x^2+3y^2-8x+12y-32=4(x^2-2x)+3(y^2+4y)-32=$$

$$4(x^2-2x+1-1)+3(y^2+4y+4-4)-32=4(x-1)^2-4+3(y+2)^2-12-32,$$

bo‘lganligi sababli, tenglamani (5) ko‘rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$4(x-1)^2+3(y+2)^2=48 \text{ yoki } \frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{16}=1.$$

Bundan $a^2=12$, $a=2\sqrt{3}$ va $b^2=16$, $b=4$ $(b>a)$. Shuning uchun

$$c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{16-12}=2.$$

Ellipsningekssentrisiteti esa $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{1}{2}$ teng.

4-masala. Ellipsning $24x^2+49y^2=1176$ tenglamasi berilgan. Topish kerak:

1) yarim o‘qlarning uzunligi;

2) fokuslar koordinatalari;

3) ellipsekssentrisiteti;

4) direktrisalar tenglamalari va ular orsidagi masofa;

5) chap F_1 fokusidan 12 birlik masofada joylashgan ellips nuqtasi.

Yechish. Ellips tenglamasini ikkala tarafini 1176 ga bo‘lib (4) ko‘rinishda ifodalaymiz: $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$

1) Bundan $a^2=49$, $b^2=24$, ya’ni $a=7$, $b=2\sqrt{6}$.

2) $c^2=a^2-b^2$ formulaga asosan, $c^2=7^2-(2\sqrt{6})^2=25$, $c=5$ ega bo‘lamiz. Bundan $F_1(-5;0)$ va $F_2(5;0)$.

3) (6) formulaga ko’ra $\varepsilon=\frac{5}{7}$ ni topamiz.

4) Direktrisa tenglamasini (7) tenglama bilan topamiz: $x=\pm\frac{7}{\frac{5}{7}}$,

ya’ni $x=\frac{49}{5}$ va $x=-\frac{49}{5}$. Ular orasidagi masofa $d=\frac{49}{5}-(-\frac{49}{5})=\frac{98}{5}=19,6$.

5) $r_1 = a + \varepsilon x$ formula bo‘yicha F_1 nuqtadan 12 birlik masofada joylashgan nuqtaning absissasini topamiz $12 = 7 + \frac{5}{7}x$, ya’ni $x = 7$. Bu qiymatni ellips tenglamasiga qo‘yib, izlangan nuqtalarning ordinatasini topamiz: $24 \cdot 49 + 49y^2 = 1176$, $49y^2 = 0$, $y = 0$. Masala shartini $A(7;0)$ nuqta qanoatlantiradi.

2.2.4. Giperbola va uning kanonik tenglamasi.

3-ta’rif. Har bir nuqtasidan fokus deb ataluvchi ikkita F_1 va F_2 nuqtalargacha bo‘lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati o‘zgarmas miqdor bo‘lgan (uni $2a$ deb belgilaymiz) geometrik nuqtalar o‘rniga **giperbola** deyiladi.

Ellipsda qaraganimizdek fokuslarni $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ va o‘zgarmas miqdorni $2a$ deb olsak $\|F_1M\| - \|F_2M\| = 2a$ tenglamaga ega bo‘lamiz. Bundan ellipsdagi kabi mulohaza yuritib, shakl almashtirishlarni bajarsak

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

tenglama ega bo‘lamiz.Bu yerda $c > a$ hamda a, $b$vas sonlaruchun

$$b^2 = c^2 - a^2 \qquad (8)$$

munosabat o‘rinli bo‘lgani uchun giperbolaning quyidagi kanonik tenglamasini topamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (\text{giperbolaning kanonik tenglamasi}) \qquad (9)$$

Ixtiyoriy $(\pm x, \pm y)$ nuqtalar (9) tenglamani qanoatlantirganligi sababli giperbolakoordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘ladi. Shuningdek, giperbola $O(0;0)$ nuqtaga, ya’ni koordinata boshiga ham simmetrik. Bu nuqta **giperbola markazi** deb ataladi. Fokuslar yotgan o‘q giperbolaning **fokal o‘qi** deyiladi.

Agar (9) tenglamada $y = 0$ desak, $x = \pm a$ ni topamiz. $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$nuqtalar giperbolaning **uchlari** deyiladi va Oy o‘qini kesmaydi hamda ular orasidagi masofa $2a$ ga teng. Haqiqatan ham (9)

tenglamada $x=0$ desak, $y^2=-b^2$ ni topamiz. Bu (9) giperbolani Oy o‘qi bilan kesishmasligini bildiradi. $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ nuqtalar giperbolaning mavhum uchlari deyiladi, ular orasidagi masofa $2b$ ga teng.

$A_1A_2=2a$ kesma giperbolaning haqiqiy (fokal) o‘qi, $B_1B_2=2b$ kesma esa mavhum o‘qi deyiladi. a va b kesmalar giperbolaning **haqiqiy** va **mavhum** yarim o‘qlari deyiladi.

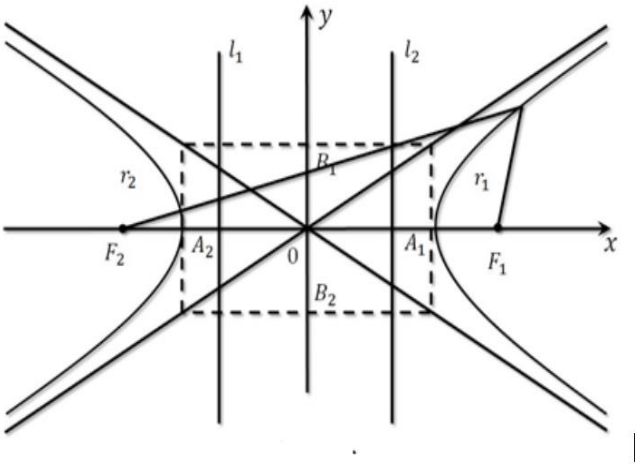
$y=\pm\frac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziqlar va (9) giperbolaning bir xil abssissaga ega bo‘lgan nuqtalari orasidagi masofa koordinatalar boshidan uzoqlashgan sari nolga intiladi, shuning uchun

$$y=\pm\frac{b}{a}x \qquad (10)$$

to‘g‘ri chiziqlar giperbolaning **asimptotalari** deyiladi.

Bu to‘g‘ri chiziqlar markazi koordinatalar boshida bo‘lib, tomonlari $2a$ va $2b$ ga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak (giperbolaning asosiy to‘rtburchagi) dioganallaridan o‘tadi. Giperbolani chizishdan oldin asimptotalarini chizish maqsadga muvofiq.

Giperbolani tekshirish uchun $x\geq 0$, $y\geq 0$ bo‘lganda tekshirishyetarli bo‘ladi. (8) tenglamadan, y ni 0 dan ∞ gacha o‘zgarganida x ni a dan ∞ gacha o‘zgarishini ko‘rish mumkin.



Ellipsdagi kabi giperbola uchun ham

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \qquad (11)$$

giperbolaning ekssentrisiteti deyiladi, giperbola uchun $\varepsilon > 1$, chunki $c > a$.

Ekssentrisitet giperbolaning asosiy to‘g‘ri to‘rtburchagini cho‘zinchoqligini ifodalaydi.

Giperbolaning o‘ng tarafidagi nuqtalari uchun fokal radiuslar:

$$r_1 = a + \varepsilon x \ , \quad r_2 = -a + \varepsilon x \ ;$$

(11^a)

chap tarafidagi nuqtalari uchun

$$r_1 = -a - \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x .$$

$(11^б)$

formulalar yordamida topiladi.

Giperbolaning mavhum o‘qiga parallel hamda undan $\frac{a}{\varepsilon}$ masofada yotgan l_1 va l_2, to‘g‘ri chiziqlarga giperbolning direktrisasi deyiladi (3-rasm).

Agar giperbolada $a = b$ bo‘lsa, giperbola teng tomonli deyiladi, uning tenglamasi $x^2 - y^2 = a^2$ bo‘ladi. Uning asimptolalari $y = \pm x$ bo‘lib o‘zaro perpendikulyar bo‘ladi, ya’ni asosiy to‘g‘ri to‘rtburchagi kvadratdan iborat bo‘ladi.

Simmetriya markazi $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada va simmetriya o‘qlari koordinata o‘qlariga parallel bo‘lgan giperbolaning tenglamasi

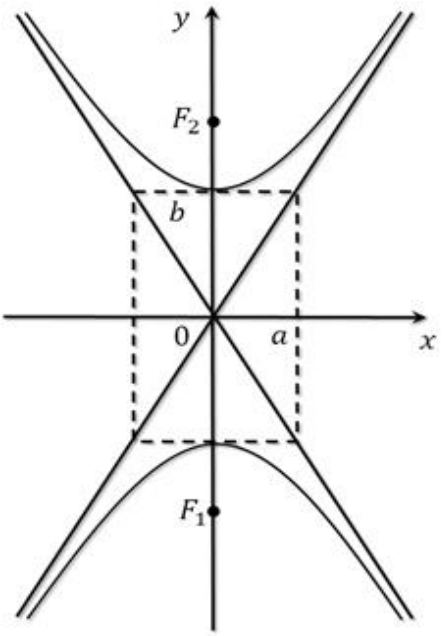
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (13)$$

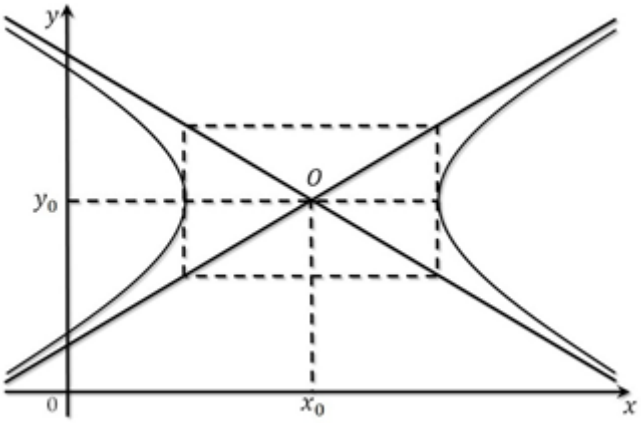
ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar giperbolaning haqiqiy o‘qi Oy o‘qda yotsa, u holda giperbola tenglamasi

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad (14)$$

Bu giperbolaning ekssentrisiteti $\varepsilon = \frac{c}{b}$ ga teng, asimtotalar $y = \pm \frac{b}{a} x$ va direktrissalar esa $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$ tenglamalar bilan aniqlanadi. (14) giperbola (9) giperbolaga qo‘shma deyiladi (**2.2.4.1**-rasm).





2.2.4.1-rasm **2.2.4.2-rasm**

Agar giperbolaning o‘qlari koordinata o‘qlariga parallelbo‘lsa unig tenglamasi haqiqiy o‘qi $0y$ o‘qda yotsa, u holda giperbola tenglamasi

$$\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1 \qquad (15)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bunda $(x_0; y_0)$ — giperbola markazining koordinatlari (5-rasm).

5-masala. $5x^2-4y^2=20$ giperbola tenglamasi berilgan.Topish kerak:

1) yarim o‘qlar uzunligi;
2) fokuslar koordinatasi;
3) giperbola ekssentrisiteti;
4) asimptotava direktrisa tenglamasi;
5) $M(3;2,5)$ nuqtaning fokal radiuslari.

Yechish. Tenglamaning ikki tarafini 20 ga bo‘lib, giperbola tenglamasini (9) kanonik ko‘rinishga keltiramiz:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$$

Bundan:

1) $a^2=4$, $b^2=5$, ya'ni $a=2$, $b=\sqrt{5}$;

2)(8)munosabatdan foydalanib, $c^2=4+5$, ya'ni $c=3$ topamiz. Bundan giperbolanig fokuslari topiladi: $F_1(-3;0)$ va $F_2(3;0)$;

3) (11)formulaga ko'ra $\varepsilon=\frac{3}{2}$;

4) asimptota va direktrissatenglamalarini (9) va(12) formulalar orqali topamiz: $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ va $x=\pm\frac{4}{3}$;

5) M nuqta giperbolaning o'ng qismida $(x=3>0)$ yotganligi sababli (11^a) formuladan foydalanamiz: $r_1=2+\frac{3}{2}\cdot 3=6.5$, $r_2=-2+\frac{3}{2}\cdot 3=2.5$.

6-masala. Fokuslari $F_1(-2;4)$ va $F_2(12;4)$ nuqtalarda yotgan va mavhum o'qining uzunligi 6 bo'lgan giperbola tenglamasini toping.

Yechish. Giperbola markazi Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan $y=4$ to'g'ri chiziqda yotadi (15) ko'rinishda bo'ladi. Shartga muvofiq $2b=6,\ b=3.$ Fokuslari orasidagi masofa 14, ya'ni $2c=14,\ c=7.$ Ushbu $c^2=a^2+b^2$ munosabatdan $49=a^2+9$, $a=2\sqrt{10}$ topamiz. Giperbola markazi fokuslar orasidagi masofani teng ikkiga bo'lganligi sababli

$$x_0=\frac{-2+12}{2}=5,\quad y_0=\frac{4+4}{2}=4.$$

Giperbola tenglamasini tuzamiz:

$$\frac{(x-5)^2}{40}-\frac{(y-4)^2}{9}=1.$$

7-masala. Agar giperbola ekssentrisiteti 2 bo'lsa, uning asimtotalari orasidagi burchakni toping.

Yechish.Giperbola asimtotasi $y=\pm\frac{b}{a}x$ ko'rinishda. $\frac{b}{a}$ nisbatni (8), (11) formulalar va $\varepsilon=2$ shart bo'yicha topamiz:

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$. Bundan $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \varepsilon^2 - 1$, ya'ni $\frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ O‘rniga qo‘ysak $\frac{b}{a} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ .Asimptotalar tenglamalari esa $y = \sqrt{3}x$ va $y = -\sqrt{3}$ bo‘ladi. Asimptotalar orasidagi burchakni quyidagi formula yordamida topamiz:

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-3}\right| = \sqrt{3}, \varphi = 60°.$$

2.2.5. Parabola va uning kanonik tenglamasi.

4-ta’rif. Fokus deb ataluvchi berilgan nuqta va berilgan direktrisa deb ataluvchi to‘g‘ri chiziqdan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o‘rniga **parabola** deyiladi.

Fokus F nuqtadan o‘tib direktrisaga perpendikulyar bo‘lgan o‘qni $0x$ o‘qi uchun qabul qilamiz (**2.2.5.1**- rasm) va yo‘nalishini direktrisadan fokusga qarab olamiz. oy o‘qini direktrisa bilan fokus orasidagi kesmaning o‘rtasidan unga perpendikulyar qilib olamiz. Fokus $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ nuqta va direktrisa $x = -\frac{p}{2}$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'lsin. Ta’rifga ko‘ra

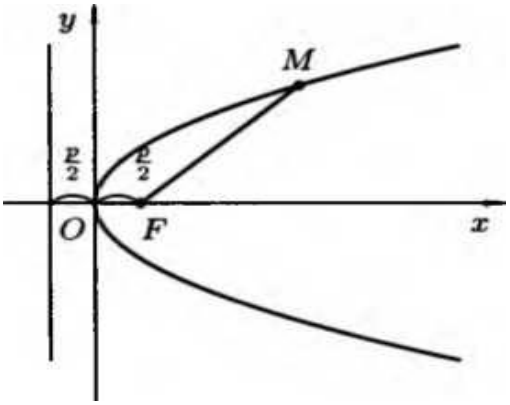
$$|FM| = |MK| \ yoki \ \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2 + y^2} = \sqrt{(x+\frac{p}{2})^2}$$

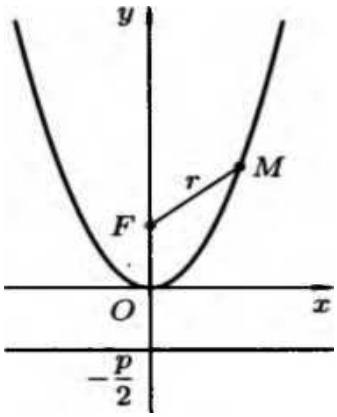
Bu tenglamani soddalashtirib

$$y^2 = 2Px \quad (\textbf{parabolaning kanonik tenglamasi}) \qquad (16)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. (16) tenglamadan x ning manfiy qiymatlarni qabul qila olmasligi ko‘rinadi, ya’ni parabolaning barcha nuqtalari $0y$ o‘qdan o‘ng tomonda joylashgan. x ning har birqiymatiga y ning ikkita qarama-qarshi qiymati mos keladi. Parabola 6-rasmda keltirilgan.

Parabolning uchi $O(0;0)$ nuqtada yotadi, FM kesma uzunligi M nuqtaning fokal radiusi, Ox –o‘qi esa uning simmetriya o‘qi deyiladi.





2.2.5.1-rasm **2.2.5.2-rasm**

Parabolning fokal radiusi $r = x + \frac{p}{2}$ formula bo‘yicha topiladi.

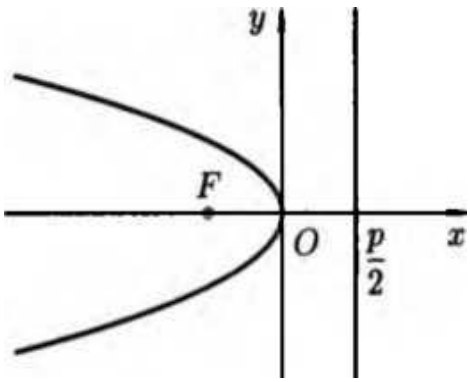
To‘g‘ri burchakli koordinata sistemasida (16) tenglama bilan berilgan parabola **2.2.5.1**-rasmda tasvirlangan.

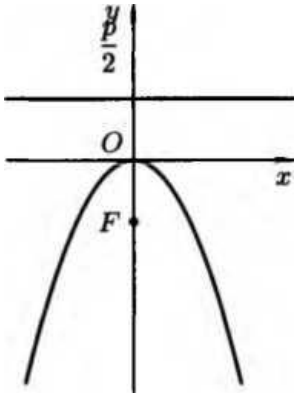
Izoh.1) Oy o‘qiga nisbatan simmetrik, koordinata boshidan o‘tgan parabola (**2.2.5.2**-rasm) tenglamasi

$$x^2 = 2py.$$

bilan beriladi. Uning fokus nuqtasi $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$. Bu parobolaning direktrisasi tenglamasi $y = -\frac{p}{2}$. Parabolaning M nuqtasi fokal radiusi $r = y + \frac{p}{2}$.

2) **2.2.5.3** va **2.2.5.4**-rasmlarda mos ravishda $y^2 = -2px$ va $x^2 = -2py$ parabolalar grafiklari tasvirlangan.





2.2.5.3-rasm **2.2.5.4-rasm**

8-masala. Ushbu $x^2 = 4y$ parabola berilgan. Fokus nuqta koordinatasi, direktrisa tenglamasi, $M\,(4;4)$ nuqtaning fokal radiusi topilsin.

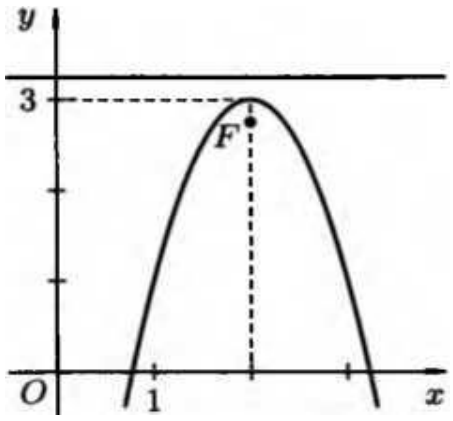
Yechish. $2p = 4,\ p = 2.$ Yuqorida keltirilgan formulalardan F(0;1) - parabola fokus nuqtasi. Direktrisa tenglamasi $y = -1.$ $M(4;4)$ nuqtaning fokalradiusi $r = 4+1 = 5.$

9-masala. Ushbu $y = -2x^2 + 8x - 5$ parabola uchining koordinatasi fokusi va direktrisasi topilsin hamda uning grafigi eskizi chizilsin.

Yechish. $y = -2x^2 + 8x - 5$ tenglamani o‘ng tarafidan to‘la kvadrat ajratamiz:

$$y = -2(x^2 - 4x + \frac{5}{2}) = -2(x^2 + 4 - 4 + \frac{5}{2}) = -2((x-2)^2 - \frac{3}{2}) = 2 - (x-2)^2 + 3,$$

ya’ni $y = -2\,(x-2)^2 + 3$ yoki $(x-2)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)$. Parabola tenglamasi 12 - rasm ko‘rinishida bo‘lganligi sababli, uning uchining koordinatasi $(2;3).$ Shuningdek, $2p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$ $x = 2$ to‘g‘ri chiziq parabolaning simmetriya o‘qidan iborat.



2.2.5.5-rasm.

Fokus koordinatasi x = 2, $y = 3 - \frac{1}{8} = 2\frac{7}{8}$, ya’ni $F(2;2\frac{7}{8})$. Direktrisa tenglamasi esa $y = 3 + \frac{p}{2} = 3 + \frac{1}{8}$, ya’ni $y = 3\frac{1}{8}$. Parabola grafigi **2.2.5.5** - rasmda tasvirlangan.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli chiziqlar deb qanday chiziqlarga aytiladi?
2. Aylana, ellips, giperbola va parabola deb nimalarga aytiladi va ularning kanonik tenglamalari qanday bo‘ladi?
3. Ellips va giperbolalarning ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi?
4. Ekssentrisitet aylana uchun nimaga teng?
5. Ellips, gipebala va parabolalarning fokal radiuslari nima?
6. Ellips va giperbolalarning simmetriya markazi va simmetriya o‘qlari bormi?
7. Ellips va giperbolalarning yarim o‘qlari nimalardan iborat?

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $A(4;4)$ nuqtadan va $x^2+y^2+4x-4y=0$ aylana bilan $y=-x$ to‘g‘ri chiziqning kesishgan nuqtalaridan o‘tuvchi aylana tenglamasi yozilsin.
2. $A(-1;3)$, $B(0;2)$ va $C(1;-1)$ nuqtalardan o‘tuvchi aylana tenglamasi yozilsin.
3. $A(-1;4)$, $B(1;2)$ va $C(1;2)$ nuqtalardan o‘tuvchi aylana tenglamasini yozing.
4. $A(-4;6)$ nuqta berilgan. Diametri OA kesma bo‘lgan aylana tenglamasini tuzing.
5. $A(-6;0)$ nuqtadan o‘tuvchi va Oy o‘qiga koordinatalar boshida urinuvchi aylana tenglamasini tuzing.
6. $x^2+y^2+4x-6y=0$ aylananing Oy o‘qi bilan kesishgan nuqtalariga o‘tkazilgan radiuslari orasidagi burchak topilsin.
7. $16x^2+25y^2-400=0$ ellips yarim o‘qlari, fokuslari koordinatalarini, ekssentrisiteti va direktrisalari tenglamalarini toping.
8. Quyidagilarni bilgan holda ellips tenglamasini tuzing:
   1) Katta yarim o‘qi 10 va fokuslari $F_1=(-6;0)$ va $F_2=(10;0)$.
   2) $a=5$, $F_1=(-3;5)$ va $F_2=(3;5)$.

9. Koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lgan ellips $M(2;\sqrt{3})$ va $B(0;2)$ nuqtalaridan o‘tadi. Uning tenglamasi yozilsin va M nuqtadan fokuslarigacha bo‘lagan masofa topilsin.
10. Ellips $M(2\sqrt{3};\sqrt{6})$ va $A(6;0)$ nutalardan o‘tadi. Uning tenglamasini, ekssentrisiteti va M nuqtadan fokuslargacha bo‘lgan masofani toping.
11. Katta yarim o‘qi $a=5$ va c parametri 1) 4,8; 2) 4; 3) 3; 4) 1,4; 5) 0.

    Berilgan ellipsni kanonik tenglamasini yozing. Har bir ellipsni chizing va ularning ekstsentrisitetini toping.
12. Yer fokuslaridan birida Quyosh joylashgan ellips bo‘yicha harakat qiladi. Quyoshdan Yergacha bo‘lgan eng kichik masofa taxminan 147,5 million km ga, eng katta masofa 152,5 million km ga teng bo‘lsa, Yer orbitasining katta yarim o‘qi va ekssentrisiteti topilsin.
13. Ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{3}{4}$ bo‘lgan va $M\left(-4;\sqrt{21}\right)$ nuqtadan o‘tuvchi ellips tenglamasini yozing va M nuqtaning fokal radius-vektorlarini toping.
14. $9x^2+25y^2=225$ ellipsda shunday $M(x;y)$ nuqta topilsinki, undan o‘ng fokusgacha bo‘lgan masofa chap fokusgacha bo‘lgan masofadan 4 marta katta bo‘lsin.
15. Agar ellipsning fokuslari orasidagi masofa uning katta va kichik yarim o‘qlarining uchlari orasidagi masofaga teng bo‘lsa, uning ekstsentrisiteti topilsin.
16. $x^2+4y^2=4$ ellipsning, markazi shu ellipsning “yuqori” uchida bo‘lgan va uning fokuslaridan o‘tuvchi aylana bilan umumiy nuqtalari topilsin.
17. Giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing, agar:
    1) $2c=10,\ \ a=3;$
    2) $c=3,\ \ \varepsilon=1{,}5;$
    3) $b=6,$ asimptota tenglamasi $y=\pm\frac{5}{3}x.$

18. Giperbolaning ekssentrisiteti $\sqrt{2}$ ga teng va $M\left(2a;\sqrt{3}a\right)$ nuqtadan o‘tadi. Giperbolani sodda teglamasini tuzing.
19. Giperbolani fokuslari $F_1\left(-\sqrt{7};0\right)$ va $F_2\left(\sqrt{7};0\right)$ nuqtalarda joylashgan. Agar Giperbola $A(2;0)$ nuqtadan o‘tsa, uning asimptotalari tenglamasini tuzing.
20. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbola fokusidan asimptotalarigacha bo‘lgan masofalar va asimptotalari orasidagi burchak topilsin.
21. Biror uchidan fokuslarigacha bo‘lgan masofalari 9 va 1 ga teng bo‘lgan giperbolaning kanonik tenglamasi yozilsin.
22. $M\left(6;\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$ nuqtadan o‘tuvchi, koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lgan giperbolaning haqiqiy yarim o‘qi $a=4$. Giperbolaning chap fokusidan asimptotalariga tushirilgan perpendikulyarning tenglamalari yozilsin.
23. $y^2=a^2+x^2$ giperbola fokuslari koordinatalarini va asimptotalari orasidagi burchakni toping.
24. $16x^2-2y^2=400$ giperbola tenglamasi berilgan. Uning o‘qlari, fokuslari, ekssentrisitetini toping va asimptotasining tenglamasini tuzing.
25. Uchlari $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ellipsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlarida bo‘lgan giperbola tenglamasini yozing.
26. Giperbolaning kanonik tenglamasini yozing, agar:
    1) $c=10$ va asimptota tenglamasi $y=\pm\frac{4}{3}x$;
    2) $\varepsilon=1{,}5$ va direktrisalari orasidagi masofa $\frac{8}{3}$ ga teng;
    3) $\varepsilon=\sqrt{2}$ va $M\left(\sqrt{3};\sqrt{2}\right)$ nuqta giperbolada yotadi.

Parabolaning quyida berilgan tenglamasi bo‘yicha uning fokusi koordinatalarini, direktrisasi tenglamasini toping:

27. $y^2=12x$;

28. $x^2 = -5y$;

29. $y^2 = -4x$;

30. $x^2 = 14y$.

31. Agar parabola $x = y$ to‘g‘ri chiziq va $x^2 + 6x + y^2 = 0$ aylananing kesishish nuqtalaridan o‘tsa, uning tenglamasi va direktrisasini yozing.

32. 1) $O(0;0)$ va $A(-1;2)$ nuqtalardan o‘tuvchi va Ox o‘qiga simmetrik;

2) $O(0;0)$ va $B(2;4)$ nuqtalardan o‘tuvchi va Oy o‘qiga simmetrik bo‘lgan parabola tenglamasini yozing.

33. $y^2 = 6x$ parabolada fokal radius vektor 4,5 ga teng bo‘lgan nuqtani toping.

III BOB. MATEMATIK ANALIZ ASOSLARI VA UNING TATBIQLARI

3.1-§. R^n fazoda nuqtalarning o‘zaro joylashishi. Nuqtalar ketma-ketligi va uning limiti

Tayanch iboralar: Sonli ketma – ketlik, monoton ketma-ketlik, chegaralangan ketma-ketlik, ketma-ketlikning limiti, cheksiz kichik sonli ketma–ketlik.

3.1.1.Sonli ketma – ketlik.

Natural sonlar to‘plamida berilgan

$$x_n = f(n)$$

funksiyaga sonli ketma-ketlik deyiladi. Sonli ketma-ketlik odatda $\{x_n\}$ yoki $x_n,\ n \in N$, ko‘rinishda yoziladi. Bunda x_1 – ketma-ketlikning birinchi hadi, x_2 – ketma-ketlikning ikkinchi hadi, ... x_n – ketma-ketlikning $n-$ hadi deyiladi.

Masalan,

$$x_n = n^2 + 1, \quad y_n = (-1)^n n, \quad z_n = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in N$$

tengliklar mos ravishda

$$\{x_n\} = \{2, 5, 10, ..., n^2+1, ...\}, \{y_n\} = \{-1, 2, -3, 4, ..., (-1)^n n, ...\},$$

$$\{z_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}, \{u_n\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ..., \frac{n-1}{n}, ...\right\},$$

sonli ketma-ketliklarni ifodalaydi.

Agar shunday M, (m) soni mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $n \in N$ da $x_n \le M$ $(x_n \ge m)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda x_n sonli ketma-ketlik **yuqoridan (quyidan)** chegaralangan deyiladi. Agar $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik yuqoridan ham, quyidan ham chegaralangan bo‘lsa, bu ketma-ketlik **chegaralangan** deyiladi.

Ko‘rish mumkinki, yuqorida keltirilgan z_n, u_n ketma-ketliklar chegaralangan va x_n, y_n ketma-ketlik esa mos ravishda quyidan va yuqoridan chegaralangan.

Agar ixtiyoriy n uchun $x_n < x_{n+1}$ $(x_n \le x_{n+1})$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik **o‘suvchi (kamaymaydigan)** deyiladi. **Kamayuvchi (o‘smaydigan)** ketma-ketliklar ham shunga o‘xshash ta’riflanadi. Bunday ketma-ketliklar **monoton** deyiladi. Yuqorida keltirilgan x_n, z_n, u_n ketma-ketliklar monoton, y_n ketma-ketlik monoton emas.

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha elementlari faqat va faqat bitta C soniga teng bo‘lsa, u holda uni o‘zgarmas deb atashadi. Masalan, $x_n = 5, \{x_n\} = \{5,5,\ldots,5,\ldots\}$

Sonli ketma-ketliklar rekurrent usulda ham beriladi. Bunda ketma-ketlikning x_1 birinchi hadi va $n-$ hadni o‘zidan oldingi hadlar orqali topish qoidasi beriladi:

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

Shunday qilib, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ va hakozo.

Masalan: $x_1 = 2,\ \ x_n = 3 + x_{n-1},\ \ \{x_n\} = \{2,5,8\ldots\}$,

Ko‘rish mumkinki, $x_n = \dfrac{n-1}{n}$ ketma-ketlikning hadlari n kattalashtirilganda 1 soniga yaqinlashadi. Bunday holda $x_n = \dfrac{n-1}{n}$ ketma-ketlik 1 limitga intiladi deyiladi.

1-ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday N natural son topilib, barcha $n > N$ larda

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda a soniga x_n **ketma-ketlikning limiti** deyiladi.

Bu $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = a$ yoki $n \to \infty$ da $x_n \to a$ ko‘rinishda yoziladi. Shuningdek, x_n ketma-ketlik a soniga yaqinlashadi ham deyiladi.

Masalan, $\left\{\dfrac{4n}{n+1}\right\}$ sonli ketma – ketlikning limiti 4 ga teng, ya’ni $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n}{n+1} = 4$ ekanligini ta’rif asosida isbotlaylik.

Haqiqattan ham,

$$\left|\frac{4n}{n+1}-4\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{4}{n+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{4}{n+1}<\varepsilon \Rightarrow \frac{4}{\varepsilon}<n+1 \Rightarrow n>\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}$$

ifodani hosil qilamiz. Natijada, N ning butun son ekanligini e'tiborga olib, $N=\left[\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}\right]+1$ deb olasak, ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $n>N$ shhartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy n uchun $\left|\frac{4n}{n+1}-4\right|<\varepsilon$ bo'ladi. Bu esa, aynan 4 soni x_n ketma–ketlikning limiti ekanligini anglatadi, ya'ni $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4n}{n+1}=4$.

1-teorema. Agar sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda uning limiti yagonadir.

2-teorema. Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

Isbot. $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlikning limiti a o'lsin, ya'ni $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a,\ \varepsilon=1$ deb olamiz, u holda shunday N_1 natular soni mavjudki $n>N_1$ bo'lganda $|x_n|\le a+1$.

$M=\max\{|x_1|,|x_2|,\ldots,|x_{n_1}|,a+1\}$ soni olsak, $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlikning barcha hadi $|x_n|\le M$ tengsizlikni bajaradi. Demak $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik chegaralangan.

3.1.2. Yaqinlashuvchi sonli ketma–ketliklar limitlari xossalari

1. $\{x_n\}$ ketma–ketlik o'zgarmas, ya'ni $\{x_n\}=c$ bo'lsa, unda $\lim\limits_{x\to\infty}\{x_n\}=c$;

2. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma – ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, m – o'zgarmas son bo'lsa, u holda: $\{x_n+y_n\},\ \{x_n\cdot y_n\},\ \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\},\{mx_n\},\{x_n{}^m\}$ ketma – ketliklar ham yaqinlashuvchi bo'ladi va

a) $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k+y_k\}=\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}+\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}$;

b) $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k y_k\}=\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\};;$

c) $\lim\limits_{k\to\infty}\{\frac{x_k}{y_k}\}=\frac{\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}}{\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}}\}, \quad \lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}\neq 0;$

d) $\lim\limits_{k\to\infty}\{mx_k\}=m\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\};$

e) $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k^m\}=\left(\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}\right)^m$; tengliklar o‘rinli;

1. 3. Agar $x_k \le y_k$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{k\to\infty} x_k \le \lim\limits_{k\to\infty} y_k$;

4. Agar $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a, \quad \lim\limits_{k\to\infty} y_k = a$ va $x_k \le z_k \le y_k$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = a$

2-ta’rif. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun ε ga bog‘liq biror $N(\varepsilon)$ natural son topilib $n > N(\varepsilon)$ bo‘ladigan barcha n natural sonlar uchun $|a_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\{a_n\}$ sonli ketma – ketlikka **cheksiz kichik sonli ketma–ketlik** deyiladi.

Bu limit $\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\}=0$ ko‘rinishda yoziladi.

Limiti nolga teng har qanday sonli ketma – ketlikka **cheksiz kichik sonli ketma–ketlik** deyiladi. Masalan, $\left\{\frac{1}{4n}\right\}$, $\left\{\frac{4n}{n^2+1}\right\}$ sonli ketma – ketliklar cheksiz kichik sonli ketma–ketliklardir, chunki

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{4n}\right\}=0, \quad \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4n}{n^2+1}\right\}=0$$

1-misol. Cheksiz kichik sonli ketma–ketlik ta’rifidan foydalanib, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ ketma–ketlik cheksiz kichik sonli ketma–ketlik ekanligini isbotlang.

Isbot. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olamiz, $|a_n| = |a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}; \quad |a_n| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n larni topish uchun $\frac{1}{n} < \varepsilon$ tengsizlikni yechamiz: $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Shunday qilib, $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ deb olsak, u holda $|a_n| < \varepsilon$

tengsizlik barcha $n > N$ larda bajariladi. ε -ixtiyoriy son bo‘lgani uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Odatda, ketma–ketlik limitini aniqlashda cheksiz kichik sonli ketma – ketlikdan foydalaniladi. Masalan, $\{x_n\}$ sonli ketma – ketlik limiti a ga teng bo'lishi, uchun shunday chkesiz kichik $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlik mavjud bo'lib, $x_n = a + \alpha_n$ bo'lishi zarur va yetarli.

Cheksiz kichik sonli ketma–ketliklar quyidagi xossalarga ega:

1. $\{a_n\}$ va $\{\beta_n\}$ cheksiz kichik sonli ketma–ketliklar bo‘lsa, ularning yig‘indisi yoki ayirmasidan tuzilgan $\{a_n \pm \beta_n\}$ ketma - ketliklar ham cheksiz kichik sonli ketma – ketliklardir;
2. $\{a_n\}$ cheksiz kichik sonli ketma – ketlik va $\{x_n\}$ chegaralangan sonli ketma – ketlik bo‘lsa, ularning mos hadlari ko‘paytmasidan tuzilgan $\{a_n \cdot x_n\}$ ketma–ketlik ham cheksiz kichik sonli ketma – ketlikdir;
3. Chekli sondagi cheksiz kichik sonli ketma – ketliklarning ko‘paytmalari ham cheksiz kichik sonli ketma – ketlikdir.

3-ta’rif. Ixtiyoriy $A > 0$ son uchun $\{\gamma_n\}$ sonli ketma – ketlikning shunday bir $N(A)$ (A ga bog‘liq) tartib raqamini tanlash mumkin bo‘lsaki, barcha $n > N(\varepsilon)$ tartib raqamli hadlari uchun $|\gamma_n| > A$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $\{\gamma_n\}$ sonli ketma – ketlik **cheksiz katta sonli ketma – ketlik** deyiladi.

Cheksiz katta sonli ketma – ketliklar limiti ∞ ga teng.

Masalan, $\left\{\frac{n^2}{10n+1}\right\}$, $\left\{\frac{2-n^3}{10n^2+10n+1}\right\}$ ketma – ketliklar cheksiz katta sonli ketma – ketliklarga misol bo‘la oladi, chunki ularning limiti, mos ravishda, ∞ va $-\infty$ ga teng.

2-misol. Cheksiz katta sonli ketma–ketlik ta’rifidan foydalanib, $\lim\limits_{n\to\infty} n$ ketma–ketlik cheksiz katta sonli ketma–ketlik ekanligini isbotlang.

Isbot. Ixtiyoriy $A > 0$ son olamiz, $|\gamma_n| = |n| > A$ tengsizlikdan $|\gamma_n| = n > A$ ni hosil qilamiz. Agar $N \geq A$ olsak, u holda barcha $n > N$

larda $|\gamma_n| > A$ tengsizlik bajariladi. *A*-ixtiyoriy son bo‘lgani uchun $\{n\}$ ketma–ketlik cheksiz katta sonli ketma–ketlik bo‘ladi, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

Cheksiz katta sonli ketma – ketliklar uchun quyidagi xossalar o‘rinli:

1. Har qanday cheksiz katta sonli ketma – ketlik chegaralanmagandir;
2. $\left\{\frac{1}{\gamma_k}\right\}$ ketma – ketlik cheksiz kichik sonli ketma-ketlik bo‘lgandagina, $\{\gamma_n\}, (\gamma_n \neq 0)$ ketma–ketlik cheksiz katta sonli ketma–ketlik bo‘ladi.

4-ta’rif. $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik **fundamental** ketma-ketlik deyiladi, agar u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday natural N soni mavjud bo‘lsaki $n > N$ va $n + p > N$ $(p \geq 1)$ shart bajarilganda $|x_{n+p} - x_p| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa. Bu shartni **Koshi sharti** deyiladi.

Lemma 1. Agar sonli ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘lsa, u holda bu ketma –ketlik fundamental bo‘ladi.

Lemma 2. Agar sonli ketma-ketlik fundamental bo‘lsa, u holda u chegaralangan bo‘ladi.

3-TEOREMA (KOSHI KRITERIYASI). Sonli ketma ketlikning limiti chekli bo‘lishi uchun u Koshi shartini bajarishi zarur va yetarli.

4-TEOREMA(VEYRSHTRASS). Agar sonli ketma-ketlik monoton o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lib u yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo‘lsa, u holda bu sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Masalan, $\{x_n\}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ sonli ketma–ketlik monoton (o‘suvchi) va chegaralanganligi uchun yaqinlashuvchidir. Ketma – ketlik limiti irratsional e – soniga teng:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} = e \quad (e = 2,718\ldots).$$

e soni uzluksiz to‘lovli murakkab foiz, kapital qo‘yilmalarining samaradorligini baholash va hakozo masalalarida qo‘llaniladi.

3.1.2. n o‘lchovli fazoda nuqtalar ketma-ketligi haqida tushuncha.

5-ta’rif. Agar R^n fazoda har bir $k \in N$ songa aniq bir $M_k\left(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k\right)$ nuqta mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda R^n fazoda n $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligi berilgan deyiladi.

Demak, R^n fazoda nuqtalar ketma–ketligi quyidagi ko‘rinishda $M_k\left(x_1, x_2, ..., x_k\right)$, $M_1\left(x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1\right)$, ..., $M_k\left(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k\right)$, ... beriladi.

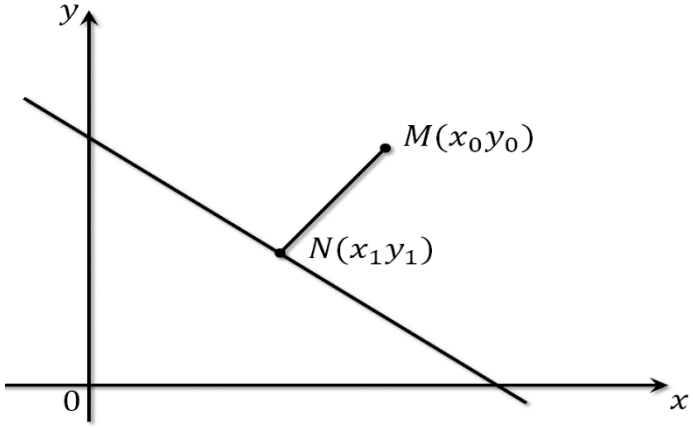
M_1 – birinchi hadi, M_2 – ikkinchi hadi, M_k – k – hadi deyiladi.

Masalan,

R^2 fazoda $M_k\left(\frac{k^2}{4k^2+1}; \frac{k-1}{3k+2}\right)$: $M_1\left(\frac{1}{5}; 0\right)$, $M_2\left(\frac{4}{17}; \frac{1}{8}\right)$

R^3 fazoda $M_k\left(\frac{1}{k}; \frac{k^2}{3k^2+1}; \frac{k^3}{(k+5)^3}\right)$: $M_1\left(1; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{4}{13}; \frac{8}{27}\right)$

R^4 fazoda $M_k\left(\frac{4}{k}; \frac{3k}{5k+1}; ...; \frac{4k-1}{5k+10}\right)$: $M_1\left(4; \frac{3}{6}; ...; \frac{1}{5}\right)$; $M_2\left(2; \frac{6}{11}; ...; \frac{7}{20}\right)$



2-rasm

6-ta’rif. Agar fazoda nuqtalar ketma-ketligi – berilgan va bo‘lib, munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda nuqtalar ketma-ketligiga ketma-ketlikning qism ketma-ketligi deyiladi.

Shunday qilib, qism nuqtalar ketma-ketligi berilgan nuqtalar ketma-ketligidan tuziladi va unda hadlarning oldinma-ketin kelish tartibi saqlanadi.

Masalan, $10,20,30,...,10m,...$ sonli ketma-ketlik $5,10,15,...,5k,...$ sonli ketma-ketlikning qism osti ketma-ketligidir.

Ma`lumki, M_n va M_0 nuqtalar orasidagi masofa

$$\rho(M_k;M_0)=\sqrt{\sum_{m=1}^{n}\left(x_m^k-x_m^0\right)^2}$$

formula bilan aniqlanadi.

7-ta'rif. $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligi chegaralangan deyiladi, agarda biror $C\in R$

son va biror $M_0\in R_n$ nuqta topilib, ular ixtiyoriy $K\in N$ natural son uchun $\rho(M_k;M_0)<C$ tenglik bajarilsa.

Masalan, R^3 fazoda $M_k\left(\frac{k}{k+1};\frac{4}{k};\frac{k^2}{k^2+5}\right)$ ketma-ketlik chegaralangan.

Haqaqatan ham $M_0(0;0;0)$ nuqtani olsak, $\rho(M_k;M_0)=\sqrt{\frac{k^2}{(k+1)^2};\frac{16}{k^2};\frac{k^4}{\left(k^2+5\right)^2}}\le 3\sqrt{2}$ tengsizlik barcha natural k sonlar uchun o'rinli bo'ladi.

R^n fazoda $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

8-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $K(\varepsilon)\in N$ son mavjud bo'lib, biror M_0 nuqta va barcha $m>K(\varepsilon)$ tartib raqamli hadlar uchun $M_k\in U_\varepsilon(M_0)$ bo'lsa, u holda M_0 nuqta $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligining limiti deyiladi va $\lim\limits_{k\to\infty}M_k\left(x_1^k,x_2^k,...,x_n^k\right)=M_0\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, R^3 fazoda $M^{(m)}\left(\frac{4}{k},\frac{3k}{5k+1},\frac{4k-1}{5k+10}\right)$ nuqtalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. U holda

$$\lim_{k\to\infty}M_k\left(\frac{4}{k},\frac{3k}{5k+1},\frac{4k-1}{5k+10}\right)=M_0\left(0,\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right).$$

9-ta'rif. Agar $M_k^m\in R^n, k\in N$ bo'lib ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $k,\ p\in N$ son topilsaki, $k>K, p\in K$ bo'lganda $\rho\left(M_p^m,M_k^m\right)<\varepsilon$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $M_k^m \in R^n$ nuqtalar ketma-ketligigi fundamental ketma-ketlik deb ataladi.

10-ta’rif. Agar n o‘lchovli nuqtalar ketma–ketligi chekli limitga ega bo‘lsa? bu ketma–ketlik **yaqinlashuvchi ketma–ketlik**, aks holda **uzoqlashuvchi ketma–ketlik** deyiladi.

Har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik fundamental ketma-ketlikdir va aksincha.

5-teorema. Agar R^n fazoda nuqtalar ketma–ketligi yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning limiti yagonadir.

Isboti: Faraz qilaylik $\{M_k\}$ nuqtalar ketma – ketligi 2 ta $M_0 \neq N$ nuqtalarga yaqinlashsin va $\rho(M_0, N) = d$ bo‘lsin. Agar ε ni $\frac{d}{2}$ dan kichik qilib tanlasak ketma – ketlikning shunday K tartib raqamini ko‘rsatish mumkin bo‘ladiki, barcha $k > K$ tartib raqamli hadlar $U_\varepsilon(M_0)$ ga tegishli bo‘ladi. Demak, $U_\varepsilon(N)$ ga tegishlilari chekli sonda bo‘lib, N nuqta esa limit nuqtasi bo‘la olmaydi, ya’ni ketma – ketlikning limiti yagona bo‘ladi.

5-teorema. Agar R^n fazoda nuqtalar ketma–ketligi yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning limiti yagonadir.

Isboti: Faraz qilaylik $\{M_k\}$ nuqtalar ketma – ketligi 2 ta $M_0 \neq N$ nuqtalarga yaqinlashsin va $\rho(M_0, N) = d$ bo‘lsin. Agar ε ni $\frac{d}{2}$ dan kichik qilib tanlasak ketma – ketlikning shunday K tartib raqamini ko‘rsatish mumkin bo‘ladiki, barcha $k > K$ tartib raqamli hadlar $U_\varepsilon(M_0)$ ga tegishli bo‘ladi. Demak, $U_\varepsilon(N)$ ga tegishlilari chekli sonda bo‘lib, N nuqta esa limit nuqtasi bo‘la olmaydi, ya’ni ketma – ketlikning limiti yagona bo‘ladi.

6-teorema. Agar R^n fazoda nuqtalar ketma – ketligi chekli limitga ega bo‘lsa u chegaralangan bo‘ladi.

Yaqinlashuvchi nuqtalar ketma–ketligi uchun quyidagi xossalar o‘rinli:

1.Har qanday yaqinlashuvchi ketma – ketlik chegaralangandir;

2.Har bir chegaralangan ketma – ketlikdan yaqinlashuvchi qism ketma – ketlik ajratish mumkin;

3. n o‘lchovli nuqtalar ketma–ketligi M_0 nuqta yaqinlashsa, u holda uning har bir qism ketma–ketligi ham M_0 nuqtaga yaqinlashadi;

4. M_0 nuqta biror–bir V nuqtalar to‘plamining quyuqlanish nuqtasi bo‘lsa, V to‘plam nuqtalaridan M_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ketma–ketlik ajratib olish mumkin;

5. Yopiq V to‘plamga tegishli nuqtalar ketma–ketligi M_0 nuqtaga yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $M_0 \in V$

Nuqtalar ketma – ketligining limitini aniqlashda sonli ketma – ketlik limiti muhim ahamiyatga ega.

Masalan, nuqtalar ketma – ketligining limiti uchun quyidagi tasdiqlar o‘rinli:

1. M_k va M_0 nuqtalar orasidagi $\{\rho(M_k, M_0)\}$ masofalardan tashkil topgan sonli ketma-ketlikning limiti nolga teng bo‘lgandagina, M_0 nuqta $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligining limiti bo‘ladi;

2. R^n fazoda $\{M_k(x_1, x, ..., x_n)\}$ nuqtalar ketma-ketligi $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ nuqtaga yaqinlashishi uchun $\lim\limits_{k\to\infty} x_m^k = x_m^0, \quad m = \overline{1,n}$ tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

Masalan, $M_0(0, 4)$ nuqta $\left\{M_k\left(\frac{1}{k}, \frac{4k}{k+1}\right)\right\}$ nuqtalar ketma-ketligining limitidir, chunki $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0, \quad \lim\limits_{k\to\infty}\frac{4k}{k+1} = 4$ munosabatlar o‘rinli.

3-misol. $M_k\left(\left(1+\frac{3}{2k}\right)^k; \frac{k^2+k}{3k^2-1}\right)$ $\lim\limits_{k\to\infty} M_k = ?$

Yechish. $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{3}{2k}\right)^k = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{3}{2k}\right)^{\frac{2k}{3}\cdot\frac{3}{2}} = \lim\limits_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{2k}\right)^{\frac{2k}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{2}}$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k^2+k}{3k^2-1}=\frac{\frac{k^2+k}{k^2}}{\frac{3k^2-1}{k^2}}=\frac{1+\frac{1}{k}}{3-\frac{1}{k^2}}=\frac{1}{3}$$

Demak, $\lim_{M\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2k}\right)^k;\frac{k^2+k}{3k^2-1}\right)=\left(e^{\frac{3}{2}};\frac{1}{3}\right)$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Sonli ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
2. Sonli ketma – ketlikning umumiy hadi nima?
3. Sonlar ketma – ketligi qanday belgilanadi?
4. Sonli ketma – ketlik qachon berilgan deyiladi?
5. Arifmetik va geometrik progressiyalar sonli ketma – ketliklarga misollar bo‘ladimi?
6. Sonli ketma – ketlik nechta elementga ega?
7. Sonli ketma – ketlikning geometrik tasviri qanday bo‘ladi?
8. Sonli ketma – ketliklar ustida qanday amallarni bajarish mumkin?
9. Qanday sonlar ketma – ketligi chegaralangan deyiladi va misollar keltiring?
10. Quyidan chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
11. Quyidan chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
12. Yuqoridan chegaralangan sonlar ketma-ketligiga misollar keltiring?
13. Chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
14. Chegaralanmagan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
15. Cheksiz ketma – ketlik deb nimaga aytiladi?
16. Cheksiz kichik ketma – ketlik qanday ta’riflanadi?
17. Cheksiz katta va kichik ketma – ketliklarga misollar keltiring?
18. Cheksiz katta va kichik ketma – ketliklar orasida qanday bog’lanish bor?

19. Cheksiz kichik ketma – ketliklar qanday xossalarga ega?

20. Ketma-ketlikning limiti deb nimaga aytiladi?

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Sonli ketma-ketlikni chegaralanganligini isbotlang:

$x_n = \dfrac{(-1)^n\ n+1}{\sqrt{n^2+2}}$

$x_n = Sin\ n$

$x_n = (1-(-1)^n)$

2. Sonli ketma-ketlik monotonligini isbotlang

$x_n = 3^n - 2^n$

$x_n = \sqrt{n^2-1}$

$x_n = \sum_{k=1}^{n} k$

3. Ketma-ketlik limiti ta’rifidan foydalanib, quyidagilarni isbotlang:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-1}{2n+1} = 2$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{5n-1} = \dfrac{3}{5}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{2-3n} = -\dfrac{2}{3}$ qaysi n dan boshlab, $\left|\dfrac{2n-1}{2-3n} - \left(-\dfrac{2}{3}\right)\right| < 0.0001$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi?

4. Umumiy hadi orqali berilgan ketma-ketlikning birinchi beshta hadini yozing:

$x_n = \dfrac{1}{2n+1}$

$x_n = \dfrac{n+2}{n^3+1}$

$x_n = \dfrac{n}{2n+1}$

$x_n = (-1)^n\ \dfrac{n+1}{n^2}$

5. Ketma-ketlikning berilgan hadlari orqali umumiy hadining formulasini yozing:

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{24}; \ldots$

$1;\ 2\frac{1}{4};\ 2\frac{7}{9};\ 3\frac{1}{16};\ 3\frac{6}{25}; \ldots$

2; 10; 26; 82; 242; 730; …

6. Quyidagi limitlarni toping:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+2}{4n^3-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3}{n^3+n-1}$$

3..2-§. Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar va ularning iqtisodiy jarayonlardagi o‘rni. Kobb-Duglas funksiyasi

Tayanch iboralar: Funksiya aniqlanish sohasi va qiymatlar to‘plami, juft (toq) funksiya, davriy funksiya, funksiya davri.

3.2.1.Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiya haqida tushuncha.

Funksiya tushunchasini kiritishdan oldin o‘zgarmas va o‘zgaruvchi tushunchalarini kiritib olamiz.

1-ta’rif. Agar biror-bir kattalik doimo faqat bitta son qiymatini saqlab qolsa, u holda bu kattalikka o‘zgarmas kattalik deyiladi.

O‘zgarmas kattaliklar $C = const$ ko‘rinishda yozilib, ko‘p hollarda $a, b, c, m, n, \ldots$ harflari bilan belgilanadi

Masalan, $\pi = \frac{aylana\ uzunligi}{aylana\ radiusi}$ kattalik o‘zgarmas kattalikdir.

2-ta’rif. Agar biror-bir kattalik turli sonli qiymatlarni qabul qilsa, u holda bu kattalikka o‘zgaruvchi deyiladi.

O‘zgaruvchilar $x, y, z, \ldots$ harflari bilan belgilanadi.

3-ta’rif. Agar X to‘plamning har bir $x \in X$ elementiga Y to‘plamning bitta va faqat bitta $y \in Y$ elementi qandaydir f qonuniyat bilan mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda bu to‘plamlar orasida funksional bog‘lanish mavjud deyiladi va $f: X \to Y$ ko‘rinishda yoziladi.

Shuningdek, f funksiya X to‘plamni Y to‘plamda **akslantiradi** deb ham ataladi.

Agar $X \subset R^n$, $Y \subset R^1$ bo‘lsa, u holda f qonuniyat funksiya deb ataladi. Biz haqiqiy sonlar to‘plamida ish ko‘rganimiz sababli bundan keyin f qonuniyat o‘rniga funksiya atamasini ishlatamiz.

$x \in X$ to‘plam f funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi va $D(f)$ kabi belgilanadi. Barcha $y \in Y$ to‘plam f funksiyaning qiymatlar to‘plami deyiladi va $E(f)$ kabi belgilanadi.

Shuni ham alohida ta’kidlash kerakki, $y = f(x)$ funksiya:

R^1 fazoda $y = f(x)$ ko‘rinishda;

R^2 fazoda $y = f(x_1, x_2)$ yoki $y = f(\vec{x}(x_1, x_2))$ ko‘rinishda;

R^3 fazoda $y = f(x_1, x_2, x_3)$ yoki $y = f(\vec{x}(x_1, x_2, x_3))$ va R^n fazoda $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ yoki $y = f(M)$ $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ ko‘rinishda yoziladi.

$y = f(M)$ yozuv y ning M nuqtadagi qiymatini bildiradi.

$y = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(y = f(x))$ funksiyada $x_1, x_2, ..., x_n$ (X) o‘zgaruvchilarni erkli o‘zgaruvchilar (o‘zgaruvchi) yoki argumentlar (argument); y ni esa erksiz o‘zgaruvchi yoki funksiya deyiladi.

3.2.2.Funksiya aniqlanish sohasi va qiymatlar to‘plami.

Agar funksiyaning aniqlanish sohasi oldindan $D(f)$ berilmagan bo‘lsa, u holda bu funksiyaning aniqlanish sohasi shu funksiyaning ma’noga ega bo‘lgan nuqtalar (sonlar) to‘plamidan iborat bo‘ladi.

Masalan

1) $y = f(x) = \ln x$ funksiya $V = \{x \in R^1 : x > 0\}$ to‘plamda berilgan bir o‘zgaruvchili funksiya;

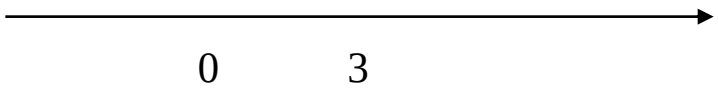
2) $y = f(M) = f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$ funksiya $V = \{M(x_1, x_2) \in R^2 \setminus O(0, 0)\}$ to‘plamda berilgan ikki o‘zgaruvchili funksiya;

3) $y = f(M) = f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$ funksiya $V = \{M(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \setminus (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 9)\}$ to‘plamda berilgan uch o‘zgaruvchili funksiya.

1-misol. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasi va qiymatlar to‘plamini aniqlang:

1) $y = \log_2(3 - x)$; 2) $y = \sqrt{4x_1 - x_2^2}$.

Yechish. 1) Bir o‘zgaruvchili $y = \log_2(3 - x)$ funksiya aniqlanish sohasi $D(f)$: $3 - x > 0$ tengsizlik yechimidan iborat. $D(y) = (-\infty : 3) \in R^1$. Son o‘qida $(-\infty; 3)$ ochiq nurdan iborat.



Funksiya qiymatlari to‘plami **e**sa sonlar o‘qidan iborat, ya’ni $E(f) = R^1$.

2) Funksiya ikki o‘zgaruvchili bo‘lib, $y = \sqrt{4x_1 - x_2^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = \left\{ M(x_1, x_2) \in R^2;\ x_1 \ge \frac{x_2^2}{4} \right\}$. Funksiyaning qiymatlari to‘plami $E(f) = [0; \infty)$.

3.2.3. Bir o‘zgaruvchili funksiya umumiy xossalari va grafigi.

Biz asosan, bir o‘zgaruvchili funksiya grafigi va xossalari bilan tanishib chiqamiz. Asosiy tushunchalarni esa ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar uchun beramiz.

$f(x)$ funksiyaning $x = a$ dagi xususiy qiymati $f(a)$ kabi yoziladi. Masalan, $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$ bo‘lsa $f(0) = -7,\ f(1) = 1$ bo‘ladi.

$f(x)$ funksiyaning grafigi deb, mumkin bo‘lgan $(x,\ f(x)),\ x \in D(f) \subset R^1$ juftliklarning xOy tekislikdagi geometrik o‘rniga aytiladi.

Masalan, $y = \sqrt{1 - x^2}$ funksiyaning grafigi markazi $O(0,0)$ va radiusi $R = 1$ bo‘lgan yuqori yarim aylanadan iborat.

$f(x)$ funksiya berilgan deyiladi, agar ma'lum x uchun y ning qiymatini topish mumkin bo'lgan qoida mavjud bo'lsa. Odatda, funksiya uchta usulda beriladi: **analitik** (takomillashgan usul, chunki matematik analiz metodlarini qo'llab $y=f(x)$ funksiyani to'la tekshirish mumkin)**, jadval va grafik**.

R^1 fazoda V qism to'plam va unda aniqlangan $y=f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

4-ta'rif. Agar har qanday $x\in V$ uchun $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$ tenglik o'rinli bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya V to'plamda **juft (toq) funksiya** deyiladi.

Juft funksiya grafigi Oy o'qiga nisbatan simmetrik, toq funksiyaning grafigi esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Masalan, $y=x^{2n}$, $n\in N$, $y=\sqrt{1+x^2}$, $y=\ln|x|$ - juft funksiyalar; $y=x^{2n-1}$, $n\in N$, $y=\sin x$ - toq funksiyalar; $y=x-2$, $y=\sqrt{x}$ funksiyalar juft ham emas va toq ham emas.

5-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya uchun shunday bir musbat T son mavjud bo'lsaki, funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli har qanday x va $x+T$ nuqtalar uchun $f(x+T)=f(x)$ tenglik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya **davriy funksiya** deyiladi.

Bu yerda T soni esa **funksiya davri** deyiladi.

Amalda funksiya davrlari ichidan eng kichigi T ni topish masalasi qo'yiladi, qolgan barcha davrlar uning butun karralisidan iborat bo'ladi.

Masalan, $y=5\sin(0,25\pi x)$ funksiyaning eng kichik musbat davri

$$T=\frac{2\pi}{0,25\pi}=8.$$

6-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya $V\in R^1$ to'plamda aniqlangan bo'lib, uning biror–bir V_1 qism osti to'plamidan ixtiyoriy ravishda tanlanadigan x_1 va x_2 nuqtalar uchun $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)\le f(x_2))$ munosabat bajarilsa, u holda $y=f(x)$ funksiya V_1 **to'plamda o'suvchi (kamaymaydigan)** funksiya deyiladi.

7-ta’rif. Agarda $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli V_1 to‘plamdan ixtiyoriy ravishda tanlanadigan ikki x_1 va x_2 nuqtalar uchun $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\,(f_1(x_1)\geq f(x_2))$ tengsizlik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya V_1 **to‘plamda kamayuvchi (o‘smaydigan)** funksiya deyiladi.

O‘suvchi va kamayuvchi funksiyalar **qat’iy monoton funksiyalar** deyiladi.

Masalan, $y=3x-2$ funksiya o‘zining R^1 aniqlanish sohasida qat’iy monoton o‘suvchi funksiyaga misol bo‘lsa, $y=-3x-2$ funksiya esa kamayuvchi funksiyaga misol bo‘la oladi.

3.2.4. Teskari funksiya.

8-ta’rif. $y=f(x)$ funksiya $D(f)\subseteq R^1$ sohada aniqlangan bo‘lib, $E(f)$ soha uning qiymatlar to‘plami bo‘lsin. Agar bu funksiya uchun $\forall\, x_1, x_2 \in D(f),\ x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ munosabat bajarilsa, u holda, har bir $y\in E(f)$ songa $x=g(y)$ tenglikni qanoatlantiruvchi aniq bir $x\in D(f)$ sonni mos qo‘yish mumkin, boshqacha aytganda, $E(f)$ to‘plamda berilgan $y=f(x)$ **funksiyaga teskari** $x=g(y)$ **funksiyani** aniqlash mumkin.

Agar $y=f(x)$ funksiyaga teskari $x=g(y)$ funksiya mavjud bo‘lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyaning qiymatlari to‘plami $E(f)$ unga teskari $x=g(y)$ funksiya uchun aniqlanish sohasi, $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$ esa $x=g(y)$ teskari funksiya uchun qiymatlar to‘plami bo‘ladi.

$[a,b]$ kesmada aniqlangan, qat’iy monoton va uzluksiz $y=f(x)$ funksiya, $[f(a),\ f(b)]$ kesmada aniqlangan, qat’iy monoton va uzluksiz $x=g(y)$ teskari funksiyaga ega.

Masalan, $y=\sin x$ funksiya $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ kesmada aniqlangan, qat'iy monoton o‘suvchi va uzluksiz bo‘lganligi sababli, u $[-1,1]$ kesmada aniqlangan, qat'iy o‘suvchi va uzluksiz $x=\arcsin y$ teskari funksiyaga ega.

O‘zaro teskari $f(x)$ va $g(x)$ funksiya grafiklari birinchi va uchinchi chorak simmetriya o‘qi $y=x$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘ladi.

3.2.5. Chegaralangan funksiya.

10-ta'rif. Agar $V_1 \subset D(f)$ nuqtalar to‘plamida berilgan $y=f(x)$ funksiyaning V_1 to‘plamda erishadigan qiymatlar to‘plami yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo‘lsa, u holda $y=f(x)$ **funksiya** V_1 **to‘plamda yuqoridan (quyidan) chegaralangan** deyiladi.

Demak, $y=f(x)$ funksiya yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo‘lsa, u holda shunday K son mavjud bo‘ladiki, barcha $M \in V_1$ nuqtalar uchun $f(M) \le K$ $\left(f(M) \ge K\right)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

11-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya $V_1 \in D(f)$ nuqtalar to‘plamida ham quyidan, va ham yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya V_1 **to‘plamda chegaralangan funksiya** deb ataladi.

Agar $V_1 = D(f)$ bo‘lsa, $y=f(x)$ funksiya aniqlanish sohasida chegaralangan deyiladi va uning qiymatlari to‘plami chegaralangan sonlar to‘plamidan iborat bo‘ladi.

2-misol. 1) Bir o‘zgaruvchili $y=x^2$ funksiya R^1 aniqlanish sohasida quyidan chegaralangan funksiyadir, chunki $E(f)=[0;\infty)$;

2) $y=\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ funksiya o‘z aniqlanish sohasi $D(f)=\left\{M(x_1,x_2)\in R_2 \setminus x_1^2+x_2^2 \le 1\right\}$ to‘plamda chegaralangandir, chunki $E(f)=[0;1]$.

3.2.6. Qavariq va botiq funksiyalar haqida tushuncha.

12-ta'rif. $y=f(x)$ funksiya qavariq $V\subset R^n$ to'plamda aniqlangan bo'lsin. Agar V qavariq to'plamga tegishli har qanday $M_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ va $M_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ nuqtalar va ixtiyoriy $0\le\alpha\le 1$ son uchun

$f(P)\le\alpha f(M_1)+(1-\alpha)f(M_2)$ $\left(f(P)\ge\alpha f(M_1)+(1-\alpha)f(M_2)\right)$

$f(P)\ge\alpha f(M_1)+(1-\alpha)f(M_2)$ $\left(f(P)\le\alpha f(M_1)+(1-\alpha)f(M_2)\right)$ tengsizlikla r o'rinli bo'lsa, u holda, $y=f(x)$ funksiya V **to'plamda qavariq (botiq) funksiya** deyiladi.

Bu yerda $P(\alpha x_1+(1-\alpha)y_1,\ \alpha x_2+(1-\alpha)y_2,\ ...,\ \alpha x_n+(1-\alpha)y_n)$.

Masalan, $y=x^2$ funksiya R^1 fazoda botiq funksiyaga misol bo'lsa, $y=-x^2$ funksiya esa R^1 fazodada qavariq funksiyaga misol bo'ladi.

n o'zgaruvchili chiziqli $y=a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$ funksiya R^n fazoda bir vaqtda ham qavariq va ham botiq funksiyadir.

Qavariq funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

1. $-f(M)$ funksiya V to'plamda botiq bo'lgandagina, $f(M)$ funksiya V to'plamda qavariq funksiya bo'ladi.
2. $f_1(M)$ va $f_2(M)$ funksiyalar V to'plamda qavariq bo'lsa, ularning ixtiyoriy nomanfiy k_1 va k_2 koeffisientli chiziqli $k_1f_1(M)+k_2f_2(M)$ kombinasiyasi ham V to'plamda qavariq bo'ladi.
3. $f(M)$ funksiya V to'plamda qavariq bo'lib, $P=\{M\in V:\ f(M)\le b\}$ to'plam bo'sh bo'lmasa, u holda P to'plamning o'zi ham qavariq to'plamdir. Bu yerda b ixtiyoriy son

Botiq funksiyalar ham yuqoridagi xossalarga o'xshash xossalarga ega.

$V\subset R^n$ to'plamda aniqlangan $y=f(u_1, u_2, ..., u_n)$ berilgan bo'lib, har bir $M(x_1\ x_2, ..., x_n)\in D\subset R^n$ nuqtaga $N(u_1\ u_2, ..., u_n)\in D\subset R^n$ nuqtani mos qo'yish mumkin bo'lsin, ya'ni

$$u_1 = \varphi_1(x_1\ x_2, ..., x_n),\ u_2 = \varphi_2(x_1\ x_2, ..., x_n),\ ..., u_n = \varphi_n(x_1\ x_2, ..., x_n).$$

U holda $V \subset R^n$ to‘plamda

$$y = f(\varphi_1(M), \varphi_2(M), ..., \varphi_n(M))$$

funksiya aniqlangan deyiladi va $x_1\ x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilarga nisbatan, ya’ni $D \subset R^n$ to‘plamda, murakkab funksiya deyiladi.

Masalan, $y = \sqrt{16-u^2}, V = \{-4 \le u \le 4\};\ u = 2\cos 4x, x \in R^1$ bo‘lsin. U holda R^1 fazoda $y = \sqrt{16 - 4\cos^2 4x}$ murakkab funksiyani aniqlash mumkin.

$V \subseteq R^n$ to‘plamda aniqlangan $F(u_1, u_2, ..., u_n) = 0$ tenglamaga oshkormas funksiya deyiladi. Masalan, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ funksiyalar oshkormas funksiyalardir.

E to‘plamda $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ funksiyalar berilgan bo‘lib, $x = \varphi(t)$ funksiyaga teskari $t = \varphi^{-1}(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. U holda E to‘plamda $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$ murakkab funksiya berilgan deyiladi.

E to‘plamda berilgan $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ funksiyalar $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$ funksiyaning parametrik ko‘rinishi deyiladi.

3-misol. 1) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ funksiyalar $y = \sin(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ funksiyaning parametrik ko‘rinishi bo‘ladi.

3) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ funksiyalar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips tenglamasining parametrik ko‘rinishi bo‘ladi.

3.2.7. Foydalilik funksiyasi. Kobb – Duglas funksiyasi.

Iqtisodiy jarayonlarni tahlil qilishda foydalilik funksiya tushunchasidan keng foydalaniladi. Bu funksiya iste'molchining biror bir tovarlar vektorini boshqa tovarlar vektoridan afzal ko'rishini ifodalaydi.

Deylik, iste'molchi n turdagi tovarlardan foydalansin. Bu tovarlar miqdorini bildiruvchi tovarlar vektorini $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ satr vektor

sifatida ifodalaymiz. X va Y tovarlar orasida $X \succ Y$ afzallik munosabatini kiritamiz. Bu munosabat iste'molchining X tovarlar vektorini Y tovarlar vektoridan afzal ko'rishini ifodalaydi. Misol uchun $X > Y$ bo'lsa, u holda $X \succ Y$. Bir xil afzallikka ega bo'lgan X va Y tovarlar vektorlarini farqlanmaydigan tovarlar vektorlari deb ataymiz va $X \sim Y$ kabi belgilaymiz.

Afzallik munosabati odatda foydalilik (utility) funksiyasi deb ataluvchi $U(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya yordamida aniqlanadi.

Ta'rif. Ixtiyoriy X, Y tovarlar vektorlari uchun $X \succ Y \Leftrightarrow U(X) > U(Y)$ va $X \sim Y \Leftrightarrow U(X) = U(Y)$ shartlarni qanoatlantiruvchi $U(X)$ funksiya foydalilik funksiyasi deb ataymiz.

Odatda foydalilik funksiyasining qiymati emas, turli tovarlar vektoriga mos qiymatlari orasidagi "kata", "kichik" yoki "teng" kabi munosabatlar muhim hisoblanadi. Foydalilik funksiyasi har bir alohida o'zgaruvchisi bo'yicha (boshqa o'zgaruvchilar o'zgarmas bo'lganda) o'suvchi funksiya bo'ladi.

Muhim bo'lgan foydalilik funksiyalaridan biri CES-funksiya deb ataladi. Bu funksiya nomidagi CES (constant elasticity of substituion) qisqartmasi alternativ (bir-birining o'rnini bosuvchi) tovarlarning o'zgarmas elastiklikka egaligini bildiradi. Ikki o'zgaruvchili holda bu funksiya quyidagicha

$$U(x_1, x_2) = \left(\alpha x_1^{1/\rho} + \beta x_2^{1/\rho}\right)^{\rho}.$$

Bu funksiyaning xususiy holatlarini qaraymiz.

1) $\rho = 1$ da chiziqli foydalilik funksiyasi hosil bo'ladi

$$u(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2.$$

2) $\rho \to -\infty$ da Leontev funksiyasi deb ataluvchi foydalilik funksiyasi hosil bo'ladi

$$u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}.$$

3) Agar $\alpha + \beta = 1$ bo'lsa, $\rho \to 0$ da Kobb-Duglas funksiyasi hosil bo'ladi

$$u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}.$$

Bu funksiyalarni n ta o'zgaruvchi holatiga ham umumlashtirishimiz mumkin.

3-misol. Foydalilik funksiyasi $U(x_1, x_2, x_3) = 0,2\lg x_1 + 0,3\lg x_2 + 0,5\lg x_3$ formula bilan aniqlangan bo'lsin. $X_1 = (10,100,100)$ va $X_2 = (100,10,100)$ tovarlar vektorlarini afzallik munosabati yordamida tekshiring.

Yechish. Foydalilik funksiyasining qiymatlarini topamiz.

$$U(X_1) = U(10,100,100) = 0,2 + 0,6 + 1 = 1,8,$$

$$U(X_2) = U(100,10,100) = 0,4 + 0,3 + 1 = 1,7.$$

Bundan, $U(X_1) > U(X_2)$ bo'lganligi sababli, $X_1 \succ X_2$.

Foydalilik funksiyasi umuman olganda yagona aniqlanmaydi.

Tasdiq. $f(x)$ bir o'zgaruvchili o'suvchi funksiya bo'lsin. U holda ixtiyoriy $U(X)$ foydalilik funksiyasi uchun $f(U(X))$ ham foydalilik funksiyasi bo'ladi.

Isboti. $f(x)$ o'suvchi funksiya bo'lgani sababli

$$X \prec Y \Leftrightarrow U(X) < U(Y) \Leftrightarrow f(U(X)) < f(U(X)).$$

Demak, ta'rifga asosan, $f(U(X))$ foydalilik funksiyasi bo'ladi.

Yuqoridagi misolda keltirilgan $U(x_1, x_2, x_3) = 0,2\lg x_1 + 0,3\lg x_2 + 0,5\lg x_3$ foydalilik funksiya yordamida $10^{U(x_1,x_2,x_3)} = x_1^{0,2} x_2^{0,3} x_3^{0,5}$ Kobb-Duglas foydalilik funksiyasini hosil qilish mumkin.

Kobb-Duglas funksiyasidan ishlab chiqarish funksiyasi sifatida ham foydalaniladi.

$$Q(L,K) = A \cdot L^{\alpha} K^{\beta}$$

ishlab chiqarish funksiyasida Q - ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori, L - mehnat resurslariga sarf xarajatni, K - ishlab chiqarishga sarflangan kapitalni, A - texnologik koeffisient, α va β elastiklik koeffisienlarini ifodalaydi. Misol uchun, $Q = L^{0,73} K^{0,27}$ ifodada umumiy ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorida mehnat resurslari ulushi 73%, kapital mablag'lar ulushi 27% ni tashkil qilishini bildiradi.

Foydalilik funksiyasi yordamida bitta sodda iqtisodiy modelni qaraymiz. Faraz qilaylik iste'molchining jami mablag'i (byudjeti) S ga teng bo'lsin. U bu mablag'ni bir birligi narxi p_1, p_2, ..., p_n bo'lgan n xil tovar uchun sarflashi mumkin. Bu jarayondagi $U(x_1, x_2, ..., x_n)$ foydalilik funksiyasi berilgan. Eng afzal tovarlar vektorini topish masalasini qaraymiz.

Tovarlar vektori $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ bo'lsin. Narxlar vektorini $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ kabi aniqlaymiz. Bu masalada bizda quyidagi cheklovlar mavjud.

1) Har bir turdagi sotib olingan tovarlar miqdori nomanfiy, ya'ni $X \geq 0.$

2) Iste'molchi byudjeti cheklangan $(P, X) \equiv p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \leq S$.

Oldingi darslardan ma'lumki, bu cheklovlar byudjet to'plami $B(P,S)$ ni aniqlaydi. Demak biz $B(P,S)$ byudjet to'plamida $U(X)$ foydalilik funksiyasini maksimallashtirishimiz talab qilinadi.

Ma'lumki, ikki tovar qaralgan holatda $B(P,S)$ byudjet to'plami 1-chorakda joylashgan katetlari koordinata o'qlarida yotuvchi to'g'ri burchakli uchburchakdan, uch tovar holatida uchburchakli piramidadan iborat bo'ladi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday miqdorlar o‘zgaruvchi deb ataladi?
2. Qanday holda funksiya aniqlangan deyiladi?
3. Funksional bog’lanish qanday belgilanadi?
4. Funksiyaning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning qiymatlar to‘plami nima?
6. Qanday moslik funksiyani ifodalashi mumkin?
7. Funksiya qanday o‘zgaruvchi?
8. Argument qanday o‘zgaruvchi?
9. Funksiya qanday usullarda berilishi mumkin?
10. Oshkor va oshkormas funksiyalar qanday?
11. Funksiyaning funksiyasi yoki murakkab funksiya deb nimaga aytiladi?

12. Teskari funksiya qanday funksiya?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1. $y = \lg\left(x^2 - 4x + 3\right)$
2. $y = \arcsin\left(3x - 4\right)$

Quyidagi funksiyalarning qiymatlar to‘plamini toping:

3. $y = x + \frac{1}{x}$
4. $y = \sqrt{-x^2 - x + 2}$

Quyidagi funksiyalarning har biri ko‘rsatilgan oraliqlarda monoton ekanligini ko‘rsating:

5. $f\left(x\right) = 2x - 1; \quad x \in \left(-\infty; +\infty\right)$

6. $f\left(x\right) = 2 - 3x; \quad x \in \left(-\infty; +\infty\right)$

Quyidagi funksiyalarning juft yoki toqligini tekshiring:

7. $y = \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x}}}$
8. $y = x^2 \cos x$

Funksiyalarning asosiy davrini toping:

9. $y = 2$

10. $y = Sin\frac{3}{2}x + 1$

Quyidagi funksiyalarning teskari funksiyalarini quring:

11. $y = 2 - 5x$
12. $y = \dfrac{2}{x+1} - 3$

Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping va koordinatalar tekisligida tasvirlang:

13. $f(x,y) = \sqrt{x+y}$
14. $f(x,y) = \sqrt{-x} + \sqrt{y}$

Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1. $y = \dfrac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$

2. $y = \sqrt{Sin(x)} - \sqrt{9-x^2}$

3. $y = \arcsin\dfrac{1+x^2}{2x}$

4. $y = x^{\frac{1}{\lg x}}$

5. $y = tg\sqrt{16-x^2}$

6. $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-2|x-1|}}$

7. $f(x) = \ln Cos(x)$.

8. $y = \sqrt{x^2+x-2}$

9. $y = \log_2(-x)$

10. $y = \arccos\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$

11. $y = \sqrt{3^x - 5^x}$

12. $y = \dfrac{1}{xe^x}$

$y = Sin\sqrt{x-3}$

3.3-§. Funksiya limiti va uzluksizligi

Tayanch iboralar. Funksiya limiti va uning xossalari, ketma-ketlik, cheksiz katta miqdor, chap va o‘ng limitlar, cheksiz kichik funksiya, ko‘paytmaning va bo‘linmaning limiti, birinchi ajoyib limit, aniqmasliklarni ochish, argument orttirmasi, funksiya orttirmasi, funksiya uzluksizligi, funksiyaning uzilishi, oraliqda uzluksiz, ikkita uzluksiz funksiya yig’indisi , ko‘paytmasi va nisbati uzluksizligi, kesmada uzluksiz funksiyalar xossalari, funksiyaning uzilishi, 1-tur uzilish, 2-tur uzilish, bartaraf etiladigan(yo‘qotiladigan) uzilish, elementar funksiyalarning uzuksizligi va uzilishi.

3.3.1. Bir o‘zgaruvchili funksiya limiti. Ajoyib limitlar.

Matematik analizda funksiyani biror nuqta atrofida o‘zgarishini o‘rganishda funksiyani shu nuqtadagi limiti katta ahamiyatga ega. Bizga ma’lumki R^1 fazoda x_0 nuqtaning δ atrofi bu markazi x_0 nuqtada uzunligi 2δ ga teng bo‘lgan interval ya’ni $U_\delta(x_0)=\{x:|x-x_0|<\delta\ y=\{x:x_0-\delta<x<x_0+\delta\}\}$.

$y=f(x)$ funksiya biror $V\in R^1$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib x_0 nuqta V to‘plamning quyuqlanish nuqtasi bo‘lsin. x_0 nuqta V to‘plamga tegishli bo‘lishi ham, tegishli bo‘lmasligi ham mumkin. Funksiya limitining ikkita teng kuchli Koshi (ε,δ tilida) va Geyne (sonlar ketma-ketlik tilida) ta’rifi mavjud.

1-ta’rif (Koshi). A soni $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti deyiladi, agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ shunday $\delta>0$ (umuman ε bog‘liq) soni mavjud bo‘lib, barcha $|x-x_0|<\delta\ (x\neq x_0)$ qanoatlantiruvchi x lar uchun $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u quyidagicha yoziladi $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ yoki $x\to a$ da $f(x)\to A$.

2-ta’rif (Geyne). Agar V to‘plamga tegishli, x_0 soniga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $x_1,x_2,...,x_n$ sonli ketma-ketlik uchun $y=f(x)$ funksiyaning bu sonlarga mos qiymatlaridan tashkil topgan $f(x_1),f(x_2),...,f(x_n)$ sonli ketma-ketlik A soniga intilsa, A soni $f(x)$ funksiyaning $x\to x_0$ nuqtadagi limiti deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ta’riflardan birini qo‘llab $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{3x-1}=1$ ekanligini hamda $\lim\limits_{x\to\pi}\sin\frac{x}{x-\pi}$, $\lim\limits_{x\to0}2^{\frac{1}{x}}$ limitlarning mavjud emasligini isbotlash mumkin.

Limitga ega funksiyalar o‘zlarining quyidagi xossalari bilan xarakterlanadi:

1. $y=f(x)$ funksiya $x\to x_0$ da limitga ega bo‘lsa, ushbu limit yagonadir;

2. $y=f(x)$ funksiya $x\to x_0$ da chekli limitga ega bo‘lsa, x_0 nuqtaning δ atrofi $U_\delta(x_0)$mavjudki, $U_\delta(x_0)\cap V$ to‘plamda $f(x)$ funksiya chegaralangan bo‘ladi.

3. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ A\neq 0$ bo‘lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday atrofi topiladiki, bu atrofda $y=f(x)$ funksiyaning ishorasi A sonning ishorasi bilan bir hil bo‘ladi.

4. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B,\ B\neq 0$, bo‘lsa, u holda biror$U_\delta(x_0)$oraliqda $\frac{1}{g(x)}$ funksiya chegaralangan bo‘ladi.

5. Agar biror $\delta>0$ son va barcha $x\in U_\delta(x_0)$ lar uchun $f(x)\le g(x)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lib, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B,$ bo‘lsa, u holda $A\le B$ bo‘ladi.

6. Agar biror $\delta>0$ son va barcha $x\in U_\delta(x_0)$ lar uchun $g(x)\le f(x)\le \varphi(x)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lib, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ tenglik o‘rinli bo‘lsa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ bo‘ladi.

3.3.2.Bir o‘zgaruvchili funksiya uchun bir tomonlama va $x\to\infty$ dagi limitlar.

3-ta’rif. $y=f(x)$ funksiya biror bir $V=(a;\infty)$ nurda aniqlangan bo‘lsin.

Agar har qanday $\varepsilon>0$ son uchun shunday bir $K(\varepsilon)>0$ sonni ko‘rsatish mumkin bo‘lsaki, unda barcha $|x|>K$ munosabatni qanoatlantiruvchi x lar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, b soni $f(x)$ **funksiyaning** $x\to\infty$ **dagi limiti** deyiladi.

$y=f(x)$ funksiyaning $x\to-\infty$ va $x\to+\infty$ dagi limitlari ham yuqoridagidek ta’riflanadi.

Bu limitlar mos ravishda $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b,\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ ko‘rinishda yoziladi.

4-ta'rif. Agar ixtiyoriy $A>0$ son uchun shunday $\delta(A)>0$ topilsaki $0<|x-x_0|<\delta$ bo'lganda $|f(x)|>A$ tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada cheksiz limitga ega deyiladi.

Bu limitlar quyidagicha yoziladi $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ *yoki* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

Masalan, 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^x}=3$, chunki $x\to+\infty$ da $(1/3)^x\to 0$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^x}=0$, chunki $x\to-\infty$ da $(1/3)^x\to+\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{x-2}=\infty$.

Bir o'zgaruvchili $y=f(x)$ funksiya $x<x_0$ $(x>x_0)$ da aniqlangan bo'lib, x_0 nuqta quyuqlanish nuqtasi bo'lsin.

4-ta'rif. Agar ixtiyoriy $A>0$ son uchun shunday $\delta(A)>0$ topilsaki $0<|x-x_0|<\delta$ bo'lganda $|f(x)|>A$ tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada cheksiz limitga ega deyiladi.

5-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ sonni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, unda $x_0-\delta<x<x_0$ $(x_0<x<x_0+\delta)$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $b=f(x_0-0)$ $\left(b=f(x_0+0)\right)$ son $f(x)$ funksiyaning $x\to x_0$ dagi chap (o'ng) limiti deyiladi.

Bu limit quyidagicha yoziladi

$$b=f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)\quad\left(b=f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)\right).$$

Masalan 1. $\lim\limits_{x\to 2} 4^{\frac{2}{x-2}}$ funksiyada $\lim\limits_{x\to 2-0} 4^{\frac{2}{x-2}}=0,\qquad \lim\limits_{x\to 2+0} 4^{\frac{2}{x-2}}=\infty.$

2. $y=f(x)=\begin{cases}(x-2)^2+1, & agar\ \ x\ge 2;\\ (x-2)^2-1, & agar\ \ x<2\end{cases}$ funksiyada $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=1;$

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=-1$.

$y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada limiti mavjud bo‘lishi uchun bu funksiya shu nuqtada chap va o‘ng limitlarga ega bo‘lib, $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ tenglik bajarishi zarur va etarli.

Quyidagi teoremalar limitlar haqidagi asosiy teoremalar deb atalib, funksiya limitlarining asosiy xossalarini ifodalaydi.

1. Agar $y = f(x) = C$ $(C - const)$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = C.$
2. Agar $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ mavjud bo‘lsa, u holda $k = const$ soni uchun $\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x).$
3. Agar $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ bo‘lsa, u holda

a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$

b) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$

c) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0).$

Yuqoridagi teoremalar funksiyalarning limitlarini hisoblashda qo‘llaniladi.

Masalan,

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x \to \pi} \sin x}{\lim\limits_{x \to \pi} \cos x} = 0;$$

$$\lim_{x \to \pi} (\sin x \cos x) = \lim_{x \to \pi} \sin x \lim_{x \to \pi} \cos x = 0;$$

$$\lim_{x \to \pi} (\sin x + \cos x) = \lim_{x \to \pi} \sin x + \lim_{x \to \pi} \cos x = -1.$$

Amaliyotda ko‘p qo‘llaniladigan **ajoyib limitlar** nomini olgan limitlarni keltirib o‘tamiz

a) 1- ajoyib limit: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1;$

b) 2- ajoyib limit: $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$

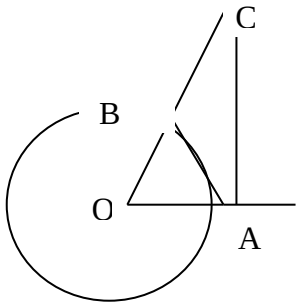
Bu ajoyib limitlarning boshqa shakllari ham mavjud bo‘lib ular quyidagilardir:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x} = 1;$ 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1;$ 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctgx}{x} = 1;$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$;

1-ajoyib limit asosiy ko‘rinishining isbotini keltiramiz.

Isbot. Radiusi 1ga teng bo‘lgan aylana olamiz



$OB=1$ aylana radiusi. $\angle AOB=x$ bo‘lsin. Bu yerda $0<x<\frac{\pi}{2}$. Rasmdan ko‘rinadiki, $S_{\Delta AOB}<S_{AOB\,sektor}<S_{\Delta AOC}$. Bu tengsizlikda qatnashayongan har geometrik figuraning hisoblaymiz.

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}R^2\sin x=\frac{\sin x}{2};$$

$$S_{AOB\,sektor}=\frac{1}{2}R^2x=\frac{x}{2};$$

$$S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}AO\cdot AC=\frac{1}{2}R^2tgx=\frac{tgx}{2}.$$

U holda $S_{\Delta AOB}<S_{AOB\,sektor}<S_{\Delta AOC}$ tengsizlikka asosan

$$\sin x<x<tgx\Rightarrow 1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

Chunki $\sin x>0$. Oxirgi tengsizlikdan $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ munosabatni hosil qilamiz. Quyidagicha almashtirishlar bajaramiz

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\sin\frac{x}{2}<x,$$

ya’ni

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<x\Rightarrow\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<|x|$$

Bu tengsizlik $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$lar uchun o‘rinli. Agar ixriyoriy $\varepsilon>0$ uchun δ ni

ε va $\frac{\pi}{2}$ lardan kichigini tanlasak $|x|<\delta$ bo‘lganda $\delta \le \varepsilon$ ekanligidan ε $\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon$, ya`ni $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

3.3.3.Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar.

5-ta’rif. Agar $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ bo‘lsa, u holda $\alpha(x)$ funksiya $x \to x_0$ da

cheksiz kichik (funksiya) miqdor deb ataladi.

Masalan, $\alpha(x)=\frac{x+1}{x^2}$ funksiya $x \to -1$ va $x \to \infty$ larda cheksiz kichik miqdordir.

Cheksiz kichik miqdor quyidagi xossalarga ega:

1. Agar $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ bo‘lib, $f(x)=b+\alpha(x)$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=b$ o‘rinli bo‘ladi;
2. Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlarning algebraik yig‘indisi cheksiz kichik miqdordir;
3. Cheksiz kichik miqdorning chegaralangan funksiyaga (o‘zgarmas songa) ko‘paytmasi cheksiz kichik miqdordir;
4. Cheksiz kichik miqdorning limiti noldan farqli, chegaralangan funksiyaga nisbati cheksiz kichik miqdordir.

Eslatma. $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar $x \to x_0$ cheksiz kichik miqdorlar bo‘lsin.

Agar:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ bo‘lsa, u holda $\alpha(x)$ funksiya $\beta(x)$ funksiyaga nisbatan $x \to x_0$ yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor deyiladi;
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C<\infty$ $(C=const)$ bo‘lsa, u holda $\alpha(x)$ funksiya va $\beta(x)$ funksiyalar $x \to x_0$ bir xil tartibli ($C=const$ ga farq qiluvchi) cheksiz kichik miqdorlar deyiladi;

Agar $C=1$ bo‘lsa, u holda $\alpha(x)$ funksiya va $\beta(x)$ funksiyalar $x\to x_0$ ekvivalent cheksiz kichik miqdorlar deyiladi;

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\to\infty$ bo‘lsa, u holda $\beta(x)$ funksiya $\alpha(x)$ funksiyaga nisbatan $x\to x_0$ yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor deyiladi;

6-ta’rif. Agar $\lim\limits_{M\to M_0} f(x)=\pm\infty$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $x\to x_0$ da cheksiz katta miqdor(funksiya) deb ataladi.

Masalan, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$ funksiya $x\to 0$ da cheksiz kata miqdordir.

Matematika va amaliyotda taqribiy hisoblashlarni amalga oshirishda quyidagi tushunchalar muhum ahamiyatga ega.

1. Agar $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ bo‘lsa, u holda $\alpha(x)$ funksiyani $\beta(x)$ funksiyaga nisbatan quyidagicha yozish mumkin $\alpha(x)=o(\beta(x))$ va quyidagicha o‘qiladi: $\alpha(x)$ funksiya $\beta(x)$ funksiyaga nisbatan x_0 nuqta atrofida “0 kichik”.

2. Agar $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ bo‘lsa, u holda $\alpha(x)$ funksiyani $\beta(x)$ funksiyaga nisbatan quyidagicha yozish mumkin $\alpha(x)=O(\beta(x))$ va quyidagicha o‘qiladi: $\alpha(x)$ funksiya $\beta(x)$ funksiyaga nisbatan x_0 nuqta atrofida “O katta”.

Masalan:

a) $x^3=o(x^2)$, chunki $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^2}=0$; b) $x^2+1=O(x^3)$, chunki $\lim\limits_{x\to}\dfrac{x^2+1}{x^3}=0$.

Agar $x\to x_0$ da $\alpha(x)$ funksiya cheksiz kichik bo‘lsa, quyidagi teng kuchliliklar (ekvivalentliklar) o‘rinli:

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$; 2. $tg\alpha(x)\sim\alpha(x)$; 3. $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$;

4. $arctg\alpha(x)\sim\alpha(x)$; 5. $\log_a[1+\alpha(x)]\sim\alpha(x)\log_a e$;

6. $\ln[1+\alpha(x)]\sim\alpha(x)$; 7. $1-\cos\alpha(x)$ □ $\dfrac{\alpha^2(x)}{2}$;

8. $a^{\alpha(x)}-1\sim\ \alpha(x)\ln a$; 9. $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$;

10. $\left[1+\alpha(x)\right]^n - 1 \sim n\alpha(x)$; 11. $\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$.

Keltirilgan bu ekvivalentliklardan funksiyalar limitini hisoblashda foydalanish maqsadga muvofiq.

Masalan, 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^3\right)}{(1-\cos x)arctgx} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\left(x^2/2\right)x} = 2.$

2. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

3.3.4. Bir o‘zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi.

Funksiya uzluksizligi tushunchasi funksiyaning asosiy xarakteristikalaridan biri bo‘lib, u amaliyotda muhim ahamiyatga ega.

Faraz qilamiz $y = f(x)$ funksiya $V \subseteq R^1$ to‘plamda aniqlangan bo‘lsib, x_0 nuqta $V \subseteq R^1$ to‘plamning quyuqlanish nuqtasi va $x_0 \in V$ bo‘lsin. Funksiyaning nuqtada uzluksizligini funksiya limitining ta’rifi kabi bir necha teng kuchli ta’riflardan biri orqali aniqlash mumkin.

7-ta’rif. V to‘plamda $x_0 \in V$ quyuqlanish nuqtasiga yaqinlashuvchi barcha $\{x_n\}$ $(x_n \in V)$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ sonli ketma-ketliklarni qaraymiz. Agar har bir $\{x_n\}$ ketma-ketlikka mos $\{f(x_n)\}$ sonli ketma-ketlik $f(x_0)$ songa intilsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

8-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya $x_0 \in V$ nuqtada uzluksiz deyiladi agarda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun biror $\delta > 0$ (ε ga bog‘liq) soni topilib, $|x - x_0| < \delta$ o‘rinli bo‘lganda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizlik qanoatlantirilsa, ya’ni $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ bo‘lsa.

Shunday qilib $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

a) $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning birir δ atrofi

$\{x : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = U_\delta(x_0) \subset D(f)$ da aniqlangan;

b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ mavjud;

c) $A = f(x_0)$.

$x \in U_\delta(x_0)$ da $\Delta x = x - x_0$ – argument orttirmasini va $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$– funksiya orttirmasini kiritsak $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ bajarilishi zarur.

Funksiyaning nuqtada uzluksizligi shu nuqta atrofida argumentni cheksiz kichik orttirmasiga funksiyani cheksiz kichik orttirmasi mos kelishidir.

Masalan. 1) $y = \cos x$ funksiya har bir $x_0 \in R$ nuqtada uzluksiz, haqiqatdan ham

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} [\cos(x_0 + \Delta x) - \cos(x_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right] = 0$$

2) $y = \frac{1}{x^2}$ funksiya $x_0 \in R\ (x_0 \neq 0)$ har bir nuqtasida uzluksiz,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{1}{(x_0 + \Delta x)^2} - \frac{1}{x_0^{\,2}} \right] =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{x_0^{\,2} - x_0^{\,2} - 2x_0 \Delta x - (\Delta x)^2}{x_0^{\,2} (x_0 + \Delta x)^2} \right] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{\Delta x (2x_0 + \Delta x)}{x_0^{\,2} (x_0 + \Delta x)^2} \right] = 0.$$

Nuqtada uzluksiz funksiyalar uchun quyidagi teoremalar o‘rinli.

1-teorema. Agar $f(x_0)$ va $\varphi(x_0)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa u holda 1) $f(x) \pm g(x)$; 2) $f(x) \cdot g(x)$; 3) $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

2-teorema. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa shunday $\delta > 0$ son topiladiki $x \in U_\delta(x_0) \subseteq D(f)$ x_0 nuqtaning δ atrofida funksiya chegaralangan bo‘ladi.

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya V to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $x_0 \in V$ nuqtada uzluksiz va $f(x_0) > 0\ (f(x_0) < 0)$bo‘lsa, u holda $x_0$nuqtaning shunday bir $\delta > 0$ atrofi – $U_\delta(x_0)$topiladiki, barcha $x \in U_\delta(x_0) \cap V$ nuqtalar uchun $f(x) > 0\ (f(x) < 0)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

9-ta’rif. Agar funksiya V to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya V **to‘plamda uzluksiz** deyiladi.

To‘plamda uzluksiz funksiyalar uchun quyidagi teoremalar o‘rinli:

4-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a;b]$ oraliqda chegaralangan bo‘ladi.

5-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ oraliqda uzluksiz bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a;b]$ da o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi.

6-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning chetki nuqtalaridagi qiymatlari turli ishorali bo‘lsa $(f(a)\cdot f(b)<0)$, u holda kamida bitta shunday $c\in(a;b)$ nuqta topiladiki, $f(c)=0$ tenglik bajariladi.

7-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ oraliqda uzluksiz va $f(a)\neq f(b)$ u holda ixtiyoriy $f(a)$va $f(b)$ oraliqdagi C soni uchun shunday $\xi\in[a;b]$ soni topiladiki $f(\xi)=C$ bajariladi.

8-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ oraliqda uzluksiz va qatiy monoton o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lsa, u holda $[f(a);f(b)]$, $([f(b);f(a)])$ oraliqda qatiy monoton o‘suvchi (kamayuvchi) $y=f(x)$ funksiyaga teskari $x=g(y)$ funksiya aniqlanadi.

9-teorema. Agar $y=\varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, $z=f(y)$ funksiya $y_0=\varphi(x_0)$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa u holda x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjudki, bu oraliqda $f(\varphi(x))$ murakkab funksiya aniqlangan va x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

10-ta’rif. $y=f(x)$ funksiya argumentning $x\le x_0$ $(x\ge x_0)$ qiymatlaridaaniqlangan bo‘lsin. Agar $y=f(x)$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)=f(x_0)\left(\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)=f(x_0)\right)$munosabat bajarilsa, $f(x)$ **funksiya** x_0 **nuqtada chapdan (o‘ngdan) uzluksiz** deyiladi.har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya V **to‘plamda uzluksiz** deyiladi.

Demak, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lishi uchun

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$$

Tenglik bajarilishi shart.

Masalan, $f(x)=\begin{cases}2^{\frac{1}{x}}, & x<0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ funksiya 0 nuqtada chapdan uzluksiz chunki, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}}=0=f(0)$.

10-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmaning har bir ichki nuqtasida uzluksiz bo‘lib, a nuqtada o‘ngdan va b nuqtada chapdan uzluksiz bo‘lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ **kesmada uzluksiz** deyiladi.

11-ta’rif. Agar $y=f(x)$ funksiya uchun (5.4) shartning bittasi bajarilmasa yoki u x_0 nuqtada aniqlanmagan bo‘lsa, u holda x_0 nuqta $y=f(x)$ funksiyaning **uzilish nuqtasi** deyiladi.

12-ta’rif. Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chapdan va o‘ngdan limitlari mavjud bo‘lib, ular o‘zaro teng bo‘lmasa, ya’ni

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)\neq f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

bo‘lsa, u holda x_0 nuqta $y=f(x)$ **funksiyaning birinchi tur uzilish nuqtasi** deyiladi.

$f(x_0-0),\ f(x_0),\ f(x_0+0)$ sonlar ayirmalarining eng kattasi, ya’ni $\max\{|f(x_0)-f(x_0-0)|, |f(x_0+0)-f(x_0-0)|, |f(x_0+0)-f(x_0)|\}$ songa $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi **sakrashi** deyiladi.

Masalan, $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ funksiya $x_0=0$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=1\neq 0=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$.

13-ta’rif. Agar $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada limiti mavjud, lekin bu limit funksiyaning x_0 nuqtada erishadigan $f(x_0)-$ qiymatidan farq qilsa yoki $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada aniqlanmagan bo‘lsa, u holda x_0 nuqta **bartaraf etiladigan uzilish nuqta** deb ataladi.

Masalan, $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ funksiyaning $x=0$ nuqtada limiti mavjud (1-ajoyib limit). Lekin, bu funksiya $x=0$ nuqtada aniqlanmagan, birinchi tur uzilish nuqta. Bu uzilishni funksiyaga uning shu nuqtadagi limit qiymatini qo‘yish orqali yo‘qotish mumkin, ya’ni

$$f_1(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}.$$

Hosil bo‘lgan $f_1(x)$ funksiya barcha son o‘qida uzluksizdir.

14-ta’rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada chap yoki o‘ng limitlarining hech bo‘lmaganda bittasi mavjud bo‘lmasa yoki cheksiz bo‘lsa, u holda x_0 nuqta $y=f(x)$ **funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi** deyiladi.

Masalan, $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ funksiya $x_0=0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega, chunki $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\infty$.

Bir necha o‘zgaruvchili funksiyalarda uzilish nuqtalaridan tashqari, uzulish chiziqlari, sirtlari va hokazolar bo‘lishi mumkin.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning limiti deb nimaga aytiladi va u qanday yoziladi?
2. Chap va o‘ng limitlar nimalar va u qanday yoziladi?
3. Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar qanday miqdorlar?
4. Ikki funksiya algebraik yig’indisining limiti nimaga teng?
5. Chekli sondagi funksiyalar ko‘paytmasining limiti nimaga teng?
6. O‘zgarmas ko‘paytuvchini limit ishorasidan chiqarish mumkinmi?
7. Ikkita funksiya nisbatining limiti nimaga teng?
8. Birinchi ajoyib limit deb nimaga aytiladi?
9. Ikkinchi ajoyib limit nimaga teng?
10. Aniqmasliklarni ochish nimadan iborat?
1. Qanday jarayon uzluksiz bo‘ladi?
2. Funksiya orttirmasi nima?

3. Qanday funksiya uzluksiz deyiladi?

4. Qanday funksiyaga oraliqda uzluksiz deyiladi?

5. Ikkita uzluksiz funksiya yig'indisi, ko'paytmasi va nisbati uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?

6. Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalar qanday xossalarga ega?

7. Qanday funksiyaga uzilishga ega deyiladi?

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Funksiya limiti ta'rifidan foydalanib quyidagilarni isbotlang:

1. $\lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$

$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishidagi aniqmasliklarni oching:

3. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ 4. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{tgx}{\sin 2x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sinx}{x}=1$ ajoyib limitdan foydalanib quyidagi limitlarni toping:

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sin4x}{x}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-Cos2x}{xSinx}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ ajoyib limitdan foydalanib limitlarni toping:

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x}$; 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x$; 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$

3.4-§. Bir o'zgaruvchili funksiya hosilasi va differensiali

Tayanch iboralar. Oniy tezlik, hosila, egri chiziqqa urinma, yuqori tartibli hosila, differensiallash, murakkab funksiya, oshkormas va parametrik funksiyalar hosilalari.

3.4.1.Hosila haqida tushuncha.

1-ta'rif. $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtaning biror bir atrofida aniqlangan

$$\text{va } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

mavjud bo'lsin. U holda bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb ataladi va quyidagicha belgilanadi: $f'(x_0)$, $f'_x(x_0)$, $y'(x_0)$,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ ifoda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deb ataladi.

1-misol. $f(x)=x^2$ funksiya barcha $x\in R^1$ nuqtalarda hosilaga ega. Haqiqattan ham ixtiyoriy $x\in R^1$ nuqtalarda

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\cdot(\Delta x)+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

2-misol. $f(x)=x^n$, $n\neq -1$ funksiya barcha $x\in R^1$ nuqtalarda hosilaga ega. Haqiqattan ham

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}\Delta x+C_n^2x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots-x^n}{\Delta x}=nx^{n-1}$$

3-misol. $f(x)=\sin x$ funksiya barcha $x\in R^1$ nuqtalarda hosilaga ega. Haqiqattan ham

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos x.$$

Quyidagi ifodalar

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},\quad f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

mos ravishda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o'ng hosilalari deb ataladi.

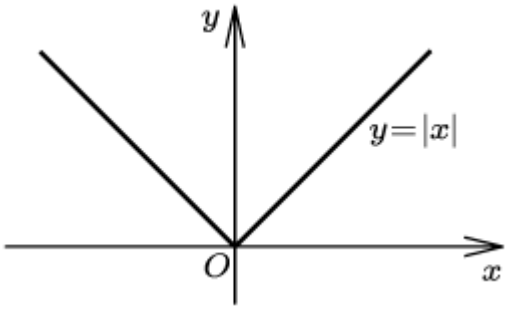
1-teorema. $y=f(x)$ funksiya uchun $x=x_0$ nuqtada

$$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsagina bu funksiyaning $x = x_0$ nuqtada hosilasi mavjud bo‘ladi.

4-misol. $f(x) = |x|$ finksiyaning $x_0 = 0$ nuqtada bir tomonlama chekli hosilalari mavjud bo‘lsa ham uning hosilasi mavjud emas (1-rasm). Chunki uning chap va o‘ng hosilalari teng emas. Haqiqattan ham

$$f'_{-}(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1, \quad f'_{+}(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$



3.4.1.1-rasm

2-teorema. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada hosilga ega bo‘lsa, u holda funksiya x_0 nuqtada uzluksizdir.

Shuni alohida ta`kidlashimiz kerakki, yuqoridagi teoremani teskarisi har doim ham o‘rinli bo‘lmaydi. Demak, uzluksiz funksiyaning hosilasi har doim ham mavjud emas. Bunga misol sifatida 4-misolni ko‘rish mumkin. Chunki, $y = |x|$ funksiya barcha $x \in (-\infty, \infty)$ nuqtalarda uzluksiz bo‘lsa ham $x = 0$ nuqtada uning hosilasi mavjud emas.

3.4.2.Hosilaning iqtisodiy ma`nosi. Hosilaning iqtisodiy ma`nosini misollarda ko‘rib chiqamiz.

Mehnat unumdorligi. $Q(t)$ funksiya t vaqt ichida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorini ifodalasin. t_0 momentda mehnat unumdorligi topilsin.

t_0 dan $t_0 + \Delta t$ vaqt oralig’ida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori $Q(t_0)$ qiymatdan $Q(t_0 + \Delta t)$ qiymatgacha o’zgaradi, ya’ni $\Delta Q = Q(t_0 + \Delta t) - Q(t_0)$ga. U holda mehnatning o’rtacha unumdorligi shu

vaqt oralig'ida $u_{o'rt} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ bo'ladi. t_0 momentda mehnat unumdorligi deganda, $\Delta t \to 0$ da t_0 dan $t_0 + \Delta t$ vaqt oralig'ida o'rtacha mehnat unumdorligining chekli qiymati tushuniladi, ya'ni

$$u(t_o) = \lim_{\Delta t \to 0} Q_{o'rt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Shunday qilib mehnat unumdorligi – bu mahsulot hajmining o'sish tezligidir.

Xuddi shunga o'xshash x birlikdagi mahsulotni sotishdan tushgan foydani $U(x)$ bilan belgilasak, u holda $U'(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x}$ ifodani sotuvdan tushgan limit foyda deb atash mumkin.

5-misol. t vaqtdagi ishlab chiqarish hajmi $Q = 100t - \frac{1}{30}t^3$ formula yordamida bog'langan bo'lsin. Mehnat unumdotligini: a) 5 vaqt birligiga mos; b) 10 vaqt birligiga mos aniqlang.

Yechish. Bu masalaning yechimini topish uchun quyidagi ishlarni amalga oshiramiz: $u' = 100 - \frac{1}{10}t^2$, $u'(5) = 100 - \frac{1}{10}5^2 = 97{,}5$; $u'(10) = 100 - \frac{1}{10}10^2 = 90$.

6-misol. Mahsulotga bo'lgan talab $p = 10 - 2x$ formula bilan aniqlansa, u holda mahsulotni sotishdan tushgan foyda:

$$u = x(10 - 2x) = 10x - 2x^2.$$

U holda limit foyda $u' = 10 - 4x^2$.

Mashqlarni bajaring. a) t vaqtdagi ishlab chiqarish hajmi $Q = 100t^2 - 12t^3$ formula yordamida bog'langan bo'lsin. Mehnat unumdotligini $t = 10$ vaqtdagi aniqlang;

b) t vaqtdagi ishlab chiqarish hajmi $y(x) = 40x - 0{,}03x^3$ formula yordamida bog'langan bo'lsin. Mehnat unumdotligini $x = 15$ birligidagi aniqlang.

Shunday qilib, mahsulotning limit qiymati, limit foyda, ishlab chiqarish limiti, samaradorlik limiti, talab limiti kabi kattaliklar hosila tushunchasi bilan uzviy bog‘liq.

Iqtisodiy nazariyada $y'(x)$ limit (marjinal) kattaliklarni $\mathrm{M}y(x)$ ko‘rinishda belgilash qabul qilingan. Bu yerda M marjinal so‘zining birinchi harfini bildiradi va limit ma`nosini beradi. Yuqorida aniqlangan limit kattaliklar iqtisodiy qonuniyatlarni isbotlashda matematik apparatlatdan foydalanish imkoniyatini beradi. Buni biz differensial hisobning iqtisodiy nazariyaga ba`zi tatbiqlari sifatida ko‘rib chiqamiz.

Agar firma Q miqdorda mahsulot ishlab chiqarib uni P so‘mdan sotsa, u

$$TR = PQ$$

miqdordagi daromadga ega bo‘ladi. Firmaning ishlab chiqarish hajmi ΔQ miqdorga o‘zgarganda uning daromadi

$$MR = \frac{d(TR)}{dQ} \qquad (1)$$

tezlik bilan o‘zgaradi. Bu holda MR kattalik **marjinal (limit) daromad** deb ataladi.

7-misol. Firmaning daromadi

$$TR = 100Q - 2Q^2$$

funksiya ko‘rinishida ifodalangan. Firmaning marjinal daromadini $Q = 15$ uchun aniqlang.

Yechish. Yuqoridagi birinchi tenglikka asosan topamiz.

$$MR = \frac{d(TR)}{dQ} = 100 - 4Q.$$

$$MR = 100 - 4 \cdot 15 = 40.$$

Javob. $Q = 15$ da firmaning marjinal daromadi 40 p.b. ga teng bo‘ladi.

Ishlab chiqarish hajmining o‘zgarishiga bog‘liq ravishda xarajat funksiyasining o‘zgarish tezligi **marjinal (limit) xarajat** deb ataladi va u quyidagi formula yordamida topiladi:

$$MC = \frac{d(TC)}{dQ}$$

Bu yerda TS- to‘la xarajat funksiyasi bo‘lib, u tayinlangan to‘la xarajat (TFC) va o‘zgaruvchan to‘la xarajat (TVC) lar yig‘indisidan iborat bo‘ladi:

$$TC=TFC+TVC.$$

O‘rtacha xarajat funksiyasi $AC = \frac{TC}{Q}$

8-misol. O‘rtacha xarajat funksiyasi $AC = \frac{24}{Q} + 15 + 3Q,$ ko‘rinishda berilgan. marjinal xarajat funksiyasini toping.

Yechish.

$$TC = AC \cdot Q = \left(\frac{24}{Q} + 15 + 3Q \right) Q = 24 + 15Q + 3Q^2.$$

$$MC = \frac{d(TC)}{dQ} = 15 + 6Q.$$

Funksiya elastikligi. Talab funksiyasini tahlil qilish jarayonida Al`fred Marshall tomonidan elastiklik tushunchasi kiritilgan. $y = f(x)$ funksiya argumentiga Δx orttirma berilgan bo‘lsin.

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right)$$

tenglik bilan aniqlanadigan kattlik $y = f(x)$ funksiyaning elastikligi deb ataladi.

Elastiklik y va x o‘zgaruvchilarning nisbiy o‘zgarishlari orasidagi proporsionallik koeffitsientidir. Masalan, x ning qiymati bir protsentga o’zgarsa, u holda y ning qiymati taxminan $E_x(y)$ protsentga o‘zgaradi.

Elastikligi o‘zgarmas bo‘lgan ishlab chiqarish funksiyalarining nazariy va amaliy ahamiyati alohida o‘ringa ega. Bu kabi funksiyalarga **CES (Constant Elasticity Substitution)** funksiyasi misol bo‘la oladi

$$y = C_0\left[CL^{-p} + (1-C)K^{p}\right]^{-1/p}.$$

Bu yerda elastiklik $\frac{1}{1-p} \neq 1$.

Mahsulotlarga talabning elastikligini to‘g‘ri aniqlash davlatga yangi soliqlar va aksizlarni kiritishda katta yordam beradi. Masalan, $x-$yuvilir mahsulotga qo‘yilgan aksiz, $y-$bu mahsulotga bo‘lgan talab bo‘lsin. Farz qilamiz davlat bu mahsulotga qo‘yilgan aksizni 10% ga oshirishni mo‘ljallayotgan bo‘lsin. Agar talab elastikligi $E_x(y) = -0,2$ bo‘lsa, u holda mahsulotga bo‘lgan talab $0,2 \cdot 10\% = 2\%$ kamayishini kutishimiz kerak bo‘ladi. Bu mahsulotni sotishdan davlat oladigan daromad 10% ga emas, balki 8% ga ortadi.

Elastiklikni o‘rganish natijasida aholi daromadining ortish bozordagi vaziyaitning o‘zgarishini baholash mumkin. Masalan, ma`lumki go‘sht, yog‘ va tuxumlar uchun talab elastikligi aholi daromadiga nisbatan musbat, un uchun esa bu elastilik manfiy. Demak, aholi daromadi o‘sishi bilan go‘sht, yog‘ va tuxumlarga bo‘lgan talab ortadi, unga bo‘lgan talab esa kamayadi. Aholi daromadi kamayishi bilan go‘sht, yog‘ va tuxumlarga bo‘lgan talab kamayadi, unga bo‘lgan talab esa ortadi.

9-misol. Talab va taklif funksiyalari quyidagicha bo‘lsin:

$$y = 10 - x,\ z = 3x - 6.$$

а) talab va taklifni uchun muvozanat bahoni toping;

б) muvozanat baho uchun talab va taklif elastikligini toping.

Yechish. а) $y(x) = z(x)$, $10 - x = 3x - 6$, $x = 4$;

б) $E_x(y) -$talab va $E_x(z) -$taklif elastiklarini quyidagicha topamiz:

$$y = 10 - x;$$

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = 10 - (x + \Delta x) - (10 - x) = -\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{-\Delta x}{10 - x} : \frac{\Delta x}{x} = -\frac{x}{10 - x},$$

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{x}{10-x}\right)=-\frac{x}{10-x}.$$

$$z=3x-6;$$

$$\Delta z=z(x+\Delta x)-z(x)=3x+3\Delta x-6-(3x-6)=3\Delta x;$$

$$\frac{\Delta y}{z}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{3\Delta x}{3x-6}:\frac{\Delta x}{x}=\frac{3x}{3x-6},$$

$$E_x(z)=\frac{x}{x-2}.$$

$$E_x(y)=-\frac{4}{10-4}=-\frac{2}{3},\quad E_x(z)=\frac{4}{4-2}=2.$$

Demak, muvozanat bahosining 1% ortishi talabning (2/3)% ga kamayishiga taklifning esa 2% ga ortishiga olib keladi.

Mashqlarni bajaring. Talabnig elastiklik funksiyasini toping:

a) $p+5x=100$, $p=50$;

b) $3p+4x=120$, $p=15,\ p=20$;

c) $p^2+p+4x=40$, $p=2,\ p=4$.

3.4.3. Funksiya differensiali.

Agar $y=f(x)$ x_0 nuqtaning δ atrofida aniqlangan bo‘lib, uning Δy orttirmasini

$$\Delta y=A\Delta x+\Delta x\,\varepsilon(\Delta x)$$

ko‘rinishda tasvirlash mumkin bo‘lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi $A\Delta x$ esa uning differensiali deb ataladi. Bu yerda $A(x_0)$ Δx ga bog‘liq emas, $\lim_{\Delta\varepsilon\to 0}\varepsilon(\Delta x)\to 0$.

Funksiya differensiali quyidagicha yoziladi: $dy=df=Adx,\quad A=f'(x)$.

10-misol. $y=x^2$ funksiya differensiallanuvchi. Haqiqattan ham

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\cdot(\Delta x)+(\Delta x)^2=2x\cdot(\Delta x)+o(\Delta x).$$

3-teorema. $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lishi uchun u bu nuqtada hosilaga ega bo‘lishi zarur va yetarli va quyidagicha bog‘langan

$$dy=f'(x_0)\cdot\Delta x$$

Agar funksiya (a,b) intervallning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda bu funksiya (a,b) intervalda differensiallanuvchi bo‘ladi.

$\Delta y = A\Delta x + \Delta x\varepsilon(\Delta x)$ formulada $\Delta x\varepsilon(\Delta x)$ qo‘shiluvchi cheksiz kichik miqdor bo‘lgan uchun bu formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$\Delta y \approx f'(x_0)A\Delta x \Rightarrow f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

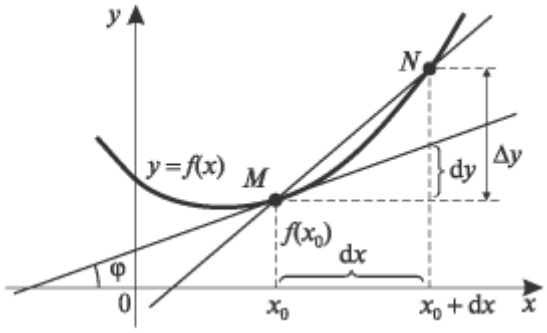
Bu formuladan taqribiy hisoblarda foydalanish mumkin.

11-misol. $y = \sqrt[4]{x}$ funksiyaning $x = 90$ nuqtadagi qiymatini toping.

Yechish. Bu yerda $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 81$, $\Delta x = 9$ deb faraz qilamiz. U holda $f(x_0) = \sqrt[4]{81} = 3$, $f'(x) = \frac{1}{4\cdot\sqrt[4]{x^3}}$, $f'(x_0) = \frac{1}{4\cdot 3^3}$ $\sqrt[4]{90} \approx 3 + \frac{1}{12}$, $\sqrt[4]{90} \approx 3{,}083$.

3.4.4. Hosilaning geometrik ma`nosi.

$M(x_0; f(x_0))$ nuqtada $y = f(x)$ funksiyaga o‘tkazilgan urinma deb MN kesuvchining (2-rasm) N nuqtasi M nuqtaga funksiya grafigi bo‘ylab ixtiyoriy ravishda yaqinlashishini qabul qilamiz. Bunda $dx \to 0$.



3.4.4.1-rasm

$f'(x_0)$ qiymat $M(x_0; f(x_0))$ nuqtada $f(x)$ funksiyaga o‘tkazilgan urinmaning $tg\varphi = f'(x_0)$ −burchak koeffitsientini bildiradi (2-rasm).

$M(x_0; f(x_0))$ nuqtada $f(x)$ funksiyaga o‘tkazilgan urinma tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

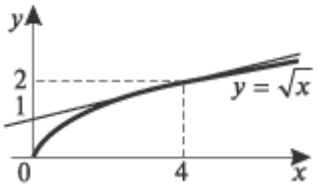
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

12-misol. $M_0(4;2)$ nuqtada $f(x)=\sqrt{x}$ funksiyaga o‘tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

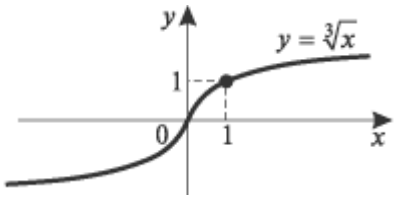
Yechish. $f(x_0)=\sqrt{4}=2, \qquad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}.$

Demak urinma tenglamasi: $y-2=\frac{1}{4}(x-4)$ (3-rasm).

13-misol. $O(0,0)$ nuqtada $y=\sqrt[3]{x}$ funksiyaga o‘tkazilgan urinma tenglamasi $f'(0)=+\infty$ bo‘lgani uchun u vertikal to‘g‘ri chiziq bo‘ladi (4-rasm).



3-rasm



4-rasm

4.4.5. Hosila olish va differensiallash qoidalari.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lib, $k=const$ bo‘lsin. U holda:

1. $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$; $\qquad d[f(x)\pm g(x)]=df(x)\pm dg(x).$
2. $[kf(x)]'=kf'(x)$; $\qquad d[kf(x)]=k\,df(x).$
3. $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;

$d(f(x)g(x))=df(x)g(x)+f(x)dg(x).$

4. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$;

$d\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{df(x)g(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)}\ (g(x)\neq 0).$

Funksiyaning hosilasi va differensialini hisoblashda zarur bo‘ladigan elementar funksiyalarning hosilalari jadvalini keltiramiz:

1) $(C)'=0, \quad C=const.$

2) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha\in R^1, \quad x>0, \qquad (x^n)'=nx^{n-1}, \quad n\in N, \quad x\in R^1$

3) $(a^x)'=\alpha^x\ln a, \quad \alpha>0, \quad a\neq 1, \quad x\in R^1, \qquad (e^x)'=e^x, \quad x\in R.^1$

4) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0.$

$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \neq 0.$

$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0.$

$\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0.$

5) $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in R^1.$

6) $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R^1.$

7) $\left(tg\, x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi m, \quad n \in Z.$

8) $\left(ctg\, x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi m, \quad n \in Z.$

9) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1.$

10) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad |x| < 1.$

11) $\left(arctg\, x\right)' = \dfrac{1}{1 + x^2}, \quad x \in R^1.$

12) $\left(arcctg\, x\right)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}, \quad x \in R^1.$

13) $\left(sh\, x\right)' = ch \quad x, \quad x \in R^1.$

14) $\left(ch\, x\right)' = sh \quad x, \quad x \in R^1.$

15) $\left(th\, x\right)' = \dfrac{1}{ch^2 x}, \quad x \in R^1.$

16) $\left(cth\, x\right)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}, \quad x \neq 0.$

14-misol. $y = \dfrac{e^x + 4x^3}{\ln x}$ funksiyaning hosilasini hisoblang.

Yechish. Bu yerda hosilalar jadvali va hosila olish qoidasidan foydalanamiz:

$$y' = \frac{\left(e^x + 4x^3\right)' \ln x - \left(e^x + 4x^3\right)\left(\ln x\right)'}{\ln^2 x} = \frac{\left(e^x + 12x^2\right)\ln x - \dfrac{e^x + 4x^3}{x}}{\ln^2 x}.$$

15-misol. $y = a^x arctg\, x$ funksiya hosilasi quyidagicha hisoblanadi:

$$y' = \left(a^x\right)' arctg\, x + a^x \left(arctg\, x\right)' = a^x \cdot \ln a \cdot arctg\, x + \frac{a^x}{1+x^2}.$$

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasi bilan tanishib chiqamiz. $u = g(x),\ y = f(u)$ bo‘lib, $u = g(x)$ funksiya x_0 nuqtada $y = f(u)$ funksiya esa $u_0 = g(x_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda $y = \Phi(x) = f(g(x))$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘ladi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},\ \Phi\left(x_0\right) = f'\left(u_0\right) g'\left(x_0\right)$$

U holda $dy = \Phi'\left(x_0\right)dx = f'\left(u_0\right)du$. Bu yerda $du = g'\left(x_0\right)dx$. Bu birinchi differensialning invariantligi deyiladi, ya`ni murakkab funksiyada ham differensial o‘z formasini saqlab qoladi.

16-misol. $y = 3^{\cos^5 2x}$ funksiyaning hosilasi quyidagicha hisoblanadi:

$$y' = 3^{\cos^5 2x} \ln 3 \left(\cos^5 2x\right)' = 3^{\cos^5 2x} \ln 3 \cdot 5\cos^4 2x \left(\cos 2x\right)' =$$

$$5\ln 3 \cdot 3^{\cos^5 2x} \cos^4 2x \left(-\sin 2x\right)(2x)' = -10\ln 3 \cdot \sin 2x \cos^4 2x \cdot 3^{\cos^5 2x}.$$

17-misol. $y = tg^4 6x$ funksiyaning hosilasi quyidagicha hisoblanadi:

$$dy = 4tg^3 6x d\left(tg\, 6x\right) = 4tg^3 6x \frac{1}{\cos^2 6x} d\left(6x\right) = \frac{24tg^3 6x}{\cos^2 6x} dx = \frac{24\sin^3 6x}{\cos^5 6x} dx.$$

Agar $y = f(x),\ (a < x < b)$ funksiyaga teskari funksiya uzluksiz va differensiallanuvchi $x = y(u),\ y'_x \neq 0$ bo‘lsa, u holda x'_y hosila ham mavjud bo‘ladi:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Masalan, $y = a^x\ (a > 0,\ a \neq 1,\ y > 0)$ funksiyaga teskari funksiya $x = \log_a y$. Uning hosilasi:

$$x'_y = \left(\log_a y\right)' = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\left(a^x\right)'_x} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y \ln a}.$$

Faraz qilamiz $y = f(x)$ funksiya parametrik ko‘rinishda berilgan bo‘lsin: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in [\alpha, \beta]$. Agar $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ funksiyalar

differensiallanuvchi va $\varphi'(t)\neq 0$ bo‘lsa, u holda y'_x mavjud bo‘lib quyidagicha aniqlanadi:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}.$$

Masalan, $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t\ (-\infty<t<\infty)$, funksiya uchun y'_x hosila quyidagicha hisoblanadi:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{3b\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t\sin t}=-\frac{b}{a}tg\,t,\ t\neq\frac{\pi k}{2},\ k\in\square\ .$$

Oshkormas $F(x,y)=0$ funksiyada y'_x hosilani topish uchun $\left(F(x,y)\right)'_x=0\Rightarrow F_x(x,y)+F_y(x,y)y'_x=0$ tenglamadan y'_x hosilani noma`lum sifatida topib olinadi.

Masalan, $arctgy-y+x=0$ oshkormas funksiyadan y'_x hosilan topish quyidagicha amalga oshiriladi:

$$\frac{f'(x)}{1+y^2}-f'(x)+1=0\Rightarrow y'=f'(x)=1+y^{-2}$$

$y=(\cos x)^{\sin x},\ (\cos x>0)$ ko‘rinishdagi funksiyalarda y'_x hosilani hisoblash quyidagcha amalga oshirilsdi:

$$\ln y=\sin x\ln(\cos x)\Rightarrow\left(\ln y=\sin x\ln(\cos x)\right)'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{y'}{y}=\cos x\ln(\cos x)+\sin x\frac{-\sin x}{\cos x}\Rightarrow\qquad .$$

$$\Rightarrow y'=(\cos x)^{\sin x}\left[\cos x\ln(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]$$

3.4.6. Yuqori tartibli hosila va differensiallar.

$y=f(x)$ funksiyaning yuqori tartibli hosilasi $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$ formula yordamida amalga oshiriladi. Bunda har bir tartibli hosila mavjud deb faraz qilinadi. Masalan, $y''=(y')'=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$,

$y'''=(y'')'=\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),\ \ldots.$

Bu yerda ham yuqoridagi qoidalar o‘rinli. Masalan, $y = e^{x^2}$ funksiyaning 2-tartibli hosilasini hisoblaymiz:

$$y' = 2xe^{x^2},\ \ y'' = 2e^{x^2} + 2x2xe^{x^2} = 2\left(1 + 2x^2\right)e^{x^2}.$$

Yuqori tartibli differensiallar quyidagicha aniqlanadi:

$d^2y = d\left(dy\right)$ - ikkinchi tartibli differensial;

$d^3y = d\left(d^2y\right)$ - uchinchi tartibli differensial;

……

$d^ny = d\left(d^{n-1}y\right)$ - $n-$tartibli differensial.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Jarayonning kechishi tezligi nima?
2. Oniy tezlik nima bilan xarakterlanadi?
3. Funksiyaning hosilasi deb nimaga aytiladi?
4. Hosilaning geometrik ma’nosi nima?
5. Ikkinchi tartibli hosila nima?
6. Differensiallash qoidalari va formulalarini yoddan bilasizmi?
7. Qanday hosilaga n-tartibli hosila deyiladi?
8. Oshkormas va parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyalar hosilalari qanday topiladi?

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ funksiyaning $x_0 = 0$ nuqtadagi bir tomonlama hosilalari mavjud emasligini isbotlang.
2. $f(x) = |x+3|$ funksiyaning $x_0 = -3$ nuqtadagi hosilasi mavjud emasligini isbotlang.
3. $f(x) = |2x-5|$ funksiyaning $x_0 = 2{,}5$ nuqtadagi hosilasi mavjud emasligini isbotlang.

Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

1) $y = x\ln x$; 2) $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$; 3) $y = \lg(5x)$.

4) $y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}$; 5) $y = \frac{\ln x}{x^2}$; 6) $y = \ln(x^2 + 2x)$.

7) $y = \ln(1 + \cos x)$; 8) $y = \ln \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x$.

9) $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$; 10) $y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$; 11) $y = \lg(5x + 3)$.

Sonli ifodalarni 10^{-3} aniqlikda taqribiy hisoblang:

1. $\sqrt[3]{29}$.
2. $\cos 41^0$.
3. $\sqrt[7]{129}$.

Funksiyalarning 2-tartibli hosilalari topilsin:

1. $y = \sin x$;
2. $y = tgx$;
3. $y = \sqrt{1+x}$;
4. $y = e^{x^2}$;
5. $y = ctgx$.

Oshkormas funksiyalar berilgan. y'' toping

6. $x^2 + y^2 = a$.
7. $x + y - xy = 1$.
8. $x^3 - y^3 - 3axy = 0$.
9. $arctgy - y + xy^2 = 0$.
10. $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 3$.

3.5-§. Differensiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremalar. Hosilaning ba’zi tatbiqlari

Tayanch iboralar. Funksiya differensiali, ikkinchi tartibli differensial, differensial yordamida taqribiy hisoblash, cheksiz kichik funksiya, funksiya orttirmasi uchun formula. Ferma teoremasi, Roll teoremasi, Lagranj teoremasi, Chekli orttirmalar formulasi, Teylor va Makloren formulalari, qoldiq had formulasi. Funksiya dinamikasi,

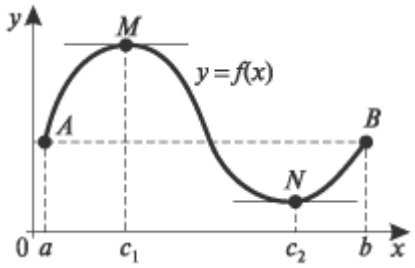
funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik qismlari, egilish nuqtasi, funksiyani tekshirish, asiptota, Lopital qoidasi, ishlab chiqarish xarajatlari, mahsulot ishlab chiqarish orttirmasi, ishlab chiqarish xarajatlari orttirmasi, ishlab chiqarish xarajati o‘rtacha orttirmasi, ishlab chiqarish limitik xarajati, savdo limitik pul mablag’i, funksiya egiluvchanligi, argument va funksiyaning nisbiy orttirmalari, nisbiy hosila, nisbiy egiluvchanlik, ikkita funksiya ko‘paytmasi va nisbati egiluvchanliklari, talabning narxga nisbtan egiluvchanligi, talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi, taklifning narxga nisbatan egiluvchanligi, to‘la va o‘rtacha xarajatlar egiluvchanliklari.

3.5.1 Differensiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremalar.

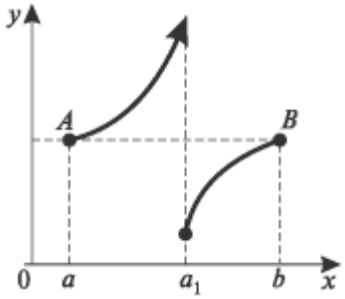
Differensiallanuvchi funksialar haqida teoremalar. Biz quyida amaliy masalarni yechishda zarur bo‘ladigan differensiallanuvchi funksialar haqidagi ba`zi teoremalarni keltiramiz.

Roll teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) oraliqda esa differensiallanuvchi bo‘lib, $f(a)=f(b)$ bo‘lsa, u holda hech bo‘lmaganda bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki bunda $f'(c)=0$.

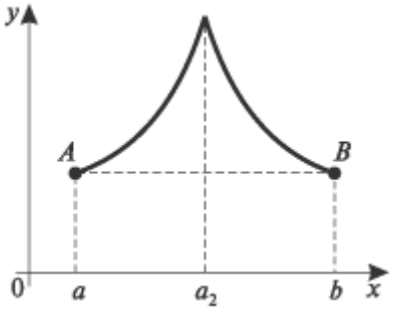
Bu teoremaning geometrik ma`nosini 5-rasmdan aniqlab olish mumkin. Teoremadagi shartlar juda ham muhim ekanligi esa 3.5.1, 3.5.2-rasmlarda ko‘rinib turibdi.



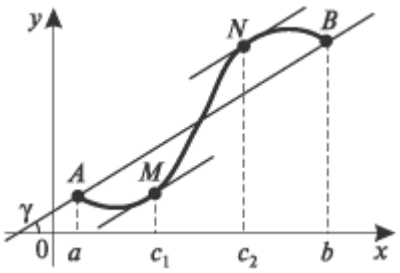
3.5.1-rasm



3.5.2-rasm



3.5.3-rasm



3.5.4-rasm

Lagranj teoremasi. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) oraliqda esa differensiallanuvchi bo‘lib, $f(a)=f(b)$ bo‘lsa, u holda hech bo‘lmaganda bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki bunda

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Agar bu teoremada $a=x, b=x+\Delta x$ deb olsak, u holda $c=x+\theta\Delta x,\ 0<\theta<1$ bo‘lib chekli orttirmali Lagranj formulasi hosil bo‘ladi:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x.$$

Koshi teoremasi. Agar $\varphi(t), \psi(t)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) oraliqda esa differensiallanuvchi bo‘lib, $\varphi'(t)\neq 0,\ t\in(a,b)$ bo‘lsa, u holda hech bo‘lmaganda bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki bunda

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Teylor formulasi. Agar $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtining qandaydir atrofida $(n+1)-$tartibli hosilagacha bo‘lgan barcha hosilalarga ega bo‘lsa, u holda shu atrofdagi barcha x nuqtalar uchun quyidagi Teyloe formulasi o‘rinli bo‘ladi:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

.

Bu yerda $R_n(x)=\dfrac{f^{(n-1)}\left(a+\theta(x-a)\right)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ (0<\theta<1)$ - Lagranj qoldiq hadi deb ataladi.

Agar bu formulada $a=0$ deb olsak, u holda Makleron formulasi hosil bo‘ladi:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ (0<\theta<1).$$

Teylor formulasi yordamida funksiyalarni ko‘phad ko‘rinishda yozib olish mumkin. Bunga ba`zi misollarni keltiramiz:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x);$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+1}(x);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}(x);$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+R_n(x);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x).$$

Differensiallanuvchi ratsional kasr ifodalardagi $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi noaniqliklarning aniq qiymatlarini Lopital qoidasidan: $\lim\limits_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\psi'(x)}{\varphi'(x)}$ foydalanib hisoblash mumkin. Bu yerda $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ yoki $\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$. Bu qoidani misollarda ko‘rib chiqamiz:

1-misol. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-3)}{x^2+7x-18}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2-3}}{2x+7}=\frac{4}{11}$; 16) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x^2+5}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to 2}\frac{3}{2x}=0$.

Bu jarayon noaniqlikdan qutimaguncha chekli marta davom ettirilishi mumkin. Agar noaniqlik $0\cdot\infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0, \infty-\infty$ ko‘rinishda bo‘lsa, u holda ma`lum bir elementar almashtirishlar bajarib uni $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi noaniqlikka keltiriladi so‘ngra Lopital qoidasi qo‘llaniladi.

2-misol. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x-4\right)tg\dfrac{\pi x}{8}\overset{(0\cdot\infty)}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{ctg\dfrac{\pi x}{8}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1}{-\dfrac{\pi}{8}\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{8}}}=-\dfrac{8}{\pi};$ ►

3-misol. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\sin x\right)^{tgx}=\left(1^{\infty}\right)$. Bu kabi misollar quyidagicha yechiladi:

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(\sin x\right)^{tgx}=\lim_{x\to\pi/2}\left[tg\,x\ln\left(\sin x\right)\right]=\left(\infty\cdot 0\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\ln\left(\sin x\right)}{ctg\,x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\pi/2}\frac{ctg\,x}{1}=\lim_{x\to\pi/2}\left(-\sin x\cos x\right)=0.$$

3.5.2. Funksiyaning monotonligi.

Ko‘p jarayonlar funksiya yordamida ifodalanishi mumkinligini ko‘rdik. Bu jarayonlarning dinamikasi bilish funksiyaning monotonligi bilan bog‘liq.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Ma’lumki, agar $x_1,x_2\in[a,b],\ x_1<x_2$ munosabatdan $f(x_1)\le f(x_2)$ munosobat kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada kamaymaydigan funksiya, agar $x_1,x_2\in[a,b],\ x_1<x_2$ munosabatdan $f(x_1)\ge f(x_2)$ munosobat kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada o‘smaydigan funksiya deb ataladi. Agar $x_1,x_2\in[a,b],\ x_1<x_2$ munosabatdan $f(x_1)<f(x_2)$ munosobat kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada o‘suvchi funksiya, agar $x_1,x_2\in[a,b],\ x_1<x_2$ munosabatdan $f(x_1)>f(x_2)$ munosobat kelib chiqsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada kamayuvchi funksiya deb ataladi. Funksiyaning bu xossalari hosila yordamida quyidagicha ifodalanadi:

Agar $y=f(x),\ x\in[a,b]$ funksiya uchun $f'(x)\ge 0$ $(f'(x)\le 0)$ munsobat o‘rinli bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada kamaymaydigan (o‘smaydigan) funksiya bo‘ladi.

Agar $y=f(x),\ x\in[a,b]$ funksiya uchun $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ munsobat o‘rinli bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada o‘suvchi (kamayuvchi) funksiya bo‘ladi.

1-misol. $y=a(x-3)^2$ funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlarini aniqlash uchun ikkita holni ko‘rish kerak: a) $a>0$ bo‘lganda funksiya $x\in(-\infty,3)$ oraliqda kamayadi, chunki bu oraliqda $f'(x)<0$, $x\in(3,-\infty)$ oraliqda esa o‘sadi, chunki bu oraliqda $f'(x)>0$; b) $a<0$ bo‘lganda funksiya $x\in(-\infty,3)$ oraliqda o‘sadi, chunki bu oraliqda $f'(x)>0$, $x\in(3,-\infty)$ oraliqda esa kamayadi chunki bu oraliqda $f'(x)<0$.

Mashqlarni bajaring: a) $y=x^3+3x^2-9x-2$ funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlarini toping; b) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlarini toping.

2-misol. Korxona bir oyda x birlikda mahsulot ishlab chiqarsin. Uning moliyaviy jang‘rmasining ishlab chiqarilgan mahsulot hajmiga bog‘lanishi quyidagicha bo‘lsin:

$$y=-0,01x^3+300x+300.$$

Bu funksiyadan hosila olamiz:

$$y'=-0,03x^2+300.$$

$y'<0\Rightarrow -0,03x^2+300<0\Rightarrow 0,03x^2-300>0$. Demak, agar $x>100$ bo‘lsa, ya`ni bir oydagi ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi 100 birlikdan oshsa, u holda korxona jamg‘rmasi kamayadi.

O‘suvchi va kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deb ataladi. O‘shish va kamayish oraliqlari esa monotonlik oraliqlari deb ataladi.

3.5.3.Funksiya ekstremumlari.

Ekstremum tushunchasini kiritishda zarur bo‘lgan belgilashlarni kirirtamiz. $|x-x_0|<\delta$ tengsizlik o‘rinli bo‘lgan barcha x nuqtalar to‘plami x_0 nuqtaning δ atrofi deb ataladi.

1-ta’rif. $|x-x_0|<\delta$ tengsizlik o‘rinli bo‘lgan barcha x nuqtalar uchun $f(x)\geq f(x_0)$ $(f(x)\leq f(x_0))$ tengsizliko‘rinli bo‘lsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning minimum (maksimum) nuqtasi, $f(x_0)$ esa bu funksiyaning minimumi (maksimumi) deb ataladi. Agar yuqoridagi

tehgsizliklar qat`iy bo‘lsa, u holda qat`iy minimum (maksimum) tushunchalarini ishlatamiz.

2-ta’rif. Funksiyaning minimum va maksimum nuqtalari uning ekstremum nuqtalari deb ataladi.

x_0 – ekstremum nuqta bo‘lsin. U holda $x_0 - \max \Rightarrow \Delta f(x_0) \le 0,\ x_0 - \min \Rightarrow \Delta f(x_0) \ge 0$.

x_0 – ekstremum nuqta bo‘lsin. U holda bu nuqtada $f'(x_0)$ hosila mavjud bo‘lmaydi yoki $f'(x_0) = 0$ bo‘ladi. Bu shart x_0 – ekstremum nuqta bo‘lshi uchun zaruriy sharti deb ataladi.

Agar x_0 – ekstremum nuqta uchun $f'(x_0) = 0$ tenlik o‘rinli bo‘lsa, u holda x_0 – statsionar nuqta deb ataladi. Agar x_0 – ekstremum nuqta uchun $f'(x_0)$ hosila mavjumi bo‘lmasa, u holda x_0 – kritik nuqta deb ataladi.

3-misol. $x_0 = 0$ nuqta $y = x^2$ funksiya uchun statsionar, $y = |x|$ funksiya uchun kritik nuqta deb ataladi.

Umuman olganda statsionar nuqtalar ham kritik nuqtalar ham kritik nutalar deb ataladi.

Mashqni bajaring. $f(x) = \sqrt[3]{x}(x-8)$ funksiyaning kritik nuqtalarini toping.

Yuqorida biz x_0 – nuqta $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘lishi uchun zaruriy shartni ko‘rdik. Endi biz x_0 – nuqta $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘lishi uchun yetarlilik shartini ko‘rib chiqamiz.

I. x_0 nuqtaning ixtiyoriy $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \delta$ atrofida $f(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud va uzluksiz bo‘lsin. U holda:

a) agar $x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) > 0,\ x \in (x_0 + \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$ bo‘lsa, u holda x_0 – maksimum nuqta;

b) agar $x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0,\ x \in (x_0 + \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$ bo‘lsa, u holda x_0 – minimum nuqta;

c) agar $x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0,\ x \in (x_0 + \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$ yoki $x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0,\ x \in (x_0 + \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$ bo‘lsa, u holda x_0 – statsionar nuqta.

II. x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo‘lsin. U holda:

a) agar $f''(x_0) < 0$ bo‘lsa, u holda x_0 – maksimum nuqta;

b) agar $f''(x_0) > 0$ bo‘lsa, u holda x_0 – minimum nuqta;

c) agar $f''(x_0) = 0$ yoki bo‘lsa, u holda ekstremum masalasi ochiq qoladi.

III. $f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$ bo‘lsin. U holda:

a) n – juft bo‘lsin. Agar $f^{(n)}(x_0) < 0$ bo‘lsa, u holda x_0 – maksimum; agar $f^{(n)}(x_0) > 0$ bo‘lsa, u holda x_0 – minimum nuqta bo‘ladi;

b) n – toq bo‘lsa, u holda x_0 – ekstremum nuqta bo‘lmaydi.

4-misol. $f(x) = \sqrt[3]{x}(x-8)$ funksiyani qaraymiz. Uning hosilasi $f'(x) = \frac{4}{3}\frac{x-2}{\sqrt[3]{x^2}}$. Demak $x = 0,\ x = 2$ kritik nuqtalar hisoblanadi. $(-\infty, 0),\ (0,2),\ (2,\infty)$ oraliqlarni o‘rganish kerak. Agar $x \in (-\infty, 0)$ bo‘lsa, u holda $f'(x) < 0$, ya`ni funksiya kamayuvchi; agar $x \in (0,2)$ bo‘lsa ham $f'(x) < 0$, ya`ni funksiya kamayuvchi; agar $x \in (2,\infty)$ bo‘lsa, u holda $f'(x) > 0$, ya`ni funksiya o‘suvchi. Shuday qilib, yuqoridagi xossalarga asosan, $x = 0$ nuqta ekstremum nuqta emas, $x = 2$ nuqta esa minimum nuqta bo‘lib $f(2) = -6\sqrt[3]{2}$.

5-misol. $f(x) = x^3 - 2x^2$ funksiyani qaraymiz. Uning hosilasi $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Demak $x = 0,\ x = 2$ kritik nuqtalar hisoblanadi. $(-\infty, 0),\ (0,2),\ (2,\infty)$ oraliqlarni o‘rganish kerak. Agar $x \in (-\infty, 0)$ bo‘lsa, u holda $f'(x) > 0$, ya`ni funksiya kamayuvchi; agar $x \in (0,2)$ bo‘lsa ham $f'(x) < 0$, ya`ni funksiya kamayuvchi; agar $x \in (2,\infty)$ bo‘lsa, u holda $f'(x) > 0$, ya`ni funksiya o‘suvchi. Shuday qilib, yuqoridagi xossalarga

asosan, $x=0$ nuqta maksimum nuqta $f(0)=0$, $x=2$ nuqta esa minimum nuqta bo‘lib $f(2)=-4$.

6-misol. *Firmaning daromad funksiyasi* $TR=4,000Q-33Q^2$*, to‘la xarajatlar funksiyasi* $TC=2Q^3-3Q^2+400Q+5,000$ $(Q>0)$ *ko‘rinishda ifodalansin. Firmaning foydasini maksimallashtiruvchi ishlab chiqarish hajmini va maksimal foydani toping*[1].

Yechish.*Foyda funksiyasi:*

$$\Pi=TR-TC=4,000Q-33Q^2-\left(2Q^3-3Q^2+400Q+5,000\right)=$$
$$=-2Q^3-30Q^2+3,600Q-5,000.$$

Bu funksiyaning ekstremumini topamiz: $\frac{d\Pi}{dQ}=0.$

$$\frac{d\Pi}{dQ}=-6Q^2-60Q+3,600=$$
$$=-6\left(Q^2+10Q-600\right)=-6(Q+30)(Q-20).$$

Demak, $Q_1=-30$, $Q_2=20$ *nuqtalar kritik nutalardir.* $\Pi''(20)=-300<0,$ *bo‘lgani uchun* $Q=20$ *maksimal foyda keltiruvchi ishlab chiqarish miqdori,*

$$\Pi(20)=-2(20)^3-30(20)^2+3,600(20)-5,000=$$
$$=-16,000-12,000+72,000-5,000=39,000.$$

esa maksimal foyda.

7-misol. Sotilgan mahsulotdan olingan daromad $TR=16Q-Q^2$ funksiya bilan mahsulotni ishlab chiqarishga sarf esa $TC=Q^2+1$ funksiya bilan ifodalansin. Ishlab chiqarishning va foydaning optimal miqdorini toping.

Yechish. Foyda funksiyasi: $\Pi=TR-TC=16Q-2Q^2-1.$ Bu funksiyaning ekstremumini topamiz: $\Pi'=16-4Q=0$. Demak, $Q=4$

1. M Vassilis C. Mavron and Timothy N. Phillips. Elements of Mathematics for Economics and Finance. Springer, London, 2007. 152 p.

nuqta kritik nutadir. $Q=4$ maksimal foyda keltiruvchi ishlab chiqarish miqdori, $\Pi_{\max}=31$ esa maksimal foyda.

Foyda maksimal bo'lishi uchun, marjinal daromad va marjinal harajatlarning teng bo'lishi zarur.

8-misol. Sotilgan mahsulotdan olingan даромад $TR=16Q-Q^2$ funksiya bilan mahsulotni ishlab chiqarishga sarf esa $TC=Q^2+1$ funksiya bilan ifodalansin. Korxona maksimal foyda olishi uchun har mahsulot birligiga qo'yigan optimal soliq miqdorini toping.

Yechish. t har bir mahsulotga qo'iylgan soliq miqdori bo'lsin. U holda foyda funksiyasi: $\Pi=TR-TC-tQ=16Q-2Q^2-1-tQ$. Bu funksiyaning ekstremumini topamiz: $\Pi'=16-4Q-t=0\Rightarrow Q=\dfrac{16-t}{4}$. Demak, $Q=4-\dfrac{t}{4}$ nuqta kritik nutadir. U holda:

$$T=tQ=t\left(4-\frac{t}{4}\right)=4t-\frac{t^2}{4}.$$

Bu funksiyaning maksimal qiymatini topamiz:

$$T'=4-\frac{t}{2}=0\Rightarrow t=8\Rightarrow Q=2.$$

Demak, har bir mahsulotga qo'iylgamn soliq $t=8$ bo'lsa, u holda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdoriining optimal qiymati $Q=2$ bo'ladi. Korxonaning maksimal foydasi esa $\Pi(2)=7$ bo'ladi.

Shunday qilib, soliq miqdorining kamayishi foydaning ortishiga olib kelar ekan.

3.5.4. Funksiyaning to'plamda eng katta va eng kichik qiymatlari.

$y=f(x)$ funksiya biror – bir $V\in R^1$ to'plamda aniqlangan va $x_0\in V$ bo'lsin.

Agar:

- har bir $x_0\in V$ uchun $f(x)\le f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $x_0\in V$ nuqtada $f(x)$ funksiya o'zining eng katta $f_{\max}=f(x_0)$ qiymatini qabul qiladi;

- har bir $x_0 \in V$ uchun $f(x) \geq f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $x_0 \in V$ nuqtada $f(x)$ funksiya o'zining eng kichik $f_{\max} = f(x_0)$ qiymatini qabul qiladi.

Agar $y = f(x)$ funksiya $V = [a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, kompakt to'plamda uzluksiz funksiya xossalaridan biriga ko'ra u ushbu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlarini qabul qiladi. Funksiya o'zining ekstremum qiymatlariga nafaqat kesma ichiga tegishli nuqtalarda, shu bilan birga uning chetki nuqtalarida ham erishishi mumkin.

Funksiyaning kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun:

a) funksiyaning kesmaga tegishli kritik nuqtalari aniqlaniladi;

b) funksiyaning topilgan kritik nuqtalaridagi va kesmaning chetki nuqtalaridagi qiymatlari hisoblanadi;

c) ushbu qiymatlar o'zaro solishtirilib uning eng katta va eng kichigi tanlanadi.

9-misol. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ funksiyaning [0,01;10] kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. Bu yerda $f'(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0$ bo'lib, $x = \pm 1$ nuqtalar funksiyaning stasionar nuqtalaridir. Ulardan $x = 1$ nuqta kesmaga tegishli yagona statsionar nuqtadir.

Shunday qilib, $x_1 = 0,01,\ x_2 = 1,\ x_3 = 10$ nuqtalarda funksiya qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(0,01) = 100,01;\quad f(1) = 2;\quad f(10) = 10,1.$$

Demak, qaralayotgan kesmada funksiyaning global minimumi $x = 1$ nuqtada bo'lib, $f(1) = 2$, $x = 0,01$ nuqta esa uning global maksimumi bo'lib $f(0,01) = 100,01$.

Agar qaralayotgan kesmada funksiya uzilish nuqtalariga ega bo'lsa, yuqoridagilarga qo'shimcha ravishda funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari funksiyaning uzilish nuqtalarida ham tekshiriladi.

Funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsa, u holda funksiyani a nuqtada o'ngdan, b nuqtada esa chapdan limitlarini tekshirish talab qilinadi.

Funksiyaning qavariqligi. Ma'lumki, biz qavariq to'plamda berilgan qavariq yoki botiq funksiyalar bilan tanishmiz. Ko'p hollarda, qavariq iborasi qavariqligi bilan quyiga, botiq iborasi esa qavariqligi bilan yuqoriga qaragan deb yuritiladi. Agar $y = f(x)$ funksiya uchun biror (a,b) intervalda

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

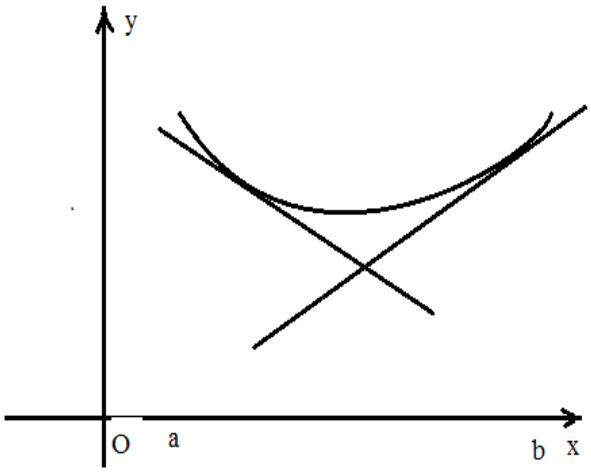
tengsizlik bajarilsa, unda qavariqlik yuqoriga qaragan;

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

tengsizlik bajarilsa, qavariqlik pastga qaragan bo'ladi.

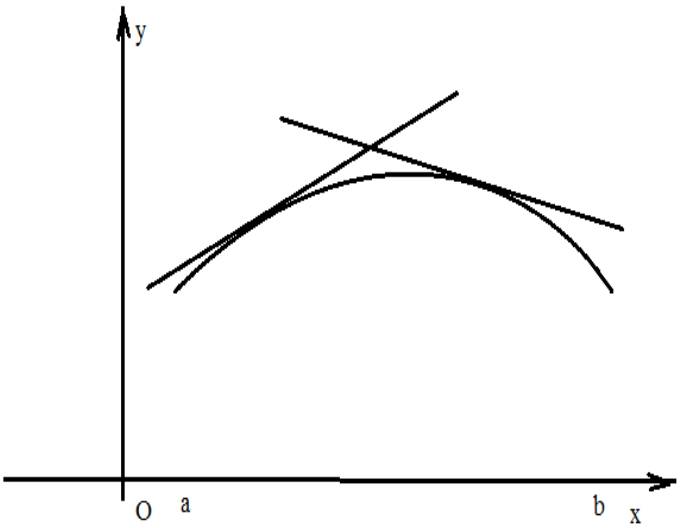
Agar $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) intervalda differensiallanuvchi bo'lsa, kesmada qavariq yoki botiq funksiyani o'zgacha ta'riflash va shu bilan birga, (a,b) intervalda ikki marta differensiallanuvchi bo'lsa, $[a,b]$ kesmada qavariqlik shartini aniqlash imkoni tug'iladi.

3-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya grafigi (a,b) interval chegarasida o'z urinmalaridan yuqorida yotsa, u holda funksiya $[a,b]$ kesmada qavariqligi bilan quyiga yo'nalgan deyiladi (3.5.4.1-rasm).



3.5.4.1-rasm

4-ta’rif. Agar $y = f(x)$ funksiya grafigi (a,b) interval chegarasida o’z urinmalaridan pastda yotsa, u holda funksiya $[a,b]$ kesmada qavariqligi bilan yuqoriga yo’nalgan deyiladi (3.5.4.2-rasm).



3.5.4.2-rasm

Endi biz funksiya qavariqligini tekshirish uchun zarur bo‘lgan teorema va qoidalarni keltiramiz.

1–teorema. $y = f(x)$ funksiya (a,b) intervalda ikkinchi tartibli hosilaga ega bo’lib, $[a,b]$ kesmaning chetki nuqtalarida uzluksiz bo’lsin. U holda (a,b) intervalda $f''(x) \ge 0$ tengsizlik bajarilsa, u holda funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi qavariqligi quyiga, $f''(x) \le 0$ bo’lganda esa uning bu kesmadigi qavariqligi yuqoriga yo’nalgan bo’ladi.

10-misol. $y = (x-4)\sqrt[3]{x}$ funksiyaning qavariqligini tekshiring.

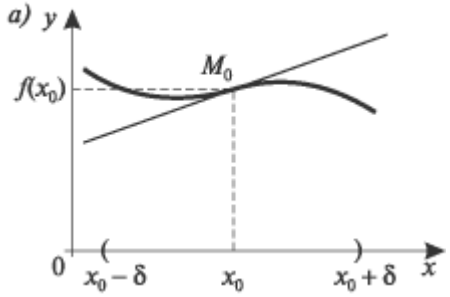
Yechish. Buning uchun funksiyadan ikkinchi tartibli hosila olamiz:

$$y'' = \frac{4x+2}{9x\sqrt[3]{x^2}}.$$

$x \in (-\infty,-2) \cup (0,\infty)$ oraliqda $f''(x) > 0$. Demak, funksiya qavariqligi bilan quyiga yo‘nalgan. $x \in (-2,0)$ oraliqda $f''(x) < 0$. Demak funksiya qavariqligi bilan yuqoriga yo’naltirilgandir.

5-ta’rif. Agar $y = f(x)$ funksiya grafigining x_0 absissali nuqtasiga o’tkazilganurinma mavjud bo’lib, $(x_0 - \delta, x_0)$ va $(x_0, x_0 + \delta)$ intervallarda funksiya grafigining qavariqligi turli yo’nalishda bo’lsa, u holda

$M(x_0, f(x_0))$ nuqta funksiya grafigining burilish nuqtasi deyiladi (3-rasm).



3-rasm

2–teorema (burilish nuqta uchun zaruriy shart). Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror bir atrofida aniqlangan bo'lib, $M(x_0, f(x_0))$ nuqta funksiya grafigining burilish nuqtasi bo'lsa, u holda yoki $f''(x_0) = 0$ yoki $f(x_0) -$ mavjud emas.

3–teorema (burilish nuqta uchun yetarli shart). $y = f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0, f(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan urinma, xususan vertikal urinma bo'lib, x_0 nuqtaning biror bir δ atrofida ikkinchi tartibli hosila mavjud bo'lsin va $f''(x_0) = 0$ yoki $f(x_0) -$ mavjud bo'lmasin. Agar $(x_0 - \delta, x_0)$ va $(x_0, x_0 + \delta)$ intervallarda $f''(x)$ turli ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, $M(x_0, f(x_0))$ nuqta $y = f(x)$ funksiya grafigining burilish nuqtasi bo'ladi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ferma teoremasining shartlari nimalardan iborat?
2. Ferma teoremasi tasdiђi љanday bo'ladi?
3. Roll teoremasining nechta sharti bor va ularni sanang?
4. Roll teoremasi shartlarida, uning tasdiђi nimadan iborat?
5. Geometrik tomondan Roll teoremasining tasdiђi nimani ifodalaydi?
6. Ferma teoremasi geometrik nuљtai nazardan nimani anglatadi?
7. Lagranj teoremasi shartlarini sanab ko'ring, ular nimalardan iborat?
8. Lagranj teoremasining tasdiђi nima?

9. Lagranj teoremasi tasdiqi geometrik tomondan nimani bildiradi?
10. Lagranj yoki chekli orttirmalar formulasini yozing?
11. Chekli orttirmalar deyilishini tushinasizmi?
12. Teylor formulasi nimadan iborat?
13. Makloren formulasi qanday olinadi?

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Funksiyalarning monotonlik oraliqlarini toping**:**

1. $y = e^x + 5x.$

2. $y = \ln(1 + x^2).$

Funksiyalarning ekstremum qiymatlarini toping**:**

1. $y = \dfrac{2^x}{x}.$

2. $y = e^x + e^{-x}.$

$y = \sqrt{4x - x^2}.$

Sotilgan mahsulotdan olingan foyda $y = \dfrac{1}{50}x^2 + 15x + 800$ funksiya bilan mahsulotni ishlab chiqarishga sarf esa $p = 50 - \dfrac{1}{10}x$ funksiya bilan ifodalansin. Ishlab chiqarishning va foydaning optimal miqdorini toping.

Quyidagi funksiyalarning berilgan kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarini aniqlang:

3. $y = x^4 - 8x^2 + 3;\ [-2;\ 2].$

4. $y = x + 3\sqrt[3]{x};\ [-10; 1].$

5. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3; [-1; 2].$

6. $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 9};\ [4; 6].$

7. $y = \cos 2x + 2x;\ \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$

8. $y = \sin x \sin 2x;\ (-\infty;+\infty).$

9. $y = \ln x;\ (0;1].$

10. $y = x \cdot \ln x;\ \left[\frac{1}{e^2};1\right].$

3.6 -§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya differensiali. Xususiy hosila va yuqori tartibli differensiallar

Tayanch iboralar: xususiy hosila, aralash hosila, funksiyaning to‘la orttirmasi, funksiyaning to‘la differensiali, to‘la differensialning invariantligi, yuqori tartibli xususiy hosila, aralash xususiy hosila, oshkormas funksiyaning hosilasi.

3.6.1.Funksiyasining xususiy hosilalari.

n o‘zgaruvchili $y = f(M)$ funksiya $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$ nuqtaning biror bir $U_\delta(M_0)$ atrofida aniqlangan bo‘lsin. $M_{\Delta_i}(x_1^0,...x_i^0+\Delta x_i,...,x_n^0)\in U_\delta(M_0)$ nuqtani qaraymiz.

1-ta’rif. Agar $\lim\limits_{\Delta x_i\to 0} = \dfrac{f(M_{\Delta_i})-f(M_0)}{\Delta x_i}$ mavjud bo‘lib bu limit chekli bo‘lsa, u holda bu limitga $y = f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi x_i o‘zgaruvchi bo‘yicha xususiy hosilasi deyiladi.

Xususiy hosila quyidagicha belgilanadi: $\dfrac{\partial y(M_0)}{\partial x_i} = y_{x_i}(M_0)$, $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x_i} = f_{x_i}(M_0)$.

Shunday qilib,

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(M_i)-f(M_0)}{\Delta x_i} \qquad (1)$$

Xususiy hosilaning ta`rifidan, $y = f(M)$ funksiyadan x_i bo‘yicha xususiy hosilani topishda $x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n$ o‘zgaruvchilarni o‘zgarmas deb qarab, funktsiyadan x_i bo‘yicha oddiy hosilasini topish yetarli.

Agar funksiya ikki o‘zgaruvchili $z = f(x,y)$ bo‘lsa, xususiy hosilalar f_x, f_y ko‘rinishda, agar funksiya uch o‘zgaruvchili $u = f(x,y,z)$ bo‘lsa, xususiy hosilalar f_x, f_y, f_z ko‘rinishda belgilanadi.

1-misol. $f(x,y,z) = 2x^5z^2 - 3xy^4 + 7y - 9$ funksiyaning barcha o‘zgaruvchilari bo‘yicha xususiy hosilalarini toping.

Yechish. Ta`rifga binoan:

$$f_x = 10x^4z^2 - 3y^4,\ f_y = -12xy^3 + 7,\ f_z = 4x^5z.$$

2-misol. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiyaning $M(-4;3)$ nuqtadagi xususiy hosilalarini toping.

Yechish.

$$f_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow f_x(M) = -\frac{4}{5},$$

$$f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow f_x(M) = -\frac{3}{5}.$$

3.6.2. Funksiyaning to‘la orttirmasi.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning to‘la orttirmasini topishni $y = f(M)$ funksiya misolada ko‘rib chiqamiz. $y = f(M)$ funksiya $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$ nuqtaning biror bir $U_\delta(M_0)$ atrofida aniqlangan bo‘lsin. $M_\Delta(x_1^0 + \Delta x_1,...x_i^0 + \Delta x_i,...,x_n^0 + \Delta x_n) \in U_\delta(M_0)$ nuqtani qaraymiz.

$f(M_\Delta) - f(M_0)$ ayirma $y = f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi to‘la orttirmasi deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta f = f(M_\Delta) - f(M_0)$$

3-misol. $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ funksiyaning $M_0(1;-2)$ nuqtadagi to‘la orttirmasini toping.

Yechish.

$$\Delta f(M_0) = (1+\Delta x_1)^2 + (-2+\Delta x_2)^2 - \left[1^2 + (-2)^2\right] = 1 + 2\Delta x_1 +$$

$$+\Delta x_1^2 + 4 - 4\Delta x_2 + \Delta x_2^2 - 1 - 4 = 2\Delta x_1 - 4\Delta x_2 + (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2.$$

3.6.3. Funksiyaning differensiallanuvchanligi.

Funksiyaning Δf orttiamasidan foydalanib ko‘p o‘zgaruvchili funrtsiyalar uchun to‘la differensial tushunchasini kiritamiz. $y = f(M)$ funksiya $M_0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0\right)$ nuqta atrofida aniqlangan bo‘lsin.

2-ta’rif. Agar $y = f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi $\Delta f(M_0)$ to‘la orttirmasini $\Delta f(M_0) = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_n\Delta x_n + \alpha_1(\Delta x_1) + ... + \alpha_n(\Delta x_n)$ (2) ko‘rinishda ifoda etish mumkin bo‘lsa, u holda $f(M)$ funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

Bu yerda, $A_1, A_2, ..., A_n$ sonlar $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$ orttirmalatga bog‘liq emas va $\Delta x_1 \to 0 \Rightarrow \alpha_1(\Delta x_1) \to 0, \Delta x_2 \to 0 \Rightarrow \alpha_2(\Delta x_2) \to 0, ..., \Delta x_n \to 0 \Rightarrow \alpha_n(\Delta x_n) \to 0$.

4-misol. $f(x, y) = x^2 + y^2$ funksiya $M_0(-1; 2)$ nuqtada differensiallanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz.

Yechish. Buning uchun uning differensialini hisoblaymiz:

$$\Delta f(M) = 2\Delta x - 4\Delta y + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = A_1\Delta x + A_2\Delta y + \alpha_1(\Delta x) + \alpha_2(\Delta y).$$

Bu yerda $A_1 = 2,\ A_2 = -4,\ \alpha_1(\Delta x) = (\Delta x)^2,\ \alpha_2(\Delta y) = (\Delta y)^2$. Demak funksiya differensiallanuvchi.

3-ta’rif. Agar $V \in R^n$ to‘plamda aniqlangan $y = f(M)$ funksiyaning $\Delta f(M)$ to‘la orttirmasini $\forall M \in V$ nuqtada

$$\Delta f(M) = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_n\Delta x_n + \alpha_1(\Delta x_1) + ... + \alpha_n(\Delta x_n) \qquad (3)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lsa, u holda $f(M)$ funksiya V to‘plamda differensiallanuvchi deyiladi.

5-misol. n o‘zgaruvchili chiziqli

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$$

funksiya R^n fazoning ixtiyoriy M nuqtasida differensiallanuvchidir.

3.6.4. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya differensiali.

4-ta’rif. $y = f(M)$ funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsin. M_0 nuqtada $f(M)$ funksiya orttirmasining bosh chiziqli qismi

uning M_0 nuqtadagi to‘la differensiali deyiladi va $df(M_0)$ kabi belgilanadi va quyidagicha yoziladi:

$$df(M_0)=\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}dx_n$$

6-misol. $f(x,y,z)=x^3y+y^2z+z$ funksiyaning $M(2;\ 1;\ -3)$ nuqtadagi differensialini topamiz. Buning uchun uning xususiy hosilalarini hisoblab olamiz:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x}=3xy=12,\ \frac{\partial f(M)}{\partial y}=x^3+2yz=2,\ \frac{\partial f(M)}{\partial z}=y^2+1=2.$$

$$df(M)=12dx+2dy+2dz$$

Agar $y=f(M)$ funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda cheksiz kichik $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_n$ miqdorlar uchun

$$\Delta f(M_0)\approx df(M_0)$$

$$\Delta f(M_0)\approx df(M_0)$$

munosabat bajariladi, ya`ni

$$\Delta f(M_0)\approx\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}\Delta x_1+...+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}\Delta x_n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(M_\Delta)\approx f(M_0)+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}\Delta x_1+...+\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Bu taqribiy hisoblash formulasi deb ataladi.

7-misol. Taqribiy hisoblang: $1{,}02^{2{,}01}$.

Yechish. Buning uchun $z=x^y$ funksiyani qaraymiz. Uning $M_0(1;\ 2)$ nuqtadagi qiymati $z(M_0)=1^2=1$ ga teng. $z=x^y$ funksiya uchun taqribiy hisoblash formulasidan foydalanamiz:

$$\Delta z\approx yx^{y-1}\Delta x+x^y(\ln x)\Delta y.$$

Bu yerda

$$\Delta z=z(M_\Delta)-z(M_0)=(1+0{,}02)^{2+0{,}01}-1^2,\ x=1,\ y=2,\ \Delta x=0{,}02,\ \Delta y=0{,}01.$$

U holda

$$z(M_\Delta)=(1+0{,}02)^{2+0{,}01}=1+2\cdot1^{2-1}\cdot0{,}02+1^2\cdot\ln1\cdot0{,}01=1{,}04.$$

Erkli o‘zgaruvchilarni har qanday almashtishda ham to‘la diferentsial formulasining saqlanish qonunini (invariantligi) $z=f(x,y)$ ikki o‘zgaruvchili funksiya misolida ko‘rsatamiz.

$x=\varphi(t);\ y=\psi(t)$ bo‘lib, $\varphi'(t),\ \psi'(t)$ hosilalar mavjud bo‘lsin. Δt orttirma berib,

$$\varphi'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t},\quad \psi'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

ifodalarni hosil qilamiz. U holda $z=f(x,\ y)$ funksiya:

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$$

orttirma oladi. To‘la orttirma formulasiga asosan,

$$\Delta z=f_x'(x,y)\Delta x+f_y'(x,y)\Delta y+\alpha_1(\Delta x)+\alpha_2(\Delta y). \qquad (5)$$

$\alpha_1,\ \alpha_2$ chiksiz kichik miqdorlar, ya`ni

$$\Delta t\to 0\Rightarrow \Delta x\to 0\Rightarrow \alpha_1\to 0;\ \Delta t\to 0\Rightarrow \Delta y\to 0\Rightarrow \alpha_2\to 0.$$

(5) ifodani Δt ga bo‘lib

$$\frac{\Delta z}{\Delta t}=f_x'(x,y)\frac{\Delta x}{\Delta t}+f_y'(x,y)\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta t}\alpha_1(\Delta x)+\frac{1}{\Delta t}\alpha_2(\Delta y)$$

ifodani hosil qilamiz. Bundan $\Delta t\to 0$ limitga o‘tsak

$$z_t'=f_x'(x,y)\varphi'(t)+f_y'(x,y)\psi'(t). \qquad (6)$$

(6) ning ikki tamonini ham dt ko‘paytirib, $dz=z_t'dt,\ dx=\varphi'(t)dt\ \ dy=\psi_t'dt$ belgilashlardan foydalanib

$$dz=f_x'(x,y)dx+f_y'(x,y)dy \qquad (7)$$

formulani hosil qilamiz. (7) to‘la diferensial formulaning saqlanish qonuni deyiladi.

Bu qoidadan ko‘p o‘zgaruvchili funksiyada murakkab funksiyani differensiallash qoidasi kelib chiqadi.

Masalan,

$\Psi=F(u,\ v,\ \omega):\ u=u(x,\ y,\ z,\ t),\ v=v(x,\ y,\ z,\ t),\ \omega=\omega(x,\ y,\ z,\ t)$ funksiyaning to‘la differetsiali:

$$d\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Psi}{\partial z}dz+\frac{\partial\Psi}{\partial t}dt. \qquad (8)$$

Bu yerda

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial x};$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial y};$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial z};$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \omega}\frac{\partial \omega}{\partial t}.$$

(8) formulaga asosan $F(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ funksiyaning to‘la d diferensialini

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} \qquad (9)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Agar bu yerda $t \equiv x_1$ deb olsak (9) quyidagi ko‘rinishga keladi

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} + ... + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1}. \qquad (10)$$

Bu yerdagi $\frac{dF}{dx_1}$ hosila $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ hosiladan farqli ravishda x_1 o‘zgaruvchi bo‘yicha to‘la hosila deb ataladi.

Ikki o‘zgaruvchili $z = F(x, y)$ funksiya misolida $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ xususiy va $\frac{dF}{dx_1}$ to‘la hosilalarning turli ma`noga ega ekanligini geometrik nuqtai-nazarda tushuntiramiz. l yoyning tenglamasi $y = f(x)$ ko‘rinishda bo‘lsin. U holda l yoy bo‘ylab $z = F(x, y)$ funksiyani $z = F(x, f(x))$ ko‘rinishda yozish mumkin. (10) dan foydalanib $z = F(x, f(x))$ funksiyaning $M(x, y)$ nuqtada to‘la $\frac{dF}{dx}$ hosilalasini yozamiz:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} f'(x). \qquad (11)$$

Bundan ko‘rinadiki, $M(x, y)$ nuqtadagi $\frac{dF}{dx}$ to‘la hosilala $M(x, y)$ nuqtadan o‘tuvchi $y = f(x)$ egri chiziqning yo‘nalishiga bo‘g‘liq. $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ xususiy hosilala esa $M(x, y)$ nuqtaning faqat o‘ziga bo‘g‘liq.

3.6.5. Yuqori tartibli xususiy hosila va differensiallar.

Faraz qilaylik, M_0 nuqta va uning $U_\delta(M_0)$ atrofida $f(M)$ funksiya barcha $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x_i}$ xususiy hosilalarga ega bo‘lsin.

5-ta’rif.

Agar (12) da $i=j$ bo‘lsa, u holda uni 2-tartibli xususiy hosila $i\neq j$ bo‘lsa uni 2-tartibli aralash hosila deb ataladi. Xuddi shunday usulda 3-, 4- va hakazo barcha yuqori tartibli hosilalar aniqlanadi. Shuni alohida ta`kidlash kerakki aralash hosilada natija qaysi o‘zgaruvchi bo‘yicha hosila olinish tartibiga bog‘liq emas alohida har bir o‘zgaruvchi bo‘yicha hosila tartibi o‘zgarmasligi kerak, ya`ni:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial x_j^2 \partial x_i},\ \frac{\partial^4 f}{\partial x_j^2 \partial x_j^2}=\frac{\partial^4 f}{\partial x_j^2 \partial x_i^2},\ldots$$

8-misol. $f(M)=2x_1^5x_2^2-3x_1^6+4x_2^3$ funksiyaning barcha ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

Yechish.. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=10x_1^4x_2^2-18x_1^5;\qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}=4x_1^5x_2+12x_2^2.$$

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini topamiz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)=40x_1^3x_2^2-90x_1^4;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)=20x_1^4x_2;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=4x_1^5+24x_2.$$

$y=f(M)$ funksiyaning yuqori tartibli differensiali quyidagicha aniqlanadi:

$d^2f=d(df)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}dx_i dx_j$ -2 tartibli differensial,

$d^3f=d(d^2f)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}dx_i dx_j dx_k$ -3 tartibli differensial va hokazo.

3.6.6. Murakkab va oshkormas funksiya hosilalari.

$F(x,y)=0$ oshkormas funksiyaning hosilasini hisoblash uchun $F(x,y),\ F_x(x,y),\ F_y(x,y)$ funksiyalarning uzluksizligini talab qilamiz. Agar $F_y(x,y)\neq 0$ bo‘lsa, u holda:

$$y_x=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

Xuddi shunday usulda 3 va undan ko‘p o‘zgaruvchili oshkormas funksiyalardan hosilalar olish mumkin.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning xususiy orttirmasi deb nimaga aytiladi?
2. Ikki argumentli funksiyaning xususiy xosilasi deb nimaga aytiladi?
3. Ikki o‘zgaruvchili(argumentli) funksiyaning xususiy hosilalari nechta bo‘ladi?
4. Ikki o‘zgaruvchili(argumentli) funksiyaning to‘la differensiali deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning to‘liq orttirmasi va to‘la differensiali orasida bog’lanish bormi?
6. To‘la differensialdan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkinmi?
7. Ikkinchi tartibli xususiy hosila qanday topiladi?
8. Ikki o‘zgaruvchili(argumentli) funksiyaning ikkinchi tartibli to‘la differensiali nimaga teng?

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Quyidagi funksiyalarning xususiy hosilalarini toping:

1. $z = y\,e^{\frac{x}{y}}$;
2. u=(x-y) (x-z) (y-z).
1. $z(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$
2. $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$

3. $z(x,y)=-\frac{Cosx}{Cosy}$

4. $z(x,y)=ln(x^2-y^2)$;

5. $z(x,y)=x\ Sin(x+y)$;

6. $z(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Quyidagi funksiyalar to‘la differensiallarini toping:

7. $z=5x^3y^2$;

8. $z=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}$;

9. $z=(\sin x)^{\cos y}$;

10. $z=e^{x^2+y^2}$;

11. $z=arctg\frac{x}{y}$;

12. $z=sin^2x+cos^2y$;

13. $z=x\ ln\frac{y}{x}$;

3.7-§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ekstremumi

Tayanch iboralar: lokal ekstremum, global ekstremum, statsionar nuqta, yuqori tartibli xususiy hosila, aralash xususiy hosila, Teylor qatori, gradient, minimum, maksimum.

3.7.1.Funksiyaning lokal ekstremumlari. Statsionar nuqta.

$y=f(M)$ funksiya M_0 nuqtaning $U_r(M_0)\subset D(f)$ – atrofida aniqlangan bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar M_0 nuqtaning shunday $U_r(M_0)$ atrofi mavjud bo‘lsaki, barcha $M\in U_r(M_0)$ nuqtalar uchun $f(M_0)<f(M)$ $\left(f(M_0)>f(M)\right)$ tengsizlik bajarilsa, M_0 nuqta lokal minimum (maksimum) nuqta deyiladi.

2-ta’rif. Funksiyaning lokal maksimum va minimum nuqtalariga funksiyaning lokal ekstremum nuqtalari deb ataladi.

Funksiyaning ekstremum nuqtalarini aniqlash uchun yo‘nalish bo‘yicha hosila va gradient tushunchasini kiritamiz.

$u = f(x,y,z)$ funksiya $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta atrofida anuqlangan va $\vec{l} \neq 0$ vektor berilgan bo‘lsin. Bu yerda $\vec{l}$ vektor yo‘nalishida $\vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ birlik vektorni aniqlaymiz. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtada orqali $\vec{l}$ vektor yo‘nalishi bo‘ylab nur o‘taqazamiz va uning tenglamasini parametrik tenglama ko‘rinishida yozamiz:

$$x = x_0 + t\cos\alpha,\ \ y = y_0 + t\cos\beta,\ \ \ z = z_0 + t\cos\gamma,\ \ t \geq 0. \qquad (1)$$

Bu yerda $t = \rho\big(M(x,y,z), M_0(x_0,y_0z_0)\big)$, chunki

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = t\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = t.$$

(1) nurda $f(x,y,z) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)$ funksiyani qaraymiz. U holda $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtada $\vec{l}$ yo‘nalish bo‘yicha hosila $\frac{\partial f}{\partial l}$ quyidagicha aniqlanadi:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \lim_{t\to 0}\frac{f(M) - f(M_0)}{t} = \frac{d}{dt} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma)\Big|_{t=0}.$$

Shunday qilib yo‘nalish bo‘yicha hosila $\frac{\partial f}{\partial l}$ faqat M_0 nuqta va $\vec{l}$ vektor yo‘nalishi bilan aniqlanib u koordinatalar sistemasining tanlanishiga bog‘liq emas. $\frac{\partial f}{\partial l}$ hosilani murakkab funksiya hosilasi formulasi yordamida hisoblasak:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

Bu yerda $\left\{\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\right\} = \nabla f(M_0)$ f funksiyaning M_0 nuqtadagi gradient deb ataladi va $gradf(M_0)$ yoki $\nabla f(M_0)$ (∇f – nabla ef) ko‘rinishda belgilanadi.

1-misol. $f(x_1,x_2) = 3x_1^2x_2 - 4x_1^3 + 2x_2^2 - 5$ funksiyaning $M_0(1;-1)$ nuqtadagi gradientini toping.

Yechish.

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_1} = 6x_1 \cdot x_2 - 12x_1^2, \qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} = -18;$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_2} = 3x_1^2 + 4x_2, \qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2} = -1.$$

Demak, $grad\ f(M_0) = (-18,-1)$.

Demak, birlik vektor: $\vec{l}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$; M_0 nutada $f(x,y,z)$ funksiyaning gradient esa $\left\{\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\right\} = \nabla f(M_0)$ ko‘rinishda aniqlanadi. U holda

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\cos\gamma = \\ = |\nabla f|\left|\vec{l}_0\right|\cos\varphi = |\nabla f|\cos\varphi \qquad (2)$$

Bundan ko‘rinib turibdiki agar $\Delta f \neq 0$ bo‘lsa, u holda M_0 nutadagi yo‘nalish bo‘yicha hosila $\frac{\partial f}{\partial l}$ o‘zining eng katta qiymatiga faqat ∇f ning yo‘nalishida erishadi, ya`ni $\varphi = 0$ bo‘lganda. Bu yerda $\varphi - \nabla f$ va $\vec{l}_0$ vektorlar orasidagi burchak.

3.7.2 Funksiya ekstremumining zaruriy sharti.

Gradient tushunchasidan foydalanib ekstremumning zaruriy shartini aniqlaymiz.

3-ta’rif. Agar $M_0 \in R^n$ nuqtada $f(M)$ funksiyaning gradiyenti nol vektor, ya`ni $grad\ f(M_0) = 0$ bo‘lsa, u holda $M_0 \in R^n$ nuqta $f(M)$ funksiyaning statsionar nuqtasi deyiladi.

2-misol. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 6x_1 - 9x_2 - 5$ funksiyaning statsionar nuqtasini toping.

Yechish. Funksiyaning gradiyentini aniqlaymiz:

$$grad\ f(M) = \left(2x_1 - x_2 + 6;\ \ -x_1 + 2x_2 - 9\right).$$

Bundan

$$grad\ f(M)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 9 = 0 \end{cases}$$

sistemani yechimi $M_0(-1;4)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo‘ladi.

$M(a,b)$ nuqta atrofida uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lgan $z = f(x,y)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Bu nuqtada quyidagi orttirmani qaraymiz:

$$f(a+h,b+k) - f(a,b).$$

Quyidagi belgilash kiritamiz:

$$\varphi(t) = f(a+ht,b+kt).$$

Bu yerda $\varphi(0) = f(a,b), \varphi(1) = f(a+h,b+k)$. $\varphi(t)$ funksiyaga [0;1] Lagranj o‘rta qiymat teoremasini: $f(a) - f(b) = (b-a) f'(\xi),\ \xi \in (a;b)$ qo‘llaymiz:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = (1-0)\varphi'(\xi),\ \xi \in (0;1). \qquad (3)$$

Bu yerda

$$\varphi'(t) = hf'_x(a+ht,b+kt) + kf'_y(a+ht,b+kt). \qquad (4)$$

(3) tenglikni quyidagicha yozib olamiz:

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = hf'_x(a+h\xi,b+k\xi) + kf'_y(a+h\xi,b+k\xi). \quad (5)$$

Bu tenglik ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun Lagranj funksiyasi deb ataladi.

Teylor formulasi. Lagranj o‘rta qiymat teoremasining umumlashmasi Teylor o‘rta qiymat teoremasi yoki kengaytirilgan o‘rta qiymat teoremasi ko‘p holarda Teylor formulasi deb atalib quyidagi ko‘rinishga ega:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi),\ \xi \in (a,b). \quad (6)$$

(5) formulani $f(x,y)$ uchun keltirib chiqaramiz. Buning uchun $\varphi(t) = f(a+ht,b+kt)$ funksiyani [0;1] kesmada Teylor formulasining 2 – tartibli hadi bilan yozib olamiz:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1-0}{1!}\varphi'(0) + \frac{(1-0)^2}{2!}\varphi''(\xi),\ \xi \in (a,b). \qquad (7)$$

(4) ni differntsiallab quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\varphi''(t) = h^2 f''_{xx}(a+ht,b+kt) + 2hkf''_{xy}(a+ht,b+kt) + k^2 f''_{yy}(a+ht,b+kt).$$

(4) ga asosan $\varphi'(0) = hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b)$ bo‘lgani uchun (7) quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + [hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b)] +$$

$$+\frac{1}{2!}[h^2 f''_{xx}(a+\xi t, b+\xi t) + 2hkf''_{xy}(a+\xi t, b+\xi t) + k^2 f''_{yy}(a+\xi t, b+\xi t)],\ \xi \in (0;1).$$

Bu formula ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun Teylor o‘rta qiymat teoremasi deb ataladi.

Bu ikkita o‘rta qiymat teoremasini uch va undan yuqori o‘zgaruvchili funksiyalar uchun ham qo‘llash mumkin.

3-misol. $M(1;2)$ nuqtada $f(x,y) = x^2 + y^2$ funksiya uchun Lagranj va Teylor o‘rta qiymat teoremasini yozing.

Yechish. Bu funksiya uchun Lagranj o‘rta qiymat teoremasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$(1+h)^2 + (2+k)^2 = 1^2 + 2^2 + 2h(1+\xi h) + 2k(2+\xi k) =$$

$$= 1^2 + 2^2 + 2h + 2h^2\xi + 4k + 2k^2\xi = (1^2 + 2h + 2h^2\xi) + (2^2 + 4k + 2k^2\xi).$$

Bu yerda $\xi = \frac{1}{2} \in (0;1)$ bo‘lsa tenglik o‘rinli bo‘ladi.

U holda bu funksiya uchun Teylor o‘rta qiymat teoremasini yozamiz va bu teorema quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$(1+h)^2 + (2+k)^2 = 1^2 + 2^2 + 2h\cdot 1 + 2k\cdot 2 + \frac{1}{2}(2h^2 + 2k^2) =$$

$$= 1^2 + 2^2 + 2h + h^2 + 4k + k^2 = (1^2 + 2h + h^2) + (2^2 + 4k + k^2).$$

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarning M_0 ekstremum nuqtasini topishni ikki o‘zgaruvchili $z = f(x,y)$ funksiya misolida ko‘rib chqamiz. $M_0(a,b)$ nuqta atrofida $f(x,y)$ uchun Teylor formulasini yozamiz:

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + [hf'_x(a,b) + kf'_y(a,b)] +$$

$$+\frac{1}{2!}[h^2 f''_{xx}(x,y) + 2hkf''_{xy}(x,y) + k^2 f''_{yy}(x,y)] \quad . \qquad (8)$$

Bu yerda $f_x = f_y = 0$ bo‘lgani uchun (8) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2!}[h^2 f''_{xx}(x,y) + 2hkf''_{xy}(x,y) + k^2 f''_{yy}(x,y)].$$

Quyidagi belgilashlar kiritamiz:

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2} = A, \qquad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} = B, \qquad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2^2} = C, \; -\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

bo‘lsin. U holda:

1) agar $\Delta = B^2 - AC < 0$ bo‘lsa, M_0 statsionar nuqta funksiyaning lokal ekstremum nuqtasi bo‘lib: a) $A < 0$ bo‘lsa, M_0 statsionar nuqta maksimum nuqta; b) $A > 0$ bo‘lsa, M_0 statsionar nuqta minimum nuqta bo‘ladi.

2) agar $B^2 - AC > 0$ bo‘lsa, u holda M_0 statsionar nuqta ekstremum nuqta bo‘lmaydi;

3) agar $B^2 - AC = 0$ bo‘lsa, u holda nuqtaning ekstremum nuqtasi bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin. Bu holda qo‘shimcha tekshirish talab etiladi.

4-misol. 2– misolda keltirilgan funksiyaning $M_0(-1;4)$ statsionar nuqtasini ekstremumga tekshiramiz:

$$A = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2} = 2; \qquad B = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} = -1; \quad C = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2^2} = 2.$$

$$B^2 - AC = (-1)^2 - 2 \cdot 2 = -3 < 0,$$

bo‘lgani uchun $M_0(-1;4)$ statsionar nuqta ekstremum va $A = 2 > 0$ bo‘lganidan minimum nuqta bo‘ladi.

Endi ko‘p o‘zgaruvchil funksiya uchun ekstremumni topish masalasini ko‘rib chiqamiz. X^0 nuqta $f(X)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo‘lsin.

1-teorema. X^0 statsionar nuqta local ekstremal nuqta bo‘lishi uchun shu nuqtada quyidagi

$$H[X^0]=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

matritsaning (Gesse matritsasi) ishorasi aniqlangan bo‘lishi yetarli.

Agar $H\left[X^0\right]$ musbat aniqlangan bo‘lsa, u holda X^0 nuqta minimum nuqta; Agar $H\left[X^0\right]$ manfiy aniqlangan bo‘lsa, u holda X^0 nuqta maksimum bo‘ladi.

Ishorasi aniqlangan matritsalar haqidagi ba`zi tushunchalarni keltirib o‘tamiz. $n\times n$ tartibli kvadrat $A=(a_{ij})$ simmetrik matritsa berilgan bo‘lsin.

4-ta’rif. $A=(a_{ij})$ matritsaning yuqori chap burchagidan boshlab hosil qilingan quyidagi $1,\ 2,\ ...,\ n-$ tartibli minorlar, ya`ni

$$a_{11},\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad ...,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

minorlar matritsaning bosh minorlari deyiladi.

2-teorema. $A=(a_{ij})$ matritsaning ketma-ket joylashgan bosh minorlari qat`iy musbat sonlar ketma-ketligini tashkil qilganda va faqat shundagina, bu matritsa musbat aniqlangan bo‘ladi.

Agar $A=(a_{ij})$ matritsaning toq nomerda joylashgan bosh minorlariga mos son manfiy juft nomerda joylashgan bosh minorlariga mos son musbat bo‘lsa, u holda $A=(a_{ij})$ matritsa manfiy aniqlangan bo‘ladi.

5-misol. Berilgan funksiyaga ekstremal qiymat beruvchi nuqtalar topilsin:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

Yechish. Funksiya ekstremumi mavjudligining zaruriy shartiga asosan:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_3 - 2x_2 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2 + x_2 - 2x_3 = 0.$$

Bu tenglamalardan tuzilgan sistemaning yechimi $X^0\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ nuqta bo‘ladi. Demak, $X^0\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ – statsionar nuqta.

Yetarlilik shartining bajarilishini tekshirish uchun X^0 nuqtada Gesse matrisasini tuzamiz:

$$H\left[X^0\right] = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisaning bosh minorlari mos ravishda -2, 4, -6. Demak, X^0 nuqtada $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ funksiya maksimumga erishadi.

$y = f(X)$ funksiya chegaralangan, yopiq V to‘plamda aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Funksiya to‘plamining har bir nuqtasida, uning ba`zi nuqtalaridan tashqari, xususiy hosilalarga ega bo‘lsin. Ushbu holda, V to‘plamga tegishli shunday X^0 nuqta topiladiki, bu nuqtada $f(X)$ funksiya o‘zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishadi. Funksiya V to‘plamda o‘zining eng katta (eng kichik) qiymatini nafaqat ichki X^0 statsionar nuqtada yoki xususiy hosilalaridan biri mavjud bo‘lmagan nuqtada, shu bilan birga V to‘plamning chegarasida ham erishishi mumkin.

Yuqoridagilarni e`tiborga olib, $f(X)$ funksiyaning berilgan V to‘plamda eng katta va eng kichik qiymatlarini topish jarayonini quyidagi ketma – ketlikda amalga oshiriladi:

a) V to‘plamning $f(X)$ funksiya xususiy hosilalari mavjud bo‘lmagan nuqtalari aniqlanadi;

b) $f(X)$ funksiyaning V to‘plamga tegishli barcha statsionar nuqtalari topiladi;

c) barcha aniqlangan nuqtalarga va V to‘plam chegarasida $f(X)$ funksiya qiymatlari hisoblanadi va o‘zaro solishtiriladi. Ulardan eng kattasi (eng kichigi) $f(X)$ funksiyaning V to‘plamda erishadigan eng katta (eng kichik) qiymati hisoblanadi.

5-ta’rif. $z = f(x, y)$ funksiyaning x va y argumentlar o‘zaro $\varphi(x, y) = 0$ tenglama bilan bog‘langan holdagi ekstremumi shartli ekstremum deyiladi.

Funksiya shartli ekstremumini topish uchun Lagrnaj funksiyasi deb ataluvchi quyidagi

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \qquad (9)$$

yordamchi funksiyani tuzamiz, bunda λ – no‘malum o‘zgarmas ko‘paytuvchi.

(9) dan barcha o‘zgaruvchlar bo‘yicha xususiy hosilalar olinib, nolga tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi(x; y) = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

Bu tenglamalar sistemasi shartli ekstremumning zaruriy shartidir. Kritik nuqtalarda funksiya shartli ekstremumga ega bo‘lish, bo‘lmasligi masalasi Lagranj funksiyasining

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdx + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2$$

Ikkinchi tartibli differensiali ishorasini tekshirish yordamida aniqlanadi, bunda *dx* va *dy* lar

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0 \quad \left(dx^2 + dy^2 \neq 0\right)$$

tenglama bilan bog‘langan.

Agar $d^2F<0$ bo‘lsa, u holda $z=f(x,y)$ funksiya shartli maksimumga, $d^2F>0$ bo‘lsa, u holda $z=f(x,y)$ funksiya shartli minimumga ega bo‘ladi.

6-misol. Lagranj usulidan foydalanib, quyidagi masala yechilsin.

$$x_1+x_2=1;$$
$$Z=x_1x_2\to\max.$$

Yechish. Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(x_1,x_2,\lambda)=x_1x_2+\lambda(x_1+x_2-1).$$

Bu funksiyadan $x_1,\ x_2$ va λ lar bo‘yicha xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz. Natijada quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz

$$\begin{cases}x_2+\lambda=0,\\ x_1+\lambda=0,\\ x_1+x_2-1=0.\end{cases}$$

Sistemani yechish natijasida berilgan masalaning optimal yechimini aniqlaymiz:

$$\lambda^0=-1/2,\ x_1^0=x_2^0=1/2,\ Z=1/4.$$

7-misol. Lagranj usulidan foydalanib quyidagi masalaning optimal yechimini toping.

$$x_1+x_2=4$$
$$Z=x_1^2+x_2^2\to\max(\min)$$

Yechish. Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$F\left(x_1,x_2,\lambda\right)=x_1^2+x_2^2+\lambda\left(4-x_1-x_2\right)$$

Ushbu funksiyadan x_1,x_2 va λ bo‘yicha xususiy hosilalar olib ularni nolga tenglaymiz. Natijada quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz.

$$\begin{cases}2x_1-\lambda=0\\ 2x_2-\lambda=0\\ 4-x_1-x_2=0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{l}\lambda=4\\ x_1=x_2=2\end{array}$$

Demak $X^0=\left(x_1^0,x_2^0\right)=(2;2)$ nuqta $Z=x_1^2+x_2^2$ funksiya uchun stasionar nuqta bo‘ladi. Ushbu nuqtani ekstremumga tekshirish uchun ikkinchi tartibli hosilalardan tuzilgan Δ determinantni tuzamiz

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$\Delta > 0, \qquad A = \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = 2 > 0$$

Demak $x^0 = (2;2)$ nuqtada z funksiya minimumga erishadi.

Masalada funksiyalar o‘zgaruvchili ikkitadan ko‘p bo‘lsa, u holda lokal ekstremum mavjudligining zaruriy sharti quyidagi tenglamalar sistemasidan iborat bo‘ladi.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(X,\lambda)}{\partial x_j} = 0, \\ \dfrac{\partial F(X,\lambda)}{\partial \lambda_i} = g_i(X) = 0 \end{cases}$$

Bu sistemadan (X^0, λ^0) statsionar nuqtani topamiz.

Masalaning shartli ekstremumining mavjudligi Lagranj funksiyasining d^2F – ikkinchi differensialini o‘rganish bilan bog‘liq: agar (X^0, λ^0) nuqtada $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1,2,...,m), \ \sum_{j=1}^{n} dx_j^2 \neq 0$ bo‘lib, $d^2F(X^0, \lambda^0) < 0$ bo‘lsa, u holda bu nuqtada $f(X)$ funksiya shartli maksimumga erishadi; agar (X^0, λ^0) nuqtada $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(X^0)}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1,2,...,m), \ \sum_{j=1}^{n} dx_j^2 \neq 0$ bo‘lib, $d^2F(X^0, \lambda^0) > 0$ bo‘lsa, u holda bu nuqtada $f(X)$ funksiya shartli maksimumga erishadi.

Shuni alohida ta`kidlash kerakki, (X^0, λ^0) nuqtada $d^2F(X^0, \lambda^0) = 0$ bo‘lsa, u holda (X^0, λ^0) nuqtani ekstremumga boshqa usul bilah qo‘shimcha tekshirish kerak bo‘ladi.

8-misol. Lagranj usulidan foydalanib, quyidagi masalani yeching

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9,$$
$$u = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \to \min(\max)$$

Yechish. Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(X,\lambda) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9)$$
$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + x_2 + \lambda\left[1 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2\right].$$

Bu funksiyadan xususiy hosilalarni olib, ularni nolga tenglaymiz

$$\begin{cases} F_{x_1} = 1 + 2\lambda x_1 = 0, \\ F_{x_2} = -2 + 2\lambda x_2 = 0, \\ F_{x_3} = 2 + 2\lambda x_3 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9 \end{cases}$$

Sistemani yechib quyidagini topamiz:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2},\ x_{11} = -1,\ x_{21} = 2,\ x_{31} = -2,$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2},\ x_{12} = 1,\ x_{22} = -2,\ x_{32} = 2,$$

Bundan $d^2u\left(-1, 2, -2, \frac{1}{2}\right) = 1 > 0;\ d^2u\left(1, -2, 2, -\frac{1}{2}\right) = -1 < 0$. Demak, $\left(-1, 2, -2, \frac{1}{2}\right)$ – nuqta shartli minimum nuqta, $u_{\min} = -9$; $\left(1, -2, 2, -\frac{1}{2}\right)$ – shartli maksimum maksimum nuqta, $u_{\max} = 9$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikki argumentli funksiyaning ekstremumga ega bo‘lishining zaruriy sharti nima?
2. Ikki argumentli funksiyaning ekstremumga ega bo‘lishining yetarli sharti nima?
3. Kritik nuqtalar qanday nuqtalar?
4. Ikki argumentli funksiyaning biror yopiq sohadagi yeng katta va yeng kichik qiymatlari qanday topiladi?

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Quyidagi ikki o‘zgaruvchili funksiyani ekstremumga tekshiring**:**

1. $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26.$
2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 32\ln(xy).$
3. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y.$
4. $f(x, y) = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2.$
5. $f(x, y) = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2.$

6. $f(x,y)=4x^2-4xy+y^2+4x-2y+1.$

7. $f(x,y)=\left(x+y^2\right)e^{\frac{x}{2}}.$

8. $f(x,y)=\left(x^2-2y^2\right)e^{x-y}.$

9. $f(x,y)=\left(8x^2-6xy+3y^2\right)e^{2x+3y}.$

10. $f(x,y)=\left(5-2x+y\right)e^{x^2-y}.$

Quyidagi uch o‘zgaruvchili funksiyani ekstremumga tekshiring**:**

11. $f(x,y,z)=3x^3+y^2+z^2+6xy-2z+1$

12. $f(x,y,z)=8-6x+4y-2z-x^2-y^2-z^2.$

13. $f(x,y,z)=x^2+y^2+(z+1)^2-xy+x.$

14. $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-4x+6y-2z.$

15. $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2+6xy-4z.$

16. $f(x,y,z)=zyz(16-x-y-2z).$

17. $f(x,y,z)=xy^2z^3(49-x-2y-3z).$

3.8-§. Aniqmas integral

Tayanch iboralar: boshlang‘ich funksiya, aniqmas integral, aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirish, bo‘laklab integrallash, integral osti funksiyasi, integrallash o‘zgaruvchisi.

3.8.1.Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral.

Bizga ma`lumki $F(x)=x^n$ funksiyadan birinchi tartibli hosila olinsa $f(x)=F'(x)=nx^{n-1}$ ko‘rinishdagi funksiya hosil bo‘ladi. Biz yuqorida qaragan bu funksiyalar o‘zaro quyidagicha nomlanadi: $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi. $F(x)$ funksiyaga ixtiyoriy $C=const$ – o‘zgarmas sonning qo‘shilishi uning $f(x)$ – hosilasiga ta`sir qilmasligini e`tiborga olsak $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasini $F(x)+C$ ko‘rinishda yozish mumkin. Demak, $f(x)=nx^{n-1}\to F(x)=x^n+C,\ f(x)=\sin x\Rightarrow F(x)=-\cos x+C,...$ Shunday qilib quyidagi ta`rif va teoremani keltirish mumkin

$F(x)$ va $f(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, $F'(x)$ mavjud bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar barcha $x \in [a;b]$ uchun $F'(x) = f(x)$ o‘rinli bo‘lsa, u holda $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ oraliqdagi boshlang‘ich funksiyasi deyiladi.

1-teorema. Agar $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ oraliqdagi boshlang‘ich funksiyalari bo‘lsa, u holda bu funksiyalar uchun $F_2(x) = F_1(x) + C$ $(C = const)$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Isboti. $x \in [a;b]$ oraliqda $\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x)$ funksiyani qaraymiz. Ta`rifga ko‘ra $\Phi(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Demak, $\Phi(x) = C$ va $F_2(x) = F_1(x) + C$.

Shunday qilib, boshlang‘ich funksiyaning umumiy ko‘rinishi $F(x) + C$ shaklda yoziladi.

2-ta’rif. Boshlang‘ich funksiyaning $F(x) + C$ umumiy ko‘rinishi berilgan $y = f(x)$ funksiyaning **aniqmas integrali** deyiladi. $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \qquad (1)$$

Bu yerda $\int$ – integral belgisi, $f(x)$ – integral osti funksiyasi, $f(x)dx$ – integral osti ifodasi deb ataladi.

$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ bo‘lgani uchun (1) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$\int f(x)dx = \int \left(\frac{dF(x)}{dx} \right) dx = \int dF(x). \qquad (2)$$

3.8.2.Aniqmas integral xossalari.

Aniqmas integral quydagi xossalarga ega:

1. O‘zgarmas ko‘paytuvchi A ni integral belgisidan tashqarisiga chiqarish mumkin:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx. \qquad (3)$$

2. Chekli sondagi funksiya larningalgebraik yig‘indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yig‘indisiga teng:

$$\int [f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+...+\int f_n(x)dx. \qquad (4)$$

1-misol. $\int 4x^5dx=4\int x^5dx=\frac{4}{6}x^6+C=\frac{2}{3}x^6+C.$

2-misol. $\int\left(3x^4+x^3-1\right)dx=3\int x^4dx+\int x^3dx-\int dx=\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4-x+C.$

3.8.3. Asosiy integrallar jadvali.

Integrallashni amalga oshirishda elementar funksiyalar uchun tuzilgan quyidagi aniqmas integrallar jadvalidan keng foydalanamiz:

1. $\int x^pdx=\frac{x^{p+1}}{p+1}+C \quad (p\neq -1);$

2. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C;$

3. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$

4. $\int a^xdx=\frac{a^x}{\ln a}+C;$

5. $\int e^xdx=e^x+C;$

6. $\int\sin xdx=-\cos x+C;$

7. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C;$

8. $\int\cos xdx=\sin x+C;$

9. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C;$

10. $\int tgxdx=-\ln|\cos x|+C;$

11. $\int ctgxdx=\ln|\sin x|+C;$

12. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C;$

13. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C;$

14. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C;$

15. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\lambda}\right|+C.$

3-misol. $\int\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{x^2}dx=\int\left(\frac{x}{x^2}+\frac{2\sqrt{x}}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)dx=$

$$=\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}+\int\frac{dx}{x^2}=\ln|x|-\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}+C;$$

4-misol. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=tgx-ctgx+C.$

3.8.4. Integrallashning asosiy qoidalari.

Integral osti funksiyasi murakkab funksiyadan iborat bo‘lsa, u holda integrallashning quyidagi asosiy qoidalaridan foydalanamiz:

- o‘zgaruvchini almashtirish qoidasi;
- bo‘laklab integrallash qoidasi.

Aniqmas integralni hisoblashda o‘zgaruvchini almashtirish quyidagicha amalga oshiriladi: $\int f(x)dx$ integralni o‘zgaruvchini alamashtirish qoidasi yordamida hisoblash kerak bo‘lsin. x o‘zgaruvchini t erkli o‘zgaruvchining biror differentsiallanuvchi funksiyasi orqali ifodalaymiz: $x=\varphi(t)$, bu yerda $t=\psi(x)$ teskari funksiya mavjud bo‘lsin deb faraz qilinadi, u holda $dx=\varphi'(t)dt$ bo‘lgani uchun

$$\int f(x)dx=\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt \qquad (5)$$

5-misol. $\int\cos 5xdx$ integralni o‘zgaruvchini almashtirish qoidasidan foydalanib hisoblaymiz. Bunda $x=\varphi(t)=\frac{t}{5}\Rightarrow dx=\frac{dt}{5}$. U holda

$$\int\cos 5xdx=\frac{1}{5}\int\cos tdt=\frac{1}{5}\sin t+C=\frac{1}{5}\sin 5x+C.$$

6-misol. $\int x\sqrt{(x-2)}dx$ integralni hisoblashda ham o‘zgaruvchini almashtirish qoidasidan foydalanaish maqsadga muvofiq. Bunda $\sqrt{(x-2)}=t$ belgilash kiritamiz. U holda, $x-2=t^2\Rightarrow x=t^2+2\Rightarrow dx=2tdt$. Natijada.

$$\int x\sqrt{(x-2)}dx=\int\left(t^2+2\right)t\cdot 2tdt=2\left[\int t^4dt+2\int t^2dt\right]=\frac{2t^5}{5}+\frac{4t^3}{3}+C=$$

$$=\frac{2}{5}(x-2)^{5/2}+\frac{4}{3}(x-2)^{3/2}+C=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(x-2)^2\sqrt{(x-2)}}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(x-2)\sqrt{(x-2)}}+C.$$

7-misol. $\int\sin x\cos^2 xdx$ integralni hisoblashda $\cos x=t$ belgilash kiritamiz. U holda $-\sin xdx=dt\Rightarrow dx=-\frac{dx}{\sin x}$. Natijada

$$\int\sin x\cos^2 xdx=-\int t^2dt=-\frac{t^3}{3}+C=-\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

Aniqmas integralda bo‘laklab integrallash quyidagicha amalga oshiriladi:

Ma`lumki, uv ko‘paytmaning differentsiali

$$d(uv) = udv + vdu \qquad (6)$$

formula bilan hisoblanadi. (6) formulaning ikkala tomonini ham integrallaymiz. U holda

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu \Rightarrow uv = \int vdu + \int udv \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu . \qquad (7)$$

(7) bo‘laklab integrallash formulasi deyiladi. Bu yerda u, v – differentsiallanuvchi funksiyalar.

(7) formulani aniqmas integralga qo‘llash uchun, integral ostidagi ifoda ikki qismga ajratiladi va birinchi qismini u, ikkinchi qismini esa dv deb olinadi. So‘ngra birinchi u ifodani diffarensiallab du ifodani, ikkinchi dv ifodani integrallab $\int vdu$ integralni hosil qilamiz.

8-misol. $\int x^2 \ln x dx$ ko‘rinishdagi integallarni hisoblashda bo‘laklab integrallash qoidasidan foydalanamiz. Bunda $u = \ln x,\ dv = x^2 dx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du = \frac{dx}{x},\ v = \frac{x^3}{3}$ ifodalar hosil bo‘ladi. Endi esa (7) formulani qo‘llaymiz:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C .$$

9-misol. $\int x\cos x dx$ ko‘rinishdagi integallarni hisoblashda ham bo‘laklab integrallash qoidasidan foydalanamiz. Bunda $u = x,\ dv = \cos x dx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du = dx,\ v = \sin x$ ifodalar hosil bo‘ladi. Endi esa (7) formulani qo‘llaymiz:

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C .$$

10-misol. $\int xe^x dx$ ko‘rinishdagi integallarni hisoblashda ham bo‘laklab integrallash qoidasidan foydalanamiz. Bunda $u = x,\ dv = e^x dx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du = dx,\ v = e^x$ ifodalar hosil bo‘ladi. Endi esa (7) formulani qo‘llaymiz:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C .$$

Aniqmas integralni hisoblashda integral osti ifunksiyaning ko‘rinishini e`tiborga olgan holda integralni hisoblash usulini tanlash kerak bo‘ladi. Buday usullar ko‘p bo‘lib biz ulardanbiri bilan tanishib chiqamiz.

Trigonometrik funksiyalarni integrallash. $I = \int R(\sin x, \cos x)dx$ integralni qaraylik. Bu ko‘rinishdagi integrallarni hisoblash uchun umumiy usu l mavjud. Haqiqatdan ham, yuqridagi integralda $t = tg\frac{x}{2}$ almashtirishni bajarsak,

$$x = 2arctgt,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

kelib chiqadi. Bu ifodani integralga qo‘ysak,

$$I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt$$

hosil bo‘ladi. Bunda *R* o‘z argumentlarining ratsional funksiyasi bo‘lgani uchun R_1 ham ratsional funksiya bo‘ladi. Demak, berilgan integral ratsional – kasr funksiyalarni integrallashga keltiriladi. Bu kabi funksiyalarni integrallash keying darslarimizda tanishamiz/

Shuni ta`kidlash kerakki, $t = tg\frac{x}{2}$ universal almashtirish yordamida $\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$ ko‘rinishdagi integrallarni hisoblash osonlashadi.

Ba`zi hollarda bunday universal almashtirish murakkab ratsional – kasr funksiyalarni integrallashga olib kelib qoladi Shuning uchun, ba`zi hollarda boshqa almashtirishlardan foydalanish anchagina qulay bo‘ladi.

a) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ bo‘lsa, u holda $\sin x = t$ almashtirish bajariladi.

b) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ bo‘lsa, u holda $\cos x = t$ almashtirish bajariladi.

c) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ bo‘lsa, u holda $tgx = t$ almashtirish bajariladi.

d) $I=\int \sin^n x\cdot\cos^m x dx$ integralni qaraylik. Bunda *m, n*- butun sonlar. Quyidagi uchta holni ko‘ramiz:

1) *m* va *n* lardan hech bo‘lmaganda biri toq son bo‘lsin. Masalan, *m*- toq son, ya`ni $m=2k+1$, *k*-butun son. U holda $t=\sin x,\ dt=\cos x,\ \cos^{2k} x=(1-\sin^2 x)^k=(1-t^2)^k$ almashtirishlar natijasida

$$I=\int \sin^n x\cdot\cos^m x dx=\int \sin^n x\cos^{2k} x\cos x dx=\int t^n\cdot(1-t^2)^k dt$$

ifoda hosil bo‘ladi. Demak, *t* ga nisbatan ratsional funksiyaning integraliga ega bo‘lamiz.

2) *m* va *n* musbat juft sonlar bo‘lsin, ya`ni $m=2s,\ n=2k$, *s, k*- natural sonlar. U holda integrallash jarayonida

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\ \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},\ \sin 2x=2\sin x\cos x$$

formulalardan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

3) Agar *m* va *n* lar juft sonlar bo‘lib, ularning kamida biri manfiy bo‘lsa, yuqorida bayon qilingan usul maqsadga olib kelmaydi. Bunda $tgx=t$ almashtirishni bajarish lozim bo‘ladi.

e) $\int tg^n x dx,\ \int ctg^n x dx,\ n-$natural son, $n>1$ ko‘rinishdagi integrallar mos ravishda $tgx=t$ yoki $ctx=t$ almashtirishlar yordamida hisoblanadi.

Masalan, $tgx=t,\ x=arctgt,\ dx=\frac{dt}{1+t^2}$ almashtirishlarni bajarsak, $\int tg^n x dx=\int\frac{t^n}{1+t^2}dt$ hosil bo‘ladi. Demak, berilgan integral ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

k) $\int \sin nx\cdot\cos mx dx,\quad \int \cos nx\cdot\cos mx dx,\quad \int \sin nx\cdot\sin mx dx$ ko‘rinishdagi integrallarni hisoblash uchun ushbu

$$\sin nx\cdot\cos mx=\frac{1}{2}(\sin(n-m)x+\sin(n+m)x),$$

$$\cos nx\cdot\cos mx=\frac{1}{2}(\cos(n-m)x+\cos(n+m)x),$$

$$\sin nx\cdot\sin mx=\frac{1}{2}(\cos(n-m)x-\cos(n+m)x),$$

formulalardan foydalanib, berilgan integrallarni yig‘indining integraliga keltirish mumkin.

11-misol. $\int tg^5 x dx$ intagralni hisoblsashda $tgx = t,\ \ x = arctgt,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$ almashtirishlarni bajaramiz. U holda

$$\int tg^5 x dx = \int \frac{t^5}{1+t^2} dt = \int (t^3 - t + \frac{t}{t^2+1}) dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} =$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C = \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln(tg^2 x + 1) + C$$

hosil bo‘ladi.

12-misol. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$ integralning integral ostidagi funksiyasi uchun

$$R(-\sin x,\ -\cos x) = R(\sin x,\ \cos x)$$

shart bajariladi, shu sabali uni hisoblashda $tgx = t$ almashtirishdan foydalanamiz. U holda

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int (1+tg^2 x) d(tgx) = \int (1+t^2) dt = t + \frac{t^3}{3} + C = tgx + \frac{tg^3 x}{3} + C\,.$$

3.8.5. Aniqmas integralning iqtisodiyotga ba`zi tatbiqlari.

Endi aniqmas integralning iqtisodiyotga ba`zi tatbiqlari bilan tanishib chiqamiz.

Agar firmaning marjinal daromad funksiyasi *MR(Q)* berilgan bo‘lsa, ya’ni

$$MR(Q)=f(Q)$$

funksiya ma’lum bo‘lsa, u holda firmaning yalpi daromad funksiyasi quyidagi aniqmas integral yordamida topiladi:

$$TR = \int MR(Q)\, dQ = \int f(Q)\, dQ = F(Q) + C.$$

Bu yerda *F(Q)* – boshlang‘ich funksiya.

13-misol. Firmaning marjinal daromad funksiyasi

$$MR=150-15Q$$

ko‘rinishida berilgan. Agar *Q=10* birlik mahsulot ishlab chiqarilganda firmaning umumiy daromad *TR= 1000* p.b. ni tashkil etsa, u holda yalpi daromad funksiyasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Yechish. Umumiy daromad funksiyasi *TR(Q)* ni quyidagi integraldan foydalanib topamiz:

$$TR(Q) = \int (150 - 15Q)\, dQ = 150Q - \frac{15Q^2}{2} + C.$$

Q=10 da *TR(Q)=1000* bo‘lganidan foydalanib, *S=250* ekanligini aniqlaymiz. Demak, firmaning yalpi daromad funksiyasi

$$TR = 150Q - \frac{15Q^2}{2} + 250$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Xuddi shuningdek, marjinal xarajat va foyda funksiyalari ma’lum bo‘lganda umumiy xarajat va yalpi foyda funksiyalarini ham aniqmas integraldan foydalanib topish mumkin.

14-misol. Firmaning marjinal xarajat funksiyasi

$$MC = Q^2 + 3Q + 8$$

ko‘rinishga ega. Agar $Q = 0$ da firmaning xarajati 250 p.b. ni tashkil etsa, u holda uning umumiy xarajat funksiyasini toping.

Yechish.Umumiy xarajat funksiyasi TC(Q) ni quyidagi integraldan foydalanib topamiz: $\frac{d}{dQ}(TC) = MC = Q^2 + 3Q + 8.$

$$TC = \int \left(Q^2 + 3Q + 8\right) dQ.$$

$$TC = \int Q^2 dQ + 3\int QdQ + 8\int dQ = \frac{1}{3}Q^3 + 3\left(\frac{1}{2}Q^2\right) + 8Q + k,$$

$TC = 250,\ Q = 0$ da $k = 250.$

Demak, umumiy xarajatlar funksiyasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$TC = \frac{1}{3}Q^3 + \frac{3}{2}Q^2 + 8Q + 250.$$

$Q(L)$ – umumiy mahsulot funksiyasi, $MP(L)$ – marjinal mahsulot funksiyasi bo‘lsin. Marjinal mahsulot funksiyasi umumiy mahsulot hosilasidan iborat bo‘lganligi sababli quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$MP(L) = \frac{dQ(L)}{dL} \Rightarrow Q(L) = \int MP(L)dL. \qquad (8)$$

Faraz qilamiz $MP(L) = a = const > 0$ bo‘lsin. U holda

$$Q(L) = \int adL = aL + C.$$

Iqtisodiy nuqtai nazardan $L = 0$ bo‘lganda umumiy mahsulot $Q = 0$ bo‘ladi deb faraz qilamiz. U holda $C = 0 \Rightarrow Q = aL$.

15-misol. Marjinal mahsilot funksiyasi $MP(L) = 3(3L + 2)$ ko‘rinishda bo‘lgan firmaning umumiy mahsulot funksiyasini topnig. Buning uchun (8) formuladan foydalanamiz:

$$Q(L) = \int MP(L)dL = 3\int (3L + 2)dL = \frac{9}{2}L^2 + 6L + C.$$

16-misol. Marjinal mahsilot funksiyasi $MP(L) = 4\sin 2L$ ko‘rinishda bo‘lgan firmaning umumiy mahsulot funksiyasini topnig. Bunda $L = 0$ da $Q = 0$ bo‘lsin. Buning uchun (8) formuladan foydalanamiz:

$$Q(L) = 4\int \sin 2LdL = -2\cos 2L + C.$$

Bu yerda $L = 0 \Rightarrow C = 2$. Demak, $Q(L) = -2\cos 2L + 2.$

17-misol. Marjinal mahsilot funksiyasi $MP(L) = 4\cos 2L$ ko‘rinishda bo‘lgan firmaning umumiy mahsulot funksiyasini topnig. Bunda $L = 0$ da $Q = 3$ bo‘lsin. Buning uchun (8) formuladan foydalanamiz:

$$Q(L) = 4\int \cos 2LdL = 2\sin 2L + C.$$

Bu yerda $L = 0 \Rightarrow C = 3$. Demak, $Q(L) = 2\sin 2L + 3.$

Mashqlarni bajaring. a) Marjinal mahsilot funksiyasi $MP(L) = 3L\sin 2L$ ko‘rinishda bo‘lgan firmaning umumiy mahsulot funksiyasini topnig.

b) Marjinal mahsilot funksiyasi $MP(L) = 5L^2 \sin 2L$ ko‘rinishda bo‘lgan firmaning umumiy mahsulot funksiyasini topnig. Bunda $L = 0$ da $Q = 0$ bo‘lsin.

c) Marjinal mahsilot funksiyasi $MP(L) = 4L \ln 3L$ ko‘rinishda bo‘lgan firmaning umumiy mahsulot funksiyasini topnig. Bunda $L = 0$ da $Q = 2$ bo‘lsin.

Ma`lumki, agar $M(t)$ – kattalik biror bir kompaniyaning t vaqtdagi fondini ifodalasa, u holda $\frac{dM(t)}{dt}$ – kattalik bu kompaniyadagi dt vaqtdagi pul oqimi bildiradi. Faraz qilamiz qandaydir bankda bir yillik puloqimi o‘zgarmas $\frac{dM(t)}{dt} = k = const$ bo‘lsin. U holda bu bankning t vaqtdagi fondi quyidagicha aniqlanadi:

$$M(t) = \int k dt = kt + C. \qquad (9)$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Boshlang’ich funksiya qanday funksiya?
2. Boshlang’ich funksiya va aniqmas integral orasida qanday bog’lanish bor?
3. Integrallash amali nima?
4. Aniqmas integral qanday xossalarga ega?
5. Asosiy integrallar jadvali nimalardan iborat?
6. Integrallash to‘g’ri bajarilganligini qanday tekshirish mumkin?
7. Butun rasional funksiya nimadan iborat?
8. Kasr rasional funksiyalar qanday?
9. To‘g’ri va noto‘g’ri kasr rasional funksiyalr deb nimaga aytiladi?
10. Noto‘g’ri kasr rasional funksiyani integrallash, to‘g’ri rasional funksiyani integrallashga qanday qilib keltiriladi?

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Quyidagi integrallarni toping:

1. $\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
2. $\int \left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx$;
3. $\int \frac{x-2}{x^3}dx$;
4. $\int \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;
5. $\int \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x}dx$;
6. $\int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;
7. $\int \frac{\cos 2x}{cos^2 x\, sin^2 x}dx$;
8. $\int ctg^2 x\, dx$;
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$;

O‘zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib integrallarni toping:

10. $\int x^3(1-2x^4)^3 dx$;
11. $\int x\sqrt{a-x}dx$, $a-x=t^2$;
12. $\int \frac{dx}{x\ln x}$;
13. $\int \frac{cosx\, dx}{\sqrt{1+2sin^2 x}}$;
14. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2+cos^2 x}}dx$;
15. $\int x\, cos(x^2)dx$;

Bo‘laklab integrallash usulidan foydalanib integrallarni toping:

16. $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$;
17. $\int x^2 e^{3x}dx$;
18. $\int x\, cosxdx$;
19. $\int ln^2 xdx$;
20. $\int \frac{x\cos x\, dx}{sin^3 x}$;
21. $\int \frac{arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2^2-x^2}}dx$;
22. $\int (x+1)e^x dx$;
23. $\int e^{2x}\cos x\, dx$;

Quyidagi iqtisodiy mazmundagi masalalarni yeching:

24. Marjinal mahsilot funksiyasi $MP(L)=3L^3\sin 2L$ ko‘rinishda bo‘lgan firmaning umumiy mahsulot funksiyasini topnig.
25. Marjinal mahsilot funksiyasi $MP(L)=4L\cos 3L$ ko‘rinishda bo‘lgan firmaning umumiy mahsulot funksiyasini topnig. Bunda $L=0$ da $Q=0$ bo‘lsin.
26. Marjinal mahsilot funksiyasi $MP(L)=4L^3-3L$ ko‘rinishda bo‘lgan firmaning umumiy mahsulot funksiyasini topnig. Bunda $L=0$ da $Q=5$ bo‘lsin.
27. Firmaning marjinal daromad funksiyasi
$MR=15-4Q$

ko‘rinishga ega. Agar $Q=5$ birlik mahsulotga mos bo‘lgan umumiy xarajat 75 p.b. bo‘lsa, u holda firmaning umumiy harajat funksiyasi qanday ko‘rinishga ega?
28. Firmaning marjinal xarajatlar funksiyasi
$MC(Q)=3Q^2-54Q+300$

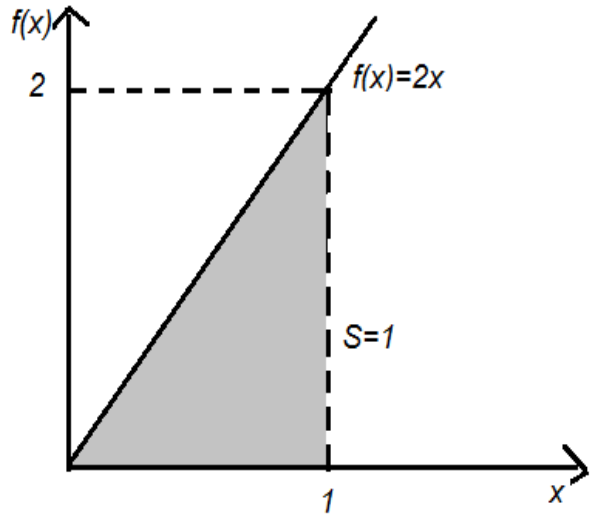
ko‘rinishga ega. Agar $Q=10$ mahsulot ishlab chiqarganda firmaning xarajati 2500 p.b. ga teng bo‘lsa, u holda firmaning umumiy xarajat funksiyasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

3.9-§.Aniq integral

Tayanch iboralar: integral yig‘indi, aniq integral, integral chegaralari, egri chizqli trapetsiya, Riman yig‘indasi, o‘rta qiymat, N`yuton – Leybnits formulasi.

3.9.1.Riman yig‘indisi.

Aniq integral (Riman integrali) biror bir intervalda aniqlangan funksiya grafigining egri chizig‘i va bu intervallardan hosil bo‘lgan sohaning yuzini aniqlaydi. Masalan, $f(x)=2x$ funksiyani $[0;1]$ oraliqda qraymiz (3.9.1-rasm).



3.9.1-rasm

Bu uchburchakning yuzi $S=1$ ekanligi geometriyadan ma`lum. Biz bu misol yordamida $y=f(x)$ egri chiziqlar bilan chegeralangan sohalarning yuzini iteratsiya yordamida hisoblash uchun matematik usul bilan tanishamiz.

Buning uchun biz birinchi navbatda $f(x)$ funksiya aniqlangan intervalni kichik kesmalarga ajratamiz. Ixtiyoriy $[a,b]$ kesmani kichik qismlarga ajratish quyidagicha amalga oshiriladi. $[a;b]$ kesmaga tegishli $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ nuqtalardan foydalanib ixtiyoriy ravishda n ta qismiy kesmalar:

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},x_n]$$

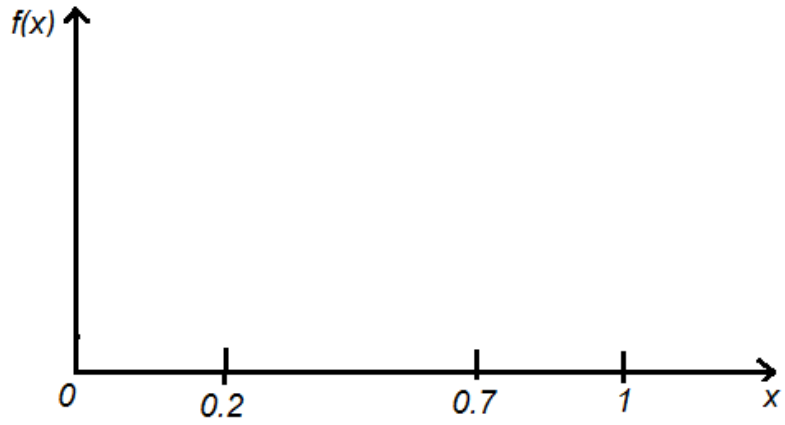
hosil qilamiz. Bu yerda

$$[x_0,x_1]+[x_1,x_2]+...+[x_{n-1},x_n]=[a,b].$$

Kichik kesmalar uzunligini mos ravishda $\Delta_i=x_i-x_{i-1},\ i=\overline{1,n}$ kabi belgilab olamiz. Bizning misolimizda

$$[a,b]=[0;1]\Rightarrow a=0=x_0<x_1<x_2<...<x_n=1=b.$$

Masalan, $n=3$ bo‘lib, $x_0=0,\ x_1=0.2,\ x_2=0.7,\ x_3=1$ bo‘lsa, biz quyidagiga ega bo‘lamiz (3.9.2-rasm).



3.9.2-rasm

Demak, $\Delta_1 = 0.2,\ \Delta_2 = 0.5,\ \Delta_3 = 0.3$.

Ixtiyoriy $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ nuqta olamiz. U holda

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\left(x_i - x_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i \qquad (1)$$

yig‘indi Riman yig‘indisi deb ataladi.

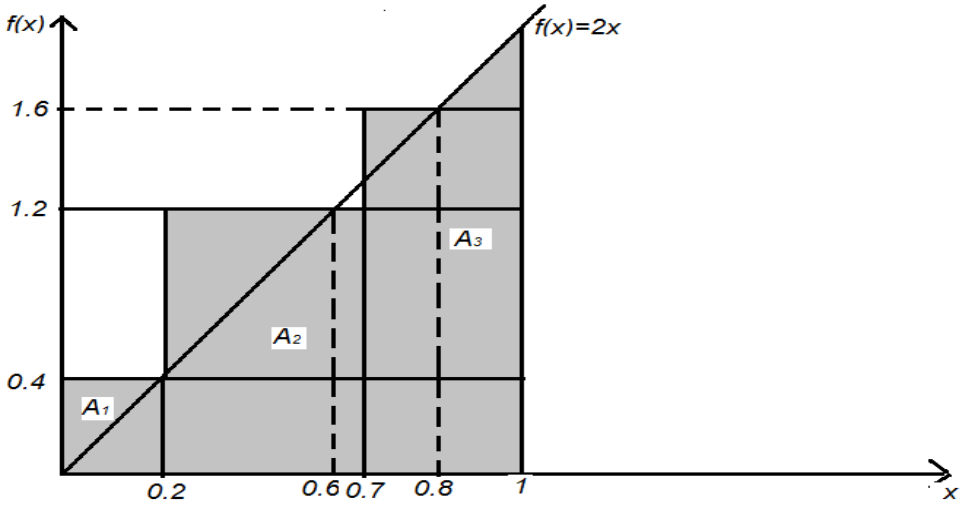
Bizning misolimizda (3.9.3-rasm)

$\xi_1 = 0.2,\ \xi_2 = 0.6,\ \xi_3 = 0.8 \Rightarrow f(0.2) = 0.4,\ f(0.6) = 1.2,\ f(0.8) = 1.6$.

U holda Riman integrali

$$A_1 = 0.4 \times 0,2 = 0.08,\ A_2 = 1.2 \times 0,5 = 0.6,\ A_3 = 1.6 \times 0,3 = 0.18,$$

$$S = A_1 + A_2 + A_3 = 1,16\,.$$



3.9.3-rasm

Har bir $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ nuqtalar ixtiyoriy bo‘lgani uchun bu nuqtalarni shunday tanlash mumkinki Riman yig‘indisini tashkil etuvchi to‘g‘ri

to‘rtburchaklar yig‘indisidan iborat yuza $f(x)$ egri chiziq va $[a,b]$ kesma bilan chegeralangan soha yuzidan (S) katta $(S_{\max})$, y`ani

$$\exists \bar{\xi}_i \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow f(\bar{\xi}_i) \geq f(x),\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow S_{\max} = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{\xi}_i)\Delta_i$$

yoki bu to‘g‘ri to‘rtburchaklar yig‘indisidan iborat yuza $f(x)$ egri chiziq va $[a,b]$ kesma bilan chegeralangan soha yuzidan kichik $(S_{\min})$, y`ani

$$\exists \underline{\xi}_i \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow f(\underline{\xi}_i) \leq f(x),\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow S_{\min} = \sum_{i=1}^{n} f(\underline{\xi}_i)\Delta_i$$

bo‘lishi mumkin.

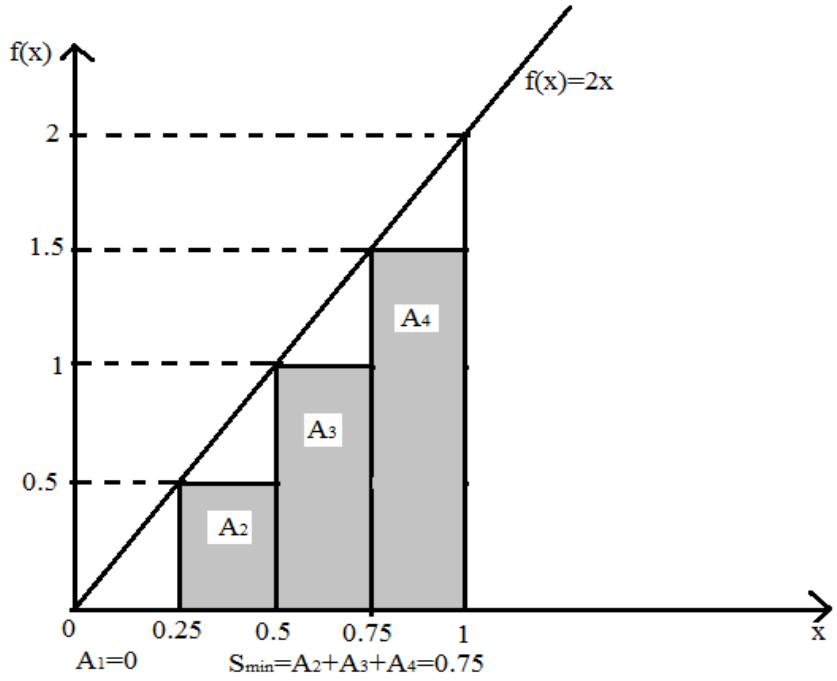
Bizning misolimizda $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0,25$ deb olsak, u holda (3.9.4-, 3.9.5-rasm)

$$\bar{\xi}_1 = 0,25\ \ \bar{\xi}_2 = 0,5,\ \ \bar{\xi}_3 = 0,75,\ \ \bar{\xi}_4 = 1,$$

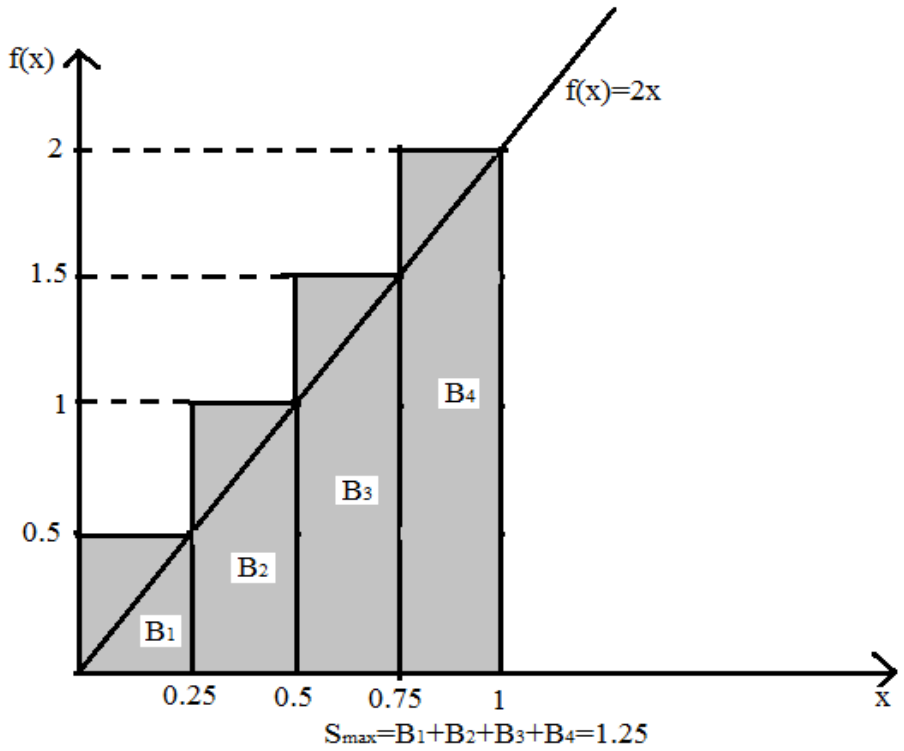
$$\underline{\xi}_1 = 0\ \ \vec{\xi}_2 = 0,25,\ \ \underline{\xi}_3 = 0,5,\ \ \underline{\xi}_4 = 0,75.$$

$$S_{\max} = 0,5 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,25 + 1,5 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,25 = 1,25,$$

$$S_{\min} = 0 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,25 + 1,5 \cdot 0,25 = 0,75.$$



3.9.4-rasm



3.9.5-rasm

Bu topilgan $S_{\min}$ va $S_{\max}$ qiymatlar orasida shunday S^* qiymat borki $S_{\min} \le S^* \le S_{\max}$, $S^* = S$. Bizning misolimizda S^* qiymatni topish uchun $\Delta_i = \frac{1}{n}$, $i = 0, 1, 2, ..., n$ deb olamiz. U holda $x_i = \frac{i}{n}$ deb olib $S_{\min}$ va $S_{\max}$ qiymatlarni hisoblaymiz:

$$\underline{\xi}_i = \frac{i-1}{n} \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \Rightarrow S_{\min} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1),$$

$$\overline{\xi}_i = \frac{i}{n} \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \Rightarrow S_{\min} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{i}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i.$$

Bu yerda

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1) = 0 + 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) = \frac{n-1}{2} \cdot n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n+1}{2} \cdot n.$$

U holda

$$S_{\min} = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1) = 1 - \frac{1}{n}, \; S_{\max} = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n+1) = 1 + \frac{1}{n}.$$

$$1 - \frac{1}{n} < S^* < 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_{\min} = \lim_{n \to \infty} S_{\max} = 1 = S = S^*.$$

$[a,b]$ kesmada aniqlangan $f(x)$ funksiya va $L \in \square$ –son berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Har qanday kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday kichik musbat δ $([a,b] \supset \Delta_i < \delta)$ son topilsaki,

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i - L \right| < \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi deyiladi. Bu yerda $\xi_i \in \Delta_i$.

L son esa $f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmadagi aniq integrali deb ataladi va quyidagicha yoziladi:

$$L = \int_a^b f(x)dx.$$

Bu yerda, a integralning quyi, b integralning yuqori chegarasi deyiladi.

Shunday qilib, aniq integralning ta`rifidan:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i. \qquad (2)$$

3.9.2. Aniq integralning asosiy xossalari.

Aniq integralning asosiy xossalarini keltiramiz:

1^0. Aniq integralning chegaralari almashtirilsa, integralning ishorasi o‘zgaradi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

2^0. Ixtiyoriy uchta a, b va c sonlari uchun,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3^0. O‘zgarmas ko‘paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\int_a^b Af(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx.$$

4^0. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig‘indisiining aniq integrali qo‘shiluvchilar integrallarining yig‘indisiga teng:

$$\int_a^b \left[f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) \right] dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + ... + \int_a^b f_n(x)dx .$$

5^0. Agar $y = f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda bu kesmada shunday c nuqta topiladiki, ushbu nuqtada

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c)$$

tenglik bajariladi. Bu yerda $c \in (a;b)$.

Agar $[a;x]$ kesmada aniqlangan $f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Bu yerda hosil bo‘lgan soha egri chiziqli trapetsiya deb ataladi. Yuqoridagilardan ma`lumki bu sohaning yuzi

$$S(x) = \int_a^x f(x)dx$$

integral bilan aniqlanadi. $S(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lishini, ya`ni $S'(x) = f(x)$ ekanligini ko‘rsatamiz.

$S(x+h) - S(x)$ ayirmani qaraylik, bunda $h > 0$. Bu ayirma asosi $[x; x+h]$ bo‘lgan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng. Agar h son kichik bo‘lsa, u holda: $S(x+h) - S(x) \approx f(x) \cdot h$. Demak,

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} \approx f(x).$$

Bu munosabatda $h \to 0$ limitga o‘tamiz:

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = S'(x) = f(x)$$

tenglik hosil bo‘ladi.

$f(x)$ funksiyaning istalgan boshqa $F(x)$ boshlang‘ich funksiyasi $S(x)$ funksiyadan o‘zgarmas songa farq qiladi, ya`ni

$$F(x) = S(x) + C$$

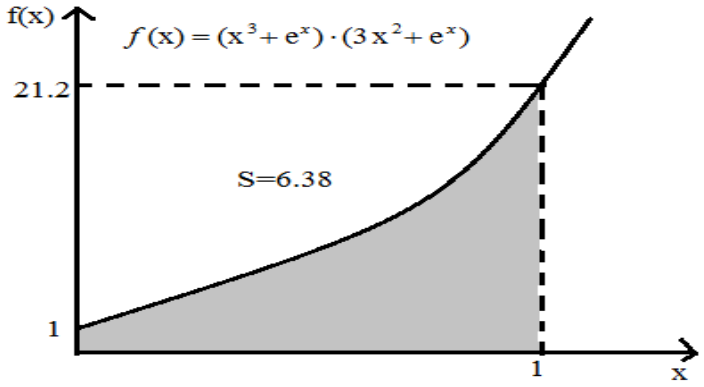
N`yuton – Leybnits teoremasi. Agar $F(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lib, u $y = f(x)$ funksiyaning biror – bir boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (3)$$

N`yuton – Leybnits formulasi o‘rinli bo‘ladi.

Demak aniq integralning geometrik ma`nosi egri chiziqli trapetsiyaning yuzi ekan.

1-misol. $[0;1]$ kesmada aniqlangan $f(x) = \left(x^3 + e^x\right)\left(3x^2 + e^x\right)$ egri chiziq, Ox koordinata o‘qi, $x = 0$ va $x = 1$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan sohaning (6-rasm) yuzini topamiz. Bunday sohalar egri chiziqli trapetsiya deb ataladi.



3.9.2.1-rasm

Birinchi navbatda $f(x) = \left(x^3 + e^x\right)\left(3x^2 + e^x\right)$ funksiyaning aniqmas intagrallaridan birini topib olamiz $(C = 0)$:

$$F(x) = \int \left(x^3 + e^x\right)\left(3x^2 + e^x\right)dx = \frac{\left(x^3 + e^x\right)^2}{2}.$$

Endi (3) formuladan foydalanib sohaning yuzini topamiz:

$$S = \int_0^1 \left(x^3 + e^x\right)\left(3x^2 + e^x\right) = \frac{\left(x^3 + e^x\right)^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = 6,38, \quad e = 2,71.$$

2-misol. $[0;3]$ kesmada aniqlangan $f(x) = 3xe^{x^2}$ egri chiziq, Ox koordinata o‘qi, $x = 0$ va $x = 3$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzini topamiz. Birinchi navbatda $f(x) = 3xe^{x^2}$ funksiyaning aniqmas intagrallaridan birini topib olamiz $(C = 0)$:

$$F(x) = \int 3xe^{x^2}\,dx = \frac{3e^{x^2}}{2}.$$

Endi (3) formuladan foydalanib sohaning yuzini topamiz:

$$S=\int_0^3 3xe^{x^2}dx=\frac{3e^{x^2}}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=3}=\frac{3e^9-3}{2}=\frac{3}{2}\left(e^9-1\right),\quad e=2,71.$$

3-misol. $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ kesmada aniqlangan $f(x)=2\sin 3x$ egri chiziq, Ox koordinata o‘qi, $x=0$ va $x=\frac{\pi}{3}$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzini topamiz. Birinchi navbatda $f(x)=2\sin 3x$ funksiyaning aniqmas intagrallaridan birini topib olamiz $(C=0)$:

$$F(x)=\int 2\sin 3xdx=\frac{2\sin 3x}{3}.$$

Endi (3) formuladan foydalanib sohaning yuzini topamiz:

$$S=\left|\int_0^{\pi/3} 2\sin 3xdx\right|=\left|-\frac{2\cos 3x}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{3}}\right|=\frac{4}{3}.$$

Aniq integralni aniq hisoblashning asosiy yagona usuli, integral ostidagi funksiya uchun boshlang‘ich funksiyani aniqlash va so‘ngra Nyuton – Leybnits formulasini qo‘llashdir. Aniq integralni hisoblashda qo‘llaniladigan boshqa usullar bilan tanishib chiqamiz.

3.9.3. Aniq integralni hisoblash usullari. Aniq integralda o‘zgaruvchini almashtirish.

Aniq integralda o‘zgaruvchini almashtirish quyidagicha amalgam oshiriladi:

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (4)$$

integral berilgan bo‘lib, $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsin. $x=\varphi(t)$ almashtirish bilan (4) ifoda t o‘zgaruvchiga bo‘g‘liq bo‘lgan integralga keladi. Bunda $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ funksiyalar $[\alpha;\beta]$ kesmada uzluksiz bo‘lishi kerak. Bu yerda $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Shunday qilib,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt.$$

4-misol. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/3}\cos 4xdx$ integralni hisoblash uchun $t=4x$ almashtirish bajaramiz. Bu yerda $dt=4dx,\ x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{2\pi}{3},\ x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{4\pi}{3}$. U holda:

$$\int\limits_{\pi/3}^{\pi/3}\cos 4xdx=\int\limits_{2\pi/3}^{4\pi/3}\cos tdt=\sin t\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}=\sin\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

5-misol. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}3x\cos 4x^2dx$ integralni hisoblash uchun $4x^2=t$ almashtirish bajaramiz. Bu yerda $dt=8xdx\Rightarrow 3xdx=\frac{3dt}{8},\ x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{\pi^2}{9},\ x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{4\pi^2}{9}$. U holda:

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}3x\cos 4x^2dx=\frac{1}{8}\int\limits_{\pi^2/9}^{4\pi^2/9}\cos tdt=\frac{1}{8}\sin t\Big|_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{4\pi^2}{9}}=\frac{1}{8}\left(\sin\frac{\pi^2}{9}-\sin\frac{4\pi^2}{9}\right).$$

6-misol. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\cos xe^{\sin x}dx$ integralni hisoblash uchun $\sin x=t$ almashtirish bajaramiz. Bu yerda $dt=\cos xdx,\ x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=\frac{1}{2},\ x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{2}$. U holda:

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\cos xe^{\sin x}dx=\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2}e^tdt=e^t\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-e^{\frac{1}{2}}.$$

Mashqlarni bajaring. Quyidagi integrallarni o‘zgaruvchilarni almashtirish usulidan foydalanib hisoblang: a) $\int\limits_{8\pi/3}^{4\pi/3}\sin 4xdx$; b) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/3}\cos x\ln(\sin x)dx$; c) $\int\limits_{1}^{e^3}\frac{1}{x}e^{\ln x}dx$.

Aniq integralda bo‘laklab integrallash quyidagicha amalgam oshiriladi:

$u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada differentsiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin. U holda aniq integralda bo‘laklab integrallash quyidagi formula

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x) \qquad (5)$$

bo‘yicha amalga oshiriladi.

7-misol. $\int_1^3 x^2 \ln x dx$ ko‘rinishdagi integallarni hisoblashda bo‘laklab integrallash qoidasidan foydalanamiz. Bunda $u = \ln x,\ dv = x^2 dx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du = \frac{dx}{x},\ v = \frac{x^3}{3}$ ifodalar hosil bo‘ladi. Endi esa (5) formulani qo‘llaymiz:

$$\int_1^3 x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^3 - \frac{x^3}{9}\Big|_1^3 = 9\ln 3 - \frac{28}{9}.$$

8-misol. $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ ko‘rinishdagi integallarni hisoblashda ham bo‘laklab integrallash qoidasidan foydalanamiz. Bunda $u = x,\ dv = \cos x dx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du = dx,\ v = \sin x$ ifodalar hosil bo‘ladi. Endi esa (5) formulani qo‘llaymiz:

$$\int_0^{\pi/2} x\cos x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} \sin x dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

9-misol. $\int_0^2 xe^x dx$ ko‘rinishdagi integallarni hisoblashda ham bo‘laklab integrallash qoidasidan foydalanamiz. Bunda $u = x,\ dv = e^x dx$ belgilashlar kiritamiz. U holda, $du = dx,\ v = e^x$ ifodalar hosil bo‘ladi. Endi esa (5) formulani qo‘llaymiz:

$$\int_1^2 xe^x dx = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = xe^x\Big|_1^2 - e^x\Big|_1^2 = e^2.$$

Integralni hisoblashni osonlashtiradigan ba`zi xossalarni keltirib o‘tamiz:

1) $f(x)$ funksiya toq, ya`ni $f(-x) = -f(x)$ bo‘lsa, u holda

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0;$$

2) $f(x)$ funksiya juft, ya`ni $f(-x)=f(x)$ bo‘lsa, u holda

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx .$$

3.9.4. Aniq integralning geometrik va iqtisodiy ma`nolari.

Aniq integralning iqtisodiy ma`nosi quyidagicha izohlanishi mumkin. Biror t vaqt davomida ishlab chiqarish jarayonining unumdorligi $y=u(t)$ funksiya bilan aniqlansin. U holda $[t_1;t_2]$ vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi

$$V=\int_{t_1}^{t_2} u(t)dt$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Ma’lum vaqt oralig‘ida jamg‘arma bankiga tushgan pul miqdori. $u=f(t)$ – funksiya t – vaqtning har bir momentida jamg‘arma bankiga tushadigan pul miqdorini ifodalasin. $[0;T]$ vaqt oralig‘ida bankka tushgan pulning U umumiy miqdorini topish talab etiladi.

Agar $f(t)=const$ bo‘lsa, u holda $[0;T]$ vaqt oralig‘ida jamg‘arma bankiga tushgan U pul miqdori $U=f(c)\cdot(T-0)=f(c)\cdot T$ formula bilan topiladi, bu yerda $c\in[0;T]$. Agar $\left[0;\frac{T}{2}\right]$ vaqt oralig‘ining har bir momentida bankka $f(c_1)$ pul birligi, $\left[\frac{T}{2};T\right]$ oraliqda vaqtning har bir momentida $f(c_2)$ pul birligi tushsa, u holda $[0;T]$ vaqt oralig‘ida tushgan umumiy pul miqdori

$$U=f(c_1)\frac{T}{2}+f(c_2)\frac{T}{2}$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

$f(t)$ funktsiya $[0;T]$ kesmada uzluksiz funksiya bo‘lsin. $0=t_0<t_1<t_2<\ldots t_{n-1}<t_n=T$ nuqtalar yordamida $[0;T]$ kesmani kichik vaqt oraliqlariga ajratamiz. $[t_{i-1},t_i]$ vaqt oralig‘ida bankka tushgan ΔU_i pul

miqdori taqriban $\Delta U \approx f(c_i)\Delta t_i$ formula bilan hisoblanadi. Bu yerda $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1,2,3,...,n$. U holda

$$U = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i \Rightarrow U = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i \Rightarrow U = \int_0^T f(t)dt.$$

$f(t) \geq 0$ bo‘lgani uchun $[0;T]$ vaqt oralig‘ida jamg‘arma bankiga tushgan umumiy pul miqdori son jihatidan $f(t)$, $t = 0$, $t = T$, Ot cihziqlarbilan chegaralangan figura yuziga teng.

Ma’lum vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi. $y = f(t)$ funksiya vaqt o‘tishi bilan biror ishlab chiqarishning unumdorligi o‘zgarishini ifodalasin. $[0;T]$ vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan Q mahsulot hajmini topamiz.

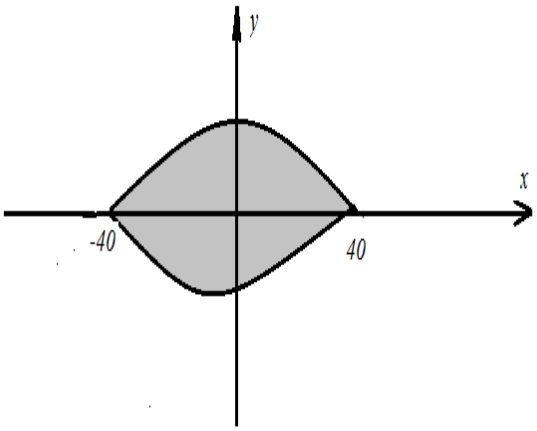
$[0;T]$ kesmani $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = T$ nuqtalar yordamida vaqt oraliqlariga ajratamiz. $[t_{i-1}, t_i]$ vaqt oralig‘ida ishlab chiqarilgan ΔQ_i mahsulot hajmi taqriban $\Delta Q \approx f(c_i)\Delta t_i$ formula bilan hisoblanadi. U holda

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i \Rightarrow Q = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i \Rightarrow Q = \int_0^T f(t)dt\,.$$

Moddiy harajatlarni prognozlashtirish. Moddiy harajatlarni prognozlashtirishda ko‘p hollarda turli murakkab figuralar, yuzalarni hisoblash zarurati kelib chiqadi. Yechilishi uchun aniq integral qo‘llaniladigan mos misollarni keltiramiz.

5-misol. Kema palubasi ikkita kesishuvchi parabolani eslatadi. Agar kema uzunligi 80m, markazidagi eni 20m va har bir kvadrat metrga 0,25 kg bo‘yoq kerak bo‘lsa, uni bo‘yash uchun qancha bo‘yoq zarur.

Yechish. Koordinatalar sistemasini quyidagicha kiritamiz. Koordinatalar boshini kema markaziga, Ox o‘qini esa paluba bo‘ylab joylashtiramiz (3.9.4.1-rasm)



3.9.4.1-rasm

Paluba yuzini topish uchun parabolalardan birining tenglamasini aniqlab olamiz. Parabolaning umumiy tenglamasi $y = ax^2 + bx + c$ ko‘rinishiga ega. $(-40,0)$, $(40,0)$, $(0,10)$ nuqtalar parabolaga tegishli bo‘lgani uchun ular parabola tenglamasini qanoatlantiradi: $a \cdot 40^2 - b \cdot 40 + c = 0$, $a \cdot 40^2 + b \cdot 40 + c = 0$, $c = 10$. Ushbu tenglamalar sistemasining yechimi quyidagi sonlar hisoblanadi. $a = -\frac{1}{160}$, $b = 0$, $c = 10$. Shunday qilib, izlanayotgan parabolaning tenglamasi $y = -\frac{x^2}{160} + 10$ ko‘rinishga ega. Kema yarim palubasining yuzi

$$S = \int_{-40}^{40} \left(-\frac{x^2}{160} + 10 \right) dx = \left(-\frac{x^3}{160 \cdot 3} + 10x \right) \Bigg|_{-40}^{40} =$$

$$= -1600 \cdot \frac{40}{160 \cdot 3} - 1600 \cdot \frac{40}{160 \cdot 3} + 400 + 400 = 400 \cdot \frac{4}{3}.$$

Palubaning yarmini bo‘yash uchun $S \cdot 0,25 = \frac{400}{3}(kg)$ bo‘yoq zarur. Butun palubani bo‘yash uchun esa $2 \cdot S = 2 \cdot \frac{400}{3} \approx 266,7(kg)$ bo‘yoq zarur bo‘ladi.

Pul oqimini diskontlash (“diskont”-chegirma). Kapital mablag‘larning iqtisodiy samaradorligini aniqlashda diskontlash masalasi vujudga keladi: $S(n) - n$ yildan so‘ng bankdan olingan

yakuniy pul miqdori, S_0 – boshlang‘ich pul miqdori, i – bankning yillik foiz stavkasi bo‘lsin. Agar foizlar oddiy bo‘lsa u holda har bir n yil yakunida $S(n)$ pul jamg‘arma quyidagicha hisoblanadi:

$$S(n) = S(n-1) + \frac{i}{100} S_0.$$

Demak,

$$S(1) = S_0 + \frac{i}{100} S_0 = S_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right),$$

$$S(2) = S_1 + \frac{i}{100} S_0 = S_0 \left(1 + \frac{i}{100}\right) + S_0 = S_0 \left(1 + 2\frac{i}{100}\right), \ldots,$$

$$S(n) = S_0 \left(1 + \frac{i}{100} n\right).$$

Shuning uchun agar foizlar oddiy bo‘lsa, u holda diskontlangan pul $S_0 = \dfrac{S(n)}{1 + \dfrac{i}{100} n}$ formula bo‘yicha hisoblanadi.

Bankda murakkab foizlar bo‘lsa, u holda yakuniy pul miqdori $S(n) = S_0 \left(1 + \dfrac{i}{100}\right)^n$, $n \in \square$ formula bo‘yicha hisoblanadi. Foizlar uzluksiz qo‘shilganda $S(n) = S_0 e^{\frac{it}{100}}$, $n \in (0;\infty)$ formula bo‘yicha hisoblanadi. Bu yerdan diskontlangan pul (bu holda dastlabki) n vaqt momentiga kelib murakkab foizlar holda $S_0 = \dfrac{S(n)}{\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)^n}$, foizlarning uzluksiz qo‘shilishida esa $S_0 = S(n) e^{-\frac{in}{100}}$ ga teng bo‘ladi.

Faraz qilamiz pullar bankka $n = 0$ vaqtning boshlang‘ich momentida birdan emas, balki doimiy ravishda qo‘yilsin va $S_0(n)$ uzluksiz funksiya pul oqimini ifodalasin. U holda $[0;T]$ vaqt bankka qo‘yilgan U_d umumiy pulni

$$U_d(T) = \int_0^T S_0(n)\, dn = \int_0^T S(t) e^{-\frac{in}{100}} dn.$$

aniq integral ifodalaydi. Bu yerda $U_d(T)$ kattalik $[0;T]$ vaqtdagi diskont pul deyiladi.

6-misol. Yillik daromad 1000 pul birligini tashkil qilishi uchun, jamg‘arma bankiga yillik 10% ga $[0;T]$ davrda qancha pul qo‘yilishi kerak, faraz qilinadiki foizlar uzluksiz qo‘shiladi.

Yechish. Masala shartiga ko‘ra barcha $[0;T]$ da $S_0(n)=1$ (ming birlik) shuning uchun

$$U_d(T)=\int_0^T S_0(n)\,dn=\int_0^T 1\cdot e^{-\frac{10n}{100}}dn=-10e^{-0,1T}+10 \text{ (ming pul birl)}$$

Xususan, $T=3$ yilda

$$U_d(3)=-10e^{-0,1\cdot 3}+10\approx 2,59 \text{ (ming pul birl)}$$

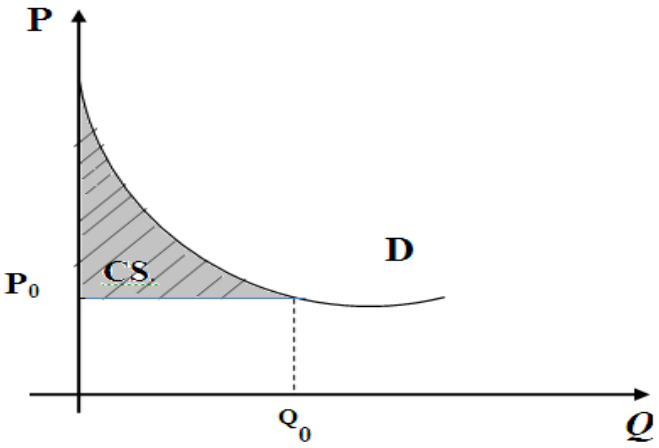
Shunday qilib uch yil davomida yillik daromad ming so‘m pul birligini (uch yilda 3 ming pul birligini) tashkil qilishi uchun, jamg‘arma bankiga 2,59 ming pul birligini qo‘yish kerak. Uch yilda foyda 0,41 ming pul birligini tashkil qiladi. $T=10$ yilda

$$U_d(10)=-10e^{-0,1\cdot 10}+10\approx 6,32 \text{ (ming pul birl)}$$

O‘n yilda foyda 3,68 ming pul birligiga yaqin bo‘ladi. ►

Iste’molchilarning ortiqcha foydasi. Ishlab chiqaruvchi (ta’minotchilar) ning ortiqcha foydasi. Bozorda muvozanat narx o’rnatilgandan so’ng mahsulotni yuqoriroq narxda sotib olmoqchi bo’lgan iste’molchilar uni muvozanat narxida sotib olish oqibatida qandaydir yutuqqa ega bo’ladilar. Ana shunday iste’molchilar yutuqlarining yig’indisi **iste’molchilarning ortiqcha foydasi** deb ataladi.

Grafik ma’noda istemolchilarning ortiqcha foydasi talab egri chizig’i, ordinatalar o’qi va absissalar o’qiga parallel va bozor muvozanati nuqtasidan o’tuvchi to’g’ri chiziq bilan chegaralangan figura yuzasiga teng deb tasavvur qilish mumkin (3.9.4.2 - rasm).



3.9.4.2-rasm

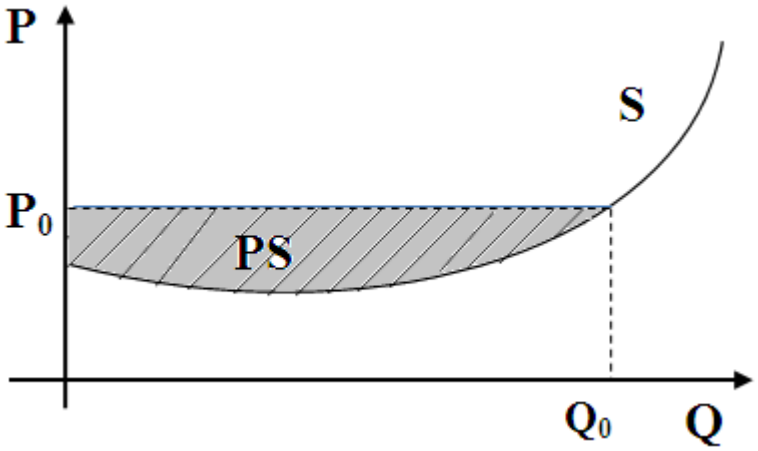
Iste'molchilarning ortiqcha foydasi C.S. bilan belgilanadi va quyida aniq integral yordamida topiladi.

$$CS = \int_0^{Q_0} P(Q)dQ - P_0Q_0$$

Ishlab chiqaruvchi (ta'minotchilar)ning ortiqcha foydasi ta'minotchilar o'z mahsulotini bozordagi muvozanat narxda sotganda hosil bo'ladigan umumiy foydalarini ifodalaydi va u quyidagi formula yordamida topiladi:

$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} P(Q)\,dQ$$

Geometrik ma'noda ta'minotchilarning ortiqcha foydasini taklif egri chizig'i, ordinatalar o'qi va absissalar o'qiga parallel va bozor muvozanati nuqtasidan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan chegaralangan figura yuzasiga teng deb tasavvur qilish mumkin (7- rasm).



7-rasm

7-misol. Biror tovarga talab $P = 70 - 4Q_d$ funksiya bilan berilgani ma'lum. Bu erda $Q-$ mahsulot miqdori (dona), $P-$ bir birlik mahsulot narxi, taklif esa $P = 5 + Q_s$ funksiya bilan beriladi.

a) ushbu mahsulotni sotib olishdan iste'molchilar yutuqlari miqdori;

b) ushbu mahsulotni sotishdan ishlab chiqaruvchining (ta'minotchining) ortiqcha foydasini hisoblang.

Yechish.a) Uning kattaligini o'lchash uchun $Q_d = Q_s$ tenglikdan narxning va berilgan mahsulot miqdorining muvozanat qiymatlarini aniqlash zarur. $70 - 4Q = P = 5 + Q \quad 70 - 5 = Q + 4Q \quad 5Q = 65 \quad Q = 13.\ Q = 13$ da $P = 18.$ Iste'molchilar ortiqcha foydasi formulasidan foydalanib topamimz:

$$CS = \int_0^{13} PdQ - 13 \cdot 18 = \int_0^{13} (70 - 4Q)dQ - 234 =$$

$$= \left[70Q - 2Q^2 \right]\Big|_0^{13} - 234 = (910 - 338 - 0) - 234 = 338.$$

b) Modomiki taklif funksiyasi chiziqli funksiya bilan berilganligi uchun, ta'minotchining ortiqcha foydasi kattaligini turli usullarda hisoblash mumkin.

Birinchi usul PS ni hisoblash formulasiga asoslanadi.

$$PS = 13 \cdot 18 - \int_0^{13} PdQ = 234 - \int_0^{13} (5 + Q)\,dQ =$$

$$= 234 - \left[5Q + \frac{1}{2}Q^2 \right]\Big|_0^{13} = 234 - (65 + 84,5 - 0) = 84,5.$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday masalalar aniq intgralga keltiriladi?
2. Integral yig'indi qanday tuziladi?
3. Aniq integral deb nimaga aytiladi?
4. Aniq integral qanday belgilanadi?
5. Funksiya integrallanuvchi bo'lishi uchun qanday xossaga ega bo'lishi kerak?

6. Aniq integralning asosiy xossalari nimalardan iborat?
7. Nyuton-Leybnis formulasini yozing?
8. Aniq integralni bo‘laklab integrallash nimadan iborat?
9. Mehnat unumdorligi funksiyasi nima?
10. Ishlab chiqarish mehnat unumdorligini aniq integral yordamida hisoblash mumkinmi va qanday?

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

Quyidagi aniq integralni hisoblang**:**

1. $\int x^2 \cdot \sin\left(x^3+1\right)dx;$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$

3. $\int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{x+5}}dx$

4. $\int_{1}^{e} \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$

5. $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$

6. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

7. $\int_{0}^{\pi/4} \sin 4xdx$

8. $\int_{1}^{e} x^2 \ln xdx$

9. $\int_{0}^{\pi} e^x \sin xdx$

10. $\int_{0}^{1} \arcsin xdx$

11. $\int_{0}^{1} \ln(x+1)dx$

12. $\int_{0}^{\pi/2} \sin x\cos^2 xdx$

13. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x+1}$

14. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

15. $\int_{0}^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$

16. $\int_{0}^{1} \sqrt{1+x^2}dx$

17. $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x+x^2}$

18. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{2x-1}$

19. $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$

20. $\int_{1}^{e} x\arcsin xdx$

21. $\int_{0}^{\pi/2} x^2 \cos xdx$

22. $\int_{\frac{\Pi}{8}}^{\frac{\Pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$

23. $\int_{1}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}dx$

24. $\int_{1}^{4} \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}$

25. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

26. $\int_0^{\frac{\Pi}{2}} x\cos x dx$

27. $\int_0^{\frac{\Pi}{4}} tg^3 x dx$

28. $\int_1^8 (4x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})dx$

29. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx$

30. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$

31. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin 7x dx$

32. $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$

33. $\int_4^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$

34. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos x dx$

35. $\int arctg\sqrt{x-1}dx.$

36. $\int_0^{e-1} \ln(1+x)dx$

37. $\int e^{\arcsin x} dx.$

Iqtisodiy mazmundagi masalalani yeching.

28.1. Marjinal daromad funksiyasi $MR(Q) = \frac{10}{(1+q)^2}$. Agar $R(0) = 0$ ma`lum bo‘lsa, $R(Q)$ daromad funksiyasini toping va uning $Q = 9$ dagi qiymatini hisoblang.

28.2. Marjinal xarajat funksiyasi $MC(q) = \frac{100}{\pi} arctgq$ berilgan. Agar $C(0) = 1000$ ma`lum bo‘lsa, $C(q)$ xarajat funksiyasi ifodasini va uning $Q = 100$ dagi qiymatini toping.

28.3. Agar talab va taklif qonunlari $D = = 86 - P^2$, $S = 20 + \frac{11}{6}P$ ko‘rinishga ega bo‘lsa, bozor muvozanatini o‘rnatish bo‘yicha taklifdan iste`molchi va ta’minotchining yutug‘ini toping.

28.4. Agar mehnat unumdorligi $f(t) = 11,3e^{-0,417t}$ formula bo‘yicha berilgan bo‘lsa, dastlabki besh soatda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini aniqlang, bu yerda t – vaqt (soatlarda).

28.5. Korxonaning kunlik unumdorligi $f(t) = -0,0033t^2 - 0,089t + 20,96$ funksiya bilan berilgan bo‘lsa, uning bir yilda (258 ish kuni) ishlab chiqargan mahsulot hajmini toping, bu yerda $1 \le t \le 8$, $t -$ vaqt (soatlarda).

28.6. Kimyoviy tola uzluksiz ishlab chiqarilganda $f(t)$ mehnat unumdorlik ish boshlashdan boshlab 10 soat davomida o‘sadi, so‘ngra bir tekis davom etadi. Agar $f(t) = e^{\frac{t}{5}} - 1, t \in [0,10]$ bo‘lsa, jihoz ishga tushirilgandan so‘ng birinchi sutkada qancha tola beradi.

IV-BOB. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR NAZARIYASI

4.1-§. Birinchi tartibli va ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Tayanch iboralar: differensial tenglama, differensial tenglama tartibi, differensial tenglama yechimi, umumiy va xususiy yechimlar, Koshi masalasi, maxsus nuqta, maxsus yechim, o‘zgaruvchilari ajralgan yoki ajraladigan differensial tenglama, bir jinsli differensial tenglama.

4.1.1. Differensial tenglamalar haqida asosiy tushunchalar.

Iqtisodda dinamik jarayonlarni tadqiq qilish muhim masalalardan hisoblanadi. Bunda miqdorning vaqtga bog'liq o'zgarishi tahlil qilinadi. Ma'lumki biror miqdorning o'sish yoki kamayish tezligi (o'zgarish tezligi) shu miqdorni ifodalovchi vaqtga bog'liq funksiyaning hosilasiga teng. Shu sabab iqtisodiy dinamik jarayonlarning modellarida noma'lum miqdorni ifodalovchi noma'lum funksiya bilan bir qatorda uning hosilalari ham ishtirok qiladi.

Masalan, ota o'zining 7 yoshdagi o'g'lining 12 yildan keyingi universitetda o'qishi bilan bog'liq 35 000 shartli pul birligini qoplash uchun 10% foiz stavkasi bilan bankka pul qo'ymoqchi. Bank foizni stavkasining ulushini uzluksiz ravishda hisoblasin. Bu masalada bizdan otaning hozirda bankka qancha miqdorda pul qo'yishi kerakligini topish talab qilinadi.

Deylik x vaqtdan keyin bank depositidagi pul miqdori $y(x)$ ga teng bo'lsin. Masala shartiga ko'ra bu pul miqdorining o'zgarish tezligi $y'(x)$ shu momentdagi pul miqdori $y(x)$ ning 10%iga teng, ya'ni

$$y'(x) = 0{,}1y \qquad (1)$$

Masala shartiga ko'ra

$$y(12) = 35000 \qquad (2)$$

bo'lib, $y(0)$ ni topish talab qilinadi.

Izoh. Dinamik masalalarda odatda vaqtni ifodalovchi o'zgaruvchi x emas, balki t bilan belgilanadi. Bu holatda vaqt bo'yicha hosila $\dot{y}$

kabi belgilanadi. Masalan, (1) tenglama bu belgilashlarda $\dot{y} = 0{,}1y$ kabi yoziladi.

Biz sodda misolda dinamik model tuzdik. Xuddi shuningdek, yetarlicha ma'lumot mavjud bo'lganda, boshqa murakkab iqtisodiy jarayonlar uchun ham matematik modellar tuzish mumkin. Bu modellar odatda "differensial tenglamalar" bilan ifodalanadi.

1-ta'rif. Erkli o‘zgaruvchi x ni, noma‘lum $y(x)$ funksiyani va uning hosilalarini bog‘lovchi tenglamaga **differensial tenglama** deyiladi. Bu tenglamada ishtirok etgan hosilaning eng katta tartibi **differensial tenglamaning tartibi** deyiladi.

$n-$ tartibli differensial tenglamaning umumiy ko‘rinish:

$$F(x, y, y', y'', ...y^n) = 0 \ . \qquad (3)$$

Yuqoridagi misoldagi (1) differensial tenglama 1- tartibli tenglamadir.

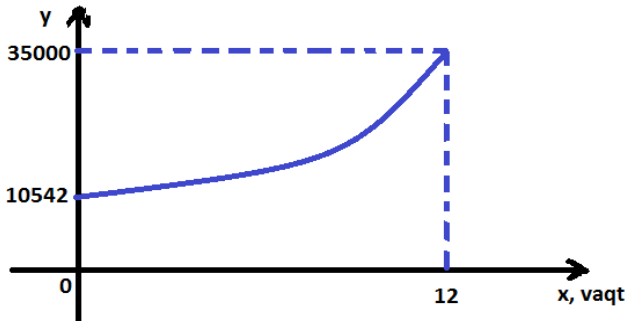
2-ta'rif. (3) *tenglamani ayniyatga aylantiruvchi va kamida* n *marta differensiallanuvchi har qanday* $y = f(x)$ *funksiyaga* (3) ***differensial tenglama yechimi*** *deyiladi*.

Masalan, $y = e^{0{,}1x}$ funksiya $y' = 0{,}1y$ differensial tenglamaning yechimi bo‘lib, u tenglamaning cheksiz ko‘p yechimlaridan biridir. Har qanday $y = c \cdot e^{0{,}1x}$ funksiya ham, bu yerda, $c-$ ixtiyoriy o‘zgarmas son, tenglamani qanoatlantiradi. Bu funksiya tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi. Umumiy yechimda ixtiyoriy o‘zgarmas c qatnashgani uchun, tenglama yechimlari to‘plami yagona ixtiyoriy c o‘zgarmasga bog‘liq deyiladi.

O‘zgarmas c ga turli son qiymatlar berilganda, uning konkret yoki xususiy yechimlari kelib chiqadi. Misol uchun (1) tenglamaning (2) shartni qanoatlantiruvchi yechimini topaylik. (2) shartdan

$$c \cdot e^{0{,}1 \cdot 12} = 35000 \text{ yoki } c = 35000 \cdot e^{-1{,}2} \approx 10542 .$$

Demak, ota bannka 10542 shartli p.b. miqdorida pul qo'yishi kerak ekan.



Boshqa misol ko'raylik.

1-misol. $y'''=0$ differensial tenglama yechimlarini bevosita qurish mumkin:

$$y''=c_1,\quad y'=c_1x+c_2,\quad y=c_1x^2/2+c_2x+c_3.$$

Bu yerda, c_1, c_2 va c_3 ixtiyoriy o‘zgarmaslar bo‘lib, ularning har qanday qiymatlarida $y=c_1x^2/2+c_2x+c_3$ funksiya differensial tenglamani qanoatlantiradi va shu sababli $y=c_1x^2/2+c_2x+c_3$ umumiy yechim bo‘lib hisoblanadi. $y'''=0$ differensial tenglama umumiy yechimi uch ixtiyoriy o‘zgarmasga bog‘liq va har birining konkret qiymatlarida xususiy yechim hosil bo‘ladi.

Yuqoridagi misollardan *differensial tenglama umumiy yechimida o‘zgarmaslar soni tenglamaning tartibiga teng* ekanligini va uning xususiy yechimlari umumiy yechim o‘zgarmaslarining konkret qiymatlarida kelib chiqishini xulosa qilish mumkin.

Differensial tenglama yechimlarini qurish jarayoniga differensial tenglamani integrallash deb yuritiladi. Differensial tenglamani integrallab, masalaning qo‘yilishiga qarab, uning yoki umumiy yechimi yoki xususiy yechimi topiladi.

4.1.2. Oddiy differensial tenglamalar. Birinchi tartibli sodda differensial tenglamalar.

Birinchi tartibli differensial tenglama umumiy

$$F(x;y;y')=0 \qquad (4)$$

yoki y' hosilaga nisbatan yechilgan

$$y'=f(x;y) \qquad (5)$$

ko‘rinishda yozilishi mumkin. Ushbu tenglama ham, odatda, cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lib, ulardan biror – bir xususiy yechimni ajratib olish uchun qo‘shimcha shartni talab etadi. Ko‘p hollarda ushbu shart Koshi masalasi shaklida qo‘yiladi.

Koshi masalasi. $y' = f(x;y)$ (*)differensial tenglamaning

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \quad (**)$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iborat.

(*), (**) masala yechimining mavjudlik va yagonalik sharti quyidagi teoremadan aniqlanadi.

1-teorema. Agar $f(x;y)$ funksiya $(x_0;y_0)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan, uzluksiz va $\partial f/\partial y$ – uzluksiz xususiy hosilaga ega bo‘lsa, u holda $(x_0;y_0)$ nuqtaning shunday atrofi mavjudki, bu atrofda $y' = f(x;y)$ differensial tenglama uchun $y\big|_{x=x_0} = y_0$ boshlang‘ich shartli Koshi masalasi yechimi mavjud va yagonadir

Differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari tushunchalariga aniqlik kiritamiz.

Agar boshlang‘ich $(x_0;y_0)$ nuqtaning berilishi (4) tenglama yechimining yagonaligini aniqlasa, u holda ushbu yagona yechim xususiy yechim deyiladi.

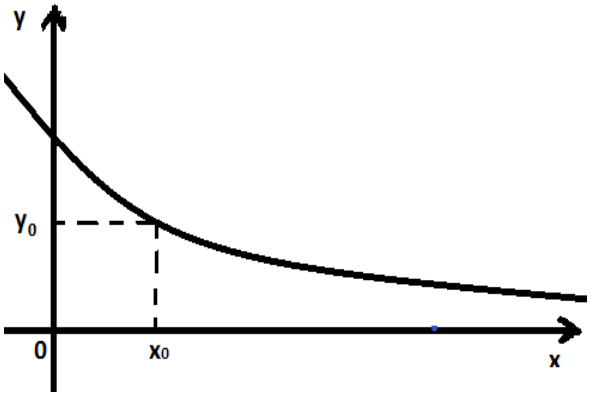
Differensial tenglamaning barcha xususiy yechimlari to‘plamiga uning umumiy yechimi deyiladi.

Odatda, umumiy yechim oshkor $y = \varphi(x,c)$ yoki oshkormas $\varphi(x,y,c) = 0$ ko‘rinishda yoziladi. c o‘zgarmas $(x_0;y_0)$ boshlang‘ich shart asosida $y_0 = \varphi(x_0;c)$ tenglamadan topiladi.

3-ta’rif. Tenglamaning umumiy integrali (yoki yechimi) deb, c o‘zgarmasning turli qiymatlarida barcha xususiy yechimlari aniqlanadigan $\varphi(x,y,c) = 0$ munosabatga aytiladi.

Masalan, yechimning mavjudlik va yagonalik shartlari (1-teoremadagi) yuqorida ko‘rilgan $y' = -y$ tenglama uchun xOy tekislikning har bir nuqtasida bajariladi. Tenglama umumiy yechimi $y = c \cdot e^{-x}$ formuladan iborat bo‘lib, har qanday boshlang‘ich $y\big|_{x=x_0} = y_0$

shart mos c o‘zgarmas tanlanganda qanoatlantiriladi. c o‘zgarmas $y_0 = c \cdot e^{-x_0}$ tenglamadan topiladi: $c = y_0 \cdot e^{x_0}$.



Differensial tenglamani shartlarsiz yechish uning umumiy yechimini (yoki umumiy integralini) topishni anglatadi.

(2) differensial tenglama yechimi mavjudligi va yagonaligini ta‘minlaydigan muhim shartlardan biri $\partial f / \partial y$ xususiy hosilaning uzluksizligidir. Ba‘zi bir nuqtalarda ushbu shart bajarilmasligi va ular orqali birorta ham integral chiziq o‘tmasligi yoki, aksincha, bir nechta integral chiziqlar o‘tishini bildiradi. Bunday nuqtalar differensial tenglamaning maxsus nuqtalari deyiladi.

Differensial tenglamaning integral chizig‘i faqat uning maxsus nuqtalaridan iborat bo‘lishi mumkin. Ushbu egri chiziqlar tenglamaning maxsus yechimlari deb yuritiladi.

4.1.3.Birinchi tartibli sodda differensial tenglamalar

O'zgaruvchilari ajraladigan tenglama.

$$y' = p(x)q(y) \qquad (6)$$

tenglama *o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama* deb yuritiladi.

(6) tenglamani yechish uchun noma‘lum y funksiyaning qaralayotgan o‘zgarish sohasida $q(y) \neq 0$ shart bajariladi deb, (6) tenglamani

$$dy / q(y) = p(x)dx$$

shaklda yozamiz va ikkala qismini integrallab,

$$\int dy / q(y) = \int p(x)dx$$

tenglikni olamiz. Agar $Q(y)$ funksiya $1/q(y)$ funksiyaning, $P(x)$ esa $p(x)$ ning boshlang‘ich funksiyalaridan biri bo‘lsa, (6) tenglamaning umumiy integrali:

$$Q(y) = P(x) + C$$

ko‘rinishdan iborat bo’ladi.

2-misol. $y' = xy^2$ tenglamaning barcha yechimlarini topish talab qilingan bo‘lsin.

$y \neq 0$ shart o‘rinli deb, tenglama o‘zgaruvchilarini ajratamiz:

$$dy/dx = xy^2 \Rightarrow dy/y^2 = xdx.$$

Buni integrallab, $y = -\dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 + C}$ ko‘rinishdagi umumiy yechimni olamiz. Ushbu yechimga tenglamani yechish jarayonida yo‘qotilgan $y = 0$ yechimni ham qo‘shish lozim.

3-misol. Ma'lum bir davlatda aholining o'sishi quyidagi tenglama bilan ifodalanadi.

$$\dot{N}(t) = 0{,}1N(t)\big(40 - N(t)\big).$$

Bu erda $N(t)$ million miqdor (noma'lum funksiya) t vaqt momentidagi aholi sonini ifodalaydi. Agar $N(0) = 30$ bo'lsa, $N(20)$, ya'ni 20 yildan keyingi aholi sonini toping.

Tenglamada o'zgaruvchilarni ajratamiz

$$\frac{dN}{N(40-N)} = 0{,}1dt\ .$$

$\dfrac{1}{N(40-N)} = \dfrac{1}{40}\left(\dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{40-N}\right)$ ayniyatni hisobga olgan holda bu tenglamani integrallasak

$$\ln\frac{N}{40-N} = 4t + C$$

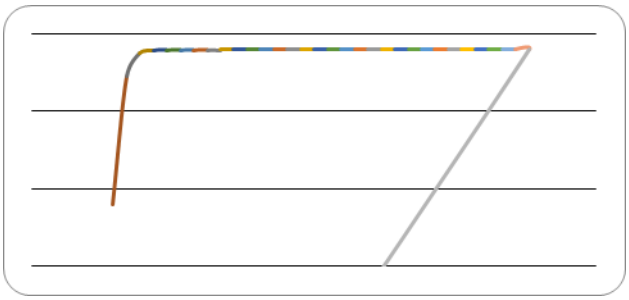
yoki

$$N(t) = \frac{40C_1e^{4t}}{1 + C_1e^{4t}} \qquad (C_1 = e^C)$$

yechimni hosil qilamiz. Masala shrtiga ko'ra $t = 0$ boshlang'ich holatda

$$\frac{40C}{1+C}=30 \quad \Leftrightarrow \quad C=3\,.$$

Demak, aholi soni $N(t)=\dfrac{120e^{4t}}{1+3e^{4t}}$ qonuniyat bilan o'zgaradi.



N(t) funksiyaning Excel dasturida chizilgan grafigi

Funksiya grafigidan ko'rinib turibdiki, mazkur model bilan ifodalangan aholi soni dastlabki 1,5 yil davomida tez o'sadi va deyarli 40 mln ga yaqinlashadi. Keyingi davrlarda o'shish tezligi juda kichik bo'lib, deyarli o'zgarmaydi. Xususan, $N(20)\approx 40$.

Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama.

Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama deb,

$$dy/dx=f\left(y/x\right) \qquad (7)$$

ko‘rinishdagi tenglamaga aytiladi.

(7) tenglamani yechish uchun noma‘lum $y(x)$ funksiyadan $u(x)=y(x)/x$ funksiyaga o‘tamiz. U holda

$$y=xu, \qquad dy/dx=u+x\,du/dx$$

tengliklar o‘rinli bo‘lib, (7) tenglama:

$$u+x\,du/dx=f(u) \qquad \text{yoki} \qquad du/\left(f(u)-u\right)=dx/x$$

ko‘rinishga keltiriladi. Oxirgi tenglama o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama bo'lib, yuqorida ko'rsatilgan usulda yechiladi. Natijada,

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\ln|x|+c.$$

$u(x)$ funksiya topilgandan so‘ng, $y(x)=x\cdot u(x)$ funksiyaga qaytiladi.

4-misol. $y'-\frac{x+y}{x-y}=0$ tenglamani yeching.

Yechish.Ushbu tenglama bir jinsli tenglama, chunki

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y+x}{y-x}=\frac{y/x+1}{y/x-1}=\frac{u+1}{u-1}.$$

Bu yerda $u=y/x.$ Noma‘lum u funksiyaga nisbatan o‘zgaruvchilari ajralgan:

$$\frac{du}{\frac{u+1}{u-1}-u}=\frac{dx}{x} \qquad \text{yoki} \qquad \frac{(u-1)du}{-u^2+2u+1}=\frac{dx}{x}$$

tenglama hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglikni integrallaymiz:

$$-\frac{1}{2}\ln\left|-u^2+2u+1\right|=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|C|.$$

So‘ngra

$$x^2\left|-u^2+2u+1\right|=|C|$$

yechimlarni va $y=xu$ funksiyaga qaytib, oshkormas shaklda:

$$x^2+2xy-y^2=C$$

umumiy integralni quramiz.

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama

$$y'+p(x)y=f(x)$$

ko‘rinishda yoziladi.

Bu tenglamani integrallash jarayoni odatda, ikki bosqichdan iborat: dastlab, tenglama o‘ng tomonidagi $f(x)$ funksiya 0 bilan almashtirilib

$$y'+p(x)\cdot y=0$$

bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi topiladi. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi qurilgandan so‘ng, bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning biror – bir $y(x)$ xususiy yechimi topiladi.

Bir jinsli bo‘lmagan tenglama umumiy yechimi, bu tenglamaning biror – bir $y_{xus}(x)$ xususiy yechimi bilan bir jinsli tenglamaning $y_{b.j.}$ yechimlari yig‘indisiga teng:

$$y(x) = y_{b.j.}(x) + y_{xus}(x).$$

Birinchi bosqichda bir jinsli tenglamani yechamiz: tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama bo‘lgani uchun

$$dy/y = -p(x)dx.$$

Oxirgi tenglamani integrallab, $y = Ce^{-P(x)}$ umumiy yechimni quramiz, bu yerda,

$P(x)$ funksiya $p(x)$ ning boshlang‘ich funksiyalaridan biri.

Ikkinchi bosqichda tenglamaning xususiy yechimlaridan birini ixtiyoriy o‘zgarmasni variatsiyalash usulida, ya‘ni $y(x)$ xususiy yechimni

$$y(x) = u(x)e^{-P(x)}$$

shaklda qidiramiz. Ushbu ifodani (2) tenglamaga qo‘yamiz va $u(x)$ noma‘lum funksiyaga nisbatan

$$u' \cdot e^{-P(x)} - uP'(x)e^{-P(x)} + P(x)ue^{-P(x)} = f(x)$$

tenglamani olamiz. $P'(x) = p(x)$ munosabat o‘rinli bo‘lgani uchun, tenglamaning chap tomondagi ikkinchi va uchinchi hadlar o‘zaro yeyishadi. Natijada,

$$du/dx = f(x)e^{P(x)}$$

tenglama kelib chiqadi. Uni integrallab, cheksiz ko‘p

$$u(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx$$

boshlang‘ich funksiyalardan birini tanlaymiz.

5-misol. $y' - 2x(y+1) = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. Tenglama $y' - 2xy = 2x$ shaklda yozilishi mumkin va u chiziqli tenglamadir. Tenglamaning mos bir jinsli tenglamasi $y' - 2xy = 0$ ko‘rinishga ega. O‘zgaruvchilarni ajratib, so‘ngra integrallaymiz:

$$dy/y = 2x \cdot dx \quad \Leftrightarrow \ln|y| = x^2 + \ln|c| \quad \Leftrightarrow y = \pm ce^{x^2}$$

Dastlabki bir jinslimas tenglamaning xususiy yechimini $y_0(x) = u(x)e^{x^2}$ ko‘paytma ko‘rinishida topamiz:

$$u'e^{x^2}+2xue^{x^2}-2xue^{x^2}-2xue^{x^2}=2x \Leftrightarrow u'=2xe^{-x^2}$$

va $u(x)=-e^{-x^2}+c,$ umumiy yechimdan $u(x)=-e^{-x^2}$ xususiy yechimni tanlaymiz. Natijada, $y_0(x)=-e^{-x^2}\cdot e^{x^2}=-1,$ shunday qilib, berilgan tenglamaning umumiy yechimini xususiy $y=-1$ va mos bir jinsli tenglama umumiy yechimi $y=c\cdot e^{x^2}$ larning yig‘indisidan iborat:

$$y(x)=c\cdot e^{x^2}-1;$$

6-misol. *Raqobat sharoitida biror bir tovarga bo'lgan talab va taklif funksiyalari quyidagicha bo'lsin*

$$Q_d=170-8p \quad va \quad Q_s=-10+4p.$$

Agar narx talab va taklif orasidagi muvozanat shartini qanoatlantirmasa, u holda bozordagi raqobat ta'sirida u quyidagicha o'zgaradi

$$\frac{dp}{dt}=0,5(Q_d-Q_s).$$

Bu tenglamadan ko'rinib turibdiki, agar talab taklifdan katta bo'lsa, $\dot{p}>0$ *bo'lib narx oshadi, aks holda, ya'ni taklif talabdan katta bo'lsa* $\dot{p}<0$ *bo'lib, narx kamayadi. Har ikkala holatda ham narx* $Q_d=Q_s$ *shartni qanoatlantiruvchi muvozanat narxga yaqinlashadi.* $p(0)=10$ *bo'lsin. Narx dinamikasini aniqlaymiz va bozorning stabilligini tahlil qilamiz.*

Tenglamada talab va taklif funksiyalarini o'rniga qo'yib, soddalashtirsak

$$\frac{dp}{dt}=-6p+90.$$

Bu tenglamaning bir jinsli qismini yechamiz.

$$\frac{dp}{dt}=-6p \Leftrightarrow \frac{dp}{p}=-6dt \Leftrightarrow p_{b.j.}(t)=C\cdot e^{-6t}.$$

Endi xususiy yechimni topamiz. $p_{xus}(t)=u(t)e^{-6t}$, $\dot{p}_{xus}=-6u(t)e^{-6t}+\dot{u}(t)e^{-6t}$ *ifodalarni tenglamaga qo'ysak,*

$$\dot{u}(t)=90e^{6t} \Rightarrow u(t)=15e^{6t}$$

ni hosil qilamiz. U holda $p_{xus}=15$ *ni hosil qilamiz. Tekshirib ko'rib, bu xususiy yechim muvozanat narxni ifodalashiga amin bo'lamiz.*

Demak, umumiy yechim quyidagicha bo'ladi

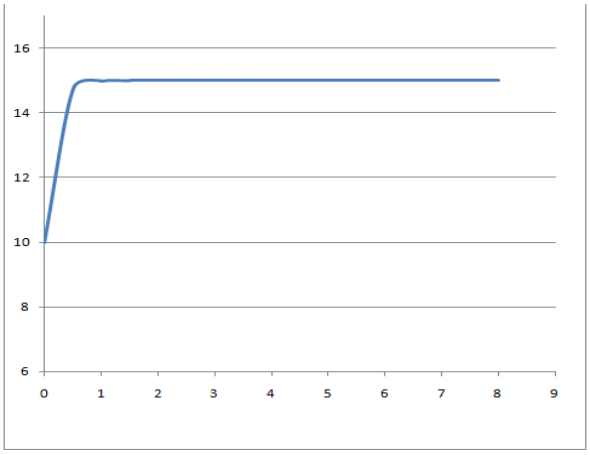
$$p(t)=p_{b.j.}(t)+p_{xus}=Ce^{-6t}+15.$$

Boshlang'ich narx $p(0)=10$ *dan foydalansak,* $C+15=10$ *yoki* $C=-5$ *ni hosil qilamiz. U holda narx dinamikasi*

$$p(t)=15-5e^{-6t}.$$

Bu yechimning grafigini Excel dasturida chizamiz.

T	N
0	10
0,5	14,75106466
1	14,98760624
1,5	14,99938295
2	14,99996928
2,5	14,99999847
3	14,99999992



Bundan ko'rish mumkinki, bozordagi boshlang'ich narx $p(0)=10$ *juda tez suratda muvozanat narxi* $p=15$ *ga yaqinlashadi. Ya'ni, bozor stabillik shartini qanoatlantiradi.*

Chiziqli differensial tenglamani yechishda qo‘llanilgan usul ba‘zi chiziqsiz tenglamalarni ham yechish imkonini beradi.

Bernulli tenglamasi. Chiziqsiz

$$y'+P(x)y=q(x)y^n$$

tenglama Bernulli tenglamasi deb yuritiladi.

Bernulli tenglamasini yuqoridagi usulni qo‘llab, yechish mumkin. Dastlab, $y'+P(x)y=0$ bir jinsli tenglamaning yechimlaridan biri $y_0(x)$ ni topamiz.

Tenglama umumiy yechimini $y(x)=u(x)y_0(x)$ ko‘rinishda qidiramiz. Natijada, noma‘lum $u(x)$ ga nisbatan,

$$u'(x)y_0(x)=q(x)u^n(x)y_0^n(x)$$

o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama kelib chiqadi va integrallanadi.

7-misol. $y'+2y-e^{2x}y^2=0$ tenglamani yeching.

Yechish. Dastlab, bir jinsli $y'+2y=0$ tenglamani integrallaymiz va uning $y=ce^{-2x}$ umumiy yechimini olamiz. Yechimlaridan biri sifatida $y_0(x)=e^{-2x}$ funksiyani qarash mumkin. So‘ngra, berilgan tenglamada $y(x)=u(x)e^{-2x}$ almashtirish bajaramiz:

$$e^{-2x}u'=e^{-4x}e^{2x}u^2 \quad \text{yoki} \quad du/u^2=1.$$

Oxirgi tenglamani integrallab, $u(x)=1/(c-x)$ tenglikni olamiz. Natijada, tenglama umumiy yechimi:

$$y(x)=u(x)y_0(x)=e^{-2x}/(c-x).$$

Rikkati tenglamasi.

2-teorema. $y'=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$ tenglama Rikkati tenglamasi deyiladi. Bunda $P(x),\ Q(x)$ va $R(x)$ funksiyalar $(a;b)$ intervalda aniqlangan uzluksiz funksiyalardir.

Rikkati tenglamasining y_1 xususiy yechimi ma`lum bo‘lsa

$$y=y_1+\frac{1}{z} \qquad (6)$$

(z – yangi noma`lum funksiya) almashtirish yordamida chiziqli tenglamaga keltiriladi.

$$y'=Ay^2+\frac{B}{x}y+\frac{C}{x^2} \qquad (7)$$

bunda A, B, C o‘z garmas sonlar bo‘lib $(B+1^2)\geq 4AC$. Rikkati tenglamasi $y_1=\frac{a}{x}$ xususiy yechimga ega. Bu yerda a – o‘zgarmas son bo‘lib uni aniqlash uchun bu xususiy yechim (7) tenglamaga qo‘yiladi.

(7) tenglama $y=\frac{z}{x}$ almashtirish yordamida ham o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltirilishi mumkin.

8-misol. $y'=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2x^2}$ tenglamani yeching.

Yechish. $y=\frac{z}{x}$ almashtirishdan foydalansak,

$$\frac{z'x-z}{x^2}=\frac{z^2}{2x^2}+\frac{1}{2x^2},\qquad 2z'x=(z+1)^2,\qquad \frac{2dz}{(z+1)^2}=\frac{dx}{x},$$

$$-\frac{2}{z+1}=\ln|x|+C,\qquad z+1=\frac{2}{C-\ln|x|},\quad y=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x(C-\ln|x|)}.$$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping

1. $x^2\cdot y^1=(1-x^3)/y;$

2. $y\cdot y^1=(1+2x)/y^2;$

O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

3. $x\cdot dx/y=\sqrt{(x^2+1)}\cdot dy;$

4. $y^1\cdot tgx-y=10;$

5. $\sqrt{(1-x^2)}\cdot dy+x\cdot\sqrt{(1-y^2)}\cdot dx=0;$

6. $y^1=e^{x+y}$

Koshi masalalarini yeching:

7. $(1+x^2)\cdot y^1=1+y^2,\quad y_{x=0}=1;$

8. $y^1=tgx\cdot ctgy,\ y_{x=0}=\pi/4;$

9. $(1+e^{2x})\cdot y^2\cdot y^1=e^x,\quad y_{x=0}=0;$

10. $y\cdot\ln y\cdot dx=\sin x\cdot dy,\ y_{x=\pi/2}=1$

Bir jinsli differensial tenglamalarni yeching:

11. $(x-y)\cdot dy-y\cdot dx=0;$

12. $y^1=y^2/x^2-1;$

13. $(x^2-y^2)\cdot dy=2xy\cdot dx;$

14. $y^1 = y/x + x/y;$

15. $y^1 = 2xy/(3x^2 - y^2),\ \ y_{x=0} = 1;$

16. $(y - x \cdot y^1) \cdot arctgy/x + x = 0,\quad y_{x=1} = 0.$

Chiziqli differensial tenglamalarni yeching:

17. $y' + y = 2x;$

18. $y^1 + 4y/x = x^3;$

19. $y^1 + 2xy = x \cdot e^{-x2};$

20. $y^1 + y = \sin x;$

21. $y^1 + 2y = e^x;$

22. $y^1 - tgx \cdot y = 1/\cos x;\quad y_{x=0} = 0$

23. $y^1 - y/(x^2 + x) = 1;\quad y_{x=1} = 0.$

Bernulli tenglamalari umumiy yechimlarini toping:

24. $y^1 + y/x = -x \cdot y^2;$

25. $y^1 + y/(x+1) = -y^2;$

26. $(x^2/y - y^3) \cdot dy - x \cdot dx = 0;$

27. $y^1 - tgx \cdot y = -\cos x \cdot y^2;$

28. $y^1 - 4/x = x \cdot \sqrt{y} = 0.$

Iqtisodiy mazmundagi masalalarni yeching:

29. Raqobat sharoitida biror bir tovarga bo'lgan talab va taklif funksiyalari quyidagicha bo'lsin

$$Q_d = 35 - 0.5p \quad \text{va} \quad Q_s = -4 + 0.8p\,.$$

Agar narx talab va taklif orasidagi muvozanat shartini qanoatlantirmasa, u holda bozordagi raqobat ta'sirida u quyidagicha o'zgaradi

$$\frac{dp}{dt} = 0,5(Q_d - Q_s)\,.$$

boshlang'ich narx $p(0) = 37$ bo'lsin. Narx dinamikasini aniqlang va bozorning stabilligini tahlil qiling.

30. Keynsning makroekonomik model quyidagicha aniqlanadi

$$C = 360 + 0,8Y,\quad I = 120\,,$$

$$\frac{dY}{dt} = 0,25(C + I - Y).$$

Agar boshlang'ich davlat daromadi $Y(0) = 20000$ bo'lsa, $Y(t)$ ni ifodasini toping va dinamikasini grafik asosida tahlil qiling (funksiya grafigi Excel dasturida qurilsin).

31. Ko'ldagi baliqlar populyatsiyasi quyidagi tenglama bilan ifodalanadi

$$\dot{N}(t) = N(t)\left(40 - \frac{N(t)}{5}\right).$$

Bu yerda t oylarda ifodalanadi. Agar $N(0) = 30$ bo'lsa, 2 yildan keyingi ko'ldagi baliqlar sonini aniqlang.

4.2-§. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

Tayanch iboralar: o`zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglama, chiziql erkli funksiyalar, chiziqli bog`liq funksiyalar, funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi, Vronskiy aniqlovchisi, bir jinsli chiziqli differensial tenglama, fundamental yechimlari sistemasi, xarakteristik tenglama, umumiy yechim, xususiy yechim.

4.2.1. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar haqida umimiy tushunchalar.

Fan va texnikaning, xususan, iqtisodiyot muammolarini tahlil qilishda miqdorning dinamikasini o'rganish muhim masalalardan biri hisoblanadi. Bu masalalarning modellarida odatda miqdorning o'zgarish tezligini ifodalovchi birinchi tartibli hosila bilan bir qatorda tezlanish, ya'ni tezlikning o'zgarishini ifodalovchi ikkinchi tartibli hosila ham ishtirok etadi. Bunday modellarga misollar keltirishdan oldin ikkinchi tartibli tenglamalar haqida umumiy tushunchalarni keltirib o'tamiz.

Ushbu

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi tenglama 2 – tartibli differensial tenglama deb ataladi. Qandaydir intervalda ikkinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega

bo‘lgan (1) tenglikni qanoatlantiradigan $y(x)$ funksiya bu tenglamaning yechimi yoki uning integral egri chizig‘i deb ataladi.

Agar (1) tenglama $x \in [a,b]$ intervalda

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_1 \qquad (2)$$

boshlang‘ich shartlar bilan o‘rganilayotgan bo‘lsa, u holda (1) va (2) birgalikda Koshi masalasi deb ataladi.

Agar (1) tenglama $x \in [a,b]$ intervalda

$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1 \qquad (3)$$

chegaraviy shartlar bilan o‘rganilayotgan bo‘lsa, u holda (1) va (3) birgalikda chegaraviy masala deb ataladi.

Ma`lumki, agar $F(x,y,z,u)$ funksiya qandaydir (x_0, y_0, z_0, u_0) nuqtada nolga teng va bu nuqtaning atrofida uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo‘lib, $\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0, u_0)}{\partial u} \neq 0$ bo‘lsa, u holda $F(x,y,z,u) = 0$ tenglama bu nuqtaning qandaydir atrofida yagona $u = f(x,y,z)$ yechimga ega bo‘ladi.

Xuddi shunday shartlar asosida (1) tenglamani quyidagicha yozib olish mumkin:

$$y'' = F(x, y, y') \qquad (3)$$

Agar bu tenglamaning o'ng tomonidagi funksiya ikkinchi va uchinchi argumentlariga nisbatan chiziqli ($F(x,y,y') = f(x) - py' - qy$) bo'lsa, (3) tenglama ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi.

4.2.2. Iqtisodiy dinamik modellarga misollar.

a) **Tovar va materiallar zahirasi hisobga olinadigan narx moslashuvchanligi modeli.**

Oldingi ma’ruzada biz narxning talab va taklif funksiyalari orasidagi farqqa moslashuvchanligi modelini

$$\dot{p} = \alpha(Q_d - Q_s), \quad \alpha > 0$$

ko'rib chiqqandik. Bunda Q_d va Q_s talab va taklifni ifodalovchi funksiyalar. Bu model narxning muvozanatda bo'lmasligi sababli sotilmasdan yig'ilib qolgan mahsulot miqdorini hisobga olmaydi.

Taklifning ma'lum vaqt davomida talabdan yuqori bo'lishi bozorda ortiqcha mahsulot paydo bo'lishiga olib keladi va narxni pasayishga majburlaydi. Aksincha, talabning taklifdan oshib ketishi yig'ilib qoligan talab ta'sirida narxning oshishiga olib keladi. Bu effektni hisobga oluvchi modelni quyidagicha ifodalash mumkin

$$\dot{p} = \alpha(Q_d - Q_s) - \beta\int_0^t \big(Q_s(\tau) - Q_d(\tau)\big)d\tau, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Bu tenglamadagi ikkinchi had talab va taklif orasidagi farq natijasida yig'ilib qolgan (izoh: integral so'zi jamlash ma'nosini bildiradi) mahsulot miqdorini bildiradi.

Bu tenglikning har ikkala tarafidan hosila olsak,

$$\ddot{p} = \alpha(\dot{Q}_d - \dot{Q}_s) - \beta\big[Q_d - Q_s\big].$$

Talab va taklif funksiyalari chiziqli bo'lsin, ya'ni $Q_d = A + Bp,\ Q_s = F + Gp$. U holda bizning tenglamamiz quyidagi

$$\ddot{p} + \alpha(G - B)\dot{p} + \beta(G - B)p = \beta(A - F)$$

ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani hosil qilamiz.

b) Valrasa narx moslashuvchanligi modeli. Yuqoridagi misollarda raqobat sharoitidagi bozorda narxning talab va taklifdan kelib chiqqan holda

$$\dot{p} = \alpha(Q_d - Q_s), \quad \alpha > 0$$

tenglamaga muvofiq o'zgarishi aytib o'tildi. Bunga qo'shimcha ravishda Valrasa modelida ma'lum bir tovarni sotishdan olinadigan foydaning musbat yoki manfiyligidan kelib chiqqan holda korxonalarning bu mahsulotni ishlab chiqaruvchilari safiga qo'shilishi yoki bu turdagi mahsulotni ishlab chiqarishni to'xtashishi holati hisobga olinadi.

Ma'lum tovarni ishlab chiqaruvchilar soni $N(t)$ ga, firma o'z faoliyatini samarali davom ettirishi uchun zarur bo'lgan o'rtacha minimal harajat $\bar{c}$ ga teng bo'lsin. Agar narx $\bar{c}$ dan yuqori bo'lsa, faoliyat olib borayotgan ishlab chiqaruvchilar soni ortadi, ya'ni $\dot{N}(t) > 0$. Agar narx $\bar{c}$ dan kam bo'lsa, ishlab chiqaruvchilar soni kamayadi, ya'ni $\dot{N}(t) < 0$. Buni quyidagicha algebraik ifodalashimiz mumkin

$$\dot{N} = \gamma(p - \bar{c}), \quad \gamma > 0.$$

Talab funksiyasi $Q_d = A + Bp,\ B < 0$ bo'lsin. Taklif faoliyat olib borayotgan ishlab chiqaruvchilar soniga quyidagicha bog'langan $Q_s = mN,\ m = const > 0.$ Bu ifodalarni hiobga olgan holda narx dinamikasini ifodalovchi tenglamadan hosila olsak,

$$\ddot{p} = \alpha\left(B\dot{p} - m\dot{N}\right)$$

ifodani hosil qilamiz. Bu ifodaga $\dot{N}$ ning yuqorida berilgan ifodasini qo'yamiz va

$$\ddot{p} - \alpha B\dot{p} + \alpha m\gamma p = \alpha m\gamma\bar{c}$$

ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani hosil qilamiz.

4.2.3. Bir jinsli ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar.

Biz (3) tenglamani f funksiya chiziqli va koeffitsientlari o‘zgarmas bo‘lgan holi bilan tanishamiz. Bunday tenglamalar ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglama deb ataladi va quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{4}$$

Agar (4) tenglamada $f(x) = 0$ bo‘lsa, u holda

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{5}$$

tenglamaga (4) tenglamaning bir jinsli tenglamasi deyiladi.

Bir jinslimas (4) tenglama qaralayotganda uning mos bir jinsli (5) tenglamasi muhim ahamiyat kasb etadi. (5) tenglamaning yechimlar to‘plami o‘ziga xos xususiyatlarga egaligidan uni maxsus o‘rganish maqsadga muvofiq.

Dastlab, chiziqli erkli va chiziqli bog‘liq funksiyalarga to‘xtalamiz. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi, chiziqli erkliligi yoki chiziqli bog‘liqligi tushunchalarini ixtiyoriy funksiyalar uchun ham qo‘llash mumkin.

1-ta’rif. Berilgan $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ funksiyalarning $c_1, c_2, ..., c_n$ o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli kombinatsiyasi deb,

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + ... + c_ny_n(x) \tag{6}$$

tenglikka aytiladi. Agar $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ funksiyalardan istalgan biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalanmasa, u holda bu funksiyalar sistemasi **chiziqli erkli sistema** deyiladi.

Aksincha, agar qaralayotgan funksiyalardan hech bo‘lmaganda bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida ifodalansa, u holda bu funksiyalar sistemasi **chiziqli bog‘liq** deyiladi.

Bir nechta funksiyalardan iborat sistemaning chiziqli erkliligi masalasini aniqlash usullaridan biri Vronskiy aniqlovchisi bilan bog‘liq.

$y_1(x), ..., y_n(x)$ funksiyalar sistemasi uchun, Vronskiy aniqlovchisi

$$W(x) = W[y_1, ..., y_n] = \begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_n(x) \\ ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Aniqlovchi xossalariga ko‘ra, agar $y_1(x), ..., y_n(x)$ funksiyalar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, Vronskiy aniqlovchisining qiymati x ning barcha qiymatlarida nolga teng.

Agar x ning hech bo‘lmaganda bitta qiymatida $W(x) \neq 0$ bo‘lsa, $y_1(x), ..., y_n(x)$ funksiyalar chiziqli erklidir.

Quyidagi funksiyalarning chiziqli erkli ekanligini Vronskiy aniqlovchisi yordamida isbotlash mumkin.

1-misol. $1, x, ..., x^{m-1}$ $x \in (a,b)$ funksiyalar chiziqli erkli.

2-misol. $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, ..., e^{k_m x}$ $x \in (a,b)$ funksiyalar chiziqli erkli. Bu erda $k_1, ..., k_m$ – turli sonlar.

3-misol. $e^{kx}, xe^{kx}, ..., x^{m-1}e^{kx}$ $x \in (a,b)$ funksiyalar chiziqli erkli.

Agar chiziqli erkli $y_1(x), ..., y_n(x)$ funksiyalar n – tartibli differensial tenglamalar sistemasining yechimlari bo‘lsa, u holda bu funksiyalarni fundamental yechimlar sistemasi deb ataymiz. Agar chiziqli erkli $y_1(x), ..., y_n(x)$ funksiyalar n – tartibli differensial tenglamalar sistemasining fundamental yechimlar sistemasi bo‘lsa, u holda bu

funksiyalarning har qanday chiziqli kombinatsiyasi ham tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Masalan, $y_1 = \sin x;\ \ y_2 = \cos x$ funksiyalar $y'' + y = 0$ tenglamaning yechimlaridir.

Bu funksiyalardan tuzilgan Vronskiy aniqlovchisi:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1.$$

Demak, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ chiziqli erkli. U holda

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

funksiya ham $y'' + y = 0$ tenglamaning yechimi hisoblanadi.

Agar $y_1(x), y_2(x)$ (5) tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi bo‘lsa, u holda

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

funksiya (5) tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli (5) tenglama fundamental yechimlari sistemasini qurish usuli bilan tanishamiz. Bu usilni ixtiyoriy $n-$tartibli o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli tenglama uchun qo‘llash mumkin.

(5) tenglama xususiy yechimini $y = e^{\lambda x}$ $\lambda = const$ ko‘rinishida qidiramiz. Funksiyani ikki marta differensiallab,

$$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}, \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

tengliklarni olamiz. Funksiya va uning hosilalarini (5) tenglamaga qo‘ysak,

$$\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right) \cdot e^{\lambda x} = 0$$

tenglama hosil bo‘ladi. $e^{\lambda x} \neq 0$ (har doim musbat) ekanligini hisobga olsak, oxirgi tenglamaga teng kuchli

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \qquad (8)$$

tenglamani olamiz.

(8) algebraik tenglamaga (5) differensial tenglamaning **xarakteristik tenglamasi** deyiladi.

(5) tenglamaning fundamental yechimlari sistemasi (8) tenglamaning ildizlari bilan bog‘liq. Shu sababli umumiy yechimni tuzishning xarakteristik tenglama yechimlari bilan bog‘liq barcha hollarini ko‘rib chiqamiz:

1) λ_1 **va** λ_2 **ildizlar haqiqiy va turlicha bo‘lsin.** U holda $y_1 = e^{\lambda_1 x},\ y_2 = e^{\lambda_2 x}$ yechimlar (5) tenglamaning fundamental yechimlari sistemasini tashkil qiladi. Umumiy yechim esa quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

4-misol. $y'' - 8y' + 7y = 0$ tenglama umumiy yechimini quring.

Yechish. Xarakteristik tenglama $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$ ko‘rinishga ega va uning ildizlari

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 7.$ Natijada, chiziqli erkli $y_1 = e^x;\ y_2 = e^{7x}$ yechimlarni olamiz. Tenglamaning umumiy yechimi:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{7x}.$$

2) λ_1 **va** λ_2 **ildizlar** $\lambda_1 = \alpha + \beta i;\ \lambda_2 = \alpha - \beta i$ **kompleks sonlar bo‘lsin,** bu erda $-\beta \neq 0.$ Ildizlarga mos yechimlar:

$$z_1 = e^{(\alpha+\beta i)x},\ z_2 = e^{(\alpha-\beta i)x}.$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ bo‘lganidan, ular chiziqli erkli. Eyler formulasidan foydalanib,

$$z_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x),\quad z_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

funksiyalarni olamiz. Funksiyalarning quyidagi chiziqli kombinatsiyalarini tuzamiz:

$$y_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y_2 = \frac{1}{2i}(z_1 - z_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

$y_1;\ y_2$ funksiyalar (5) tenglamaning haqiqiy yechimlari bo‘lib, chiziqli erklidir. Natijada, umumiy yechim

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

ko‘rinishda yoziladi.

5-misol. $y'' - 6y' + 10y = 0$ tenglama umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglama

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

bo‘lib, uning ildizlari $\lambda_1 = 3 + i,\ \lambda_2 = 3 - i.$ Shunday qilib, xususiy yechimlar

$$y_1 = e^{3x}\cos x, \quad y_2 = e^{3x}\sin x.$$

Umumiy yechim:

$$y = e^{3x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right).$$

3) λ_1 va λ_2 ildizlar o‘zaro teng va haqiqiy. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ildizni ikki ildiz deyiladi. U holda fundamental yechimlar sistemasi sifatida $y_1(x)e^{\lambda x}\quad y_2(x) = xe^{\lambda x}$ chiziqli erkli funksiyalarni olish mumkin. Shunday qilib, umumiy yechim

$y = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x} = e^{\lambda x}\left(C_1 + C_2x\right).$

6-misol. $y'' + 4y' + 4y = 0$ tenglama umumiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglama $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0;\quad \lambda_1 = \lambda_2 = -2.$

Umumiy yechim

$$y = e^{-2x}\left(C_1 + C_2x\right).$$

4.2.4. Bir jinsli bo‘lmagan ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglama.

2 – teorema. Bir jinslimas (4) differensial tenglamaning umumiy yechimi ushbu tenglama biror $y_0(x)$ xususiy yechimi va (4) ning bir jinsli (5) tenglamasi umumiy yechimlari yig‘indisiga teng.

$$y = y_{xususiy} + y_{bir\ jinsli}\ .$$

Umumiy holda (4) tenglamaning biror – bir xususiy yechimini ixtiyoriy o‘zgarmasni variatsiyalash usulida qurish mumkin. Bu usulni o'rganish talabalarga mustaqil ish sifatida tavsiya etamiz. Tenglamaning o'ng tomoni maxsus shaklga ega bo'lgan holatlarga to'xtalib o'tamiz.

1) Agar tenglamaning o'ng tomoni o'zgarmas $f(x) = M$ bo'lsin. U holda

a) $y_{xususiy} = \frac{M}{q}$ agar $q \neq 0$ bo'lsa;

b) $y_{xususiy} = \frac{M}{p}x$ agar $q = 0,\ p \neq 0$ bo'lsa;

c) $y_{xususiy} = \frac{M}{2}x^2$ agar $p = 0,\ q = 0$ bo'lsa.

2) tenglamaning o‘ng tomoni $f(x) = ax^m + bx^{m-1} + ... + l$ ko‘rinishda bo‘lin. U holda tenglamaning xususiy yechimini qurish quyidagicha amalga oshiriladi:

a) Agar (8) xarakteristik tenglamaning ildizlari noldan farqli bo‘lsa, xususiy yechim $y = Ax^m + Bx^{m-1} + ... + L$ ko‘rinishda qidiriladi.

b) Agar (8) xarakteristik tenglamada nol k karrali ($k = 1$ *yoki* $k = 2$) ildiz bo‘lsa, xususiy yechim $y = x^k(Ax^m + Bx^{m-1} + ... + L)$ ko‘rinishda qidiriladi.

3) Tenglamaning o‘ng tomoni $f(x) = (ax^m + bx^{m-1} + ... + l)e^{\alpha x}$ ko‘rinishda bo‘lsin, u holda tenglamaning xususiy yechimini qurish quyidagicha amalga oshiriladi:

a) Agar α (8) xarakteristik tenglamaning ildizlaridan biri bo‘lmasa, xususiy yechim $y = (Ax^m + Bx^{m-1} + ... + L)e^{\alpha x}$ ko‘rinishda qidiriladi.

b) Agar α (8) xarakteristik tenglamaning k karrali ($k = 1$ *yoki* $k = 2$) ildizi bo‘lsa, xususiy yechim $y = x^k(Ax^m + Bx^{m-1} + ... + L)e^{\alpha x}$ ko‘rinishda qidiriladi.*2 va 3 holatarda yechimdan hosilalarni hisoblab, (4) tenglamaga qo'yiladi. Hosil bo'lgan ayniyatda o'xshash hadlarding koeffitsientlari taqqoslanib,* $A, B, ..., L$ *no'malum koeffitsientlarga nisbatan tenglamalar sistemasi hosil qilinadi va bu sistemani yechib noma'lum koeffitsientlar topiladi.*

4) Tenglamaning o‘ng tomoni $f(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x)$ ko‘rinishda bo‘lsin, u holda tenglamaning xususiy yechimini qurish quyidagicha amalga oshiriladi:

a) Agar $\alpha + \beta i$ son (8) xarakteristik tenglamaning ildizlaridan biri bo‘lmasa, xususiy yechim $y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ ko‘rinishda qidiriladi.

b) Agar $\alpha+\beta i$ (8) xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lsa, xususiy yechim $y=xe^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$ ko‘rinishda qidiriladi.

7-misol. $y''-6y'+8y=(3x-1)e^{x}$ tenglamaning xususiy yechimini toping.

Yechish. Ushbu holda $\alpha=1$. Xarakteristik tenglama

$$\lambda^2-6\lambda+8=0$$

bo'lib, uning ildizlari 2 va 4 ga teng. $y_{bir\ jinsli}=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$.

Tenglamaning xususiy yechimini $y=(ax+b)e^{x}$ ko‘rinishda qidiramiz. Funksiya hosilalarini aniqlaymiz:

$$y'=ae^{x}+(ax+b)e^{x}=(ax+a+b)e^{x}$$

$$y''=ae^{x}+(ax+a+b)e^{x}=(ax+2a+b)e^{x}$$

y, y', y'' ifodalarni tenglamaga qo‘yiladi va e^{x} ga qisqartirilgandan so‘ng:

$$(ax+2a+b)-6(ax+a+b)+8(ax+b)=x-1$$

yoki

$$3ax-4a+3b=3x-1.$$

Mos koeffitsientlarni tenglab, $a=1, b=-1$ natijani olamiz. Izlanayotgan xususiy yechim:

$$y_{xususiy}=(x-1)e^{x}.$$

Tenglamaning umumiy yechimi

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}+(x-1)e^{x}.$$

8-misol. 5) $y''-4y'+5y=12\sin x+4\cos x$ tenglamaning xususiy yechimini toping.

Yechish. Xarakteristik tenglamani yechamiz.

$$\lambda^2-4\lambda+5=0,$$

$\lambda=2\pm i$. Bizning holatda $\alpha=0$ va $\beta=1$ bo'lib, xarakteristik tenglamaning ildizi emas. Demak, xususiy yechim quyidagicha qidiriladi.

$$y=A\sin x+B\cos x.$$

Funksiya hosilalarini aniqlaymiz:

$$y' = A\cos x - B\sin x$$

$$y'' = -A\sin x - B\cos x .$$

y, y', y'' ifodalarni tenglamaga qo‘yamiz va soddalashtiramiz

$$(-A\sin x - B\cos x) - 4(A\cos x - B\sin x) + 5(A\sin x + B\cos x) = 12\sin x + 4\cos x$$

yoki

$$(4A + 4B)\sin x + (4B - 4A)\cos x = 12\sin x + 4\cos x .$$

Bundan

$$\begin{cases} 4A + 4B = 12, \\ 4B - 4A = 4, \end{cases}$$

yoki $A = 1,\ B = 2$. Xususiy yechim

$$y_{xususiy} = \sin x + 2\cos x.$$

Demak, umumiy yechim

$$y = e^{2x}(C_1\sin x + C_2\cos x) + \sin x + 2\cos x ,$$

bu yerda C_1 va C_2 ixtiyoriy o'zgarmas sonlar. ►

Izoh. Agar o‘zgarmas koeffitsientli n – tartibli chiziqli

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + ... + p_0 y = f(x)$$

differentsial tenglama o‘rganilayotgan bo‘lsa, uning ymumiy yechimini qurish uchun

$$\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + p_0 = 0$$

xarakteristik tenglamadan foydalaniladi. Xususiy yechimni topish usuli ikkinchi tartibli tenglama holidagi bilan bir xil.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Yuqori tartibli differensial tenglamalarning qanday xillari bor?

2. Qanday differensial tenglamalarning tartibini pasaytirish bilan yechish mumkin?

3. Qanday differensial tenglamalarga chiziqli deyiladi?

4. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

5. Xarakteristik tenglama nimadan iborat?

6. Xarakteristik tenglama ildizlariga qarab umumiy yechimni yozish mumkinmi?

7. Xarakteristik tenglama ildizlari kompleks qo‘shma bo‘lganda yechim qanday yoziladi?

8. Xarakteristik tenglama ildizlari karrali, haqiqiy va har xil bo‘lganda umumiy yechim qanday yoziladi?

9. Eyler formulasi qanday bo‘ladi?

1. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalarning umumiy yechimi qanday topiladi?

2. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffisiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalarning birorta xususiy yechimi qanday topiladi?

3. Aniqmas koeffisiyentlar usuli nimadan iborat?

1. Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda o‘sish modeli qanday bo‘ladi?

2. Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o‘sishi modeli nima?

3. Logistik chiziq deb nimaga aytiladi?

4. Talab va taklifni differensial tenglama yordamida qanday tahlil qilinadi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping.

1. $y''+2y'+y=0;$

2. $y''+6y'+25y=0;$

3. $y''-4y'=0.$

O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping.

4. $a)\, y''-y=0;\ b)\, 4y''+8y'-5y=0;\ c)\, y''-6y+10y=0$

5. $a)\, y''+10y'=0;\ b)\, y''-6y'+8y=0;\ c)\ 4y''+4y'+y=0$

6. $a)\, y''+25y=0;\ b)\, y''+6y'+9y=0;\ c)\, y''+2y'+2y=0$

7. $a)\, y''+5y=0;\ b)\, 9y''-6y'+y=0;\ c)\, y''+6y'+8y=0$

O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping.

8. $y''+2y'+37y=37x^2-33x+74$

9. $y''+4y'=15e^x$

10. $y''-4y'+5y=(24\sin x+8\cos x)e^{-2x}$

11. $y''+3y'-y=11\cos x-7\sin x$

Iqtisodiy mazmundagi masalalarni yeching:

12. Tovar va materiallar zahirasi hisobga olinadigan narx moslashuvchanligi $\ddot{p}=\alpha(\dot{Q}_d-\dot{Q}_s)-\beta[Q_d-Q_s]$ modelida $\alpha=0{,}3,\ \beta=0{,}1,$ $Q_d=35-0.5p$ va $Q_s=-4+0.8p$ bo'lsin. Agar $p(0)=500,\ \dot{p}(0)=2$ narx dinamikasini ifodolovchi $p(t)$ funksiyani toping.

13. Valrasa narx moslashuvchanligi $\ddot{p}=\alpha\left(B\dot{p}-m\dot{N}\right),$ $\dot{N}=\gamma(p-\bar{c})$ modelida $Q_d=40-0.6p,\ \alpha=0{,}3,\ \gamma=0{,}1,\ m=0{,}25,\ \bar{c}=500,$ $p(0)=400,\ \ \dot{p}(0)=1{,}2$ bo'lsa, narx dinamikasini ifodolovchi $p(t)$ funksiyani toping.

Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati

1. Sh.Sharahmetov, O.Qurbanov, Iqtisodchilar uchun matematika, ISBN 978-9943-07-554-2, O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti, 2017.
2. A.Soliyev, S.Nosirova, Ya. Muxtarov, T.Bo‘riyev. Matematika. Iqtisodchilar uchun amaliy mashg’ulotlar. O‘quv qo‘llanma – Samarqand: SamDU nashri 2021-200 bet
3. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 1,2,3 jild. - T: O‘qituvchi, 1992, 1994, 1996
4. Н.Ш.Кремер. Высшая математика для экономистов. Москва “Банки и биржи”, Издательское объединение “ЮНИТИ”. 1998
8. Xashimov A.R., Ochilova N.K., Axmedov M.I, Sotvoldiyev A.I. Iqtisodiy matematika. O‘quv qo‘llanma. T.: “Fan va texnologiya”. 2018. 352 b.
9. Xashimov A.R., Xujaniyazova G.S. Iqtisodchilar uchun matematika (mustaqil ta’lim bo‘yicha praktikum). O‘quv qo‘llanma. T.:“Iqtisod-moliya”. 2019. 400 b.
10. Sharaxmetov Sh., Qurbanov O.T. Iqtisodchilar uchun matematika. Darslik. T.: O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti. 2017. 384 b.
11. Бабаджанов Ш.Ш. Сборник задач по дисциплине «Математика для экономистов». Методическое пособие. Т.: ТФИ. 2017. 296 с.
12. Бабаджанов Ш.Ш. Финансовая математика. Учебное пособие. Т.: Издательство Национального общества философов Узбекистана 2019. 192 с.
13. Mamurov I.N., Abdikarimov R.A. Moliya matematikasi. O‘quv qo‘llanma. T.: “Iqtisod-moliya”. 2018. 188 b.

M U N D A R I J A

KIRISH **3**
I BOB. CHIZIQLI ALGEBRA ELEMENTLARI **5**
1.1-§. Matritsalar va ular ustida amallar. 5
1.1.1 Matritsalar haqida umumiy tushunchalar 5
1.1.2. Matritsalar ustida amallar. 9
1.1.3. Matritsalar ustida amallarga keladigan iqtisodiy masalalar 11
1.2-§ Determinantlar Nazariyasi. 14
1.2.1. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar. 14
1.2.2. Determinant xossalari 17
1.2.3. Minor va algebraik to‘ldiruvchi 18
1.2.4. Yuqori tartibli detirminantlarni hisoblash 20
1.3-§ Matritsa rangi va teskari matritsa 24
1.3.1. Matritsaning rangi va uni hisoblash. 24
1.3.2. Teskari matritsava uni topish. 25
1.4-§. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning gauss va gauss-jordan usullari. 28
1.4.1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi haqida asosiy tushunchalar 28
1.4.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish 31
1.4.3.Tenglamalar sistemani Gauss-Jordan usulda yechish. 33
1.4.4. Chiziqli tenglamalar sistemasini iqtisodda qo’llanilishi. 34
1.5-§. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning matritsalar usuli. kramer qoidasi. 37
1.5.1. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda Kramer qoidasi. . 38
1.5.2. Chiziqli tenglamalar sistemasini matrisalar yordamida yechish. 42
1.5.3. Chiziqli tenlamalar sistemasining yechishning Kramer qoidasi va teskari matritsalar usulining iqtisodiyotda qo’llanilishi. 43
1.6-§. Chiziqli operatorlar va ularning xossalari. 48
1.6.1. Chiziqli fazo tushunchasi 48
1.6.2. Chiziqli bog’liqlik, o’lcham va bazis tushunchalari 49
1.6.3. Bir bazisdan boshqasiga o’tish 49
1.6.4. Chiziqli almashtirish matrisasi 50
1.6.5. Xarakteristik ko’phad. Xos son va xos ildiz 51
1.7-§. Kvadratik formalar 55
1.7.1.Kvadratik formalar ta’rifi. 55

1.7.2. Kvadratik formalarning kanonik ko‘rinishi. 58
II-BOB. ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI HAMDA ULARNING TADBIQLARI..... 68
2.1-§. Analitik geometriya elementlari 68
2.1.1.Tekislikda to‘g‘ri chiziqlar 68
2.1.2. Tekislikda to‘g‘ri chiziq tenglamasining turli ko‘rinishlari..... 70
2.1.3. To‘g‘richiziqlarning o'zaro joylashuvi..... 74
2.1.4. Iqtisodiyotda to'g'ri chiziqlarning qo'llanishiga misollar..... 75
2.2-§. Tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlar..... 83
2.2.1. Ikki noma’lumli ikkinchi darajali tenglamaning geometrik ma’nosi..... 83
2.2.2. Aylana tenglamasi. 84
2.2.3. Ellips va uning kanonik tenglamasi 85
2.2.4. Giperbola va uning kanonik tenglamasi..... 89
2.2.5. Parabola va uning kanonik tenglamasi..... 94
III BOB. MATEMATIK ANALIZ ASOSLARI VA UNING TATBIQLARI 101
3.1-§. R^n fazoda nuqtalarning o‘zaro joylashishi. Nuqtalar ketma-ketligi va uning limiti 101
3.1.1.Sonli ketma – ketlik..... 101
3.1.2. Yaqinlashuvchi sonli ketma–ketliklar limitlari xossalari 103
3.1.2. n o‘lchovli fazoda nuqtalar ketma-ketligi haqida tushuncha. 107
3..2-§. Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar va ularning iqtisodiy jarayonlardagi o‘rni. Kobb-Duglas funksiyasi..... 113
3.2.1.Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiya haqida tushuncha. 113
3.2.2.Funksiya aniqlanish sohasi va qiymatlar to‘plami. 114
3.2.3. Bir o‘zgaruvchili funksiya umumiy xossalari va grafigi. 115
3.2.4. Teskari funksiya. 117
3.2.5. Chegaralangan funksiya. 118
3.2.6. Qavariq va botiq funksiyalar haqida tushuncha. 119
3.2.7. Foydalilik funksiyasi. Kobb – Duglas funksiyasi. 120
3.3-§. Funksiya limiti va uzluksizligi 125
3.3.1. Bir o‘zgaruvchili funksiya limiti. Ajoyib limitlar. 126
3.3.2.Bir o‘zgaruvchili funksiya uchun bir tomonlama va $x \to \infty$ dagi limitlar..... 127
3.3.3.Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar..... 131
3.3.4. Bir o‘zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi. 133
3.4-§. Bir o‘zgaruvchili funksiya hosilasi va differensiali 138

3.4.1.Hosila haqida tushuncha. 139
3.4.2.Hosilaning iqtisodiy ma`nosi. Hosilaning iqtisodiy ma`nosini misollarda ko‘rib chiqamiz. 140
3.4.3. Funksiya differensiali. 145
3.4.4. Hosilaning geometrik ma`nosi. 146
4.4.5. Hosila olish va differensiallash qoidalari. 147
3.4.6. Yuqori tartibli hosila va differensiallar. 150
3.5-§. Differensiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremalar. Hosilaning ba’zi tatbiqlari 152
3.5.1 Differensiallanuvchi funksiyalar va ular uchun asosiy teoremalar..... 153
3.5.2. Funksiyaning monotonligi. 156
3.5.3.Funksiya ekstremumlari. 157
3.5.4. Funksiyaning to‘plamda eng katta va eng kichik qiymatlari. 161
3.6 -§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya differensiali. Xususiy hosila va yuqori tartibli differensiallar..... 167
3.6.1.Funksiyasining xususiy hosilalari. 167
3.6.2. Funksiyaning to‘la orttirmasi. 168
3.6.3. Funksiyaning differensiallanuvchanligi. 169
3.6.4. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya differensiali. 169
3.6.6. Murakkab va oshkormas funksiya hosilalari. 174
3.7-§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ekstremumi 175
3.7.1.Funksiyaning lokal ekstremumlari. Statsionar nuqta. 175
3.7.2 Funksiya ekstremumining zaruriy sharti. 177
3.8-§. Aniqmas integral 187
3.8.1.Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral. 187
3.8.2.Aniqmas integral xossalari. 188
3.8.3. Asosiy integrallar jadvali. 189
3.8.4. Integrallashning asosiy qoidalari. 190
3.8.5. Aniqmas integralning iqtisodiyotga ba`zi tatbiqlari. 194
3.9-§.Aniq integral 199
3.9.1.Riman yig‘indisi. 199
3.9.2. Aniq integralning asosiy xossalari 204
3.9.3. Aniq integralni hisoblash usullari. Aniq integralda o‘zgaruvchini almashtirish. 207
3.9.4. Aniq integralning geometrik va iqtisodiy ma`nolari. 210
IV-BOB. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR NAZARIYASI .. 220

4.1-§. Birinchi tartibli va ikkinchi tartibli differensial tenglamalar. 220
4.1.1. Differensial tenglamalar haqida asosiy tushunchalar. 220
4.1.2. Oddiy differensial tenglamalar. Birinchi tartibli sodda differensial tenglamalar. 222
4.1.3.Birinchi tartibli sodda differensial tenglamalar..... 224
4.2-§. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar 234
4.2.1. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar haqida umimiy tushunchalar. 234
4.2.3. Bir jinsli ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar. 237
4.2.4. Bir jinsli bo‘lmagan ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglama. 241
Foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati..... 247

U.Z.RAXIMOVA, U.R.ISMATOV, E.X.SALIMOV

MATEMATIKA 1

O‘QUV QO‘LLANMA

Muharrir: Z. Meliyev
Musahhih: J. Shodmonov
Texnik muharrir: Z.N. Bobodustov

O‘quv qo‘llanma Samarqand iqtisodiyot va servis instituti Kengashining 2023 – yil 10 - noyabragi 4 - sonli qaroriga muvofiq o‘quv qo‘llanma sifatida tavsiya etilgan.

© «FAN BULOG’I» nashriyoti, Samarqand - 2023

ISBN: 978-9910-753-47-3

Nashriyot lisenziyasi:
№ 4341-5160-642c-944b-ab74-5062-3969
Bosishga ruxsat etildi: 10.11.2023 y.
© «FAN BULOG’I» nashriyoti, Samarqand sh.
S.Buhoriy ko’chasi, 1-11 uy.

Qog‘oz bichimi A5, 60x84 1/16, Ofset qog‘ozi.
“Times New Roman” garniturasi.
Nashr bosma tabog`i 15,75
Buyurtma № 0186A/23 Adadi 100 nusxa

Samarqand iqtisodiyot va servis institutining matbaa bo`limida chop etildi.
LICENSE № 025316.
REESTR № X-119112.
Manzil: Samarqand shahar, Shoxrux ko`chasi 60-uy.