УДК 674 (075)
К19

Печатается по решению учебно-методического совета
ФГБОУ ВПО «ВГЛТА» (протокол № 3 от 23 декабря 2011 г.)

Рецензенты: кафедра технологии конструкционных материалов,
метрологии, стандартизации, сертификации
ФГБОУ ВПО «Воронежский ГАУ»,
начальник производства ЗАО фирма «Гранд»
С.К. Ненашев

Кантиева, Е. В.

К19 Методы и средства научных исследований [Текст] : учебное пособие / Е. В. Кантиева, Е. М. Разиньков ; М-во образования и науки РФ, ФГБОУ ВПО «ВГЛТА». – Воронеж, 2012. – 107 с.

ISBN 978-5-7994-0497-0 (в обл.)

В учебном пособии рассматриваются организационная структура, цели и задачи науки. Изложены основные сведения о первичной статистической обработке экспериментальных данных, принципах проведения научных исследований при моделировании и оптимизации процессов деревообработки.

Учебное пособие предназначено для студентов по направлению подготовки 250400 – Технология лесозаготовительных и деревоперерабатывающих производств.

УДК 674 (075)

© Кантиева Е.В., Разиньков Е.М., 2012

ISBN 978-5-7994-0497-0

© ФГБОУ ВПО «Воронежская государственная лесотехническая академия», 2012

Оглавление

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О НАУКЕ, ХАРАКТЕРЕ И МЕТОДОЛОГИИ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ 5
1.1 Основные определения и понятия 5
1.2 Классификация научно-исследовательских работ 7
1.3 Характер и содержание научно-исследовательских работ 9
1.4 Методология теоретических исследований 12
2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ НИР 14
2.1. Принципы разработки методических положений эксперимента 14
2.2. Общие сведения об измерениях 15
2.2.1. Измерения. Виды измерений 15
2.2.2. Средства измерений, их элементы и параметры 17
2.3. Погрешности измерений и их оценка 20
2.3.1. Общие сведения о погрешностях 20
3. ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ 26
3.1. Оценка и учет случайных погрешностей 26
3.2. Статистические характеристики случайных величин 29
3.3. Статистическая обработка опытов с использованием интервалов 30
3.4. Определение доверительного интервала для математического ожидания 34
3.5. Определение необходимого объема выборки 35
3.6. Проверка статистических гипотез 35
3.6.1. Проверка однородности наблюдений 36
3.6.2. Сравнение двух дисперсий 36
3.6.3. Сравнение двух средних 37
3.7. Корреляционный анализ. Корреляция качественных признаков 38
3.7.1. Корреляционный анализ 38
3.7.2. Нахождение линейной регрессионной зависимости 39
3.7.3. Нахождение нелинейной регрессионной зависимости 42
3.7.4. Корреляция качественных признаков 43
4. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА 47
4.1. Общие понятия и определения 47

4.2. Выбор факторов и уровней их варьирования 49
4.3. Математическое описание 51
4.4.Основные виды математических моделей, применяемых в деревообработке 52
4.5. Полный факторный эксперимент 57
4.6. Дробный факторный эксперимент 63
4.7. Реализация ПФЭ и ДФЭ при отклонении уровней факторов от заданных значений 68
4.8. В-план 69
4.9. Униформ-ротатабельный план 73
5. ОПТИМИЗАЦИЯ 78
5.1. Общие сведения об оптимизации 78
5.2. Метод крутого восхождения 80
5.3. Симплекс-метод 86
6. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА С КАЧЕСТВЕННЫМИ ФАКТОРАМИ 92
6.1. Дисперсионный анализ 92
6.2. Планирование эксперимента по схеме латинских квадратов 96
Библиографический список 99
Приложения 100

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О НАУКЕ, ХАРАКТЕРЕ И МЕТОДОЛОГИИ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

Наука – это непрерывно развивающаяся система знаний объективных законов природы, общества и мышления, получаемых и превращаемых в непосредственную силу общества в результате специальной деятельности людей. Основным признаком и главной функцией науки является познание объективного мира.

Цель науки – познание законов развития природы и общества и воздействие на природу на основе использования знаний для получения полезных обществу результатов. Пока соответствующие законы не открыты, человек может лишь описывать явления, собирать, систематизировать факты, но ничего не может объяснить и предсказать.

Развитие науки идет со сбора фактов, их изучения и систематизации, обобщения и раскрытия отдельных закономерностей к связанной, логически стойкой системе научных знаний, которая позволяет объяснить уже известные факты и предсказать новые.

Факты систематизируют и обобщают с помощью простейших абстракций – **понятий** (определений), являющихся важнейшими структурными элементами науки. Наиболее широкие понятия называют **категориями**. Это самые общие абстракции. К категориям относятся философские понятия о форме и содержании явлений, в политэкономии – это товар, стоимость и т.д.

Важнейшая форма знаний – **принципы** (постулаты), **аксиомы**. Под принципом понимают исходные положения какой-либо отрасли науки. Они являются начальной формой систематизации знаний (аксиомы Эвклидовой геометрии, постулат Бора в квантовой механике и т.д.).

Внешним составным звеном в системе научных знаний являются научные законы, отражающие наиболее существенные, устойчивые, повторяющиеся объективные внутренние связи в природе, обществе и мышлении.

Наиболее высокой формой обобщения и систематизации знаний является **– теория.**

Под теорией понимают учение об обобщенном опыте (практике), формулирующие научные принципы и методы, которые позволяют обобщить,

познать существующие процессы и явления, проанализировать действие на них различных факторов и предложить рекомендации по использованию их в практической деятельности людей.

Наука включает в себя также методы исследования. Под **методом** понимают способы теоретического исследования или практического осуществления какого-либо явления или процесса.

Наиболее общий метод исследования – метод материалистической диалектики. Любая научная теория, объясняя характер тех или иных процессов деятельности, всегда связана с определенным частным методом исследования. Опираясь на общие и частные методы исследования, ученый получает ответ на то, с чего надо начинать исследования, как относиться к фактам, как обобщить, каким путем идти к выводам. В настоящее время все большее значение приобретает в качестве общего математический метод исследования, т.е. метод количественного изучения явлений и процессов.

Когда исследователи не располагают достаточным фактическим материалом, то в качестве средства достижения научных результатов они используют **гипотезы** – научно-обоснованные предположения, выдвигаемые для объяснения какого-либо процесса, которые после проверки могут оказаться истинными или ложными. Формой осуществления и развития науки является **научное исследование**, т.е. изучение с помощью научных методов явлений и процессов, анализ влияния на них различных факторов, а также изучение взаимодействия между явлениями с целью получить убедительно доказательные и полезные для науки и практики решения с максимальным эффектом.

Цель научного исследования – определение конкретного объекта и всестороннее достоверное изучение его структуры, характеристики, связей на основе разработанных в науке принципов и методов познания, а также получение полезных для деятельности человека результатов, внедрение в производство и получение эффекта.

Основой разработки каждого научного исследования является **методология**, т.е. совокупность методов, способов, приемов и их определенная последовательность, принятая при разработке научного исследования. В конечном счете, **методология** – это схема, план решения поставленной научно-исследовательской задачи.

Важную роль в научном исследовании играют познавательные задачи, возникающие при решении научных проблем. Наибольший интерес представляют **эмпирические и теоретические задачи.**

Эмпирические задачи направлены на выявление, точное описание и тщательное изучение различных факторов изучаемых явлений и процессов. В научных исследованиях они решаются различными методами познания – наблюдением и экспериментом.

Наблюдение – это метод познания, при котором объект изучают без вмешательства в него; фиксируют, измеряют лишь свойства объекта, характер его изменения.

Эксперимент – это наиболее общий эмпирический метод познания, в котором производят не только наблюдения и измерения, но и осуществляют перестановку, изменение объекта исследования и т.д. Этот метод познания играет большую роль в научном исследовании. Они не только являются основой для подкрепления теоретических предпосылок, но часто составляют предмет нового открытия, научного исследования.

Теоретические задачи направлены на изучение и выявление причин, связей, зависимости, позволяющих установить поведение объекта, определить и изучить его структуру, характеристику на основе разработанных в науке принципов и методов познания. В результате полученных знаний формируют законы, разрабатывают теорию, проверяют факты и др. Теоретические познавательные задачи формулируют таким образом, чтобы их можно было проверить эмпирически.

Результаты научных исследований оцениваются тем выше, чем выше научность сделанных выводов и обобщений, чем достовернее они и эффективнее.

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

Существуют различные признаки квалификации НИР

По видам связи НИР с общественным производством:

- исследования, направленные на создание новых машин, конструкций и процессов, которые используются для повышения эффективности производства;

- НИР, повышающие уровень производственных отношений. (Повышают уровень организации производства без создания новых средств труда, а также теоретические работы в области гуманитарных, общественных и других наук. Они могут использоваться для совершенствования общественных отношений и для повышения уровня духовной жизни людей.)

По степени важности НИР для народного хозяйства:

- выполняемые по государственному плану;
- по плану отдельных министерств и ведомств;
- по инициативе НИИ или частных фирм.

По источникам финансирования:

- госбюджетные;
- хоздоговорные (договора с частными фирмами и предприятиями).

По времени выполнения:

- долгосрочные (в течении нескольких лет);
- краткосрочные (1 год).

По целевому назначению:

- теоретические;
- прикладные;
- разработки.

Теоретические исследования направлены на создание новых принципов. Их целью является более глубокое познание законов природы и расширение знаний общества.

Прикладные исследования выполняются с целью создания новых методов, на базе которых ведутся разработки по созданию новых машин, оборудования и материалов, а также способов производства и организации работ и т.д. *Прикладные исследования должны удовлетворять потребность в развитии конкретных отраслей промышленности.*

Разработки направлены на подготовку материалов теоретических и прикладных исследований для внедрения. *Они не предназначены для проведения новых научных исследований.*

1.3. ХАРАКТЕР И СОДЕРЖАНИЕ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

Задачи, стоящие перед какой-либо конкретной научно-исследовательской работой (НИР), выполняемой для решения некоторой технической проблемы, могут носить различный характер. В простейшем случае, например, это может быть определение свойств какого-либо материала с использованием известных методов испытаний и математических методов обработки результатов. Подобная работа выполняется часто в заводских лабораториях для оценки качества поступающих или выпускающихся на предприятии материалов. Более сложной является НИР по разработке какого-либо нового материала, более эффективного по технологическим и экономическим показателям по сравнению с ранее применявшимся. Такая НИР может выполняться в рамках какой-либо одной темы либо распадаться на несколько отдельных тем. В этом случае все эти отдельные НИР подчинены одной общей цели, но в рамках каждой отдельной темы решаются какие-либо конкретные задачи.

Каждая из этих тем, в свою очередь, выполняется в несколько этапов. Темы научно-исследовательского характера (НИР) включают в себя следующие этапы:

1. Формирование задач исследования.

   Содержание этапа: изучение отечественных и зарубежных литературных источников (книг, статей, отчетов); анализ найденной информации; сопоставление; выбор наиболее существенных данных и их обобщение; определение направлений и программы исследования.
2. Теоретические исследования.

   Содержание этапа: познание физико-химической сущности изучаемого процесса; построение общей картины протекания процесса (на базе фундаментальных положений физики, химии и др.) либо на уровне выбора какой-либо гипотезы и качественного описания, либо на уровне математического анализа изучаемого объекта с получением аналитических формул и уравнений; анализ математических зависимостей и выявление влияющих на изучаемый процесс факторов.
3. Методологические основы экспериментов.

Содержание этапа: выбор стандартных или описанных в литературе методов испытания; при необходимости разработка новых методов с оценкой их точности и статистической достоверности; выбор материалов и определение их свойств; оценка статистических характеристик выходных величин; выбор планов экспериментов; установление постоянных и варьируемых факторов и методической сетки опытов; наладка лабораторной экспериментальной установки, лабораторного оборудования и приборов и оценки точности измеряемых ими параметров (массы, температуры, усилий и др.).

4. Экспериментальные исследования.

   Содержание этапа: проведение экспериментов, обработка результатов; предварительные выводы; при получении отрицательных результатов поиск путей усовершенствования методики экспериментов; постановка дополнительных экспериментов для подтверждения сделанных выводов.

5. Анализ проведенных исследований.

   Содержание этапа: сопоставление результатов экспериментов с теоретическими положениями принятой гипотезы; в случае их несоответствия пересмотр этой гипотезы или методики проведения экспериментов; проведение при необходимости дополнительных экспериментов; уточнение выводов.

6. Производственные испытания и оформление отчета.

   Содержание этапа: составление технологических инструкций для производственных испытаний; подготовка материалов, оборудования, обучение персонала; проведение испытаний; оценка результатов исполнителями либо представителями заказчика или специальной комиссией; расчет возможного экономического эффекта, составление отчета по НИР (промежуточного или заключительного).

Темы опытно-конструкторских работ (ОКР) включают в себя следующие этапы:

1. Разработка технического задания на проектирование.

   Содержание этапа: формирование исходных технологических параметров процесса (на основе ранее проведенной НИР); ориентировочный расчет кинематических, энергетических и др. характеристик проектируемого

оборудования; выбор принципиальной схемы станка; изучение имеющихся аналогов.

2. Техническое проектирование.

   Содержание этапа: выполнение технических расчетов отдельных узлов проектируемого оборудования; определение их размеров; выбор стандартных комплектующих (транспортных органов, редукторов, электродвигателей, подшипников и др.); составление общих чертежей.

3. Рабочее проектирование.

   Содержание этапа: разработка рабочих чертежей всех входящих в проектируемый объект устройств, узлов, деталей; передача рабочей документации опытному заводу (цеху).

4. Изготовление опытного образца.

   Содержание этапа: изготовление деталей, узлов, сборка и монтаж опытного образца; проверка в работе всего станка и отдельных узлов; проведение испытаний в различных режимах; доработка отдельных узлов и доводка станка в целом.

5. Испытание опытного образца.

   Содержание этапа: разработка программы испытаний (на опытном заводе либо на одном из предприятий); выполнение испытаний; оценка работы опытного образца специальной комиссией и приемка его с оформлением соответствующей документации (заключение комиссии, акт приемки и др.).

Конечно, перечисленные этапы и их содержание носят общий характер и зависят от сложности НИР и ОКР. В конкретных темах некоторые этапы могут отсутствовать или быть объединены с другими этапы.

В качестве примера приведем структуру комплексной программы, включавшей в себя НИР и ОКР, целью которой являлось создание и внедрение в мебельное производство декоративных бумажных отделочных пленок с искусственной текстурой древесины, являющихся заменителем дефицитных облицовочных материалов.

Основные темы этой программы:

- разработка технологии специальных сортов бумаги, обладающих специфическими свойствами (повышенная прочность, хорошая впитывающая способность, повышенная гладкость);

- создание печатных красок для нанесения на бумагу искусственного рисунка, имитирующего текстуру древесины разных пород, обладающих рядом специфических свойств (светостойкость, теплостойкость, стойкость к растворителям и др.);
- разработка рецептуры пропиточных смол и технологии пропитки бумаги;
- разработка оборудования для печатания искусственного рисунка на бумагу;
- разработка оборудования для пропитки бумаги;
- разработка технологии облицовывания древесных плит декоративными пленками;
- разработка технологии отделки мебельных деталей, облицованных тонкими пленками, лакокрасочными материалами.

Реализация этой программы требовала нескольких лет работы многих научно-исследовательских организаций заводов химической и машиностроительной отраслей. Результаты этой работы нашли широкое использование в производстве мебели синтетических облицовочных материалов, давшее народному хозяйству многомиллионный экономический эффект.

1.4. МЕТОДОЛОГИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Успешное выполнение теоретических исследований зависит не только от кругозора, настойчивости и целеустремленности научного работника, но и от того, в какой мере он владеет методами и способами научного исследования, и в первую очередь – **диалектическим методом.**

Важное место при выполнении теоретических исследований занимают способы дедукции и индукции.

Дедуктивный – это такой способ исследования, при котором частные положения выводятся из общих. Недостатками этого способа исследования являются ограничения, вытекающие из общих закономерностей, на основе которых исследуется частный случай.

Индуктивный – это такой способ исследования, при котором по частным фактам и явлениям устанавливаются общие принципы и законы. Данный способ широко применяют в теоретических исследованиях.

При теоретических исследованиях используют как индукцию, так и дедукцию.

Особую роль в теоретических исследованиях играют способы анализа и синтеза.

Анализ – способ научного исследования, при котором явление расчленяется на составные части.

Синтез – противоположный анализу способ, заключающийся в исследовании явления в целом, на основе объединения связанных друг с другом элементов в единое целое.

При анализе явлений и процессов возникает потребность рассмотреть большое количество факторов (признаков). В этом случае может быть применен способ **ранжирования**, с помощью которого исключают все второстепенные факторы, не влияющие существенно на исследуемое явление. Этот метод допускает усиление основных и ослабление второстепенных факторов, позволяет изучать главные особенности процессов и явлений в равных условиях.

В научных исследованиях широко применяется способ **абстрагирования**, т.е. отвлечения от второстепенных факторов с целью сосредоточиться на внешних особенностях изучаемого явления. Например, при изучении процесса склеивания древесины основное влияние направляют на такие факторы, как порода древесины, ее влажность, свойства клея, режимы склеивания, и не учитывают, скажем, конструкцию пресса, влажность воздуха и др.

В теоретических исследованиях возможны два метода познания: **логический** и **исторический.**

Логический метод включает в себя **гипотетический** и **аксиомометрический** подходы.

Гипотетический метод основан на разработке гипотезы, научного предположения, содержащего элемента новизны и оригинальности. Гипотеза должна полнее и лучше объяснять явления и процессы, подтверждаться экспериментально и соответствовать общим законам диалектики и естествознания. Этот метод является основным, наиболее распространенным в прикладных науках.

Аксиомометрический метод основан на очевидных положениях (аксиомах), принимаемых без доказательства. По этому методу теория разрабатывается на основе дедуктивного принципа.

Исторический метод позволяет исследовать возникновение, формирование и развитие процессов и событий в хронологической последовательности с целью выявить внутренние и внешние связи, закономерности и противоречия. Метод исследования используется преимущественно в общественных и, главным образом, в исторических науках.

2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ НИР

2.1. ПРИНЦИПЫ РАЗРАБОТКИ МЕТОДИЧЕСКИХ ПОЛОЖЕНИЙ ЭКСПЕРИМЕНТА

Принципы разработки основных методических положений эксперимента включают:

1. Перечень задач и вопросов, которые необходимо решить.
2. Выбор материалов.
3. Паспортизацию этих материалов.
4. Выбор известных методик испытаний.
5. Разработку новых методик.
6. Выбор средств измерения.
7. Составление плана эксперимента.
8. Обоснование количества параллельных наблюдений (образцов).
9. Оценку погрешности вычислений.
10. Статистическую обработку результатов.

Выбор материалов осуществляется с соблюдением правил отбора проб, которые указаны в соответствующих стандартах.

Каждую пробу необходимо испытать на соответствие техническим требованиям на данный материал (по ГОСТ, ОСТ, ТУ) и составить характеристику (паспорт) применяемого материала. При несоответствии – материал отбраковывается.

Методики испытаний могут быть стандартными и нестандартными. Стандартные описаны в ГОСТ, ТУ, причем на часть методов испытаний

имеются отдельные стандарты (ГОСТ, РТМ). Нестандартные методики описаны в литературе, инструкциях к приборам.

При разработке новой методики с основным прибором надо сначала провести разведочные опыты. Цель их – оценить пригодность данного прибора или метода. При этом экспериментатор должен выявить систематические погрешности, по возможности устранить или учесть их путем введения в методику поправочных коэффициентов. Установить точность метода.

Нередко одно и то же испытание можно выполнять разными методами или приборами. При этом экспериментатор должен сравнивать эти методы по следующим основным признакам:

- трудоемкость испытания;
- точность испытаний.

Предпочтение должно отдаваться тому методу или прибору, который обеспечивает более высокую точность, но иногда руководствуются и соображениями трудоемкости, в особенности при отсеивающих экспериментах.

Количество параллельных наблюдений или образцов для опытов может обосновываться двумя способами. При первом способе проводят предварительную серию опытов при каких-либо постоянных факторах, а чаще всего в центре эксперимента, и затем путем соответствующей статистической обработки рассчитывают количество необходимых образцов или наблюдений, исходя из требований точности и уровня достоверности. Это количество и принимают во всех последующих основных опытах. Такую предварительную серию необходимо проводить при большом числе опытов (50-150).

При втором способе проводят каждый опыт при сравнительно небольшом числе параллельных наблюдений, оценивают статистическую точность результатов и, если она оказывается недостаточной, повторяют опыт. Здесь определенное значение имеют личный опыт и интуиция экспериментатора.

2.2. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗМЕРЕНИЯХ

2.2.1. Измерения. Виды измерений

Измерение представляет собой процесс нахождения значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств.

Во многих случаях в процессе измерения происходит сравнение измеряемой величины с физической, которой присвоено числовое значение, равное 1, и которая называется единицей физической величины, **или единицей измерения**.

Результат измерения – это численное значение величины, найденное путем ее измерения, например, путем сравнения ее с единицей измерения. Результат может быть выражен следующим образом:

$$R = \frac{Q}{\delta}, \qquad (1)$$

где Q – измеряемая физическая величина;

δ – единица физической величины, или единица измерений;

R – результат измерения, или численное значение измеряемой величины.

По способу получения числового значения измеряемой величины все технические измерения можно разделить на прямые и косвенные. В лабораторной практике и научных исследованиях имеют место даже совокупные и совместные измерения.

Прямыми измерениями называют такие, при которых искомое значение величины находят непосредственно из опытных данных. Например, измерение температуры термометром, давления – манометром. Результат измерения может быть получен также путем **косвенных измерений**, когда численное значение находят на основании прямых измерений величин, связанных с измеряемой величиной определенной зависимостью:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (2)$$

где y – искомая величина;

x_1, x_2, …, x_n – численные значения величин, измеренных прямым способом.

Примерами косвенных измерений могут быть определение плотности тела по результатам измерения массы и объема, определения удельного электрического сопротивления проводника по его сопротивлению, длине и площади поперечного сечения.

Измерения производятся на основе физических явлений, определяющих **принцип измерения**, например, измерение температуры по расширению вещества; измерение вакуума по подъему столба уравновешивающей жидкости. Для реализации тех или иных принципов измерения применяют различные

технические средства. Техническое средство, используемое при измерениях и имеющее нормированные метрологические свойства, называется **средством измерения**. Совокупность правил, определяющих принципы и средства измерения, называется **методом измерения.**

В технических измерениях широкое распространение получили методы непосредственной оценки, **дифференциальный** и **нулевой**. **В методе непосредственной оценки** значение измеряемой величины определяется непосредственно по отсчетному устройству измерительного прибора прямого действия. Этот метод применяется, например, при измерении давления пружинным манометром, сила тока – амперметром. В **дифференциальном методе** на измерительный прибор воздействует разность измеряемой и базовой (значение которой известно) величин, например, измерение состава газовой смеси по теплопроводности путем сравнения с теплопроводностью воздуха. Этот метод позволяет получить достаточно точные результаты даже при применении средств измерения этой разности не очень высокой точности. Однако для этого необходимо иметь базовую величину, значение которой близко к измеряемой величине и известно с высокой точностью. В **нулевом методе** измеряемую величину сравнивают с величиной, значение которой известно, но разность между ними сводится к нулю путем измерения известной величины. Применяемый в этом методе измерительный прибор служит только для установления факта равенства двух величин или равенства нулю их разностей. Пример нулевого метода измерения может служить компенсационный метод измерения термо-ЭДС, измерение сопротивления уравновешенным мостом. Нулевой метод обеспечивает высокую точность измерения, определяемую в основном точностью задания известной величины, которой уравновешивается измеряемая величина.

2.2.2. Средства измерений, их элементы и параметры

Средства измерений должны иметь нормированные метрологические характеристики, т.е. определенные численные значения величин и свойств, определяющих точность и достоверность результатов измерения. Средство измерения, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для непосредственного восприятия

наблюдателем, называется **измерительным прибором**. На измерительном приборе наблюдатель может прочитать или отсчитать численное значение измеряемой величины. Измерительные приборы бывают **аналоговые** и **цифровые**. В **аналоговом измерительном приборе** показания являются непрерывной функцией изменения измеряемой величины, в **цифровом** показания представлены в цифровой форме, которая является результатом дискретного преобразования сигналов измерительной информации. Измерительные приборы разделяются на **показывающие** и **регистрирующие.** В **показывающих приборах** значения считываются по шкале или цифровому табло. В **регистрирующих приборах** предусмотрена регистрация показаний в виде записи на диаграммной бумаге либо путем печати в цифровой форме. В измерительных приборах может осуществляться интегрирование измеряемой величины по времени либо по другой независимой переменной.

Измерительным преобразователем называется средство измерения, предназначенное для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для печати, преобразования, обработки или хранения, но не поддающейся непосредственному восприятию наблюдателем. Человек своими органами чувства не может воспринять сигнал измерительного преобразователя. **Первичным измерительным преобразователем** называется измерительный преобразователь, на выход которого воздействует измеряемая величина. Часто первичные измерительные преобразователи называют **датчиками**. Часть первичного измерительного преобразователя, находящегося под непосредственным воздействием измеряемой величины, называется **чувствительным элементом**. Измерительные приборы и преобразователи в зависимости от рода измеряемой величины имеют соответствующие названия, например, термометры, манометры, дифманометры, расходомеры, газоанализаторы, уровнемеры, концентратомеры, кислородомеры, влагомеры и т.д.

Отсчетное устройство показывающих аналоговых измерительных приборов состоит из шкалы и указателя (стрелочного или светового). На рис.1 изображена шкала измерительного прибора. Те отметки шкалы, у которых поставлено численное значение, называются **числовыми отметками шкалы** (иногда их называют оцифрованными отметками шкалы). Промежуток между двумя соседними отметками шкалы называется **делением шкалы**. Разность

значений величин, соответствующих двум соседним отметкам шкалы, называется **ценой деления шкалы**. Шкала с постоянными делениями и постоянной ценой деления называется **равномерной шкалой.**

Значения измеряемой величины, определяемые по отсчетному устройству и выраженные в принятых единицах измеряемой величины, называются **показаниями измерительного прибора**. Наименьшее значение измеряемой величины, указанное на шкале, называется **начальным значением шкалы**, а наибольшее значение – **конечным значением шкалы**. Область значений шкалы, ограниченная конечным и начальным значениями шкалы, называется **диапазоном показаний**. Область значений измеряемой величины, для которой нормированы допускаемые погрешности средства измерения, называется **диапазоном измерений** измерительного прибора или измерительного преобразователя. В технических приборах диапазон измерений и диапазон показаний, как правило, совпадают. Пределами измерений называют наибольшее и наименьшее значения диапазона измерений. Шкалы приборов бывают **односторонними, двухсторонними** и **безнулевыми**. В **односторонних шкалах** один из пределов измерения прибора равен нулю. Например, шкала 0-100 ^{o}C, шкала – 0,1-0 МПа. В **двухсторонних шкалах** нулевое значение расположено на шкале. Например, шкала – 50-0-+100 ^{o}C; шкала – 0,1-0-0,15 МПа. В **безнулевых шкалах** на шкале нет нулевого значения, например, шкала 200-600 ^{o}C.

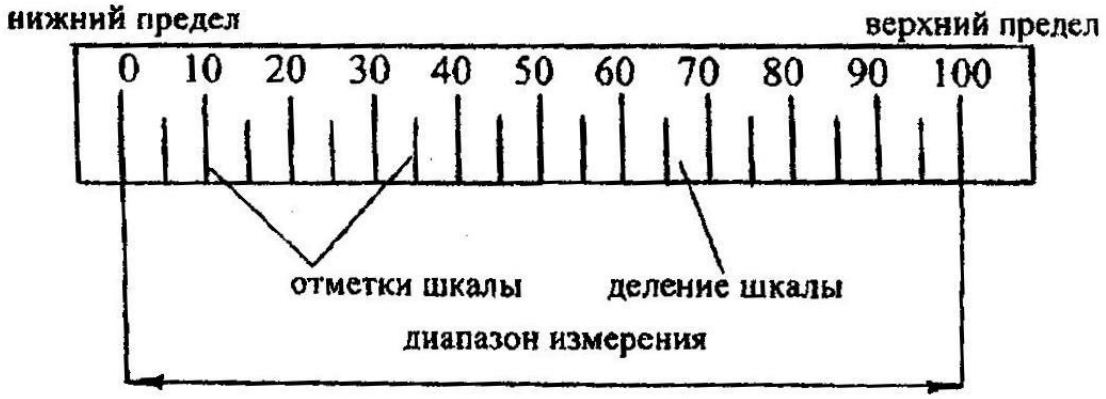

Рис. 1. Шкала измерительного прибора

Кроме отдельных средств измерения и измерительных систем применяются сложные информационно-измерительные системы, позволяющие не только осуществлять автоматические измерения во многих точках (число измерительных каналов может исчисляться тысячами), но и производить необходимую обработку результатов измерения по заданным алгоритмам.

Средства измерения делятся на **рабочие** и **эталоны**. **Рабочие средства измерения** предназначены для практических измерений во всех отраслях народного хозяйства. Они подразделяются на средства измерения повышенной точности и технические.

Образцовые средства измерений предназначены для передачи размеров единиц физических величин от эталонов или других точных средств измерений рабочим средствам измерений. Образцовые средства измерений 1-го разряда проверяются, как правило, непосредственно по эталонам. Образцовые средства измерений 2-го и последующих разрядов проверяются по образцовым средствам измерения 1-го и последующих разрядов. По образцовым средствам измерения проверяются, градуируются рабочие средства измерения.

Эталоны служат для воспроизводства и хранения единиц физических величин и передачи их размера через образцовые рабочим средствам измерений, применяемым в народном хозяйстве. Таким образом осуществляется система передачи размеров единиц физических величин от эталонов всем средствам измерений с помощью образцовых средств измерений.

2.3. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ ОЦЕНКА

2.3.1. Общие сведения о погрешностях

При измерениях обычно получается значение измеряемой физической величины, отличающееся от ее **истинного значения**. Как правило, истинное значение неизвестно и вместо него используют действительное значение физической величины, которое находится экспериментально и настолько приближается к истинному значению, что для данной цели может быть использовано вместо него. Значение величины, найденное путем ее измерения, называется результатом измерения. Отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины называется **погрешностью**

измерения. Погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины, называется **абсолютной погрешностью измерения**:

$$\Delta X = X - X_{ист}\ , \qquad (3)$$

где ΔX – абсолютная погрешность;

X – результат измерения;

$X_{ист}$ – истинное значение измеряемой величины.

Отношение абсолютной погрешности измерения к истинному значению измеряемой величины называется **относительной погрешностью измерения**. Относительная погрешность может быть выражена в процентах.

В экспериментальных исследованиях расчеты погрешностей являются обязательными, потому что, во-первых, показывают, какое средство измерения следует использовать, во-вторых, спасают от получения сомнительных или просто неверных результатов.

Напомним основные правила расчета погрешностей:

а) Абсолютная погрешность суммы равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых или часто принимают ее равной наибольшей абсолютной погрешности какого-либо слагаемого.

б) При умножении и делении относительные погрешности чисел складываются.

Рассмотрим примеры.

1. Плотность древесностружечной плиты рассчитывают по формуле

$$\gamma = \frac{G}{abh},\ г/см^3,$$

где G – масса образца, г;

a,b,h – длина, ширина и толщина образца, см.

Используем образец размером 50×50×16 мм, который измеряем линейкой с точностью до 0,5 мм. Взвешивание осуществляем на весах с ценой деления 5 г. С точностью до полделения определяем массу $G = 27,5$ г. Тогда находим

$$\gamma = \frac{27,5 \cdot 10^3}{50 \cdot 50 \cdot 16} = 0,6875\ г/см^3,$$

относительные погрешности равны:

$\delta G = 2,5/27,5 = 0,091$; $\delta a = \delta b = 0,5/50 = 0,01$; $\delta h = 0,5/16 = 0,031$;

$\delta\gamma = 0,091+0,01+0,01+0,031 = 0,142$.

Абсолютная погрешность $\Delta\gamma = 0,6875 \times 0,142 = 0,098$ г/см^3, т.е. плотность может иметь значение от 0,59 до 0,786 г/см^3.

Оказалось, что в полученном значении плотности нет ни одного верного знака.

Примем другие средства измерения: лабораторные весы с точностью до 0,1 г, штангенциркуль с точностью 0,1 мм. Результаты замеров: G = 27,4 г; a = 50,3 мм; b = 49,8 мм; h = 16,2 мм. Плотность плиты равна $\gamma = 0{,}6752$ г/см^3. Относительная погрешность:

$\delta G = 0{,}05/27{,}4 = 0{,}0018$; $\delta a = 0{,}05/50{,}3 = 0{,}00099$; $\delta b = 0{,}05/49{,}8 = 0{,}001$; $\delta h = 0{,}05/16{,}2 = 0{,}00309$; $\delta\gamma = 0{,}0069$.

Абсолютная погрешность $\Delta\gamma = 0{,}6752 \times 0{,}0069 = 0{,}005$ г/см^3.

Отсюда следует, что значение плотности найдено с двумя верными и одним сомнительным знаками: $\gamma = 0{,}675$ г/см^3.

2. При определении содержания растворителей в красках и лаках взвешивают навеску материала в бюксе до и после его сушки. Содержание растворителя определяют по формуле

$$R = \frac{G_1 - G_2}{G_1 - G_0} \cdot 100, \ \%,$$

где G_0 – масса чистой бюксы;

G_1, G_2 – масса бюксы с краской до и после сушки.

Требуется определить, с какой точностью необходимо делать взвешивание, чтобы получить результат с двумя верными знаками. Масса бюксы примерно 30 г, разность масс ≈ 1 г, содержание растворителя ≈ 0,7 (70 %).

Абсолютная погрешность содержания растворителя должна быть порядка 0,005 (0,5 %). Тогда относительная погрешность его составит 0,005/0,7 = 0,0071, относительные погрешности числителя и знаменателя ≈ 0,0071/2 = 0,0035, а абсолютные погрешности 0,0035 г. Тогда абсолютные погрешности взвешивания 0,0035/2 ≈ 0,002 г, и отсюда находим, что взвешивать необходимо с точностью до 0,001 г (1 мг). Следовательно, в опытах нужно использовать аналитические весы, например, типа ВЛТ-500.

Измерительные приборы часто характеризуются **приведенной погрешностью**, которая определяется как отношение погрешности измерительного прибора к нормирующему значению. За нормирующее значение чаще всего принимается диапазон измерения прибора. Приведенная погрешность, как правило, выражается в процентах.

Погрешность измерения состоит из нескольких составляющих, которые классифицируются по ряду признаков. По природе своего возникновения погрешности могут зависеть от средств измерения, метода измерения, считывания и ряда других причин. Составляющая погрешности измерения, зависящая от погрешностей применяемых средств измерения, называется **погрешностью средств измерения**. Составляющая погрешности измерения, вызванная несовершенством метода измерения, называется **погрешностью метода измерения**, или методической погрешностью. Например, мы измеряем длину кривой линии линейкой. Во-первых, у нас возникает методическая погрешность измерения за счет того, что использование линейки для измерения длины кривой является методом несовершенным. Во-вторых, действительная длина линейки не соответствует длине, указанной на шкале линейки. В связи с этим возникает составляющая погрешности, вызванная несовершенством средства измерения (линейки), которая является погрешностью средства измерения.

Целью вычисления погрешностей измерений является оценка точности результата измерения или введение поправок в результаты измерений. **Точностью измерений** называется качество измерений, отражающее близость их результатов к действительному значению измеряемой величины. Стремясь повысить точность, мы должны уменьшить погрешности измерения. Однако пути повышения точности часто сложны и дорогостоящи. Поэтому всегда следует сначала оценить целесообразную точность, которая зависит от конкретных условий и целей измерения, и в случае необходимости принять меры к ее повышению.

Погрешности измерения разделяют на систематические, случайные и грубые. Составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или изменяющаяся по определенному закону при повторных измерениях одной и той же величины, называется **систематической погрешностью измерения.** Составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины, называется **случайной погрешностью измерения**. Погрешность измерения, существенно превышающая ожидаемую при данных условиях, называется **грубой погрешностью измерения**. Ранее грубые погрешности называли промахами.

Систематические погрешности имеют определенное значение и знак, они могут быть устранены введением поправки.

Выявить систематическую погрешность – задача непростая. Здесь большую роль играет личный опыт и интуиция исследователя. В качестве примера рассмотрим опыт, в котором определялось развитие усадки пленки лака во времени. Изменение размера образца, закрепленного в специальном приспособлении, фиксировалось с помощью измерительного микроскопа. Оказалось, что это изменение нестабильное во времени, что навело на мысль о температурных деформациях самого приспособления. Контроль температуры помещения и специально выполненные замеры и расчеты подтвердили это предположение, что и позволило внести в результаты испытаний поправку.

Часто для устранения влияния систематической погрешности, которую не удается выявить, используют специальные приемы. Так, например, при определении модулей упругости материалов в расчетную формулу подставляют не значения нагрузки и деформации, показанные приборами во время испытания, а разности этих показателей и некоторых начальных значений. Другим широко используемым приемом является рандомизация, суть которой в том, что порядок выполнения опытов устанавливается случайным образом, чаще всего с использованием таблиц случайных чисел [3,8].

Таблица 1

Пример рандомизации

Номер опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайные числа	19	00	77	25	32	07	54	20	03	15
Порядок выполнения опыта (порядок по возрастанию случайных чисел)	5	1	10	7	8	3	9	6	2	4

Причины появления случайных погрешностей могут быть самые разнообразные: неоднородность макро- и микростроения древесины, неоднородность древесины, неоднородность структуры древесных плит, неточности средств и методов измерения, колебания температуры и влажности воздуха, колебания температуры нагревательных устройств (сушильных

шкафов, прессов и др.), неточности в заточке и разводе зубьев пил, неточности установки ножей, колебания рецептуры химических материалов, колебания физико-химических свойств химических материалов в силу неоднородности их молекулярной структуры. Список этот можно продолжить. Сюда же следует относить и субъективные причины, связанные с работой самого исследователя: неточности отсчета, разница в остроте зрения, недостаточное внимание и тщательность в работе и др. Случайные ошибки могут завышать или занижать результаты исследований, т.е. они имеют разный знак. Случайные ошибки взаимно компенсируются, поэтому с увеличением числа наблюдений погрешности опыта уменьшаются.

Оценить эти погрешности можно на основании теории вероятностей и математической статистики, которые дают методы оценки степени приближения результата измерения к действительному значению измеряемой величины, дают возможность оценить вероятные границы погрешностей, а также позволяют уточнить результат, т.е. найти значение измеряемой величины, более близкое к действительному значению, чем результат однократного наблюдения.

Грубые ошибки – это просчеты, промахи в работе, брак экспериментатора при повторении опытов. Грубые ошибки связаны с резким нарушением условий экспериментов или просчетом экспериментатора при отдельном наблюдении. Из-за грубых ошибок иногда приходится браковать отдельные повторения или даже весь опыт. Для выявления грубых ошибок существует специальная процедура, описанная в п. 3.5.1.

Т.к. на результате измерения сказываются различные погрешности, которые не всегда возможно устранить, можно говорить, что результат единичного измерения представляет собой **случайную величину**. Она в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

3. ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

3.1. ОЦЕНКА И УЧЕТ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Случайные погрешности являются результатом воздействия большого числа факторов, не зависящих один от другого. Каждый из этих факторов оказывает малое влияние на результаты измерения, однако суммарное влияние всех факторов может быть значительным. Эти факторы могут быть обусловлены неизвестным влиянием температуры на те или иные части измерительного прибора, обратимыми и необратимыми изменениями характеристик измерительного преобразователя, например, в результате гистерезиса, трения в опорах измерительных приборов и т.д. Погрешности отдельных измерений имеют разброс как по величине, так и по знаку. Хотя эти погрешности точно определить нельзя, их можно оценить и охарактеризовать с помощью статистических методов. Случайная величина будет полностью описана с вероятностной точки зрения, если будет задан **закон распределения вероятностей**, т. е. указано, какова вероятность появления тех или иных значений случайной величины. Из этого закона можно получить все практически важные сведения о случайной величине. Известны, например, законы распределения Пуассона, Пирсона, биноминальное и многие другие.

Для большинства измерений имеет место так называемый нормальный закон распределения (Гаусса) случайных ошибок, в основу которого положены следующие предположения: ошибки измерений могут принимать значения, определяемые непрерывным рядом; при большом числе измерений ошибки одинакового значения, но разного знака встречаются одинаково часто; частота (вероятность) появления ошибок уменьшается с увеличением их значения. Графически закон нормального распределения представлен на рис. 2. По оси абсцисс отложены результаты измерений X_i, содержащие случайные погрешности, а оси ординат – плотность вероятности их появления f(x).

При рассмотрении в дальнейшем мы будем предполагать, что все результаты опытов подчиняются нормальному закону распределения.

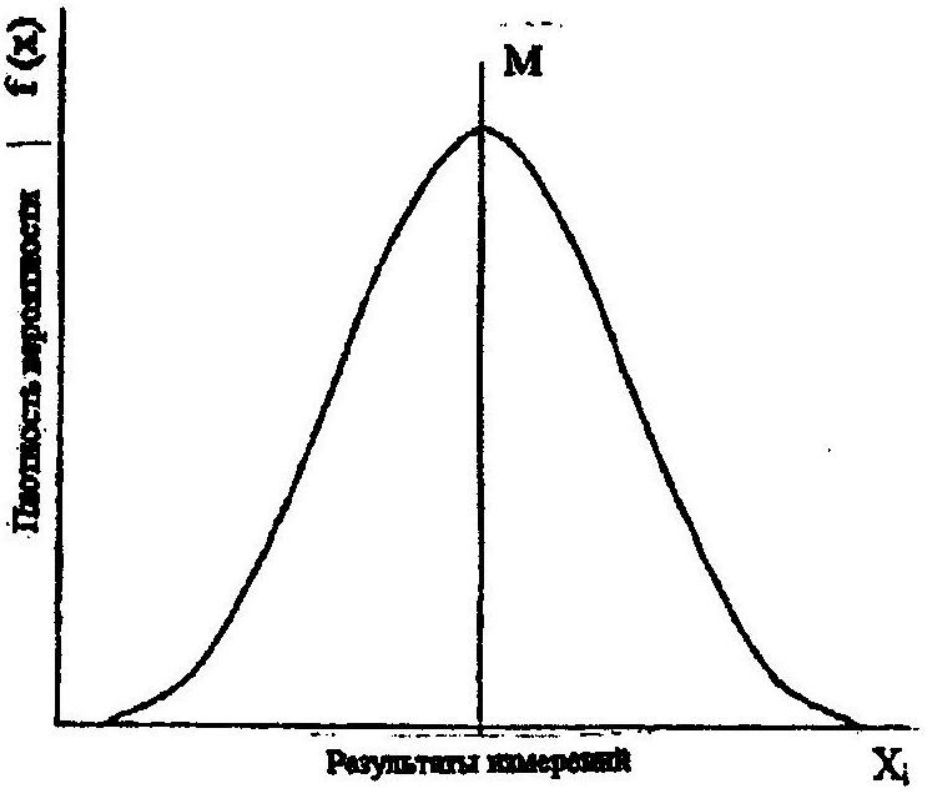

Рис. 2. Нормальное распределение погрешностей

Для нормального закона распределения случайной величины наиболее вероятным значением измеряемой величины является математическое ожидание M, которое оценивается как среднее арифметическое значение по формуле

$$M = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n}{n} = \frac{\sum_i^n X_i}{n}, \qquad (4)$$

где X_1, X_2, X_3, …, X_n – значения измеряемой величины;

n – число измерений.

Чем больше число измерений n, тем ближе M к истинному значению математического ожидания. Случайные ошибки (погрешности) для каждого измерения определяются из выражения

$$\Delta = X - M \qquad (5)$$

Нормальный закон распределения случайной величины (рис. 2) характеризуется выражением плотности вероятности.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(X-M)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (6)$$

где f(x) – плотность вероятности измеренного значения параметра;

X – измеренное значение параметра, искаженное случайными ошибками;

σ - среднее квадратическое отклонение.

Формула 6 может быть записана в виде

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-\Delta^2}{2\sigma^2}} \qquad (7)$$

Математическое ожидание M и среднее квадратическое отклонение σ полностью определяют нормальный закон распределения случайной величины (ф-ла 6). Среднее квадратическое отклонение определяется как корень квадратный из генеральной дисперсии случайной величины. Генеральная дисперсия Д случайной величины характеризует рассеяние, разбросанность случайной величины около ее математического ожидания.

Генеральная дисперсия случайной величины оценивается по формуле

$$Д(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - M)^2}{n-1}, \qquad (8)$$

Среднее квадратическое отклонение подсчитывается из выражения

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2} = \sqrt{Д(x)}\,. \qquad (9)$$

Для вычисления вероятности появления тех или иных значений случайной величины или случайной погрешности необходимо

проинтегрировать выражения для плотности вероятности (6, 7) в интересующем интервале.

3.2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Множество значений случайной величины, полученных в результате эксперимента или наблюдения над объектом исследования, представляет собой **статистическую совокупность**. Статистическая совокупность, содержащая в себе все возможные значения случайной величины, называется **генеральной статистической совокупностью**. Некоторая часть элементов генеральной совокупности называется **выборочной статистической совокупностью,** или **выборкой**. Число опытов (наблюдений) n, содержащихся в выборке, называют **объемом выборки**.

Статистическими характеристиками генеральной совокупности являются: математическое ожидание, генеральная дисперсия, среднее квадратическое отклонение.

По результатам эксперимента практически всегда встречаются с выборочной, а не генеральной совокупностью, поэтому необходимо иметь формулы, позволяющие приближенно оценить математическое ожидание M и генеральную дисперсию Д на основе экспериментальных данных.

При первичной обработке экспериментальных данных выборки объема n из наблюдений X_1, X_2, X_3, …, X_n могут определяться различные статистические характеристики.

Выборочное среднее $\overline{X}$, которое является оценкой математического ожидания.

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i; \qquad (10)$$

Выборочная дисперсия S^2, которая является оценкой генеральной дисперсии.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right]. \qquad (11)$$

Знаменатель этой формулы называется числом степеней свободы. **Числом степеней свободы** выборки объема n называется разность между объемом выборки и числом связей, наложенных на эту выборку. При определении дисперсии имеется одна связь – среднее $\overline{X}$. Поэтому

$$f = n - 1. \quad (12)$$

Среднее квадратическое отклонение σ

$$\sigma = \sqrt{S^2}; \quad (13)$$

Коэффициент вариации V, который характеризует не абсолютное, а относительное рассеивание случайной величины относительно среднего

$$V = \frac{\sigma \cdot 100}{\overline{X}},\%; \quad (14)$$

Оценки объективности полученных результатов: ошибка среднего $\sigma_{\overline{X}}$ и показатель точности среднего ξ

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \quad (15)$$

$$\xi = \frac{\sigma_{\bar{x}} \cdot 100}{\overline{X}} = \frac{V}{\sqrt{n}},\%. \quad (16)$$

3.3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ОПЫТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРВАЛОВ

При исследовании могут получаться сотни результатов, и расчеты статистических показателей с использованием всех значений этих опытов становятся громоздкими. В этом случае производят их группировку, разбивая весь диапазон значений случайной величины на интервалы. Ориентировочное число интервалов определяют, используя формулу

$$k = 1 + 3{,}2 \lg n, \qquad (17)$$

где n – объем выборки.

Количество интервалов, найденное по этой формуле, округляют до целого числа.

Удобнее всего вести обработку результатов, используя интервалы равной длины. Значение длины интервалов в этом случае определяют по формуле

$$h = (X_{max} - X_{min}) / k\ . \qquad (18)$$

Далее для каждого интервала рассчитывается его середина

$$X_i^* = (X_{i-1} + X_i) / 2, \qquad (19)$$

где i = 1,2, 3, …, k.

Определяется частота результатов в каждом интервале в виде числа этих результатов m_i. Результаты опытов, попавшие на границу интервалов, относят к какому-то интервалу, например к (i+1)–му интервалу. Сумма всех величин m_i равна объему выборки n.

После этого определяются статистические показатели по следующим формулам:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot X_i^*; \qquad (20)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} m_i \cdot (X_i^* - \overline{X})^2, \qquad (21)$$

Данные для статистической обработки записывают в табл. 2 в виде статистического ряда.

Таблица 2

Показатели статистической обработки с использованием интервалов

№ интервала	Границы интервалов	Середина интервала, X_i^*	Число наблюдений в интервале, m_i
1	$X_{min} – X_1$	X_1^*	m_1
2	$X_1 – X_2$	X_2^*	m_2
…	…	…	…
i	$X_{i-1} - X_i$	X_i^*	m_i
…	…	…	…
k	$X_{k-1} – X_k$	X_k^*	m_k

На основании статистического ряда (данные табл. 2) можно построить график в виде гистограммы (рис. 3). По оси абсцисс откладывают значения границ интервалов, по оси ординат – число наблюдений в интервале (частоту).

Нередко в экспериментах возникает необходимость проверить тип распределения изучаемой случайной величины. В большинстве случаев результаты опытов подчиняются закону распределения Гаусса (нормальное распределение), плотность которого определяется формулой 6.

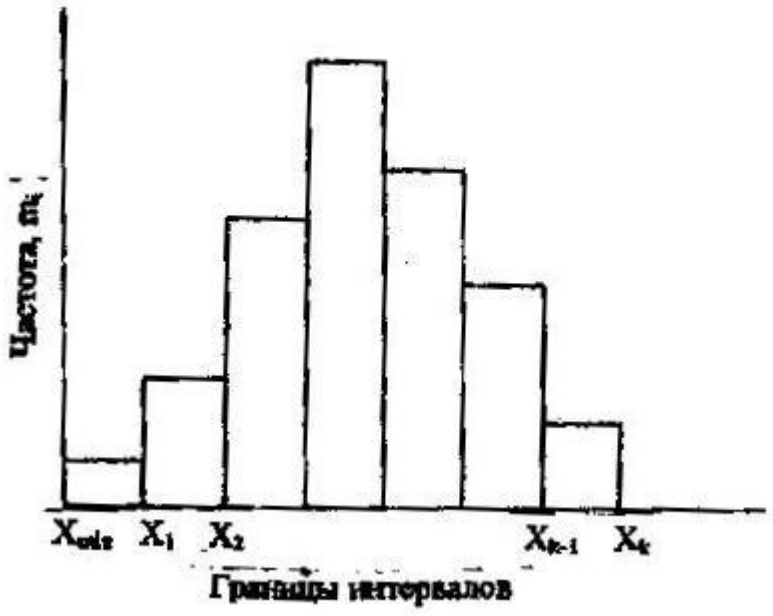

Рис. 3. Гистограмма статистического ряда

Теоретическая кривая распределения строится по значениям $m_i^{/}$, которые находят по формуле

$$m_i' = \frac{nh}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(X_i - \bar{X})^2}{2S^2} \right]. \qquad (22)$$

Чтобы проверить, соответствует ли распределение, построенное по эмпирическим данным (гистограмма), теоретическому, используют различные критерии согласия, из которых наиболее употребительны критерий Пирсона χ^2 и критерий Колмогорова λ.

Критерий Пирсона χ^2 является наиболее строгим и надежным для оценки степени различия эмпирического и теоретического распределения или двух эмпирических распределений. Критерий χ^2 рассчитывается по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - m_i')^2}{m_i'}, \qquad (23)$$

где k – число интервалов, на которые разбиты опытные данные.

При вычислениях необходимо объединять интервалы, в которых частоты менее 5.

Считают, что эмпирическая кривая согласуется с теоретической, если расчетное значение критерия Пирсона χ^2 меньше критического $\chi^2(f)$, которое зависит от числа степеней свободы f и уровня значимости q.

Число степеней свободы находят как

$$f = k - r - 1, \qquad (24)$$

где k – количество интервалов (после объединения),

r – число параметров теоретической функции распределения. Закон Гаусса является двухпараметрическим ($\bar{X}$ и S^2).

3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

Все выборочные параметры (среднее, выборочная дисперсия и др.) являются случайными величинами, и их отклонения от генеральных параметров (математического ожидания, генеральной дисперсии и др.) также будут случайными. Можно сказать, что с некоторой вероятностью *p* отклонения лежат в границах $\pm\varepsilon_0$ и истинный результат какого-либо измерения *a* будет находиться в пределах

$$\overline{X} - \varepsilon_0 \le a \le \overline{X} - \varepsilon_0. \qquad (25)$$

Вероятность нахождения истинного результата в указанных границах называется уровнем достоверности, или **доверительной вероятностью** *p*. Соответствующие доверительной вероятности пределы называются доверительными границами, а образуемый ими интервал – доверительным интервалом. На практике в качестве доверительной вероятности берут значения *p* = 0,95; 0,99; 0,999.

Наибольшее значение вероятности, несовместимой со случайностью события, называется **уровнем значимости** *q*. Другими словами, уровень значимости есть максимум таких вероятностей, при которых событие можно считать практически невозможным. Наиболее употребительны уровни значимости *q* = 0,05; 0,01; реже 0,1 или 0,001.

Очевидно, что сумма доверительной вероятности и уровня значимости равна 1. Для математического ожидания доверительный интервал с вероятностью *p* находят по формуле

$$\overline{X} - \sigma \cdot t_{1-q/2}(f)/\sqrt{n} \le a \le \overline{X} + \sigma \cdot t_{1-q/2}(f)/\sqrt{n}, \qquad (26)$$

где $t_{1-q/2}(f)$ – критерий Стьюдента, который зависит от принятого уровня значимости *q* и числа степеней свободы f = n – 1.

3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОБХОДИМОГО ОБЪЕМА ВЫБОРКИ

Пусть требуется найти минимальное число n повторения опытов, при котором среднее $\bar{y}$, найденное по этой выборке, отличилось бы от математического ожидания не более чем на заданную величину Δ. Это задача обратная вычислению доверительного интервала для математического ожидания. Для ее решения необходимо знать оценку дисперсии S^2. Здесь можно использовать результаты проведенных ранее исследований. Необходимый объем выборки определяется по формуле

$$n = \frac{t^2_{1-q/2} \cdot S^2}{\Delta^2}, \qquad (27)$$

где $t_{1-q/2}(f)$ – критерий Стьюдента, который зависит от принятого уровня значимости q и числа степеней свободы, связанной с оценкой дисперсии. Если эта дисперсия найдена по выборке объемом больше 120, то вместо $t_{1-q/2}(f)$ можно пользоваться величиной τ, зависящей только от уровня значимости q.

q	0,2	0,1	0,05	0,01	0,005
τ	1,28	1,64	1,96	2,58	2,81

3.6. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

При обработке эмпирических данных часто возникает необходимость проверить, существенно ли отличаются друг от друга некоторые статистические характеристики. Например, при испытании прочности склеивания древесины каким-либо клеем в разное время были испытаны две партии клееных образцов. Условия склеивания и испытания были одинаковы. Средние значения прочности оказались разными. Возникает вопрос, вызвано ли это различие существенными причинами, обусловленными, например, качеством клея, или это различие случайное? Другими словами, значимо или незначимо различаются полученные значения прочности? Если они различаются незначимо, т.е. их можно считать равными, то говорят, что справедлива нулевая гипотеза. Если же нет, то говорят, что нет оснований принимать нулевую гипотезу.

Дать ответ на такой вопрос можно лишь после проверки статистической гипотезы, которая выполняется по определенным правилам. Нулевая гипотеза может быть выдвинута по отношению к любым статистическим

характеристикам. Чаще всего ее проверяют при сравнении средних, дисперсий, законов распределения, проверке ошибочных значений, при нахождении регрессионных зависимостей и др.

При проверке гипотез возможны ошибки двух родов. Ошибка первого рода состоит в том, что нулевая гипотеза отвергается, когда на самом деле она верна. Ошибка второго рода состоит в том, что нулевая гипотеза принимается, хотя она и не верна. Вероятность допустить ошибку первого рода называется уровнем значимости q. Это означает, что если нулевая гипотеза верна с уровнем значимости q, то она действительно верна с доверительной вероятностью $p = 1 - q$.

3.6.1. Проверка однородности наблюдений

При принятии или отбрасывании результатов наблюдений наиболее употребителен способ, основанный на использовании τ-распределения максимального относительного отклонения. Значения квантилей $\tau_{1-q}(n)$ этого распределения зависят от объема выборки и уровня значимости.

Согласно этому критерию крайнее значение X_{max} или X_{min}, вызывающее сомнение, отбрасывается как грубоошибочное (при уровне значимости q), если

$$\frac{\left|X_{\max(\min)} - \bar{X}\right|}{\sigma} > \tau_{1-q}(n). \qquad (28)$$

3.6.2. Сравнение двух дисперсий

Для оценки значимости расхождения между дисперсиями S^2_1 и S^2_2, вычисленными соответственно по выборкам объемом n_1 и n_2, используют распределение Фишера (F-распределение) $F_{1-q}(f_1,f_2)$, зависящее от числа степеней свободы $f_1 = n_1 - 1$ и $f_2 = n_2 - 1$. Значение критерия Фишера выбирают по табличным данным при некотором уровне значимости q. Расхождение между дисперсиями считается незначимым (принимается нулевая гипотеза), если

$$S_1^2 / S_2^2 < F_{1-q}(f_1, f_2). \qquad (29)$$

При этом всегда полагают, что $S^2_1 > S^2_2$.

Если справедлива нулевая гипотеза, дисперсии обоих выборок можно усреднить, вычислив средневзвешенную дисперсию.

$$S^2 = \frac{S_1^2 f_1 + S_2^2 f_2}{f_1 + f_2}. \qquad (30)$$

3.6.3. Сравнение двух средних

Оценка значимости различия между средними $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$, найденными из двух выборок n_1 и n_2, находится разными способами в зависимости от того, значимо или незначимо различаются их дисперсии.

Пусть дисперсии различаются незначимо и средневзвешенная дисперсия равна S^2. Тогда проверку гипотезы о равенстве средних выполняют по уравнению

$$\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right| < t_{1-q/2}(f) \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \qquad (31)$$

где $t_{1-q/2}(f)$ – квантиль распределения Стьюдента, который выбирают по таблицам в зависимости от уровня значимости q при числе степеней свободы $f = n_1 + n_2 - 2$.

σ - среднее квадратическое отклонение из средневзвешенной дисперсии.

Пусть дисперсии различаются значимо. Тогда проверку гипотезы о равенстве средних выполняют по уравнению

$$\left|\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right| < \frac{V_1 \cdot t_{1-q/2}(f_1) + V_2 \cdot t_{1-q/2}(f_2)}{\sqrt{V_1 + V_2}}, \qquad (32)$$

где $V_1 = S^2_1 / n_1$, $V_2 = S^2_2 / n_2$.

Если условие 31 и 32 выполняются, то средние расходятся незначимо и их можно усреднить. Средневзвешенное среднее вычисляется по формуле

$$\overline{X} = \frac{\overline{X}_1 n_1 + \overline{X}_2 n_2}{n_1 + n_2}. \qquad (33)$$

3.7. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ. КОРРЕЛЯЦИЯ КАЧЕСТВЕННЫХ ПРИЗНАКОВ

3.7.1. Корреляционный анализ

При нахождении статистических зависимостей между двумя случайными величинами предварительно необходимо установить их коррелированность. Наличие корреляционной связи показывает, что изменение одной случайной величины вызывает какое-то изменение и другой величины.

Коэффициент корреляции *r(x,y)* – это показатель, который количественно оценивает, насколько связь между случайными величинами X и Y близка к линейной зависимости. Коэффициент корреляции вычисляется по формуле

$$r(x,y)=\frac{n\sum y_i x_i-\sum y_i\sum x_i}{\sqrt{\left[\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2\right]\cdot\left[\sum y_i^2-\left(\sum y_i\right)^2\right]}}. \qquad (34)$$

Если значение *r(x,y)* близко к ± 1, то зависимость между X и Y близка к линейной. Положительный коэффициент корреляции указывает на то, что с возрастанием одной из случайных величин другая в среднем тоже возрастает. Отрицательный коэффициент корреляции указывает, что с ростом одной из них другая величина будет в среднем убывать. Если *r(x,y)* мало отличается от нуля, между X и Y никакой коррелятивной связи нет.

Для проверки значимости отличия от нуля коэффициента корреляции используется оценка

$$r(x,y) > r_{1-q/2}(n)\,, \qquad (35)$$

где $r_{1-q/2}(n)$ – квантиль *r*-распределения при уровне значимости q. Он зависит от объема выборки.

Если условие (35) выполняется, то *r(x,y)* значимо отличается от нуля.

Наряду с корреляцией между двумя признаками существует корреляция между несколькими признаками, которая называется **множественной корреляцией.** Так, для оценки степени статистической связи случайной величины Z с величинами X и Y рассчитывают выборочный совокупный коэффициент корреляции.

$$r_{(x,y,z)} = \sqrt{\frac{r^2_{(x,z)} - 2r_{(y,z)} \cdot r_{(x,y)} \cdot r_{(x,z)} + r^2_{(y,z)}}{1 - r^2_{(x,y)}}}\ , \qquad (36)$$

где $r_{(x,y)}$; $r_{(x,z)}$; $r_{(y,z)}$ – коэффициенты корреляции соответственно между величинами X и Y, X и Z, Y и Z.

Величина $r_{(x,y,z)}$ лежит в пределах $0 \le r_{(x,y,z)} \ge 1$ и так же как и обычный коэффициент корреляции служит для оценки линейной статистической связи.

3.7.2. Нахождение линейной регрессионной зависимости

Примером корреляционного анализа может быть нахождение линейной регрессии между случайными величинами X,Y в виде

$$y = a + bx, \qquad (37)$$

где a – свободный член регрессии;

b – коэффициент регрессии.

Для нахождения неизвестных коэффициентов a и b используют метод наименьших квадратов. Смысл его в следующем. Если для каких-либо значений фактора X_1, X_2, …, X_n экспериментальным путем установлены соответствующие значения Y_1, Y_2, …, Y_n, то можно подобрать коэффициенты a и b в уравнении (36) так, что квадрат разности между экспериментальными значениями Y_1, Y_2, …, Y_n и вычисленными по формуле (37) $\hat{Y}_1$, $\hat{Y}_2$, …, $\hat{Y}_n$ будет минимальным.

Или в математической форме это запишется так:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{y}_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_1 - a - bx_i \right)^2 = \min \qquad (38)$$

Равенство (38) будет достигаться при равенстве нулю частных производных функции f по a и b:

$$\begin{cases} \dfrac{df}{da} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i \right) = 0 \\ \dfrac{df}{db} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - a - bx_i \right) = 0 \end{cases} \qquad (39)$$

Из решения этой системы при неизвестных X_i и Y_i находим неизвестные коэффициенты a и b. Формулы для вычисления этих коэффициентов следующие:

$$b = \frac{n\sum y_i x_i - \sum y_i \cdot \sum x_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$
$$a = \frac{1}{n}\left(\sum y_i - b\sum x_i\right) \qquad (40)$$

Коэффициенты регрессии имеют физический смысл. Свободный член регрессии *a* показывает, чему будет равно значение выходной величины Y при нулевом значении фактора X. Коэффициент регрессии *b* показывает степень влияния фактора на выходную величину. Коэффициент *b* может иметь знак "+" или "-" и характеризовать угол наклона прямой к горизонтали.

Подставляя в уравнение (37) значения коэффициентов a, b и фактора X_i, определяют расчетное значение выходной величины $\hat{Y}_i$.

Если провести несколько экспериментов при одном и том же значении фактора X_i, то, в общем случае, значения Y_i, соответствующие им, будут неодинаковы. Рассеивание результатов при воспроизведении одного и того же эксперимента оценивают **дисперсией воспроизводимости** S^2_y.

Дисперсия воспроизводимости вычисляется в зависимости от методики дублирования опытов.

1. Равномерное дублирование опытов. Каждый из N опытов повторяется n раз.

Сначала находят дисперсию каждого опыта.

$$S_u^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}_i\right)^2 \quad \text{u} = 1,2, \ldots, \text{N}, \qquad (41)$$

где n – количество дублированных опытов,

y_i - значение выходной величины,

$\bar{y}_i$ – среднее значение выходной величины в u-ом опыте.

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (42)$$

Затем вычисляют критерий Кохрена

$$q = \frac{S^2_{u(\max)}}{\sum_{u=1}^{N} S_u^2}, \qquad (43)$$

где $S^2_{u(max)}$ – максимальная из дисперсий каждого опыта.

Если выполняется условие (44), то дисперсии опытов однородны, и их можно усреднить.

$$q \le q_{1-q}(N,f) \quad f = n-1, \tag{44}$$

где $q_{1-q}(N,f)$ – табличное значение критерия Кохрена.

В этом случае дисперсия воспроизводимости определяется по формуле

$$S_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} S_u^2 \tag{45}$$

Число степеней свободы этой дисперсии $f_y = N\,(n-1)$.

2. Отсутствие дублированных опытов. В этом случае строят отдельную серию m опытов и дисперсию воспроизводимости вычисляют по формуле

$$S_y^2 = \frac{1}{m-1}\left[\sum_{i=1}^{m} y_i^2 - \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} y_i\right)^2\right] \tag{46}$$

Число степеней свободы этой дисперсии $f_y = m - 1$.

Часто возникает необходимость установить, насколько хорошо полученное приближенное уравнение регрессии соответствует истинной регрессии, не требуется ли в найденное уравнение внести какие-либо дополнительные члены. Такая проверка называется **проверкой адекватности.** Порядок этой проверки следующий. Вычисляют остаточную дисперсию или еще ее называют дисперсией адекватности, которая равна

$$S_{ad}^2 = \frac{1}{N-l}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 \qquad f_{ад} = N - l, \tag{47}$$

где l – количество коэффициентов уравнения регрессии,

y_i – экспериментальные значения выходной величины,

$\hat{y}_i$ – расчетное (теоретическое) значение выходной величины.

Дисперсия адекватности характеризует расхождение между результатами эксперимента y_i и значениями выходной величины $\hat{y}_i$, вычисленными по уравнению регрессии.

Для случая линейной регрессии

$$S^2_{ад} = \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}(y_i - a - bx_i)^2 \qquad f_{ад} = N - 2 \qquad (48)$$

Затем вычисляют отношение $S^2_{ад} / S^2_{у}$ и сравнивают его с квантилем распределения Фишера $F_{1-q}(f_1,f_2)$, найденного по таблицам при уровне значимости q и степенях свободы f_1 (дисперсии адекватности) и f_2 (дисперсии воспроизводимости). Если

$$\frac{S^2_{ад}}{S^2_y} < F_{1-q}(f_1, f_2), \qquad (49)$$

уравнение регрессии признается адекватным. В противном случае уравнение следует искать в другом виде.

3.7.3. Нахождение нелинейной регрессионной зависимости

Нелинейные зависимости между случайными величинами X и У могут иметь разную форму и выражаться разнообразными уравнениями:

показательная функция $y = ab^x$;

степенная функция $y = ax^b$;

логарифмическая функция $y = a + b \ln x$;

параболическая функция $y = a + bx + cx^2$.

Вычислить коэффициенты из этих уравнений невозможно, поэтому многие нелинейные зависимости приводят к линейному виду путем логарифмирования.

Рассмотрим, например, показательную функцию. Ее уравнение после логарифмирования имеет вид $\ln y = \ln a + x \ln b$. Заменяем переменные $\ln y = y'$; $\ln a = a'$; $\ln b = b'$, тогда $y' = a' + b'x$. Далее высчитываются коэффициенты a' и b', а затем по логарифмам находят значения коэффициентов a и b ($a = e^{a'}$, $b = e^{b'}$).

Обычно высчитывают несколько нелинейных зависимостей. И для того, чтобы решить, какая из функций наиболее точно описывает процесс или объект

вычисляют основную ошибку. Основная ошибка определяется по сумме квадратов отклонений эмпирических данных от данных, полученных по уравнению регрессии.

$$\sigma_o = \sqrt{\frac{1}{N-l}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - f(x_i)\right)^2}, \qquad (50)$$

где l – количество коэффициентов функции $y = f(x_i)$.

Наилучшим приближением к эмпирическим значениям будет обладать та зависимость $y = f(x_i)$, у которой основная ошибка будет наименьшей.

3.7.4. Корреляция качественных признаков

Часто предварительное изучение исследуемого процесса проводится путем опроса (сбора мнений) группы специалистов (экспертов). В результате такого изучения устанавливается, например, какие факторы влияют на исследуемый процесс, степень влияния этих факторов (их значимость), количественные и качественные характеристики этих факторов, выходных параметров и др.

При проведении экспертной оценки чаще всего пользуются методом ранговой корреляции, который позволяет оценить влияние различных факторов, исходя из априорных сведений, полученных от специалистов, работающих в данной области. Сбор таких сведений целесообразнее вести в виде специальных анкет опроса. В этих анкетах каждый специалист перечисленным факторам приписывает порядковые номера 1, 2, 3… в зависимости от величины вносимого им вклада (значимости фактора) в данный процесс. Эти номера называют рангами. Чем выше ранг фактора, тем меньше степень влияния его на изучаемый процесс. Если тому или иному специалисту не представляется возможным четко разделить какие-то два или более факторов по их значимости, то всем факторам приписывается одинаковый ранг, равный среднему арифметическому порядковых номеров этих факторов. Например, два фактора делят 3 и 4 места, тогда каждому из этих факторов присваивают ранг, равный (3+4)/2 = 3,5. Такие ранги называют совпавшими или связанными.

Результаты опроса обрабатываются по определенной схеме. При этом могут решаться разные задачи. Наиболее важные из них:

1. Проверка согласованности мнений опрашиваемых специалистов.
2. Проверка наличия связи между разными признаками какого-либо объекта.

В 1-й задаче согласованность мнений специалистов проверяется **коэффициентом конкордации**, который определяется следующим образом. Результаты ранжирования, данные всеми экспертами, сводятся в таблицу (табл. 3).

Таблица 3

Результаты ранжирования

Эксперты	Факторы			
	x_1	x_2	…	x_n
1	x_{11}	x_{21}		x_{n1}
2	x_{12}	x_{22}		x_{n2}
.				
.				
m	x_{1m}	x_{2m}		x_{nm}
Суммы	$S_1=\sum x_{1j}$	$S_2=\sum x_{2j}$		$S_n=\sum x_{nj}$

где x_{ij} – ранг, присвоенный j-м экспертом i-му фактору.

Подсчитывают среднее значение суммарных рангов, равное

$$a = \frac{1}{2} m(n+1), \tag{51}$$

где m – количество специалистов,

n – количество факторов.

Затем находят сумму рангов каждого i-го фактора

$$S_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \quad (i = 1,2,\ldots, n;\ j = 1,2,\ldots,m) \tag{52}$$

и составляют сумму квадратов

$$S_\omega = \sum_{i=1}^{n} (S_i - a)^2. \tag{53}$$

Коэффициент конкордации вычисляется по формулам:
при отсутствии совпавших (связанных) рангов

$$\omega = \frac{12S_\omega}{m^2 n(n^2-1)}; \qquad (54)$$

при наличии связанных рангов

$$\omega = \frac{S\omega}{\frac{1}{12}m^2 n(n^2-1) - m\sum_{j=1}^{m} T_j}, \qquad (55)$$

$$T_j = \frac{1}{12}\sum_{r=1}^{k} t_r(t_r^2-1),$$

где t_r – число совпавших рангов r-го фактора,

k – число факторов с совпавшими рангами.

После нахождения коэффициента конкордации необходимо проверить значимость его отличия от нуля. Если количество факторов n ≤ 7, то подсчитывают величину

$$z = \frac{1}{12}\ln\frac{(n-1)\omega}{1-\omega}, \qquad (56)$$

затем находят по таблицам распределения Фишера квантиль $F_{1-q}(f_1,f_2)$ при уровне значимости q и степенях свободы $f_1 = n - 1 - (2/m)$, $f_2 = (m - 1)f_1$, и сравнивают z с $F_{1-q}(f_1,f_2)$. Если $z > F_{1-q}(f_1,f_2)$, коэффициент конкордации значим.

При n > 7 величина z равна при отсутствии связанных рангов

$$z = m(n-1)\omega = \frac{12S_\omega}{mn(n+1)}, \qquad (57)$$

при наличии связанных рангов

$$z = \frac{S_\omega}{\frac{1}{12}mn(n+1) - \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{m} T_j}. \qquad (58)$$

Величину z сравнивают с выбираемым по таблицам χ^2-распределения квантилем $\chi^2_q(f)$ при уровне значимости q и числе степеней свободы f = n – 1. Если $z > \chi^2_q(f)$, коэффициент конкордации значим.

Во 2-й задаче связь между двумя признаками X и У, каждый из которых проранжирован для n исследуемых объектов, оценивается **коэффициентом ранговой корреляции**, который определяется чаще всего способом Спирмена.

Коэффициент ранговой корреляции по Спирмену равен:
при отсутствии связанных рангов

$$\rho = 1 - \frac{6S_\rho}{n(n^2-1)}, \quad S_\rho = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2, \qquad (59)$$

где x_i, y_i – ранги признаков X и У (i =1,2,…, n);
при наличии связанных рангов

$$\rho = \frac{\frac{1}{6}n(n^2-1) - S_\rho - T - U}{\sqrt{\left(\frac{1}{6}n(n^2-1) - 2T\right)\cdot\left(\frac{1}{6}n(n^2-1) - 2U\right)}} \qquad (60)$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} t_r(t_r - 1) \text{ - для признака X,}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{l} U_r(U_r - 1) \text{ - для признака У,}$$

где t_r – число совпавших рангов для r-го фактора для признака X,

U_r - число совпавших рангов для r-го фактора для признака У,

k,l – число факторов с совпавшими рангами соответственно для признаков X и У.

После нахождения коэффициента ранговой корреляции необходимо оценить значимость отличия его от нуля. Коэффициент называется значимым, если соблюдено следующее условие: вероятность случайного отклонения S_ρ не превосходит заданного уровня значимости q. Обычно принимают q=0,05. Если число факторов n < 10, то по таблице распределения (табличные данные [3,4]) для данного значения S_ρ находят вероятность Q_ρ случайного отклонения S_ρ от

среднего значения. Если эта вероятность не превосходит q, коэффициент ранговой корреляции считают значимым. При n ≥ 10 коэффициент ρ считают значимым, если

$$|\rho| \geq 1{,}65\sqrt{\frac{1}{n-1}} \ . \qquad (61)$$

4. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

4.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Эксперимент – это система операций, воздействий или наблюдений, направленных на получение информации об объекте или процессе при исследовательских испытаниях.

Воспроизведение исследуемого объекта в определенных условиях проведения эксперимента при возможности регистрации его результатов называется **опытом.**

Под **планом эксперимента** понимают совокупность данных, определяющих количество опытов, условия и порядок их реализации. **Планирование эксперимента** – это соответственно выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям.

Для описания объекта используется понятие «черный ящик».

«Черным ящиком» называют систему, в которой для наблюдения доступны лишь входные и выходные величины, а внутренняя структура остается неизвестной.

Такие системы изучают, проводя эксперименты и наблюдения за входными и выходными величинами.

Поведение «черного ящика» исследуется путем выявления логических и статистических связей между информацией, поступающей на вход ящика, и воздействиями на его выходе.

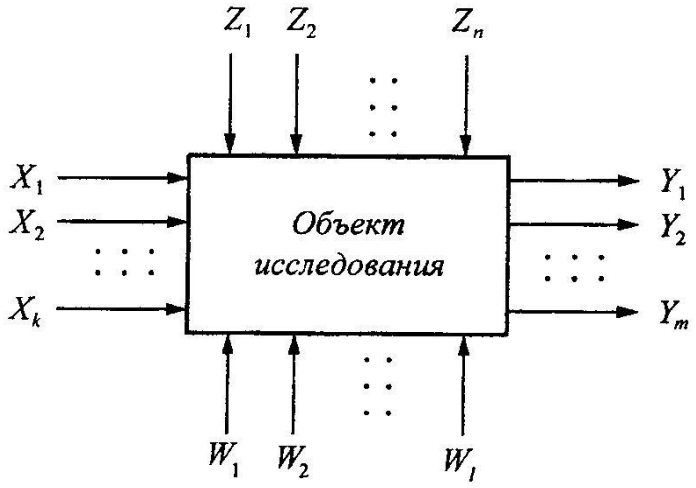

Рис. 4. Представление объекта исследования в виде «черного ящика»

Переменная величина, по предположению, влияющая на результат эксперимента, называется **фактором.**

Факторы действуют на объект исследования, изменяют его состояние.

При рассмотрении «черного ящика» различают управляемые и неуправляемые факторы.

Фактор называется управляемым, если исследователь имеет возможность задавать и поддерживать нужное значение данного фактора в течение всего отдельного опыта. (Например, скорость подачи, продолжительность прессования, концентрация связующего). А такие факторы, как температура окружающей среды, величина сбега бревна – являются неуправляемыми.

Факторы могут быть количественными и качественными.

Количественные факторы можно оценивать количественно, т.е. измерять, взвешивать и т.д. и они однозначно характеризуются некоторым единственным числом. (Например, температура, давление, плотность и т.д.)

Для качественных факторов существует лишь качественное отличие. (Например, порода древесины, состав связующего, способ обработки).

Среди неуправляемых факторов одни могут контролироваться в процессе постановки опытов без их целенаправленного изменения, а другие из-за недостаточной информации о них являются неконтролируемыми (возмущающие воздействия). Например, температура окружающей среды, влажность воздуха, если они замеряются в ходе эксперимента.

Выходной величиной объекта или откликом называется наблюдаемая случайная переменная, по предположению, зависящая от факторов.

Выходные величины – это параметры, по которым судят об изменении состояния объекта.

Зависимость $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ называется **функцией отклика.**

Эксперимент, в котором значения факторов в каждом опыте задаются исследователем, в соответствии с определенным планом, называется **активным экспериментом.**

Эксперимент, в котором значения факторов в каждом опыте регистрируются исследователем, но не задаются, **называется пассивным экспериментом.**

В пассивных экспериментах отсутствует возможность оптимального выбора значений варьируемых факторов и оптимального сочетания этих факторов в поставленных опытах. Роль экспериментатора здесь сводится в основном к фиксации входных и выходных величин в ходе эксперимента. Из-за невозможности задавать значения входным факторам эффективность пассивного эксперимента ниже активного.

В случаях, если в эксперименте исследуется влияние на объект более чем одного фактора, существует два различных способа организации эксперимента.

1. Влияние факторов подвергается исследованию поочередно: сначала варьируется один из них, при этом все остальные фиксируются, потом аналогичным образом варьируется только второй фактор, затем третий и т.д. Такой эксперимент называется **однофакторным.**

2. При переходе к каждому последующему опыту изменяют значение не одного, а сразу нескольких факторов, такой эксперимент **называют многофакторным.**

Из-за большей эффективности в теории планирования эксперимента рассматривают почти исключительно многофакторные эксперименты.

4.2. ВЫБОР ФАКТОРОВ И УРОВНЕЙ ИХ ВАРЬИРОВАНИЯ

Фактор – это управляемая независимая переменная величина, которая принимает в некоторый момент времени определенное значение и соответствует одному из способов воздействия на объект исследования.

Каждый фактор принимает в эксперименте одно или несколько значений. Эти значения называются **уровнями фактора.**

Областью значений фактора называют совокупность значений данного фактора, которые он принимает в эксперименте.

Диапазон варьирования фактора – это наименьший отрезок, внутри которого находятся все значения, принимаемые данным факторов в эксперименте.

Например, толщина пилы принимает значения 1,8; 2,0; 2,2; 2,5 мм. Совокупность приведенных чисел образует область значений данного фактора, а отрезок 1,8 … 2,5 мм – это диапазон варьирования.

Наименьшее значение, которое фактор принимает в эксперименте, называется **нижним уровнем варьирования**, а наибольшее – **верхним уровнем варьирования**. Среднее их значение называется **центром эксперимента** или **основным уровнем.**

Расстояние между основным уровнем и верхним или нижним называется **интервалом варьирования** фактора.

При выборе интервала варьирования необходимо руководствоваться следующими соображениями:

1. интервал варьирования не должен быть меньше той ошибки, с которой фиксируются уровни факторов, иначе верхний и нижний пределы будут неразличимы.

Чем точность фиксирования факторов меньше, тем больше должен быть интервал варьирования.

2. Интервал варьирования не должен быть настолько велик, чтобы верхний и нижний уровни выходили за пределы исследуемой области.

3. При большей кривизне поверхности откликов, интервал варьирования должен быть меньше.

Требования, предъявляемые к варьируемым факторам:

1. Управляемость. Каждый фактор должен быть точной характеристикой определенного воздействия на объект исследований, которой можно управлять.

2. Независимость – это возможность устанавливать любое значение данного фактора в диапазоне варьирования независимо от уровней варьирования остальных факторов. Факторы могут зависить друг от друга, но только нелинейно.

3. Совместимость. Все комбинации факторов, возможные при планировании и проведении эксперимента, могут быть реализованы на практике и безопасны.

4. Однозначность. Факторы должны непосредственно воздействовать на объект, не должны являться функцией других факторов, должны точно фиксироваться во всей выбранной области определения факторов.

4.3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Под математическим описанием процесса будем понимать систему уравнений, связывающих выходную величину с влияющими факторами. В простейшем случае это может быть уравнение. Часто математическое описание называют **математической моделью.**

С помощью математических методов планирования эксперимента можно получить математическую модель процесса даже при отсутствии сведений о его механизме. Это в ряде случаев бывает очень полезно.

Математическое описание объекта исследования сводится обычно к нахождению и исследованию некоторой зависимости

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (62)$$

где y – некоторая численная характеристика объекта исследования (выходная величина);

x_i – значение каких-то факторов, влияющих на эту характеристику (i = 1,2,…, n).

Зависимость (62) называется функцией отклика. Значения факторов x_i, лежащих внутри какого-то заранее задаваемого диапазона, образуют факторное пространство.

Например, объектом некоторого исследования является процесс продольного фрезерования (строгания) на рейсмусовом станке. Задача эксперимента – дать математическую зависимость мощности резания N от каких-то факторов, влияющих на эту мощность. Допустим далее, что из всех факторов постоянными будут порода древесины, ее влажность, скорость

резания, число ножей. Переменными факторами, варьируемыми в некотором диапазоне, будут: U_1 – скорость подачи (4-16 м/мин),

U_2 – толщина снимаемого слоя (1-4 мм),

U_3 – продолжительность работы ножей (1-4 ч).

Функция отклика $N = f(U_1, U_2, U_3)$ в этом случае будет математической моделью процесса пиления, а факторы, действующие в указанных диапазонах, образуют факторное пространство.

Ценность математического описания:

1. Дает информацию о влиянии факторов;
2. Позволяет количественно определить значение выходной величины при заданном режиме ведения процесса;
3. Может служить основой для оптимизации.

Экспериментальные методы исследований для получения математического описания процесса или объекта, о которых пойдет далее речь, объединяются под названием планирование эксперимента. **Планирование эксперимента** – это совокупность приемов, позволяющих исследователю разумно поставить эксперимент, сообразуясь с целью исследования, со стремлением получить максимальную информацию при ограниченном числе опытов, а также правильно обработать и интерпретировать результаты эксперимента.

Следует отметить, что на основе методов планирования эксперимента можно количественно описать также свойства таких продуктов, как сплавы, пластмассы, резины, керамики, бетоны и т.п.

Математические модели, получаемые с помощью методов планирования эксперимента, принято называть экспериментально-статистическими.

4.4. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В ДЕРЕВООБРАБОТКЕ

В основе обработки результатов активного и пассивного экспериментов с количественными факторами лежит регрессионный анализ. Он включает метод отыскания параметров математической модели и статистическую обработку данных.

Зависимость выходной величины У от варьируемых факторов X_1, X_2, …, $X_к$, полученная с применением регрессионного анализа, **называется регрессионной моделью.**

Регрессионная модель является частным случаем математической модели объекта.

Выходных величин может быть несколько. Например, в процессе обработки детали на станке могут измеряться толщина детали, силы резания, шероховатость поверхности. В этом случае зависимость $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ строится для каждого отклика. При этом по результатам каждого опыта замеряются сразу все отклики. И по сравнению со случаем единственной выходной величины, возрастают только затраты на измерение нескольких откликов и на обработку результатов эксперимента.

Построенная регрессионная модель позволяет получить информацию о самом объекте и о способах управления им. С помощью регрессионной модели легко оценить степень и характер влияния каждого из факторов на выходную величину; модель может служить основой для оптимизации процесса.

Вид регрессионной модели должен быть задан заранее в виде многочлена (полинома), экспоненты, тригонометрического многочлена и т.д.

Т.О. при планировании эксперимента для математического описания объекта по результатам опытов рассчитываются только значения констант в регрессионной модели.

При выборе вида регрессионной модели исследователю должны помочь априорные знания об объекте – это возможные исследования данного объекта, приведенные ранее экспериментаторами и теоретиками, сведения накопленные технологами и производственниками.

Так как вид регрессионной модели задается до проведения эксперимента, необходимо оценить применимость построенной модели, соответствие ее исследуемому объекту. В планировании эксперимента предусмотрена специальная процедура, называемая проверкой адекватности регрессионной модели.

По результатам этой проверки исследователь имеет возможность принять или опровергнуть гипотезу о том, соответствует ли построенная модель по результатам эксперимента, и следовательно пригодна ли она для описания объекта.

Наибольшее распространение нашли методы планирования эксперимента, в которых регрессионные модели представлены в виде многочленов первого и второго порядка.

Модель в виде многочлена первого порядка сокращенно называют регрессионной моделью **первого порядка** или линейной.

В общем случае, при наличии k варьируемых факторов линейная регрессионная модель объекта имеет вид

$$y = b_0+b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_kx_k, \qquad (63)$$

b – коэффициенты, числовые значения которых определяются по результатам эксперимента. Их называют **коэффициенты регрессии**, а уравнение – **уравнением регрессии.**

Причем b_1, b_2, …, $b_к$ – линейные коэффициенты регрессии, b_0 - свободный член.

Т.о. выбор регрессионной модели первого порядка для описания объекта равносилен предположению о линейной зависимости выходной величины от каждого из факторов.

Кроме того, выбор такой модели, предполагает отсутствие **эффектов взаимодействия** между факторами. Это означает, что степень и характер влияния каждого фактора на выходную величину не зависят от уровней варьирования остальных факторов.

Графически это проявится в параллельности прямых семейства (рис. 5).
Линейная регрессионная модель дает, как правило, приближенное представление о влиянии факторов на объект. Применение таких моделей оправдано в следующих основных случаях:

1. На начальных этапах исследования, когда удовлетворяет ограниченная точность.

2. При жестком ограничении количества опытов, т.к. экспериментальные планы, позволяющие получить линейную модель, являются экономичными.

3. Когда экспериментатор уверен в достоверности линейной модели.

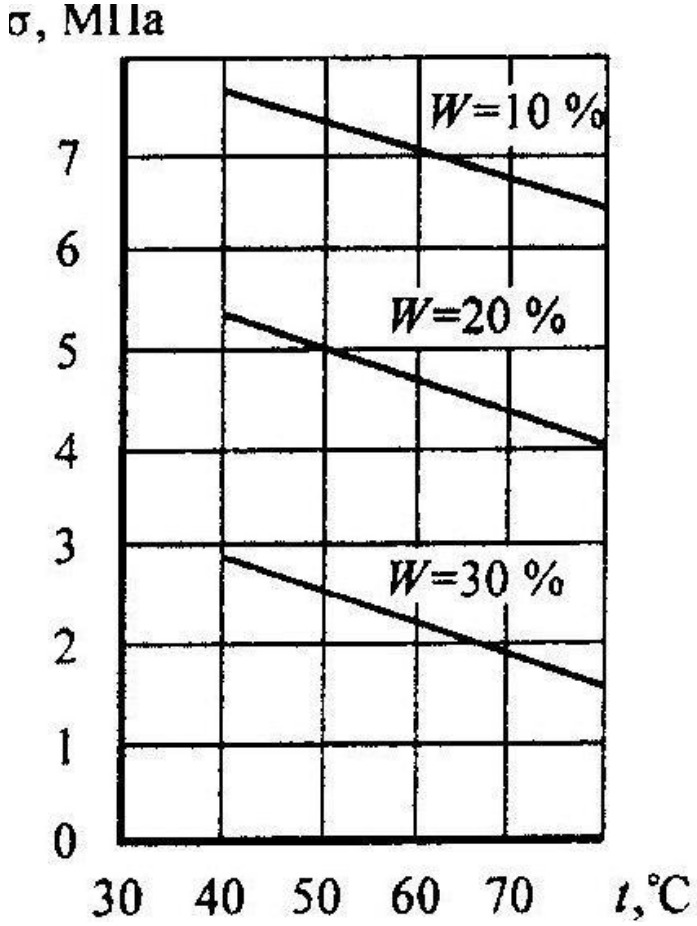

Рис. 5. Графики зависимостей σ=f(t)

Модель в виде многочлена второго порядка называется **моделью второго порядка** (квадратичной моделью).

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2 + \sum_{i<u, i\neq u} b_{iu} x_i x_u \,. \qquad (64)$$

Эта модель содержит все слагаемые линейной модели, квадратичные члены и члены с парными взаимодействиями.

Зависимость, полученная на основе квадратичной модели представлена на графике отрезками параболы (рис. 6).

Такое представление позволяет достаточно полно описать широкий круг реальных зависимостей.

Описание объекта квадратичной моделью дает заведомо плохие результаты (рис. 7), если:

а) истинная зависимость отклика имеет более одного экстремума.

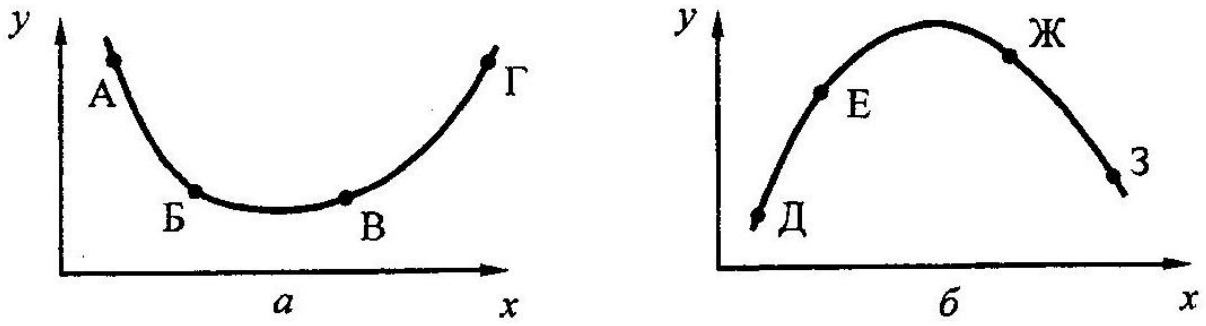

Рис. 6. Графические зависимости модели второго порядка

б) зависимость имеет точку перегиба.

в) при некотором значении X значение отклика резко (скачком) изменяется.

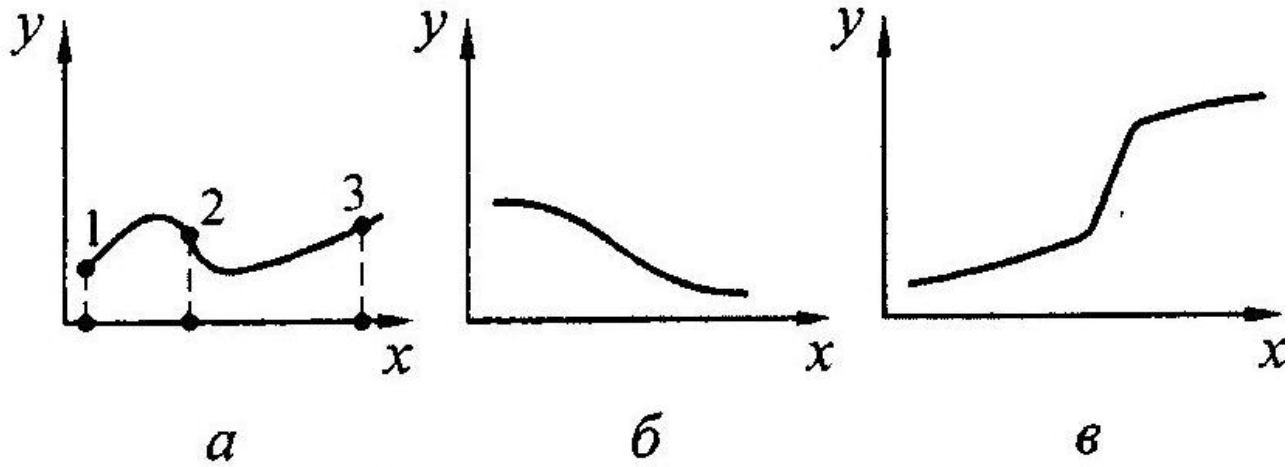

Рис. 7. Различные случаи неудовлетворительного описания зависимости моделями второго порядка

В первых двух случаях можно рекомендовать для описания объекта многочлены третьего и более высокого порядка.

Другим выходом, пригодным для всех трех случаев, является деление диапазона варьирования факторов на более мелкие поддиапазоны и изучение объекта для каждой из полученных областей отдельно.

4.5. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Полным факторным экспериментом (ПФЭ) называют такой эксперимент, при котором число уровней варьирования всех факторов одинаково и может включать в себя все возможные комбинации этих уровней.

Подробнее рассмотрим ПФЭ, в котором число уровней варьирования факторов два. Такой эксперимент обозначают 2^k, где k – количество варьируемых факторов. Число опытов эксперимента соответственно

$$N = 2^k . \qquad (65)$$

Пусть у нас два варьируемых фактора

$$V_{1\,min} \le V_1 \le V_{1\,max},\ V_{2\,min} \le V_2 \le V_{2\,max}.$$

Факторы варьируются на двух уровнях: верхнем и нижнем. Верхнему уровню соответствует максимальное значение фактора ($V_{i\,max}$), нижнему – минимальное значение фактора ($V_{i\,min}$).

Середина диапазона варьирования называется основным уровнем ($V_i^{(0)}$) и определяется по формуле

$$V_i^{(0)} = \frac{V_{i\,max} + V_{i\,min}}{2} . \qquad (66)$$

Интервал варьирования факторов

$$\Delta V_i = V_{i\,max} - V_i^{(0)} = V_i^{(0)} - V_{i\,min} . \qquad (67)$$

Для наглядности представим это графически (рис. 8).

На рис. 8 приведено геометрическое представление ПФЭ вида 2^2 в натуральных значениях факторов. Т.к. все факторы варьируются в определенном диапазоне, все точки, соответствующие определенным условиям опыта, не будут выходить за пределы прямоугольника 1234. Вершины прямоугольника соответствуют условиям опыта $2^2 = 4$. Множество точек, лежащих внутри и на границе этого прямоугольника называются **областью варьирования факторов**.

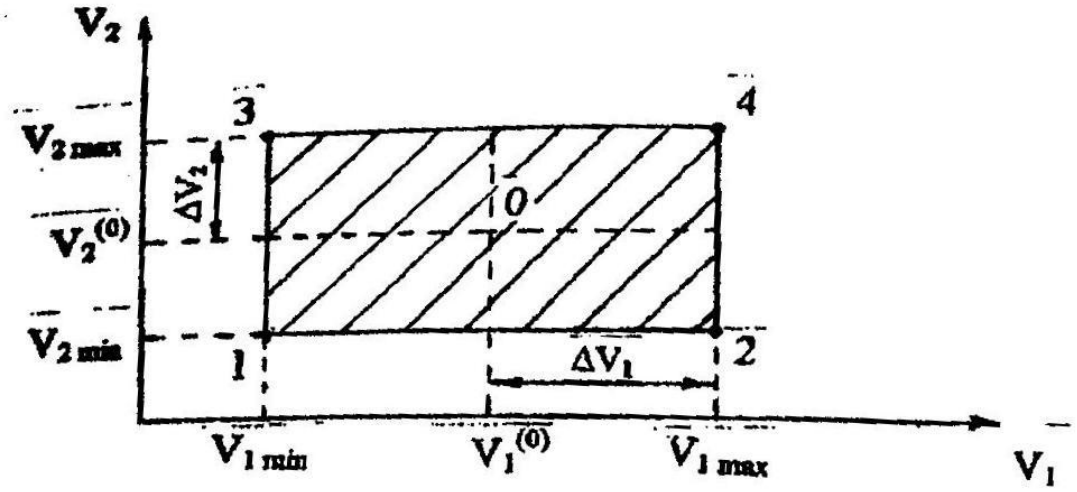

Рис. 8. Геометрическое представление ПФЭ вида $2^2 = 4$ в натуральных значениях факторов

Процедуру обработки данных эксперимента можно вести с использованием обозначенных натуральных значений факторов. Но она существенно упрощается, если вместо натуральных пользоваться кодированными, нормализованными значениями факторов. Связь между кодированными и натуральными значениями факторов выглядит следующим образом

$$X_i = \frac{V_i - V_i^{(0)}}{\Delta V_i}, \qquad (68)$$

где X_i – кодированное значение фактора,

V_i – текущее натуральное значение фактора.

Натуральному значению фактора на верхнем уровне $V_{i\ max}$ соответствует кодированное +1, на нижнем уровне $V_{i\ min}$ - -1.

Геометрическое представление ПФЭ в кодированных значениях факторов это уже квадрат (рис. 9).

В табл. 4 приведены условия опытов полного факторного эксперимента. Часть таблицы без последней колонки называется матрицей планирования.

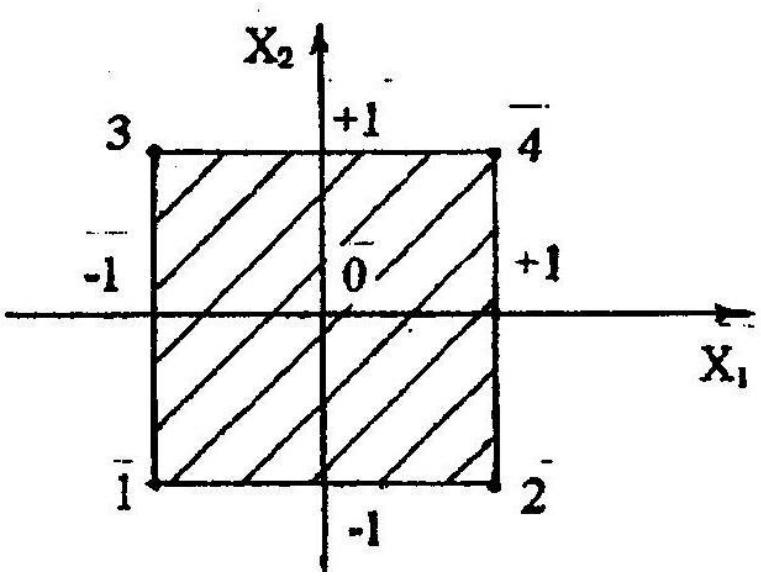

Рис. 9. Геометрическое представление ПФЭ вида $2^2 = 4$ в кодированных значениях факторов

Таблица 4

Полный двухфакторный эксперимент

№ опыта	Факторы		Функция отклика, У
	X_1	X_2	
1	-1	-1	$У_1$
2	+1	-1	$У_2$
3	-1	+1	$У_3$
4	+1	+1	$У_4$

Как видно из рис. 5, опыты, приведенные в табл. 4, соответствуют на факторной плоскости вершинам квадрата с центром в начале координат.

В табл. 5 приведены условия опытов полного трехфакторного эксперимента. Эти опыты соответствуют в факторном пространстве вершинам куба с центром в начале координат.

Из табл. 4, 5 видны основные принципы построения матриц планирования эксперимента:

уровни варьирования фактора чередуются от опыта к опыту;

частота смены уровней варьирования каждого последующего фактора вдвое меньше, чем у предыдущего;

если варьирование фактора начинается с нижнего уровня, то и все остальные факторы также начинают варьировать с нижнего уровня. (Начинать варьирование уровней можно с любого уровня (верхнего или нижнего) и с любого фактора).

Таблица 5

Полный трехфакторный эксперимент

№ опыта	Факторы			Функция отклика, У
	X_1	X_2	X_3	
1	-1	-1	-1	$У_1$
2	+1	-1	-1	$У_2$
3	-1	+1	-1	$У_3$
4	+1	+1	-1	$У_4$
5	-1	-1	+1	$У_5$
6	+1	-1	+1	$У_6$
7	-1	+1	+1	$У_7$
8	+1	+1	+1	$У_8$

Матрица ПФЭ вида 2^k в кодированных значениях обладает следующими характерными свойствами:

1. Симметричность относительно центра плана - алгебраическая сумма элементов столбца любого фактора равна нулю

$$\sum_{j=1}^{N} X_{ij} = 0 \quad i = 1,2,\ldots, k \quad j = 1,2,\ldots, N, \tag{69}$$

где X_{ij} – значение i-го фактора в j-ом опыте,

N – число опытов.

2. Нормированность – сумма квадратов элементов столбца любого фактора равна числу опытов

$$\sum_{j=1}^{N} X_{ij}^2 = N. \tag{70}$$

3. Ортоганальность – сумма почленных произведений любых двух столбцов матрицы равна нулю

$$\sum_{j=1}^{N} X_{ij} X_{uj} = 0 \quad i \neq u \quad u = 1,2,\ldots, k. \qquad (71)$$

Поэтому говорят, что матрица ПФЭ ортогональна. Это свойство позволяет вычислять коэффициенты регрессии по простым формулам независимо друг от друга.

Метод полного факторного эксперимента служит для получения математического описания процесса в виде отрезка ряда Тейлора (формула 72). При этом обычно ограничиваются линейной частью разложения и членами, содержащими произведения факторов в первой степени.

$$y = \beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\ldots+\beta_kx_k+\beta_{12}x_{12}+\ldots+\beta_{(k-1)k}\cdot x_{k-1}\cdot x_k+\ldots, \qquad (72)$$

Следует отметить, что коэффициенты искомого уравнения определяются на основе экспериментальных данных и, следовательно, несут на себе отпечаток погрешностей эксперимента. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, в уравнении вместо символов β, обозначающих истинные значения коэффициентов, пишут b, подразумевая под этим соответствующие выборочные оценки.

Итак, с помощью полного факторного эксперимента ищут математическое описание процесса в виде уравнения:

$$y = b_0+b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_kx_k+b_{12}x_{12}+\ldots+b_{(k-1)k}\cdot x_{k-1}\cdot x_k. \qquad (73)$$

Его называют уравнением регрессии, а входящие в него коэффициенты – коэффициентами регрессии.

Для случая двух варьируемых факторов уравнение (73) имеет вид:

$$y = b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_{12}x_1x_2 \qquad (74)$$

На основании полного факторного эксперимента вычисляют коэффициенты регрессии, пользуясь следующими формулами:

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j ,$$

$$b_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ij} y_j , \qquad (75)$$

$$b_{iu} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ij} x_{uj} y_j \ \ (\mathrm{i} \neq \mathrm{u}).$$

Некоторые из коэффициентов регрессии могут оказаться пренебрежимо малыми – незначимыми. Чтобы установить, значим коэффициент или нет, необходимо прежде всего вычислить оценку дисперсии, с которой он определялся. Дисперсия коэффициентов регрессии вычисляется по формуле

$$S_b^2 = \frac{S_y^2}{N} \qquad (76)$$

где S^2_y – дисперсия воспроизводимости.

Следует отметить, что с помощью ПФЭ все коэффициенты определяются с одинаковой погрешностью.

Принято считать, что коэффициент регрессии значим, если выполняется условие

$$\frac{|b|}{S_b} \geq t_{1-q/2}(f_y), \qquad (77)$$

где S_b – среднее квадратическое отклонение из дисперсии коэффициентов регрессии;

$t_{1-q/2}(f_y)$ – критерий Стьюдента.

В противном случае коэффициент регрессии не значим и соответствующий член можно исключить из уравнения.

Получив уравнение регрессии, следует проверить его адекватность, т.е. способность достаточно хорошо описывать поверхность отклика. Эту проверку осуществляют с помощью критерия Фишера, который представляет собой следующее отношение:

$$F_p = \frac{S^2_{ad}}{S^2_y}, \qquad (78)$$

где $S^2_{ад}$ – дисперсия адекватности.

$$S^2_{ad} = \frac{1}{N-B}\sum_{j=1}^{N}(y_j - \hat{y}_j)^2, \qquad (79)$$

где B – число коэффициентов регрессии искомого уравнения, включая и свободный член, оставшихся после отбрасывания незначимых;

y_j, $\hat{y}_j$ – экспериментальное и расчетное значение функции отклика в j-ом опыте;

N – число опытов.

Число степеней свободы дисперсии адекватности

$$f_{ад} = N - B \qquad (80)$$

Уравнение регрессии считается адекватным, если выполняется условие

$$F_p \le F_{1-q}(f_{ad}, f_y), \qquad (81)$$

где $F_{1-q}(f_{ад}, f_y)$ – табличное значение критерия Фишера.

Отметим, что найденное уравнение регрессии справедливо лишь в области варьирования факторов.

4.6. ДРОБНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

С увеличением количества факторов резко возрастает количество опытов полного факторного эксперимента (N = 2^4 = 16, N = 2^5 = 32, N = 2^6 = 64 и т.д.). Эксперименты в деревообрабатывающей промышленности, и особенно в производстве плитных материалов ДСтП, ДВП, фанеры дороги и трудоемки. Поэтому очень остро стоит проблема сокращения затрат времени, материалов и средств на проведение эксперимента. В таких случаях можно уменьшить объем

экспериментальных работ, воспользовавшись **методом дробных реплик** (его еще называют **дробный факторный эксперимент**).

Дробный факторный эксперимент содержит меньшее количество опытов, но точность математической модели в связи с этим ухудшается.

По результатам полного факторного эксперимента можно оценить свободный член регрессии b_0, линейные коэффициенты и все взаимодействия факторов. Однако во многих случаях нет необходимости оценки всех взаимодействий, т.к. ПФЭ ставят на начальных этапах эксперимента с целью получения линейной регрессии.

Для того, чтобы отыскать все линейные коэффициенты и проверить адекватность модели необходимое количество опытов N = k +2. С целью экономии средств на проведение эксперимента желательно чтобы число опытов не слишком превышало эту величину. Так начиная с k = 4 $N = 2^4 = 16$ $N^{/} = 4 + 2 = 6$ (т.е. 10 лишних опытов), k = 5 $N = 2^5 = 32$ $N^{/} = 5 + 2 = 7$ (т.е. 25 лишних опытов) и т.д.

Полный факторный эксперимент неэкономичный, даже если экспериментатора интересуют кроме линейных некоторые (но не все) взаимодействия факторов. Поэтому желательно сократить число опытов за счет той информации, которая не является существенной при построении линейной модели. При этом необходимо сохранить основные свойства матрицы ПФЭ: симметричность, нормированность, ортогональность.

Условиями для построения дробного факторного эксперимента (ДФЭ) является возможность пренебречь некоторыми или всеми взаимодействиями факторов.

Рассматриваемый метод заключается в том, что для нахождения математического описания процесса используется определенная часть полного факторного эксперимента: ½, ¼, 1/8 и т.д. Эти системы опытов называют дробными репликами. Например, пусть количество варьируемых факторов k = 4 и имеется возможность пренебречь 1-им парным взаимодействием. Количество опытов ПФЭ равно $N = 2^4 = 16$, а ДФЭ $N = 2^{4-1} = 8$. Т.е. количество опытов сократилось в 2 раза. Такой эксперимент называется **полурепликой.** Если пренебречь 2-мя парными взаимодействиями, то количество опытов ДФЭ $N = 2^{4-2} = 4$. Т.е. количество опытов сократилось в 4 раза и такой эксперимент называется **¼ репликой.**

Предположим, требуется найти коэффициенты уравнения регрессии

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3.$$

Если для этой цели воспользоваться полным трехфакторным экспериментом, то необходимо провести 8 опытов. Однако эту задачу можно решить и с помощью меньшего количества опытов. Например, возьмем матрицу полного двухфакторного эксперимента (табл. 6) и приравняем произведение x_1x_2 к фактору x_3. Коэффициенты регрессии:

$$b_0 = ¼ (y_1+y_2+y_3+y_4),$$
$$b_1 = ¼ (-y_1+y_2-y_3+y_4),$$
$$b_2 = ¼ (-y_1-y_2+y_3+y_4).$$

Таблица 6

Планирование вида 2^{3-1}

№ опыта	X_1	X_2	X_1X_2	X_3	Функция отклика, У
1	-1	-1	+1	+1	$У_1$
2	+1	-1	-1	-1	$У_2$
3	-1	+1	-1	-1	$У_3$
4	+1	+1	+1	+1	$У_4$

В табл. 6 столбцы для произведения x_1x_2 и фактора x_3 полностью совпадают. Поэтому коэффициенты b_{12} и b_3 не могут быть определены раздельно. С помощью формулы 71 может быть найдена только их сумма.

$$B_{12} + b_3 = ¼ (y_1-y_2-y_3+y_4).$$

Этот недостаток рассматриваемого плана является своеобразной «платой» за уменьшение общего количества опытов с восьми до четырех.

Такое планирование эксперимента, когда некоторые из факторов приравнивают к произведениям нескольких факторов, называется **планированием со смешиванием**. Его обозначают символом 2^{k-p}, где k – число варьируемых факторов, p – число факторов, приравненных к произведениям. С этой точки зрения в табл. 6 приведена матрица планирования вида 2^{3-1}. В этой таблице было использовано соотношение $x_3 = x_1x_2$, которое называют **генератором плана** или **генерирующим соотношением.**

Существует правило, позволяющее определить, какие коэффициенты регрессии определяются совместно при планировании со смешиванием. Рассмотрим это правило на конкретном примере.

Пример. Воспользуемся планированием типа 2^{5-2} и примем генерирующие соотношения

$$x_4 = -x_1x_2$$

$$x_5 = x_1x_2x_3.$$

Следует отметить, что выбор генерирующих соотношений в общем случае произволен. Однако он существенно влияет на характер совместных оценок коэффициентов регрессии.

Примем во внимание, что

$$x^2_i = 1 \ (x_i = \pm 1)$$

$$x_i \cdot 1 = x_i.$$

Умножим обе части генерирующих соотношений соответственно на x_4 и x_5

$$1 = - x_1x_2x_4$$

$$1 = x_1x_2x_3x_5.$$

Такое соотношение, в левой части которого стоит 1, а в правой некоторое произведение факторов, называется **определяющим контрастом**.

Перемножив их почленно, получим **обобщенный определяющий контраст** (ООК).

$$1 = -x_1x_2x_4 = x_1x_2x_3x_5 = -x_3x_4x_5$$

Умножая поочередно ООК на x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5, находим:

$$x_1 = -x_2x_4 = x_2x_3x_5 = -x_1x_3x_4x_5$$

$$x_2 = -x_1x_4 = x_1x_3x_5 = -x_2x_3x_4x_5$$

$$x_3 = -x_1x_2x_3x_4 = x_1x_2x_5 = -x_4x_5$$

$$x_4 = -x_1x_2 = x_1x_2x_3x_4x_5 = -x_3x_5$$

$$x_5 = -x_1x_2x_4x_5 = x_1x_2x_3 = -x_3x_4.$$

Из этих равенств следует, что коэффициенты регрессии при линейных членах оцениваются совместно с коэффициентами при парных, тройных и более взаимодействиях. Пренебрегая эффектами взаимодействия выше парных, получим оценки:

$$b_1 = \beta_1 - \beta_{24}$$

$$b_2 = \beta_2 - \beta_{14}$$

$$b_3 = \beta_3 - \beta_{45}$$

$$b_4 = \beta_4 - \beta_{12} - \beta_{35}$$

$$b_5 = \beta_5 - \beta_{34}.$$

Полученная система называется оценкой смешивания коэффициентов регрессии. Но сюда не вошли парные взаимодействия x_1x_3, x_1x_5, x_2x_3 и x_2x_5. Поэтому ООК умножим на эти взаимодействия:

$$x_1x_3 = -x_2x_3x_4 = x_2x_5 = -x_1x_4x_5$$

$$x_1x_5 = -x_2x_4x_5 = x_2x_3 = -x_1x_3x_4$$

$$x_2x_3 = -x_1x_3x_4 = x_1x_5 = -x_2x_4x_5$$

$$x_2x_5 = -x_1x_4x_5 = x_1x_3 = -x_2x_3x_4.$$

Пренебрегая тройными взаимодействиями, получаем оценки:

$$b_{13} = \beta_{13} + \beta_{25}$$

$$b_{15} = \beta_{15} + \beta_{23}$$

$$b_{23} = \beta_{23} + \beta_{15}$$

$$b_{25} = \beta_{25} + \beta_{13}$$

$$b_{13} = b_{25},\ b_{15} = b_{23}.$$

Следовательно, математическая модель в этом эксперименте может быть получена в виде:

$$y = b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4+b_5x_5+b_{13}x_1x_3+b_{15}x_1x_5$$

или

$$y = b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4+b_5x_5+b_{25}x_2x_5+b_{23}x_2x_3.$$

Матрица планирования будет содержать $N = 2^{5-2}$ опытов, приведенных в табл. 7.

Таблица 7

Матрица ДФЭ вида 2^{5-2}

№ опыта	X_1	X_2	X_3	$X_4=-X_1X_2$	$X_5=X_1X_2X_3$	Функция отклика, У
1	-1	-1	-1	-1	-1	$У_1$
2	+1	-1	-1	+1	+1	$У_2$
3	-1	+1	-1	+1	+1	$У_3$
4	+1	+1	-1	-1	-1	$У_4$
5	-1	-1	+1	-1	+1	$У_5$
6	+1	-1	+1	+1	-1	$У_6$
7	-1	+1	+1	+1	-1	$У_7$
8	+1	+1	+1	-1	+1	$У_8$

Если будут заданы другие генерирующие соотношения, получим другие матрицы планирования и, соответственно, математические модели с другими эффектами взаимодействия.

Поскольку матрицы ДФЭ обладают теми же свойствами, что и матрица ПФЭ, расчет коэффициентов регрессии, проверка значимости коэффициентов и адекватности уравнения регрессии, полученного по результатам ДФЭ, проводится с применением тех же формул и по тем же правилам, что и для ПФЭ.

4.7. РЕАЛИЗАЦИЯ ПФЭ И ДФЭ ПРИ ОТКЛОНЕНИИ УРОВНЕЙ ФАКТОРОВ ОТ ЗАДАННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

При реализации запланированного эксперимента действительные уровни факторов не всегда совпадают с уровнями, заданными матрицей плана. В деревообработке такая ситуация встречается часто из-за невозможности обеспечить высокую точность фиксирования непрерывно изменяющихся факторов, особенно в производственных условиях.

Приведенные ранее формулы для расчета коэффициентов регрессии в этом случае теряют силу, но их можно скорректировать с учетом отклонений фактических значений факторов от запланированных.

Пусть ставятся ПФЭ или ДФЭ.

X_{ij} – запланированный уровень i-го фактора в j-м опыте (в кодированных обозначениях);

$\tilde{X}_{ij}$ - действительный уровень этого фактора;

ε_{ij} – ошибка попадания на заданный уровень.

$$E_{ij} = \tilde{X}_{ij} - X_{ij} \qquad (82)$$

Если ошибки случайны, не коррелируют ни между собой, ни с намеченными уровнями факторов, то коэффициенты регрессии можно рассчитать по формулам

$$b_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{ij} y_j + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_{ij} y_j}{N + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_{ij}^2} = \frac{\sum_{j=1}^{N} \tilde{x}_{ij} y_j}{N + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_{ij}^2} \qquad (83)$$

Дисперсии для скорректированных коэффициентов регрессии вычисляют по формуле

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_y^2}{N + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_{ij}^2}. \qquad (84)$$

4.8. В-ПЛАН

ПФЭ и ДФЭ позволяют получить линейную зависимость выходной величины от каждого из варьируемых факторов. Такие планы называют планами первого порядка. Для большинства процессов деревообработки линейное описание оказывается слишком грубым, поэтому переходят к планам второго порядка. Планами второго порядка называют такие планы многофакторного эксперимента, с помощью которых можно получить математическое описание объектов в виде полинома второй степени. Уравнение регрессии в общем виде:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2 + \sum_{i<u, i \neq u} b_{iu} x_i x_u \,, \qquad (85)$$

где b_{ii} – коэффициенты регрессии для факторов во второй степени,

k – количество варьируемых факторов.

Уравнение регрессии (85) для трех факторов имеет вид:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{11} x^2_1 + b_{22} x^2_2 + b_{33} x^2_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3.$$

Рассмотрим подробнее два плана второго порядка: В-план и униформ-ротатабельный план.

В В-планах второго порядка каждый фактор V_i варьируется на трех уровнях (верхнем, нижнем и основном). В кодированных значениях +1, -1, 0. Связь натуральных и кодированных значений факторов задается формулой 65. В-план состоит из точек ПФП и звездных точек. **Звездной точкой** называются условия опыта, в котором один из факторов принимает нормализованное обозначение ±1, а остальные фиксируются на 0 (основной уровень).

Рассмотрим графическое представление В-плана для двух факторов B_2.

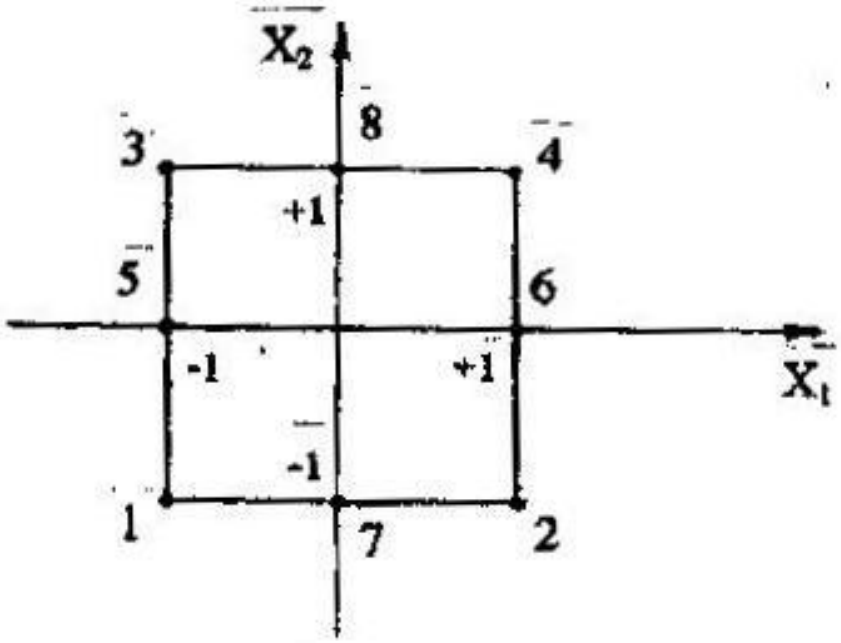

Рис. 10. Геометрическое представление В-плана для двух факторов

Как видно из рис. 10, опыты ставятся в точках 1,2,3,4 (вершины квадрата), которые соответствуют ПФЭ $2^2 = 4$, и в звездных точках 5,6,7,8, которые представляют собой центры граней квадрата.

Геометрическим представлением В-плана для трех факторов будет куб.

Таким образом, общее число опытов В-плана

$$N = 2^k + 2k \ , \qquad (86)$$

где k – количество варьируемых факторов.

Кроме того, при числе варьируемых факторов $k \geq 5$ можно построить разновидность В-плана, поставив полуреплику 2^{k-1} и добавив к ней 2k звездных точек. Такой план называют В-планом с полурепликой.

В табл. 8 приведена матрица планирования В-плана для двух факторов (B_2).

Таблица 8

Матрица планирования плана B_2

№ опыта	X_1	X_2
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1
5	-1	0
6	+1	0
7	0	-1
8	0	+1

Опыты ПФЭ или ДФЭ, входящие в состав В-плана (опыты 1-4 табл. 8), называют ортогональной частью.

План второго порядка, содержащий в своем составе план первого порядка, называют **композиционным**. Очевидно, В-план служит примером композиционного плана. Свойство композиционности очень удобно для исследователя, оно позволяет планировать и проводить эксперимент поэтапно. На первом этапе можно поставить ПФЭ или ДФЭ, и если линейная модель, полученная в ходе эксперимента, окажется неадекватной, можно дополнительно поставить опыты в звездных точках. Вся совокупность опытов составит теперь В-план второго порядка, обработка его результатов позволит получить уже квадратичную модель.

Как видно из рис. 6, все опыты В-плана расположены на границах области варьирования факторов. Из-за этого точность регрессионной модели вблизи центра плана оказывается не слишком высокой. В этом случае В-план может быть дополнен одним или несколькими точками в центре плана. Эти опыты улучшают точность модели в окрестности центра плана и дают

возможность оценить дисперсию воспроизводимости, если остальные опыты не дублировались.

Коэффициенты регрессии В-плана определяются по формулам:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= T_1\sum_{j=1}^{N} y_j - T_2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 y_j\ ;\\
b_i &= T_3\sum_{j=1}^{N} x_{ij} y_j;\\
b_{ii} &= T_4\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 y_j + T_5\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 y_j - T_2\sum_{j=1}^{N} y_j;\\
b_{iu} &= T_6\sum_{j=1}^{N} x_{ij} x_{uj} y_j, (i \neq u),
\end{aligned}
\qquad (87)
$$

где b_0 – свободный член;

b_i – линейные коэффициенты регрессии, (i = 1,2,…, k);

b_{ii} – квадратичные коэффициенты регрессии, (i = 1,2,…, k);

b_{iu} – коэффициенты при парных взаимодействиях, $i \neq u$;

T_i – коэффициенты, значения которых указаны в приложении 6.

Дисперсии коэффициентов регрессии определяются по формулам:

$$
\begin{aligned}
S^2(b_0) &= \left(T_1 / n\right) S_y^2;\\
S^2(b_i) &= \left(T_3 / n\right) S_y^2;\\
S^2(b_{ii}) &= \left[\ T_4 + T_5 / n\right] S_y^2;\\
S^2(b_{iu}) &= \left(T_6 / n\right) S_y^2,
\end{aligned}
\qquad (88)
$$

где n – число дублированных опытов в каждой серии (при отсутствии дублированных опытов n = 1).

4.9. УНИФОРМ-РОТАТАБЕЛЬНЫЙ ПЛАН

Это один из наиболее распространенных планов. Его чаще всего применяют в тех случаях, когда необходимо найти оптимальное значение выходной величины.

Свойство ротатабельности плана означает, что точность математической модели одинакова во всех точках факторного пространства, находящихся на одинаковом расстоянии от центра эксперимента.

Свойство униформности в сочетании с ротатабельностью означает постоянство дисперсии воспроизводимости в некоторой окрестности центра плана.

Таким образом, униформ-ротатабельный план (УРП) с хорошей точностью описывает объект вблизи центра плана и со значительно большей погрешностью на границах области варьирования факторов.

УРП является композиционным планом, который состоит из трех частей и содержит:

1) точки ПФЭ или ДФЭ (при количестве варьируемых факторов $k \geq 5$) – ортогональная часть плана в количестве 2^k или 2^{k-1};
2) звездные точки в количестве 2k;
3) центральные точки n_0, число которых выбирается в зависимости от количества варьируемых факторов исходя из требования униформности плана.

Общее количество опытов УРП

$$N = 2^k + 2k + n_0 \quad \text{(если в ортогональной части ПФЭ)} \qquad (89)$$
$$N = 2^{k-1} + 2k + n_0 \quad \text{(если в ортогональной части ДФЭ)}$$

Характеристика УРП приведена в табл. 9.

Каждый фактор в УРП варьируется на пяти уровнях: $-\alpha$, -1, 0,+1, $+\alpha$ в кодированных значениях факторов, где α - звездное плечо. Величина звездного плеча определяется по формуле

$$\alpha = 2^{k/4} \quad \text{(в ортогональной части ПФЭ)} \qquad (90)$$
$$\alpha = 2^{(k-1)/4} \quad \text{(в ортогональной части ДФЭ)}$$

Значения звездного плеча для k = 2-5 приведены в табл. 9.

Таблица 9

Примеры униформ-ротатабельных планов

Число факторов	Ортогональная часть		Звездные точки		Число центр. опытов	Общее число опытов
	вид плана	число опытов	α	число опытов		
2	ПФЭ	4	1,41	4	5	13
3	ПФЭ	8	1,68	6	6	20
4	ПФЭ	16	2	8	7	31
5	ПФЭ	32	2,38	10	10	52
5	ДФЭ 2^{5-1}	16	2	10	6	32

При переходе от кодированных факторов к натуральным, следует иметь в виду, что каждый фактор варьируется в диапазоне от $-\alpha$ до $+\alpha$. Поэтому уровню $-\alpha$ соответствует минимальное значение фактора $V_{i\ min}$, уровню $+\alpha$ - максимальное значение фактора $V_{i\ max}$. Расчет натуральных значений факторов на остальных уровнях выполняется по следующим формулам:

$$\text{уровень 0} \qquad V_i^{(0)} = \frac{V_{i\max} + V_{i\min}}{2},$$

$$\text{уровень –1} \qquad V_i^{(-1)} = V_i^{(0)} - \frac{V_i^{(+\alpha)} - V_i^{(0)}}{\alpha}, \qquad (91)$$

$$\text{уровень +1} \qquad V_i^{(+1)} = V_i^{(0)} + \frac{V_i^{(+\alpha)} - V_i^{(0)}}{\alpha}.$$

Интервал варьирования

$$\Delta V_i = \frac{V_i^{(+\alpha)} - V_i^{(0)}}{\alpha}. \qquad (92)$$

Формула перехода от кодированных значений факторов в натуральные

$$x_i = \frac{V_i - V_i^{(0)}}{\Delta V_i}. \qquad (93)$$

Геометрическое представление УРП для двух варьируемых факторов приведено на рис. 11.

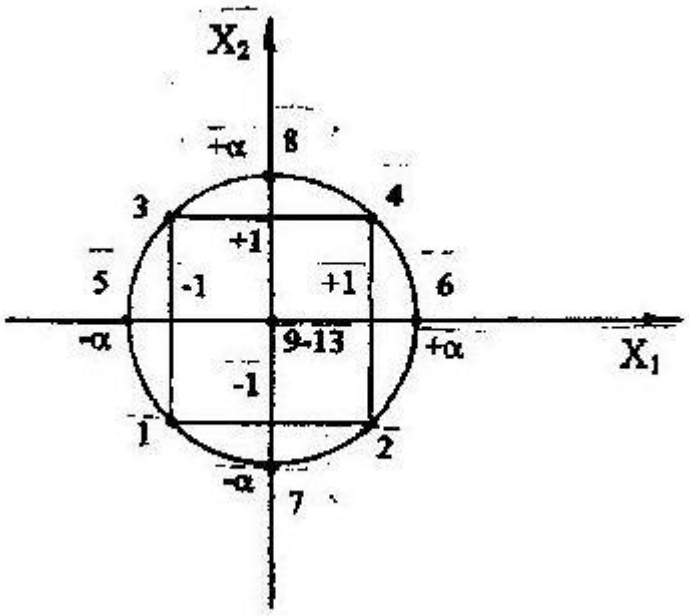

Рис. 11. Геометрическое представление УРП k = 2

Для двух факторов геометрическое представление УРП дает нам круг радиусом α и вписанного в него квадрата для значений факторов на уровнях ± 1 с центром в пересечении координат, где расположена центральная точка. Для трех варьируемых факторов геометрическое представление УРП будет в виде шара.

Матрица планирования УРП для двух факторов приведена в табл.10.

Коэффициенты регрессии при УРП рассчитываются по следующим формулам:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= T_1\sum_{j=1}^{N} y_j - T_2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} y_j x_{ij}^2;\\
b_i &= T_3\sum_{j=1}^{N} y_j x_{ij};\\
b_{ii} &= T_4\sum_{j=1}^{N} y_j x_{ij}^2 + T_5\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} y_j x_{ij}^2 - T_2\sum_{j=1}^{N} y_j;\\
b_{ij} &= T_6\sum_{j=i}^{N} y_j x_{ij} x_{uj}, (i,u = 1,2,\ldots,k;\ j = 1,2,\ldots,N; i \neq u),
\end{aligned}
\qquad (94)
$$

где x_{ij} – кодированное значение i-го фактора в j-м опыте;

y_j – значение выходной величины в j-м опыте;

T_i – коэффициенты, зависящие от числа варьируемых факторов и плана эксперимента в ортогональной части, значения которых указаны в прил. 6.

Таблица 10

Матрица УРП k = 2

№ опыта	Фактор		Функция отклика, У	Части плана
	X_1	X_2		
1	-1	-1	$У_1$	Ортогональная часть
2	+1	-1	$У_2$	
3	-1	+1	$У_3$	
4	+1	+1	$У_4$	
5	-1,41	0	$У_5$	Звездные точки
6	+1,41	0	$У_6$	
7	0	-1,41	$У_7$	
8	0	+1,41	$У_8$	
9	0	0	$У_9$	Центральные точки
10	0	0	$У_{10}$	
11	0	0	$У_{11}$	
12	0	0	$У_{12}$	
13	0	0	$У_{13}$	

Дисперсии коэффициентов регрессии оцениваются по следующим формулам:

$$
\begin{aligned}
S^2(b_0) &= T_1 S_y^2;\\
S^2(b_i) &= T_3 S_y^2;\\
S^2(b_{ii}) &= (T_4 + T_5) S_y^2;\\
S^2(b_{ij}) &= T_6 S_y^2,
\end{aligned}
\qquad (95)
$$

где S^2_y – дисперсия воспроизводимости.

При равномерном дублировании опытов справедливы формулы (81).

Значимость коэффициентов регрессии определяется с помощью критерия Стьюдента. Для этого вычисляют (для каждого коэффициента) величину

$$t = \frac{|b|}{S(b)}, \qquad (96)$$

где S(b) – среднее квадратическое отклонение, найденное из дисперсии коэффициентов регрессии, и сравнивают с критерием Стьюдента. Если выполняется условие

$$t \le t_{1-q/2}(f_y),$$

то коэффициент регрессии незначим и его отбрасывают. Здесь число степеней свободы f_y, при котором была найдена дисперсия воспроизводимости.

Дисперсия адекватности

$$S^2_{ad} = \frac{1}{f_{ad}} \sum_{j=1}^{N-n_0} (y_j - \hat{y}_j)^2 + n_0 (\bar{y}_0 - \hat{y}_0)^2, \quad f_{ад} = N - n_0 - B + 1, \qquad (97)$$

где N – число опытов в матрице планирования УРП;

n_0 – число опытов в центральных точках УРП;

B – число коэффициентов регрессии, оставшихся после отбрасывания незначимых;

y_j – экспериментальное значение выходной величины;

$\hat{y}_j$ – расчетное значение выходной величины;

$\bar{y}_0$ – среднее экспериментальное значение выходной величины, подсчитанное по опытам в центральных точках;

$\hat{y}_0$ – расчетное значение выходной величины при нулевых значениях факторов.

Вычисляют отношение

$$F = \frac{S_{ad}^2}{S_y^2} \qquad (98)$$

и сравнивают с критерием Фишера. Если выполняется условие

$$F < F_{1-q}(f_{ad}, f_y), \qquad (99)$$

то найденная модель считается адекватной.

5. ОПТИМИЗАЦИЯ

5.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОПТИМИЗАЦИИ

В предыдущей главе были рассмотрены методы построения экспериментально-статистических моделей в виде уравнений регрессии. Нахождение математической модели в деревообработке редко является конечной целью исследователя. Часто необходимо установить условия (определить значения факторов), при которых достигается экстремум выходной величины.

Величина, для которой определяют экстремальное, значение называется **критерием** или **параметром оптимизации.** Выбор параметра оптимизации является одним их ответственных этапов при решении задач научных исследований.

Параметры оптимизации делятся на:

- экономические (прибыль, себестоимость, рентабельность, максимальный доход и др.);
- технико-экономические (производительность, ассортимент выпускаемой продукции, коэффициент полезного действия и др.);
- технологические (выход продукции, ее свойства и др.);
- прочие (эстетические, психологические, статистические).

Параметр оптимизации должен быть:

1. эффективным с точки зрения достижения цели, т.е. он должен оценивать эффективность функционирования системы в определенном заранее выбранном смысле.

По мере накопления знаний об объекте исследований изменяются и требования эффективности. Так, например, при выпуске продукции, по мере достижения цели нас интересует на первом этапе объем выпускаемой продукции, на втором ее качество, а на третьем себестоимость.

2. универсальным, т.е. способным всесторонне характеризовать объект.

3. количественным, т.е. выражаться однозначно некоторым числом. Например, температура прессования, скорость подачи могут быть измерены соответствующими приборами.

4. эффективным в статистическом смысле, т.е. он должен определяться с возможно большей точностью и легко вычисляться.

5. однозначным, т.е. заданному набору входных переменных должно соответствовать одно с точностью до ошибки опыта, значение параметра объекта.

6. параметр оптимизации должен иметь физический смысл.

Качество процесса чаще всего характеризуется несколькими функциями отклика. Однако обычно невозможно найти такое сочетание значений влияющих факторов, при котором одновременно достигаются экстремумы всех интересующих экспериментатора функций отклика. Например, максимальная производительность оборудования и минимальная себестоимость продукции обычно достигаются при различных технологических режимах.

Важно отметить, что как влияющие факторы, так и функции отклика могут изменяться только в определенных пределах. Следовательно, оптимизацию процессов, как правило, осуществляют в условиях ограничений на влияющие факторы и функции отклика.

Оптимизация процесса представляет собой целенаправленный поиск значений влияющих факторов, при которых достигается экстремум критерия оптимальности (с учетом ограничений, наложенных на все влияющие факторы и функции отклика).

Если для объекта или процесса уже получена адекватная регрессионная модель, то для отыскания оптимальных условий имеет смысл воспользоваться ею. Если же модель объекта отсутствует, то оптимальные условия

целесообразно отыскать прямым экспериментом, что гораздо проще, чем первоначальное построение модели и оптимизация на ее основе.

Большинство методов экспериментальной оптимизации основано на принципе последовательного проведения экспериментов, когда условия проведения очередной серии опытов определяются каждый раз по результатам предыдущей серии.

5.2. МЕТОД КРУТОГО ВОСХОЖДЕНИЯ

Идею метода поясним, обращаясь к геометрической интерпретации. Для простоты рассмотрим случай двух варьируемых факторов.

Выходную величину У будем рассматривать как функцию двух переменных $У = f(V_1, V_2)$, где V_1, V_2 – варьируемые факторы.

Эту функцию, называемую функцией отклика, можно изобразить в виде некоторой поверхности отклика (рис. 12). Если эту поверхность рассечь некоторой плоскостью, параллельной факторной плоскости $V_1 0 V_2$, то проекция этого сечения дает некоторую замкнутую линию, которая называется линией уровня.

Таких сечений и, следовательно, линий уровня можно получить сколько угодно. Эти линии уровня обладают следующим свойством: всем точкам линии уровня соответствуют одинаковые значения выходной величины. Очевидно, что меньшему значению У (для случая приведенного на рис. 12) будет соответствовать больший контур линии уровня. И наоборот, при увеличении У контур уменьшается, и при $У = У_{max}$ этот контур вырождается в точку (на рис.12 точка А). Координаты этой точки и есть искомые значения факторов $V_{1опт}$ и $V_{2опт}$.

Если бы была известна зависимость $У = f(V_1, V_2)$, то найти оптимальное значение факторов не составило бы труда. Но такая зависимость, как правило, неизвестна. Поэтому для нахождения области оптимума выполняют серию опытов, условия реализации которых выбирают таким образом, чтобы определить направление, в котором надо двигаться для достижения этой области. Другими словами, выбирают такую стратегию, которая позволяет осуществить целенаправленный поиск экстремума (максимума или минимума) функции отклика.

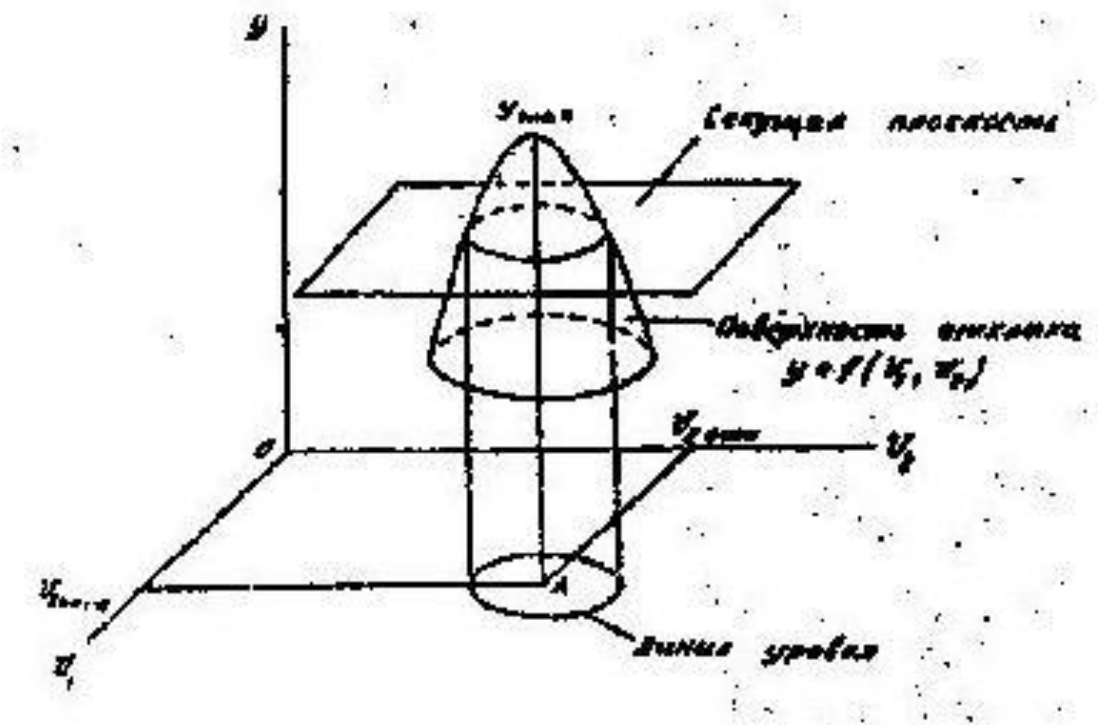

Рис. 12. Схема сечения поверхности отклика секущей плоскостью

В методе крутого восхождения предлагается одновременное варьирование всех факторов. При этом на основе результатов опытов стараются определить то направление, в котором функция отклика возрастает быстрее всего (для случая поиска максимума) или уменьшается (для случая поиска минимума). Это направление называется направлением градиента функции отклика. Направление градиента перпендикулярно соответствующей линии уровня.

Оценить направление градиента можно на основе математической модели объекта, которую можно найти, поставив ПФЭ или ДФЭ в некоторой области факторного пространства. Двигаясь по направлению градиента, мы попадаем в другую область факторного пространства, в которой следует поставить новый ПФЭ или ДФЭ, найти новую математическую модель объекта, определить новое направление градиента и т.д. Такая процедура повторяется многократно до тех пор, пока не попадем в область оптимума.

Движение к оптимуму начинают из центра плана, который использовался для получения математического описания функции отклика. Значения факторов на каждом новом шаге находят по формулам:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1^{(0)} + \lambda b_1 \Delta_1 \\ V_2 &= V_2^{(0)} + \lambda b_2 \Delta_2 \\ V_k &= V_k^{(0)} + \lambda b_k \Delta_k, \end{aligned} \qquad (100)$$

где $V_i^{(0)}$ – значение фактора в исходной точке (i = 1,2,…, n),

λ - коэффициент, определяющий длину шага в направлении экстремума,

b_i – коэффициенты уравнения регрессии, полученного после реализации опытов ПФЭ и ДФЭ,

Δ_i – интервалы варьирования факторов.

Так осуществляется оптимизация по методу крутого восхождения. Если же ищется минимум функции, то новые значения факторов находят из предыдущих путем вычитания $\lambda b_1 \Delta_1$ (формула 93). Такой способ оптимизации называют методом наискорейшего спуска.

Движение к оптимуму прекращают в следующих случаях:

1. Значение (одного или нескольких) факторов или функций отклика вышли на границы допустимых значений.
2. Достигнут экстремум критерия оптимальности. Признаком достижения области оптимума является незначимость всех линейных коэффициентов регрессии на одном из этапов.

Для детального описания области оптимума обычно реализуют план второго порядка в окрестности лучшей достигнутой точки.

Поясним описанную стратегию на примере. Пусть в двухфакторном пространстве V_1 и V_2 имеется некоторая функция отклика $У = f(V_1, V_2)$, которая, вообще говоря, нам неизвестна. Пусть эта функция отклика дает нам линию уровней $У_1$, $У_2$, $У_3$, $У_4$,…, причем $У_{max} > У_1 > У_2 > У_3 > \ldots$ (рис. 13). Поиск области оптимума начнем с того, что проведем в окрестности какой-нибудь точки ($V_1^{(1)}$, $V_2^{(1)}$) 1-ю серию ПФЭ, в которой натуральные значения факторов $V_1^{(1)}$ и $V_2^{(1)}$ на основном (нулевом) уровне. Примем для определенности диапазон варьируемых факторов равным $40 \le V_1 \ge 80$, $20 \le V_2 \ge 40$, а значение выходной величины $У \rightarrow \max$.

За основной уровень факторов 1-й серии опытов ПФЭ и их шаг варьирования примем значения $V_1^{(1)} = 60$, $\Delta_1 = 5$, $V_2^{(1)} = 30$, $\Delta_2 = 2$. Тогда значения факторов на уровнях –1 и +1 составят

$V_1^{(-1)} = V_1^{(1)} - \Delta_1 = 55$, $V_1^{(+1)} = V_1^{(1)} + \Delta_1 = 65$,

$V_2^{(-1)} = V_2^{(1)} - \Delta_2 = 28$, $V_2^{(+1)} = V_2^{(1)} + \Delta_2 = 32$.

Матрица планирования 1-й серии опытов ПФЭ приведена в табл. 11. На рис. 13 эти опыты обозначены точками 1,2,3,4.

Таблица 11

Проведение опытов по методу крутого восхождения

Вид опытов	Основной уровень	Значения факторов				Коэффициенты регрессии		
		№ опыта	V_1	V_2	У	b_0	B_1	b_2
1 серия ПФЭ	$V_1 = 60$ $V_2 = 30$	1	55	28	0,3	0,42	0,0575	0,0675
		2	65	28	0,4			
		3	55	32	0,42			
		4	65	32	0,55			
ОКВ	$\lambda_1 = 30$ $\lambda_2 = 60$ $\lambda_3 = 45$	5	68,6	34	0,64			
		6	77,3	38,1	0,68			
		7	72,9	36,1	0,78			
2 серия ПФЭ	$V_1 = 72,9$ $V_2 = 36,1$	8	67,9	34,1	0,65	0,695	- 0,03	0,055
		9	77,9	34,1	0,63			
		10	67,9	38,1	0,8			
		11	77,9	38,1	0,7			
ОКВ	$\lambda_1 = 22$ $\lambda_2 = 35$	12	76,2	38,5	0,81			
		13	78,2	40	0,88			
3 серия ПФЭ	$V_1 = 78,2$ $V_2 = 40$	14	73,2	40	0,86	0,87	0,005	0
		15	83,2	40	0,88			

Реализация этих опытов дала значения выходной величины $У_1 = 0,3$; $У_2 = 0,4$; $У_3 = 0,42$; $У_4 = 0,55$. Коэффициенты регрессии подсчитываем по формулам:

$b_0 = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) / 4$

$b_1 = (-y_1 + y_2 - y_3 + y_4) / 4$

$b_2 = (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4) / 4$

и математическую модель в 1-й серии опытов получаем в виде

$$y(1) = 0{,}42 + 0{,}0575x_1 + 0{,}0675x_2.$$

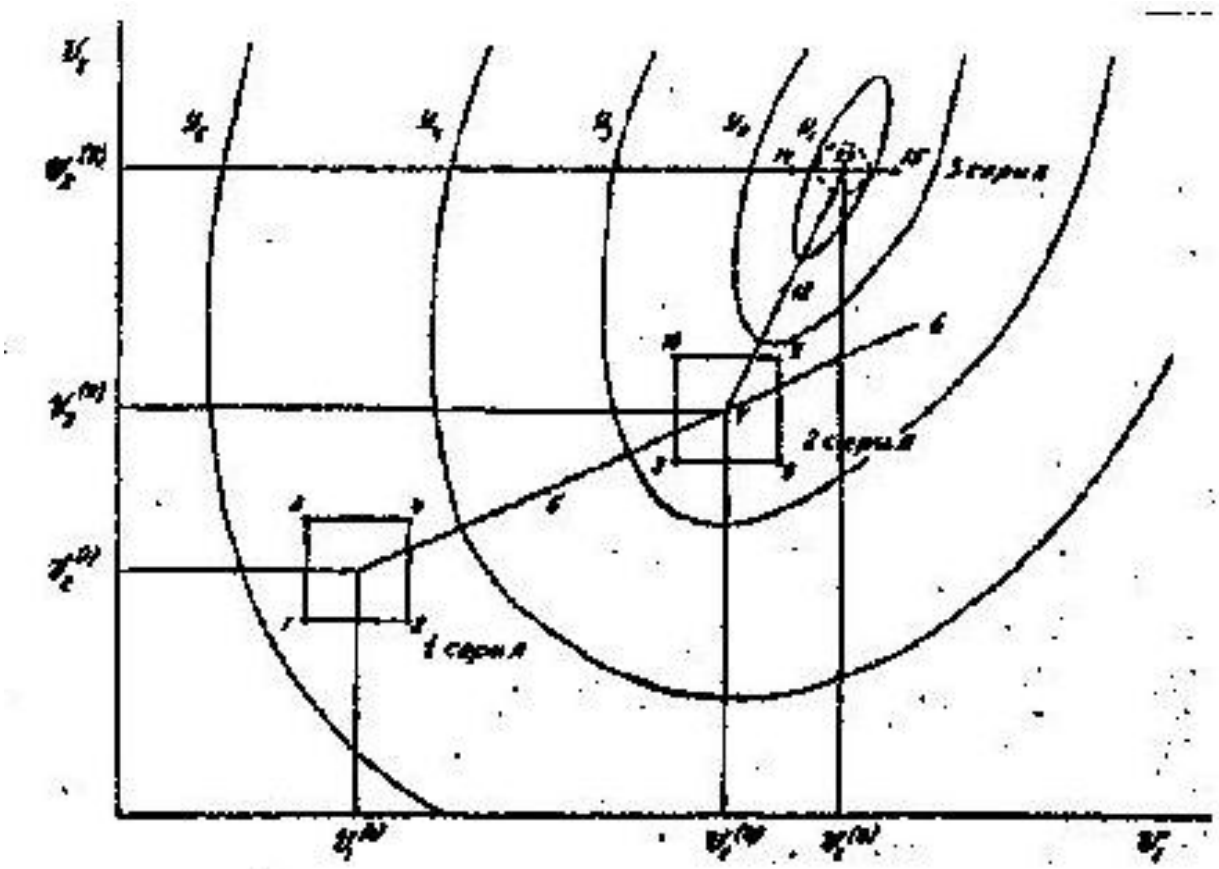

Рис. 13. Поиск области оптимума методом крутого восхождения

Допустим, что коэффициенты регрессии значимы. Направление градиента оценим, вычислив координаты следующего опыта по формулам (93). Определенных правил выбора λ нет. Поступим следующим образом. В качестве наименьшего значения λ выберем такую величину, при которой значение одного из факторов V_1 или V_2 несколько выходит за пределы диапазона его варьирования в ПФЭ. Пусть $\lambda_1 = 30$. Тогда по формуле 93 имеем:

$V_1 = 60 + 30 \times 5 \times 0{,}0575 = 68{,}6;$

$V_2 = 30 + 30 \times 2 \times 0{,}0675 = 34$ (5-й опыт).

Эти величины несколько больше значений V_1 и V_2 на уровне +1 (табл.11).

Второе значение λ_2 выберем в два раза больше λ_1 ($\lambda_2 = 60$). Тогда имеем:

$V_1 = 60 + 60 \times 5 \times 0{,}0575 = 77{,}3;$

$V_2 = 30 + 60 \times 2 \times 0{,}0675 = 38{,}1$ (6-й опыт).

Можно выбрать и третье значение λ_3, как среднее между двумя предыдущими $\lambda_3 = 45$. Тогда имеем:

$V_1 = 60 + 45 \times 5 \times 0{,}0575 = 72{,}9$;

$V_2 = 30 + 45 \times 2 \times 0{,}0675 = 36{,}1$ (7-й опыт).

В найденных точках ставим опыты, которые называются опытами крутого восхождения (ОКВ). Допустим, что эти опыты дали результаты $У_5 = 0{,}64$; $У_6 = 0{,}68$; $У_7 = 0{,}78$. ОКВ дали значения У большие, чем в 1-й серии опытов, направление градиента нами оценено правильно. Из последних 3-х опытов наибольшее значение получено в 7-м опыте $У_7 = 0{,}78$. Здесь необходимо оценить новое направление градиента, для чего выполним 2-ю серию опытов ПФЭ. Основным уровнем факторов этой серии примем точки 7-го опыта: $V_1^{(2)} = 72{,}9$; $V_2^{(2)} = 36{,}1$. Соответствующие значения этих факторов на уровнях –1 и +1 составляют:

$$V_1^{(-1)} = 67{,}9,\ V_1^{(+1)} = 77{,}9,$$
$$V_2^{(-1)} = 34{,}1,\ V_2^{(+1)} = 38{,}1.$$

Реализация опытов 2-й серии ПФЭ (опыты 8-11 табл.11) дали значения $У_8 = 0{,}65$; $У_9 = 0{,}63$; $У_{10} = 0{,}8$; $У_{11} = 0{,}7$. Расчет коэффициентов регрессии дал математическую модель в виде

$$y(2) = 0{,}695 - 0{,}03x_1 + 0{,}055x_2.$$

Допустим, проверка значимости показала, что коэффициенты регрессии значимы. Тогда определим новое направление градиента, которое оценим, вычислив координаты следующего опыта по формуле 93. Значение коэффициента λ выберем таким, чтобы фактор V_2 несколько превышал большее значение во 2-й серии ПФП. Примем $\lambda_2 = 22$. Тогда:

$V_1 = 72{,}9 + 22 \times 5 \times 0{,}03 = 76{,}2$;

$V_2 = 36{,}1 + 22 \times 2 \times 0{,}055 = 38{,}5$ (12-й опыт).

Второе значение коэффициента λ примем таким, чтобы значение V_2 не превышало наибольшее значение во всем эксперименте ($V_2 = 40$). Примем $\lambda_2 = 35$. Тогда

$V_1 = 72{,}9 + 35 \times 5 \times 0{,}03 = 78{,}2$;

$V_2 = 36{,}1 + 35 \times 2 \times 0{,}055 = 40$ (13-й опыт).

Реализация ОКВ в найденных точках дала результаты $У_{12} = 0{,}81$; $У_{13} = 0{,}88$. Значения выходной величины возросли. Можно продолжить по

направлению градиента, но фактор V_2 уже достиг наибольшего установленного значения. Следовательно, в последующих опытах варьировать можно лишь фактор V_1, основной уровень которого равен $V_1^{(3)} = 78,2$.

В 3-й серии опытов (однофакторный эксперимент) определим уровни –1 и +1 фактора V_1: $V_1^{(-1)} = 73,2$, $V_1^{(+1)} = 83,2$. Матрица содержит 2 опыта, реализация их дала результаты $У_{13} = 0,86$; $У_{14} = 0,88$. Математическая модель имеет вид

$y(3) = 0,87 - 0,005x_1$.

Проверка значимости показала, что фактор x_1 незначим. Это говорит о том, что дальнейшее варьирование факторов ничего не изменит в результатах опытов и таким образом мы достигли области оптимума, которая на рис. 9 обозначена штриховой линией. Наибольшее значение выходной величины составило $У_{max} = 0,88$, а оптимальные значения факторов равны $V_{1опт} = 78,2$; $V_{2опт} = 40$.

5.3. СИМПЛЕКС-МЕТОД

Симплексом называется правильный многогранник, имеющий n+1 вершину, где n – число факторов, влияющих на процесс. Так, если факторов два, то симплексом является правильный треугольник. Сущность симплексного метода оптимизации иллюстрируется на рис. 14.

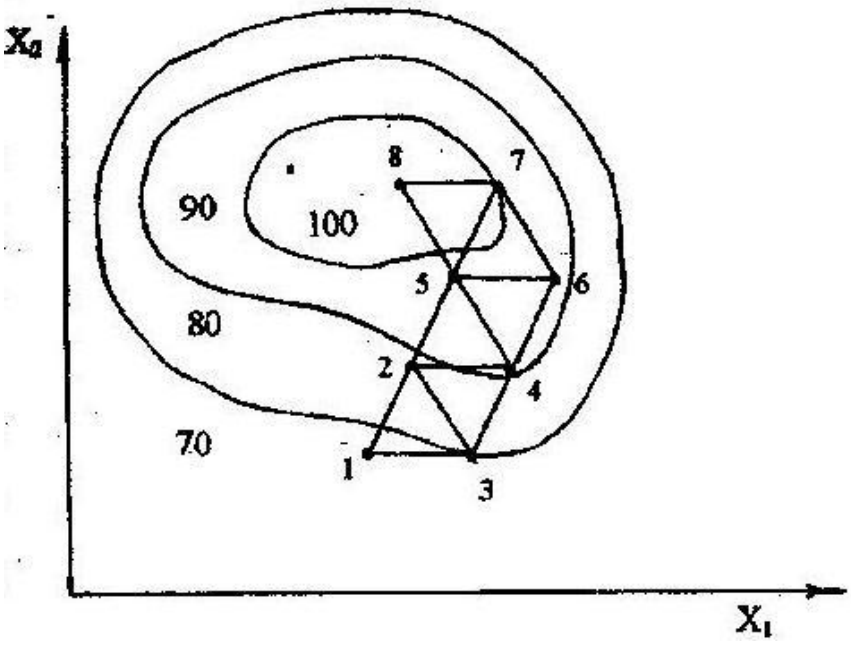

Рис. 14. Оптимизация симплексным методом

Начальная серия опытов соответствует вершинам исходного симплекса (точки 1,2 и 3). Условия этих первых опытов берутся из области значений факторов, соответствующих наиболее благоприятным из известных режимов оптимизируемого процесса.

Сравнивая между собой результаты опытов в точках 1,2 и 3, находят среди них самый "плохой" с точки зрения выбранного критерия оптимальности. Пусть, например, самым "неудачным" оказался опыт в точке 1. Этот опыт исключается из рассмотрения, а вместо него в состав симплекса вводят опыт в точке 4, которая симметрична точке 1 относительно противоположной стороны треугольника, соединяющей точки 2 и 3.

Далее сравнивают между собой результаты опытов в вершинах нового симплекса (2-3-4), отбрасывают самый "неудачный" из них и переносят соответствующую вершину симплекса в точку 5. Затем рассмотренная процедура повторяется в течение всего процесса оптимизации.

Если достигнут экстремум критерия оптимальности, то дальнейшее движение симплекса прекращается. Это значит, что новый шаг возвращает исследователя в предыдущую точку факторного пространства. Т.е. симплексы начинают вращаться вокруг точки оптимума (опыты 2-8, рис. 14). Точка оптимума – это точка, которая является общей вершиной N_0 подряд идущих симплексов.

$$N_0 = 1{,}65n + 0{,}05n^2. \qquad (101)$$

Следует иметь в виду, что симплекс-метод, так же, как и метод крутого восхождения, является локальным методом поиска экстремума. Если существуют несколько экстремумов критерия оптимальности, то этот метод позволяет найти тот из них, который расположен ближе к точкам исходного симплекса. Поэтому если есть подозрение о существовании нескольких экстремумов критерия оптимальности, то нужно осуществить их поиск, каждый раз начиная оптимизацию из новой области факторного пространства. Затем следует сравнить между собой найденные оптимальные условия и из всех вариантов выбрать наилучший.

При оптимизации необходимо принимать во внимание ограничения, наложенные на влияющие факторы и функции отклика.

Важно отметить, что при пользовании симплекс-методом не обязательно дублировать опыты. Дело в том, что ошибка в отдельном опыте может несколько замедлить оптимизацию. Если же последующие опыты выполняются безупречно, то движение к оптимуму продолжается.

Матрица опытов исходного симплекса в кодированных переменных приведена в табл. 12. Символом "0" обозначены координаты центра плана, т.е. основной уровень.

Таблица 12

Матрица исходного симплекса

№ опыта	X_1	X2	…	X_{n-1}	X_n	Функция отклика
1	k_1	k_2	…	k_{n-1}	R_n	Y_1
2	$-R_1$	k_2	…	k_{n-1}	R_n	Y_2
3	0	$-R_2$	…	k_{n-1}	R_n	Y_3
…	…	…	…	…	…	…
n-1	0	0	…	k_{n-1}	R_n	Y_{n-1}
n	0	0	…	$-R_{n-1}$	R_n	Y_n
n+1	0	0	…	0	$-R_n$	Y_{n+1}

Величины, входящие в эту таблицу, рассчитываются по следующим формулам:

$$k_i = \sqrt{\frac{1}{2i \cdot (i+1)}}, \qquad (102)$$

$$R_i = k_i \cdot i, \qquad (103)$$

где i – номер фактора в матрице планирования.

Опыты, представленные в табл. 12, соответствуют вершинам симплекса, сторона которого равна единице, а центр совпадает с началом координат (в кодированных переменных).

Результаты расчетов условий исходного симплекса для трех факторов, выполненных на основании табл. 12 и формул 95, 96, приведены в табл. 13.

Таблица 13

Условия начальной серии опытов для трех факторов

№ опыта	X_1	X_2	X_3	X_4
1	0,5	0,289	0,204	0,158
2	-0,5	0,289	0,204	0,158
3	0	-0,578	0,204	0,158
4	0	0	-0,612	0,158
5	0	0	0	-0,632

Аналогично можно рассчитать условия исходной серии опытов для большего количества факторов.

Очевидно, наибольшее количество опытов приходится ставить в начале эксперимента. Затем на каждом шаге оптимизации выполняется только один опыт.

Приступая к оптимизации, необходимо с помощью табл. 12 или 13 рассчитать матрицу исходной серии опытов в натуральных значениях факторов, пользуясь формулой

$$X_i = X_{0i} + \Delta X_i \cdot X_i, \qquad (104)$$

где X_{0i} – значение i-го фактора в исходной точке (центре исходной серии опытов);

Δ_i – интервал варьирования i-го фактора в этой серии;

X_i – кодированное значение i-го фактора (табл. 12,13).

В дальнейшем все операции производятся только с натуральными переменными.

Условия каждого нового опыта рассчитываются по формуле

$$X_i = \frac{2}{n}\left(\sum_{j=1}^{n+1} X_{ij} - X_i^*\right) - X_i^*, \qquad (105)$$

где n – число факторов в матрице планирования;

j – номер опыта;

i – номер фактора;

X^*_i – значение i-го фактора в самом "неудачном" опыте предыдущего симплекса.

Следует отметить, что на любом шаге оптимизации, осуществляемой симплекс-методом, можно включить в программу исследований новый фактор, который до тех пор не принимался во внимание, но оставался на постоянном уровне. При этом значения всех ранее рассматриваемых факторов рассчитываются по формуле

$$X_i = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} X_{ij}, \qquad (106)$$

где i=1,2,…, n, т.е. являются средними арифметическими значениями соответствующих координат предыдущего симплекса.

Значение вновь вводимого фактора определяется по формуле

$$X_{n+1} = X_{0(n+1)} + \Delta X_{n+1}(R_{n+1} + k_{n+1}), \qquad (107)$$

где $X_{0(n+1)}$ – основной уровень этого фактора;

ΔX_{n+1} – выбранный шаг варьирования для данного фактора;

R_{n+1}, k_{n+1} – величины, рассчитываемые по формулам 102, 103.

Отметим, что добавление нового фактора в состав полного факторного эксперимента сопровождается увеличением количества опытов вдвое. В этом смысле симплекс-метод имеет очевидное преимущество.

Пример. Пусть требуется с помощью симплекс-метода оптимизировать продолжительность желатинизации смолы в зависимости от содержания в ней отвердителя (X_1, %), спецдобавки (X_2, %) и температуры (X_3, ^oC).

Выберем основные уровни и шаги варьирования факторов и сведем их в табл. 14.

Таблица 14

Значения уровней факторов и шагов варьирования

Фактор	Основной уровень	Шаг варьирования
X_1, %	1	0,1
X_2, %	1,5	0,2
X_3, ^oC	60	5

Пользуясь формулой 104 и табл. 13, рассчитаем условия проведения первых четырех опытов и полученные результаты сведем в табл. 15. Так, для третьего опыта

$$X_{31} = 1+0{,}1 \cdot 0 = 1$$
$$X_{32} = 1{,}5 +0{,}2(-0{,}578) = 1{,}38$$
$$X_{33} = 60+5 \cdot 0{,}204 = 61.$$

Здесь первый индекс обозначает номер опыта, а второй номер фактора.

Таблица 15

Симплекс план эксперимента для трех факторов

№ опыта	X_1	X_2	X_3	Функция отклика,У
1	1,05	1,56	61	72,3
2	0,95	1,56	61	70,1
3	1	1,38	61	68,4
4	1	1,5	57	69,7
5	1	1,7	58	73,9
6	1	1,72	63	76,5

Сравнивая между собой результаты первых четырех опытов (табл. 15), видим, что самый низкий У получился в третьем опыте. Этот опыт исключаем из дальнейшего рассмотрения. Заменим его опытом № 5, условия проведения которого рассчитаем по формуле 105.

$$X_{51} = 2/3(1{,}05+0{,}95+1)-1 = 1$$
$$X_{52} = 2/3(1{,}56+1{,}56+1{,}5)-1{,}38 = 1{,}7$$
$$X_{53} = 2/3(61+61+57)-61 = 58$$

В новом симплексе, образованном опытами № 1,2,4,5, самым "неудачным" является опыт № 4 (табл. 15). Его заменим опытом № 6, условия которого найдем, пользуясь той же формулой 105. Далее процедура оптимизации может быть продолжена аналогично.

Рассмотрим теперь вопрос о том, как включить в программу исследований еще один фактор, например, скорость вращения мешалки. Пусть до сих пор она была постоянной и равной 500 об/мин. Теперь будем считать эту величину фактором X_4 и примем для нее шаг варьирования $\Delta X_4 = 100$ об/мин.

Предыдущий симплекс для трех факторов (табл. 15) состоит из опытов № 1,2,5,6. Чтобы из него получить новый симплекс для четырех факторов,

введем опыт № 7 (табл. 16). Условия проведения опыта № 7 найдем по формулам 106, 107.

$$X_{71} = 1/4(1,05+0,95+1+1) = 1$$

$$X_{72} = 1/4(1,56+1,56+1,7+1,72) = 1,64$$

$$X_{73} = 1/4(61+61+58+63) = 61$$

$$X_{74} = 500+100(0,632+0,158) = 579 \approx 580$$

Таблица 16

Симплекс-план эксперимента для четырех факторов

№ опыта	X_1	X_2	X_3	X_4	Функция отклика, У
1	1,05	1,56	61	500	72,3
2	0,95	1,56	61	500	70,1
5	1	1,7	58	500	73,9
6	1	1,72	63	500	76,5
7	1	1,64	61	580	78,1

Далее оптимизацию можно продолжить с учетом всех четырех факторов, пользуясь рассмотренной выше процедурой.

6. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА С КАЧЕСТВЕННЫМИ ФАКТОРАМИ

6.1. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Методы планирования эксперимента с качественными факторами применяют при изучении самых разнообразных процессов деревообработки, в которых используются различные виды взаимодействий, различные способы обработки изделий, подготовки сырья, инструмента, виды покрытий, клеев, составы клеев и т.д.

Качественные факторы дискретны по своей природе, их уровням не соответствует числовая шкала. Поэтому нельзя говорить о возрастании или убывании качественного фактора или пытаться описать зависимость отклика от такого фактора в виде непрерывной функции.

При обработке результатов с количественными факторами используется регрессионный анализ, с качественными факторами – дисперсионный анализ.

Дисперсионный анализ можно использовать и при изучении количественных факторов, когда число уровней их варьирования невелико. Различного рода неоднородности (партии сырья, виды почв, изменения внешних условий и т.п.) – также можно рассматривать как качественные факторы и изучать с применением дисперсионного анализа.

По результатам дисперсионного анализа можно выявит, влияет ли каждый из варьируемых факторов на изменение отклика. Если ответ положительный, то дополнительно можно определить, для каких именно уровней данного фактора наблюдается значимое различие результатов.

Рассмотрим самый простой случай – однофакторный дисперсионный анализ.

Например, исследуется влияние на отклик некоторого фактора А, который варьируется на m уровнях: a_1, a_2, … , a_m. (В дисперсионном анализе факторы часто обозначают заглавными латинскими буквами A,B,C). Например, А – порода древесины: a_1 – сосна, a_2 – береза, a_3 – дуб. Предполагаем, что при каждом фиксированном уровне фактора А проведено одинаковое число n наблюдений. При этом для обеспечения однородности внешних условий опыты ставились в случайном порядке. Такой план эксперимента называется полностью рандомизированным. Результаты однофакторного дисперсионного анализа удобно представить в виде табл. 17.

Общее число наблюдений N = mn

Последовательность однофакторного дисперсионного анализа:

Рассчитывают:

Таблица 17

Однофакторный дисперсионный анализ

Номер наблюдения	Уровни фактора А			
	a_1	a_2	…	a_m
1	y_{11}	y_{21}	…	y_{m1}
2	y_{12}	y_{22}	…	y_{m2}
…	…	…	…	…
n	y_{1n}	y_{2n}	…	y_{vn}
Итоги	$A_1 = \sum_{j=1}^{N} y_{1j}$	$A_2 = \sum_{j=1}^{N} y_{2j}$	…	$A_m = \sum_{j=1}^{N} y_{mj}$

1. Итоги по столбцам

$$A_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}\,; \tag{108}$$

2. Сумму квадратов всех наблюдений

$$S_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 \quad ; \tag{109}$$

3. Сумму квадратов итогов по столбцам, деленную на число наблюдений в столбце

$$S_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} A_i^2 \quad ; \tag{110}$$

4. Квадрат общего итога, деленный на число всех наблюдений (корректирующий член)

$$S_3 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right)^2; \tag{111}$$

4. Сумму квадратов для столбца

$$S_A = S_2 - S_1; \tag{112}$$

5. Общую сумму квадратов, равную разности между суммой квадратов всех наблюдений и корректирующим членом

$$S_{общ} = S_1 - S_3 \ ; \tag{113}$$

6. Остаточную сумму квадратов для оценки ошибки эксперимента

$$S_{ост} = S_1 - S_2 \tag{114}$$

7. Дисперсию фактора А

$$S_A^2 = S_A \big/ (m-1) \tag{115}$$

с числом степеней свободы $f_A = m-1$

8. Дисперсию ошибки

$$S_{ош}^2 = S_{ост} \big/ (N-m) \tag{116}$$

Вычисляют отношение $F_{расч} = \dfrac{S_A^2}{S_{ош}^2}$ и сравнивают с критерием Фишера $F_{1-q}(f_A, f_{ош})$. Если выполняется условие $F_{расч} > F_{1-q}(f_A, f_{ош})$, то фактор оказывает значимое влияние на отклик.

Если влияние варьируемого фактора оказалось значимым, то после можно выяснить, для каких именно уровней фактора средние значимо отличаются друг от друга. Для этого используют множественный ранговый критерий Дункана.

При исследовании объекта с двумя варьируемыми факторами используется процедура двухфакторного дисперсионного анализа.

Пусть имеются варьируемые факторы:

A – с уровнями a_1, a_2, …, a_m

B – с уровнями b_1, b_2, …, b_k.

При каждом сочетании уровней факторов A и B проводится n параллельных наблюдений.

Общее число наблюдений

$$N = m \cdot n \cdot k \qquad (117)$$

Данные для двухфакторного дисперсионного анализа удобно представить в виде табл. 18.

Таблица 18

Двухфакторный дисперсионный анализ

Уровни фактора B	Уровни фактора A				Итоги
	a_1	a_2,	…	a_m	
b_1	$У_{111}$ $У_{112}$ … $У_{11n}$	$У_{211}$ $У_{212}$ … $У_{21n}$	…	$У_{m11}$ $У_{m12}$ … $У_{m1n}$	B_1
b_2	$У_{121}$ $У_{122}$ … $У_{12n}$	$У_{221}$ $У_{222}$ … $У_{22n}$	…	$У_{m21}$ $У_{m22}$ … $У_{m2n}$	B_2
…	…	…	…	…	…
b_k	$У_{1k1}$ $У_{1k2}$ … $У_{1kn}$	$У_{2k1}$ $У_{2k2}$ … $У_{2kn}$	…	$У_{mk1}$ $У_{mk2}$ … $У_{mkn}$	B_k
Итоги	A_1	A_2	…	A_m	

Здесь учитывается не только влияние факторов A и B, но и их парное взаимодействие AB.

А далее проводятся вычисления, аналогичные вышеприведенным, для определения значимости фактора с использованием критерия Фишера.

6.2. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО СХЕМЕ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ

Процедуру дисперсионного анализа можно распространить на случай трех и большего числа факторов. Однако при k>2 перебор всех сочетаний уровней факторов (т.е. ПФЭ) приводит к очень громоздким экспериментам. Например, при k = 4 N = 4^3 = 64. Поэтому особый интерес представляют методы планирования эксперимента, позволяющие исследовать влияние нескольких качественных факторов при сокращении объема эксперимента по сравнению с полным перебором. Широкое применение нашли комбинаторные планы, которые основаны на использовании латинских и греко-латинских квадратов, кубов и других конструкций комбинаторной алгебры.

По существу это определенным образом построенные дробные реплики ПФЭ.

Латинским квадратом m×m называют квадратную таблицу, содержащую m различных элементов (букв или чисел), так, что каждый элемент встречается один раз в каждой строке и в каждом столбце.

Таблица 19

Латинский квадрат

3×3

A	B	C
B	C	A
C	A	B

4×4

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	

Латинский квадрат называется **стандартным**, если его первая строка или первый столбец расположены в стандартном порядке (в алфавитном для букв, в порядке натурального ряда для чисел).

Простейшим способом построения стандартного латинского квадрата является одношаговая циклическая перестановка строк.

Например, первая строка – это числа натурального ряда, во второй строке – повторяется первая, переставив первый ее элемент в конец строки, для построения третей строки аналогичным образом используем вторую строку и т.д.

В планировании эксперимента чаще применяют нестандартные латинские планы, получаемые случайной перестановкой столбцов и строк стандартного латинского квадрата.

Латинские квадраты m×m используют для трех факторов A,B и C, каждый из которых варьируется на m уровнях.

Например, m = 4.

Таблица 20

Латинский квадрат для m = 4

A	B				Среднее
	b_1	b_2	b_3	b_4	$\overline{A}$
a_1	C_1 y_{111}	C_2 y_{122}	C_3 y_{133}	C_4 y_{144}	$\overline{A}_1$
a_2	C_2 y_{212}	C_3 y_{223}	C_4 y_{234}	C_1 y_{241}	$\overline{A}_2$
a_3	C_3 y_{313}	C_4 y_{324}	C_1 y_{331}	C_2 y_{342}	$\overline{A}_3$
a_4	C_4 y_{414}	C_1 y_{421}	C_2 y_{432}	C_3 y_{443}	$\overline{A}_4$
Средние $\overline{B}$	$\overline{B}_1$	$\overline{B}_2$	$\overline{B}_3$	$\overline{B}_4$	

Количество опытов в этом эксперименте N = 4, а не $4^3 = 64$. Тем не менее, по результатам такого эксперимента можно оценить характер и степень влияния каждого фактора.

У – результаты эксперимента. Первый индекс при у соответствует уровню фактора A, второй – уровню фактора B, третий – уровню фактора C.

Для оценки влияния фактора A рассчитывается значение отклика, усредненное по уровням фактора B.

$\overline{A}_1 = y_{111} + y_{122} + y_{133} + y_{144} / 4;$

$\overline{A}_2 = y_{212} +$

Замечательное свойство латинского плана, что при усреднении по уровням фактора В происходит одновременное усреднение по уровням фактора С.

Аналогично при подсчете средних по столбцам $\bar{B}$ происходит усреднение по уровням факторов А и С.

Характер влияния третьего фактора С можно оценить по средним

$\bar{C}_1 = y_{111} + y_{241} + y_{331} + y_{421} / 4$ и т.д.

Для корректной оценки значимости влияния факторов используется дисперсионный анализ.

Факторы, варьируемые в экспериментах по схеме латинских квадратов, не всегда являются равноправными: два из них часто считаются основными, а третий представляет собой источник неоднородностей, влияние которых надо усреднить.

В такой ситуации уровни двух основных факторов А и В располагают по строкам и столбцам, а уровни третьего фактора С – источника неоднородностей – образуют латинский квадрат.

В соответствии с этим в дисперсионном анализе принята терминология: средние по строкам (А), средние по столбцам (В) и по латинским буквам (С).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Большев, Л. Н. Таблицы математической статистики [Текст] / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – М., 1983. – 416 с.
2. Иванов, Г. М. Теплотехнические измерения и приборы [Текст] / Г. М. Иванов, Н. Д. Кузнецов, Н. И. Чистяков. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 232 с.
3. Кантиева, Е. В. Научные исследования в деревообработке [Текст] : метод. указания к лаборатор. работам с элементами УИРС для студентов специальности 250403 – Технология деревообработки / Е. В. Кантиева, Л. Н. Стадник. – Воронеж, 2004. – 59 с.
4. Ключников, В. И. Основы научных исследований [Текст] : учеб. пособие / В. И. Ключников. – Воронеж, 2002. – 88 с.
5. Максимов, В. М. Основы научных исследований [Текст] : учеб. пособие / В. М. Максимов. – Воронеж, 2001. – 96 с.
6. Пижурин, А. А. Исследования процессов деревообработки [Текст] / А. А. Пижурин, М. С. Розенблит. – М. : Лесн. пром-сть, 1984. – 231 с.
7. Пижурин, А. А. Основы научных исследований в деревообработке [Текст] / А. А. Пижурин, А. А. Пижурин. – М. : МГУЛ, 2005. – 305 с.
8. Пижурин, А. А. Современные методы исследований технологических процессов в деревообработке [Текст] / А. А. Пижурин. – М. : Лесн. пром-сть, 1972. – 248 с.
9. Пошарников, Ф. В. Научные исследования при моделировании и оптимизации процессов в лесном комплексе [Текст] : учеб. пособие / Ф. В. Пошарников. – Воронеж, 1997. – 56 с.
10. Разиньков, Е. М. Научные исследования в деревообработке [Текст] : учеб. пособие / Е. М. Разиньков, Е. В. Кантиева. – Воронеж, 2004. – 92 с.

Приложение 1

Квантили распределения Стьюдента $t_{1-q/2}$ (f)

Число степеней свободы, f	Уровни значимости, q			
	0,1	0,05	0,01	0,001
1	6,31	12,71	63,66	636,62
2	2,92	4,3	9,93	31,6
3	2,35	3,18	5,84	12,94
4	2,13	2,78	4,6	8,61
5	2,02	2,57	4,03	6,86
6	1,94	2,45	3,71	5,96
7	1,6	2,37	3,5	5,41
8	1,86	2,31	3,36	5,04
9	1,83	2,26	3,25	4,78
10	1,81	2,23	3,17	4,59
11	1,8	2,2	3,11	4,44
12	1,78	2,18	3,06	4,32
13	1,77	2,16	3,01	4,22
14	1,76	2,15	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,92	4,02
17	1,74	2,11	2,9	3,97
18	1,73	2,1	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,86	3,88
20	1,73	2,09	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,81	3,77
24	1,71	2,06	2,8	3,75
25	1,71	2,06	2,79	3,73
26	1,71	2,06	2,78	3,71
27	1,7	2,05	2,77	3,69
28	1,7	2,05	2,76	3,67
29	1,7	2,04	2,76	3,66
30	1,7	2,04	2,75	3,65
40	1,68	2,02	2,7	3,55
60	1,67	2,0	2,66	3,46
120	1,66	1,98	2,62	3,37
∞	1,64	1,96	2,58	3,29

Приложение 2

Квантили распределения Пирсона $\chi^2_q(f)$

Число степеней свободы, f	Уровни значимости, q							
	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,8
2	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	10,6	12,4	13,8
3	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,8	16,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31,0	32,9
13	17	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,3	34,0	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,8	35,5	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,3	37,0	39,2
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,7	38,5	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,2	40,0	42,3
19	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	38,6	41,5	43,8
20	25	28,4	31,4	35	37,6	40,0	43,0	45,3
21	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,4	44,5	46,8
22	27,3	30,8	33,9	37,7	40,3	42,8	46,0	48,3
23	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,2	47,5	49,7
24	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,6	48,5	51,2
25	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	46,9	50	52,6
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,3	51,5	54,1
27	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,6	53,0	55,5
28	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,5	56,9
29	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,3	56,0	58,3
30	36,3	40,3	43,8	48	50,9	53,7	57,5	59,7

Приложение 3

Квантили распределения выборочного коэффициента корреляции $r_{1-q/2}$ (n)

Объем выборки, n	Уровень значимости, q				
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,998	0,997	0,999	1,0	1,0
2	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
3	0,805	0,878	0,934	0,959	0,992
4	0,729	0,811	0,882	0,917	0,974
5	0,669	0,754	0,833	0,874	0,951
6	0,621	0,707	0,789	0,834	0,925
7	0,582	0,666	0,75	0,798	0,898
8	0,549	0,632	0,716	0,765	0,872
9	0,521	0,602	0,685	0,735	0,847
10	0,497	0,576	0,658	0,708	0,823
11	0,476	0,553	0,634	0,684	0,801
12	0,457	0,532	0,612	0,661	0,78
13	0,441	0,514	0,592	0,641	0,76
14	0,426	0,497	0,574	0,623	0,742
15	0,412	0,482	0,558	0,606	0,725
16	0,4	0,468	0,543	0,59	0,708
17	0,389	0,456	0,528	0,575	0,693
18	0,378	0,444	0,516	0,561	0,679
19	0,369	0,433	0,503	0,549	0,665
20	0,36	0,423	0,492	0,537	0,652
25	0,323	0,381	0,445	0,487	0,597
30	0,296	0,349	0,409	0,449	0,554
35	0,275	0,325	0,381	0,418	0,519
40	0,257	0,304	0,358	0,393	0,49
45	0,243	0,287	0,338	0,372	0,465
50	0,231	0,273	0,322	0,354	0,443
60	0,211	0,25	0,295	0,325	0,408
70	0,195	0,232	0,274	0,302	0,38
80	0,183	0,217	0,256	0,283	0,357
90	0,173	0,205	0,242	0,267	0,337
100	0,164	0,195	0,23	0,254	0,321

Приложение 4

Значения критерия Кохрена q_{1-q} (N,f) при уровне значимости 0,05

Число выборок, N	Число степеней свободы, f													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,99	0,98	0,94	0,91	0,88	0,85	0,83	0,82	0,80	0,79	0,73	0,66	0,58	0,50
3	0,97	0,87	0,80	0,75	0,71	0,68	0,65	0,63	0,62	0,60	0,55	0,47	0,40	0,33
4	0,91	0,77	0,68	0,63	0,59	0,56	0,54	0,52	0,50	0,49	0,44	0,37	0,31	0,25
5	0,84	0,68	0,60	0,54	0,51	0,48	0,46	0,44	0,42	0,41	0,36	0,31	0,25	0,20
6	0,78	0,62	0,53	0,048	0,44	0,42	0,40	0,38	0,37	0,36	0,31	0,23	0,21	0,17
7	0,73	0,56	0,48	0,43	0,40	0,37	0,35	0,34	0,33	0,32	0,28	0,20	0,18	0,14
8	0,68	0,52	0,44	0,39	0,36	0,34	0,32	0,30	0,29	0,28	0,25		0,16	0,13
9	0,64	0,48	0,40	0,36	0,33	0,31	0,29	0,28	0,27	0,26	0,22	0,18	0,14	0,11
10	0,60	0,45	0,37	0,33	0,30	0,28	0,27	0,25	0,24	0,24	0,20	0,17	0,13	0,10
12	0,54	0,39	0,33	0,29	0,26	0,24	0,23	0,22	0,21	0,20	0,17	0,14	0,11	0,08
15	0,47	0,33	0,28	0,24	0,22	0,20	0,19	0,18	0,17	0,17	0,14	0,11	0,09	0,07
20	0,39	0,27	0,22	0,19	0,17	0,16	0,15	0,14	0,14	0,13	0,11	0,09	0,07	0,05
24	0,34	0,24	0,19	0,17	0,15	0,14	0,13	0,12	0,12	0,11	0,09	0,07	0,06	0,04
30	0,29	0,20	0,16	0,14	0,12	0,11	0,11	0,10	0,10	0,09	0,08	0,06	0,05	0,03
40	0,24	0,16	0,13	0,11	0,10	0,09	0,08	0,08	0,07	0,07	0,06	0,05	0,03	0,03
60	0,17	0,11	0,09	0,09	0,07	0,06	0,06	0,06	0,05	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02
120	0,10	0,06	0,05	0,04	0,04	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01

Приложение 5

Значения критерия Фишера $F_{1-q}(f_1, f_2)$ при уровне значимости 0,05

f_1	f_2														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	∞
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	250	254
2	18,51	19,0	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,46	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,94	5,91	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,0	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,5	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,7	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,2	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,57	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,0	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,47	2,3
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,38	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,31	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,25	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,19	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,15	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,11	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,07	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,04	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,01	1,81

Окончание прил. 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
22	4,3	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	1,98	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	1,96	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,94	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,92	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,90	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,88	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,87	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,7	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,85	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,74	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,65	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,55	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,46	1,00

Приложение 6

Значения коэффициентов T_i для B-плана

T_i	Число факторов k			
	2	3	4	5 (план с полурепликой)
T_1	1,25	0,40624	0,22917	0,15821
T_2	0,75	0,15624	0,0625	0,0332
T_3	0,16667	0,1	0,05556	0,02941
T_4	0,5	0,5	0,5	0,5
T_5	0,25	-0,09375	-0,10417	-0,0918
T_6	0,25	0,125	0,0625	0,03125

Значения коэффициентов T_i для УРП

T_i	Число факторов k			
	2	3	4	5 (план с полурепликой)
T_1	0,2	0,16634	0,14285	0,15909
T_2	0,1	0,05679	0,03571	0,03409
T_3	0,125	0,07322	0,04167	0,04167
T_4	0,125	0,06247	0,03125	0,03125
T_5	0,01874	0,0069	0,00372	0,00284
T_6	0,25	0,125	0,0625	0,0625

Учебное издание

Екатерина Валентиновна **Кантиева**
Егор Михайлович **Разиньков**

МЕТОДЫ И СРЕДСТВА НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Учебное пособие

Редактор Е.А. Попова

Подписано в печать 08.06.2012. Формат 60×90 /16. Объем 6,7 п. л.
Усл. печ. л. 6,7. Уч.-изд. л. 6,74. Тираж 100 экз. Заказ
ФГБОУ ВПО «Воронежская государственная лесотехническая академия»
РИО ФГБОУ ВПО «ВГЛТА». 394087, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8
Отпечатано в УОП ФГБОУ ВПО «ВГЛТА»
394087, г. Воронеж, ул. Докучаева, 10